كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي٢

المحاضرة : السادسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

بسم الله الرحمن الرحيم

المحاضرة رقم 2 تحليل عقدي

نظرية روشيه

نظرية روشيه: لتكن الدالة $f(z)$ و $g(z)$ تحليليتين في المنطقة المغلقة $\overline{D}$ والمحيط المحدد C، على المحيط C تحققت أنه في أي نقطة منه يكون $|f(z)|>|g(z)|$

بالتالي المجموع $F(z)=g(z)+f(z)$ والدالة $f(z)$ تمتلك في المنطقة D نفس عدد الأصفار (محسوبة مع مراتبها)

$$\forall z\in C \Rightarrow |f(z)|>|g(z)|$$

مثال: أوجد عدد أصفار الدالة $F(z)=z^8-4z^5+z^2-1$ داخل دائرة الواحدة $|z|<1$.

الحل: نكتب الدالة $F(z)$ على أنها مجموع دالتين $g(z)$ و $f(z)$ والتي نختارها على سبيل المثال بالشكل

$$f(z)=-4z^5,\quad g(z)=z^8+z^2-1$$

وبالتالي على المحيط $|z|=1$ لدينا

$$|f(z)|=|-4z^5|=4,$$

$$|g(z)|=|z^8+z^2-1|\le|z^8|+|z^2|+1=3.$$

وبالتالي على المحيط $|z|=1$ تتحقق المتراجحة $|f(z)|>|g(z)|$

الدالة $f(z)=-4z^5$ تمتلك صفرا من المرتبة الخامسة في نقطة الأصل (المبدأ)

وبالتالي حسب نظرية روشيه الدالة

$$F(z)=f(z)+g(z)=z^8-4z^5+z^2-1$$

تمتلك داخل دائرة الواحدة $|z|<1$ خمسة أصفار.

* يمكن اختيار الدالة $f(z), g(z)$ بصورة مختلفة، مثلا:

$$f(z)=z^8-4z^5,\quad g(z)=z^2-1$$

عندما يكون $z\in C:\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$ و $z=|g(z)|$; $|f(z)|=5$ من أجل أي $z\in C$ وبقطع المتراجحة $|f(z)|>|g(z)|$ تمتلك $f(z)=z^5(z^3-4)$ صفرا من المرتبة الخامسة بالتالي $F(z)$ تمتلك خمسة أصفار.

Сканировано с CamScanner

مثال 2: اوجد عدد جذور المعادلة $z^6 - 6z + 10 = 0$ داخل الدائرة $|z| < 1$

الحل: نضع $f(z) = 10$ ، $\psi(z) = z^6 - 6z$ على الدائرة $|z| = 1$

لدينا $|f(z)| = |10| = 10$

$|\psi(z)| = |z^6 - 6z| \le 7 = 6 + 1$

بالتالي داخل أي z تنتمي للمحيط $(|z| = 1)$ فإن $|f(z)| > |\psi(z)|$ محققة

والدالة $f(z) = 10$ لا تملك اصفار داخل دائرة الواحدة بالتالي حسب مرشيه

ومرشيه المعادلة $z^6 - 6z + 10 = 0$ ليس لها جذور داخل دائرة الواحدة.

تمارين للطالب: باستخدام نظرية روشيه اوجد عدد جذور المعادلات التالية في الحلقة المرفقة

1) $z^4 - 3z^3 - 1 = 0$; $|z| < 2$

2) $z^3 + z + 1 = 0$; $|z| < \frac{1}{2}$

3) $z^5 + z^2 + 1 = 0$; $|z| < 2$

4) $z^8 + 6z + 10 = 0$; $|z| < 1$

5) $27z^{11} - 18z + 10 = 0$; $|z| < 1$

6) $z^8 - 6z^6 - z^3 + z = 0$; $|z| < 1$

الجواب:

1) 3

2) لا يوجد HET

3) 5

4) لا يوجد

5) 11

6) 6

مثال 3: اوجد عدد جذور المعادلة $z^4 - 5z + 1 = 0$ داخل الحلقة

$1 < |z| < 2$ ؟

الحل: ليكن N عدد جذور المعادلة

$$z^5 - 5z + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

داخل الحلقة $1 < |z| < 2$. بالتالي $N = N_2 - N_1$ حيث

N_1 عدد جذور المعادلة $(*)$ داخل $|z| < 1$ و N_2 هي عدد جذور المعادلة *

داخل الدائرة $|z| < 2$ (حيث $N_2 \ge N_1$)

