كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي٢

المحاضرة : الخامسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مثال اوجد الرواسب (البواقي) المتممة اللوغارتمية للدوال التالية بالنسبة للاصفار والأقطاب

a) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. b) $f(z) = \cos^3 z$.

B) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$. c) $f(z) = \sin z$.

الحل: a) الدالة $\frac{\sin z}{z}$ تمتلك عدد لانهائي من الاصفار البسيطة $z = k\pi$ حيث $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ و قطب بسيط $z = 0$ بالكل

$$\operatorname*{res}_{z=k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = +1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \operatorname*{res}_{z=0} \frac{f'(z)}{f(z)} = -1$$

b) الدالة $\cos^3 z$ تمتلك عدد لانهائي من الاصفار $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 3 \quad ; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

B) الدالة $\frac{\cos z}{z}$ تمتلك عدد لانهائي من الاصفار البسيطة $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ و قطب بسيط $z = 0$

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{f'(z)}{f(z)} = -1 \; ; \; \operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

c) الدالة $f(z)$ تمتلك عدد لانهائي من الاصفار البسيطة $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$

$$\operatorname*{res}_{z=k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 \; ; \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Сканировано с CamScanner

مثال: أوجد الباقي اللوغاريتمي لدوال التالية

a) $f_1(z)=\cos z+5\sin z$; $C_1: |z|=2$

b) $f_2(z)=(e^z-2)^2$; $C_2: |z|=8$

الحل:

a) لإيجاد أقطاب الدالة $f_1(z)$ وأصنافها نحل المعادلة

$\cos z+5\sin z=0$

$\Rightarrow \sin(z+\frac{\pi}{4})=0 \Rightarrow z+\frac{\pi}{4}=k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

أصفار الدالة $f_1(z)$ هي $z_k=(\frac{4k-1}{4})\pi$ من أجل $k=0,\pm1,\pm2,\dots$

وجميعها أصفار بسيطة والتي تقع داخل C_1 أي داخل $|z|<2$ هي

$z_0=\frac{-\pi}{4}$, $z_1=\frac{3\pi}{4}$, $z_3=\frac{7\pi}{4}$

أي $N=3$ ، $P=0$

ومنه $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}dz=3-0=3$.

b) لإيجاد أقطاب الدالة $f_2(z)$ وأصنافها نحل المعادلة $(e^z-2)^2=0$

$e^z=2=2e^{i2k\pi}$ $(k\in\mathbb{Z})$ $\Rightarrow z_k=\ln 2+2k\pi i$; $k\in\mathbb{Z}$

(خاصية لوغاريتم الطرفين: $\ln xy=\ln x+\ln y$)

وجميعها أصفار من المرتبة الثانية والتي تقع داخل C_2 أي داخل القرص $|z|<8$ هي

$z_0=\ln 2$, $z_1=\ln 2+2\pi i$

أي $N=2*2=4$ ، $P=0$

ومنه $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f_2'(z)}{f_2(z)}dz=4-0=4$.

Сканировано с CamScanner

تمارين للطالب : أوجد الباقي اللوغاريتمي للدوال

a) $f(z)=\operatorname{Th} z$; $C:|z|=8$; الجواب: $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = z-1$

b) $f(z)=tg^3 z$; $C:|z|=6$; الجواب: $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -3$

c) $f(z)=1-\operatorname{Th}^2 z$; $C:|z|=2$; الجواب: $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -4$

Сканировано с CamScanner

مثال: أوجد عدد الأصفار في النصف اليميني للمستوى.

$$Q_7 = z^7 - 2z - 5 = 0$$

الحل: حسب مبدأ المسعة فإن عدد الأصفار داخل المحيط C (في النصف اليميني للمستوى) هو

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \operatorname{Arg} Q_7(z)$$

حيث يتكون المحيط من نصف الدائرة $C_R : |z| = R \; ; \; \operatorname{Re} z > 0$ ونصف قطرها كبير بمقدار كافٍ ليقع جميع أصفار Q_7 داخل C_R.

$$\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_7(z) = \Delta_{C_R} \operatorname{Arg}\left[z^7 \left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right)\right] =$$

$$= \Delta_{C_R} \operatorname{Arg}(z^7) + \Delta_{C_R} \operatorname{Arg}\left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right) =$$

$$= 7 \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z + \Delta_{C_R} \operatorname{Arg}\left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right)$$

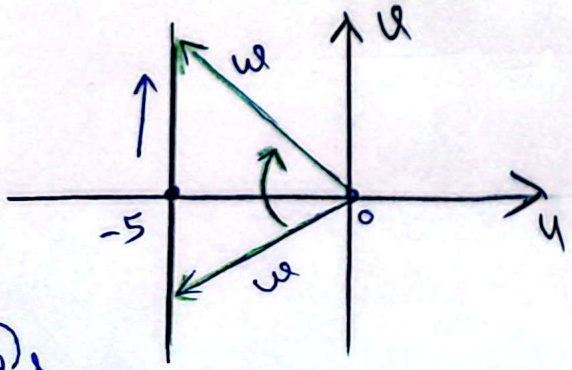
عندما $R \to \infty$ يعني

$$\lim_{R \to \infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_7(z) = 7\pi$$

نعوض $z = it$ حيث $-R \le t \le +R$ بأن

$$Q_7(it) = u + iv = -5 + i(-t^7 - 2t) \Rightarrow \begin{cases} u = -5 \\ v = -t(t^6 + 2) \end{cases} \quad -(1)$$

بما أن $u = -5 \neq 0$ بالتالي لا يوجد أصفار على المحور التخيلي ويمكن استخدام مبدأ المسعة



هذا الخط الذي ترسمه النقطة $w = Q_7(z)$ في المستوى (u, v) وفقاً لـ (1). وهو يدور دوران سالباً بمقدار π وبالتالي

$$\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_7(z) \xrightarrow[R \to \infty]{} 7\pi - \pi = 6\pi$$

Сканировано с CamScanner

$$N = \frac{6\overline{w}}{2\overline{w}} = 3$$

وبالتالي المعادلة $Q_7(z) = z^7 - 2z - 5 = 0$ لها ثلاث جذور في النصف الايمن من المستوي العقدي .

تمارين للطالب : اوجد عدد الجذور (الأصفار) في النصف اليميني من المستوي

a) $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$; $N = 2$

B) $z^3 - 2z - 5 = 0$; $N = 1$

c) $z^3 - 4z^2 + 5 = 0$; $N = 1$

d) $2z^3 - z^2 - 7z + 5 = 0$, $N = 1$

e) $z^5 + 5z^4 - 5 = 0$; $N = 2$

f) $z^{12} + z + 1 = 0$; $N = 6$

Сканировано с CamScanner