كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية٢

المحاضرة : السابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

السؤال الأول:

حل المعادلات التفاضلية الجزئية:

① $Z = ax^2 + by^2 + ab$

نشتق بالنسبة لـ x:

$$p = 2ax \Rightarrow \boxed{a = \frac{p}{2x}}$$

نشتق بالنسبة لـ y:

$$q = 2by \Rightarrow \boxed{b = \frac{q}{2y}}$$

$$\boxed{Z = \frac{p}{2}x + \frac{q}{2}y + \frac{pq}{4xy}}$$

② $Z = ax + by + cxy$

نشتق بالنسبة لـ x:

$$p = a + cy \quad \ldots ①$$

نشتق بالنسبة لـ y:

$$q = b + cx \quad \ldots ②$$

$$\boxed{S = C}$$ نشتق ② بالنسبة لـ x:

نعوض في ①:

$$p = a + Sy \Rightarrow \boxed{a = p - Sy}$$

نعوض في ②:

$q = b + 5x \Rightarrow \boxed{b = q - 5x}$

$z = (p-5y)x + (q-5x)y + 5xy$

$\boxed{z = px + qy - 5xy}$

(3) $F\left(\frac{z}{x^3}, \frac{y}{x}\right) = 0$ و:

$u = \frac{z}{x^3}$ & $v = \frac{y}{x}$

نشتق بالنسبة لـ x:

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$F'_u\left(\frac{px-3}{x^4}\right) + F'_v\left(\frac{-y}{x^2}\right) = 0 \quad \cdots (1)$

نشتق بالنسبة لـ y:

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$F'_u\left(\frac{q}{x^3}\right) + F'_v\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \cdots (2)$

$(1) + \frac{y}{x}(2) \Rightarrow F'_u\left(\frac{px+qy-3}{x^4}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{px+qy-3}{x^4} = 0$

$\Rightarrow \boxed{px + qy - 3 = 0}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(4) $Z = F(x-y)$; $u = x-y$

نشتق بالنسبة لـ x :

$$p = F'_u(1) \Rightarrow \boxed{F'_u = p}$$

نشتق بالنسبة لـ y :

$$q = F'_u(-1) \Rightarrow q = -p \Rightarrow \boxed{q + p = 0}$$

(5) $Z = x.y + F(x^2 + y^2)$; $u = x^2 + y^2$

نشتق بالنسبة لـ x :

$$p = y + F'_u(2x) \quad \cdots (1)$$

نشتق بالنسبة لـ y :

$$q = x + F'_u(2y) \quad \cdots (2)$$

$$(1) - 2x(2) \Rightarrow p - 2xq = y - 2x^3$$

$$\boxed{p - 2xq - y + 2x^3 = 0}$$

(6) $x = F(z) + g(y)$; $u = z$, $v = y$

نشتق بالنسبة لـ x :

$$1 = F'_u(p) \Rightarrow \boxed{F'_u = \frac{1}{p}}$$

نشتق بالنسبة لـ y :

$$0 = F'_u q + g'_v$$

نشتق بالنسبة لـ x مرة ثانية :

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$0 = F_u'' p + F_u' r \quad \cdots \textcircled{1}$$

نشتق بالنسبة لـ y مرة ثانية:

$$0 = F_u'' q + F_u' t \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$q\,\textcircled{1} - p\,\textcircled{2} \Rightarrow F_u' qr - F_u' pt = 0$$

نعوض قيمة $F_u' = \frac{1}{p}$

$$\boxed{\frac{qr}{p} - t = 0}$$

المثال الثاني:

حل المعادلات التفاضلية الجزئية التالية:

$$\textcircled{1}\ x^2 p + y^2 q = (x+y)z$$

نكتبها بالشكل التفاضلي:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{(x+y)z}$$

$$\textcircled{1},\textcircled{2} \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} \Rightarrow \boxed{\psi_1:\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = c_1}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} = \textcircled{3} \Rightarrow \frac{dx - dy}{x^2 - y^2} = \frac{dz}{(x+y)z}$$

$$\Rightarrow \frac{d(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{dz}{(x+y)z} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{z}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\psi_2 : \frac{x-y}{z} = c_2$$

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{-1}{x^2} & 0 \\ \frac{1}{z} & \frac{y-x}{z^2} \end{vmatrix} = \frac{x-y}{x^2z^2} \neq 0$$