على المحيط $|z| = 1$ المعادلة لا تملك جذور وذلك لأنه

$$|z^5 - 5z + 1| \ge 3 > 0$$

(2)

Сканировано с CamScanner

داخل الدائرة $|z|<1$ نأخذ $f(z)=-5z$ و $g(z)=z^4+1$ وعلى المحيط $|z|=1$ لدينا

$$|f(z)|=5 > |g(z)| \leq 2$$ أي من أجل z تنتمي للمحيط $|z|=1$

فإن المتراجحة $|f(z)|>|g(z)|$ محققة، والدالة $f(z)=-5z$ داخل دائرة الوحدة تمتلك صفرا بسيطا في نقطة الجداء بالتالي المعادلة (*) تمتلك جذرا وحيدا داخل دائرة الوحدة

$$\boxed{N_1=1}$$ ومن أجل N_2 بجاد نأخذ $f(z)=z^4$ و $g(z)=1-5z$

وعلى المحيط $|z|=2$ لدينا $|f(z)|=|z^4|=2^4=16$

$$|g(z)|=|1-5z|\leq 1+5|z|=1+5(2)=11$$

وبالتالي على المحيط $|z|=R$ تتحقق المتراجحة $|f(z)|>|g(z)|$ ولدينا الدالة

$f(z)=z^4$ تمتلك صفرا من المرتبة الرابعة في نقطة الجداء داخل الدائرة $|z|<2$

أي $\boxed{N_2=4}$ وبالتالي عدد الجذور للمعادلة (*) داخل الكلفة $1<|z|<2$

$$N=N_2-N_1=4-1=3 .$$

مثال 4: أوجد عدد جذور المعادلة $4z^4-29z^2+25=0$ داخل الكلفة $2<|z|<3$

ليكن نفرض N عدد جذور المعادلة $4z^4-29z^2+25=0$ --- (*) داخل الكلفة

$3>|z|>2$ حيث $N=N_2-N_1$ و N_1 هي عدد الجذور داخل

الدائرة $|z|<2$ ، N_2 هي عدد الجذور داخل الدائرة $|z|<3$

أولا: نبرهن وجود الصفر على المحيط $|z|=2$ لدينا

$$|4z^4-29z^2+25| \geq 27 ;$$

داخل الدائرة $|z|<2$ نأخذ $f(z)=-29z^2$ و $g(z)=4z^4+25$ بالتالي على الدائرة

$|z|=2$ لدينا

$$|f(z)|=116$$
$$|g(z)|\leq 89$$

Сканировано с CamScanner

وعندنا على المحيط $|z|=2$ متحققة المتراجحة $|f(z)| > |g(z)|$ من أجل أي نقطة منه

بالتالي حسب نظرية روشيه فإن الدالة $f(z)=-29z^2$ تمثل جزء من المرتبة

الثانية في نقطة الجذب بالتالي المعادلة (*) لها أربع جذور داخل $|z|<2$ أي

$$N_1=2$$

نختار الآن $f(z)=+4z^4$ و $g(z)=-29z^2+25$ وعلى المحيط $|z|=3$ لدينا

$$|g(z)| \leq 29|z|^2+25 = 29\times 9+25 = 286 < 324 = 4\times 81 = 4|z|^4 = |f(z)|$$

وبالتالي حسب نظرية روشيه فإن الدالة $f(z)=4z^4$ تمثل جزء من المرتبة الرابعة

في نقطة الجذب و بالتالي المعادلة (*) لها أربع جذور داخل $|z|<3$ أي $N_2=4$

وعندنا المعادلة $4z^4-29z^2+25=0$ تمثل $N=4-2=2$ جذرين داخل الحلقة

$$2<|z|<3$$

تمارين للطالب : أوجد عدد جذور المعادلات التالية داخل الحلقات المرافقة .

الجواب

1) $z^7-5z^4+z^2-2=0$; $1<|z|<2$ — 1) 3

2) $z^6-8z+10=0$; $1<|z|<3$ — 2) 4

مثال 5 : أوجد عدد جذور المعادلة $z^2-ae^z=0$ من أجل $0<a<e^{-1}$

داخل دائرة الواحدة .

الحل : بوضع $f(z)=z^2$ و $g(z)=-ae^z$ على الدائرة $|z|=1$ لدينا

$$|f(z)|=|z^2|=1$$

و

$$|g(z)|=|-ae^z|=a|e^{x+iy}|=ae^x \leq ae < 1$$

حيث $-1 \leq x \leq +1$ و $0<a<e^{-1}$

وبالتالي على المحيط $|z|=1$ لدينا $|g(z)| < |f(z)|=1$

Сканировано с CamScanner

الدالة $f(z)=z^2$ داخل الدائرة $|z|<1$ تمتلك صفر من المرتبة الثانية

بالتالي حسب نظرية روشيه المعادلة المعطاة تمتلك جذرية داخل دائرة الواحدة .

ملاحظة: لدينا الدالة الحقيقية $f(x)=x^2-ae^x$ هذه الدالة على المجال $-1\le x\le 1$

مستمرة وعلاوة على ذلك

$F(-1)=1-ae^{-1}>0$; من أجل $0<ae^{-1}<e^{-2}<1$,

$f(0)=-a<0$;

$F(1)=1-ae>0$. من أجل $a<e^{-1}$;

وبالتالي على المجال المنتهي $-1\le x\le 0$ و $0\le x\le 1$ الدالة $F(x)$

تأخذ قيم ذات إشارات مختلفة

هذا يعني أن المعادلة داخل $|z|<1$ تمتلك جذرية مختلفين بالإشارة وحقيقيين

تمارين للطالب: أوجد عدد جذور المعادلات المعطاة في المناطق المعطاة .

1) $e^{z-\lambda}=z$; $(\lambda>1)$; $|z|<1$.

2) $e^z=az^n$; $(n\in\mathbb{N})$; $\left(|a|>\frac{e^R}{R^n}\right)$; $|z|<R$

3) $z^2-\cos z=0$; $|z|<2$

4) $z^4-\sin z=0$; $|z|<\pi$

5) $z^2+\operatorname{ch} z=0$; $|z|<0.5$,

6) $\operatorname{ch} z=z^2-4z$; $|z|<1$

7) $2^z=4z$; $|z|<1$

الجواب:

1) 1

2) n

2) 2

3) 4

5) Method

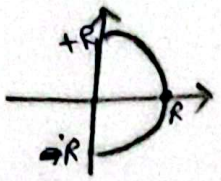
6) 1,

7) 1,

مثال: أوجد عدد جذور المعادلة $\lambda-z-e^{-z}=0$; $\lambda>1$ في القسم اليميني من المستوي $(\operatorname{Re} z>0)$.

Сканировано с CamScanner

الحل: نأخذ المنطقة D المؤلفة من المجال $[-iR, +iR]$ ونصف الدائرة $|z|=R$



ولنضع $f(z)=z-\lambda$ و $g(z)=e^{-z}$

على المجال $[-iR, +iR]$ حيث $z=iy$ لدينا

$$|f(z)| = |iy-\lambda| = \sqrt{y^2+\lambda^2} \geq \sqrt{\lambda^2} = \lambda > 1$$

$$|g(z)| = |e^{-z}| = |e^{-iy}| = 1,$$

بالتالي على المجال $[-iR, +iR]$ تتحقق المتراجحة $|f(z)| > |g(z)|$

على نصف الدائرة $|z|=R$ حيث $x = Re\, z > 0$ وحيث $(R > \lambda+1)$

$$|f(z)| = |z-\lambda| \geq |z| - \lambda = R - \lambda > 1$$

$$|g(z)| = |e^{-z}| = |e^{-(x+iy)}| = e^{-x} \leq 1 \quad (x>0)$$

وحسب نظرية روشيه داخل المنطقة D من أجل R كبيرة فإن المعادلة المعطاة تمتلك عدد جذور يساوي عدد أصفار الدالة $f(z)=z-\lambda=0$ وهو جذر وحيد

وهذا يعني أن المعادلة $z-\lambda+e^{-z}=0$ $(\lambda>1)$ تمتلك جذر وحيد في الجزء اليميني للمستوي $\mathbb{C}$

تمارين لطالب: 1. اثبت أن المعادلة $ze^{\lambda-z}=1$ حيث $\lambda>1$، تمتلك جذر وحيد حقيقي موجب داخل دائرة الواحدة.

2. اثبت أن المعادلة $z^n+az+1=0$ حيث n عدد طبيعي أكبر من 1، من أجل أي a المعادلة تمتلك داخل الدائرة $|z|\leq 2$ على الأقل تمتلك جذر واحد.

3. لتكن الدالتين $f(z), g(z)$ تحليليتين في جوار ما لنقطة a و C - دائرة مركزها a بحيث يكون على طول محيط هذه الدائرة: $|\alpha f(z)| + |\beta g(z)| < r,$

بين أن المعادلة $F(z)=z-a-\alpha f(z)-\beta g(z)=0$ تمتلك داخل الدائرة C جذر وحيد فقط.

Сканировано с CamScanner

مكتبة A to Z