بما أن الجملة مستقلة خطياً $\psi_1, \psi_2 \Leftarrow z, y, x$

$$F\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}, \frac{x-y}{z}\right) = 0$$

$$\frac{x-y}{z} = g\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) \Rightarrow z = \frac{x-y}{g\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}$$

(2) $(x^2-y^2-z^2)p + 2xyq = 2xz$

نكتبها بالشكل التناظري:

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

(1) (2) (3)

$$(2),(3) \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \psi_1 : \frac{y}{z} = c_1$$

$$x(1) + y(2) + z(3) = (2) \Rightarrow$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{dy}{2xy} \Rightarrow$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\psi_2 : \frac{x^2+y^2+z^2}{y} = C_2$$

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(x,z)} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{-y}{z^2} \\ \frac{2x}{y} & \frac{2z}{y} \end{vmatrix} = \frac{2x}{z^2} \neq 0$$

من أجل جميع قيم $x, z \Leftarrow \psi_2, \psi_1$ مستقلان خطياً

$$F\left(\frac{y}{z}, \frac{x^2+y^2+z^2}{y}\right) = 0$$

السؤال الثالث:

أوجد السطح التكاملي للمعادلات التفاضلية الجزئية التالية

والمارة برؤوس المنحني المعطى:

(1) $(x)(y^2+z)p - y(x^2+z)q = (x^2-y^2)z$

المار بالمنحني:

$\{x+y=0 \;\&\; z=1\}$

نكتبها بالشكل التناظري:

$$\frac{dx}{x(y^2+z)} = \frac{dy}{-y(x^2+z)} = \frac{dz}{(x^2-y^2)z}$$

(1) (2) (3)

$x(1) + y(2) - (3) \Rightarrow$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{x\,dx + y\,dy - dz}{x^2y^2 + x^2z - x^2y^2 - y^2z - x^2z + y^2z}$$

$$\Rightarrow \frac{x\,dx + y\,dy - dz}{0}$$

$$\Rightarrow x\,dx + y\,dy - dz = 0$$

$$\boxed{\psi_1 : x^2 + y^2 - 2z = c_1}$$

$$yz\,① + xz\,② + xy\,③ \Rightarrow \frac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{xyz(y^2 + z - x^2 - z + x^2 - y^2)}$$

$$\Rightarrow yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0$$

$$\boxed{\psi_2 : xyz = c_2}$$

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2 \\ yz & xy \end{vmatrix} = 2x^2y + 2yz \neq 0$$

من أجل هيك منقلاقيش $\psi_1, \psi_2 \Leftarrow x, y, z$ مستقلات خطياً

معادلة المخروط هي:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

لنكتبها بالشكل الوسيطي:

نعرف $x = t \Leftarrow$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases} \quad ; \ t \in \mathbb{R}$$

نعوض قيم x, y, z في الحل نجد أن:

$$t^2 + t^2 - 2 = C_1 \Rightarrow \boxed{2t^2 - 2 = C_1} \quad \cdots ①$$

$$\boxed{-t^2 = C_2} \quad \cdots ②$$

نعوض ② في ① نجد أن:

$$-2C_2 - 2 = C_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{C_1 + 2C_2 = -2}$$

فيكون السطح المطلوب هو:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2z + 2xyz = -2}$$

② $xy^3 p + x^2 z^2 q = y^3 z$

الى الاين الخنث

$$\begin{cases} y = z^2 \\ x = -z^3 \end{cases}$$

نكتبها بالشكل التالي:

$$\frac{dx}{xy^3} = \frac{dy}{2xz^2} = \frac{dz}{y^3 z}$$

① ② ③

$$①, ③ \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \boxed{\psi_1 : \frac{x}{z} = C_1}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(2), (3) $\Rightarrow \dfrac{dy}{x^2 y} = \dfrac{dz}{y^3}$

لدينا $x = c_1 y$ نعوض نجد أن:

$$\frac{dy}{c_1^2 y^3} = \frac{dz}{y^3} \Rightarrow y^3\,dy - c_1^2 y^3\,dz = 0$$

$$y^4 - c_1^2 y^4\,dz = 0 \Rightarrow \boxed{\psi_2 : y^4 - x^2 y^2 = c_2}$$

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 2xy^2 & 4y^3 \end{vmatrix} = 4\frac{y^3}{y} \neq 0$$

من أجل جميع قيم $x, y \Leftarrow \psi_1, \psi_2$ مستقلان خطياً.

المنحنى ψ_1 هو: $\begin{cases} y = z^2 \\ x = -z^3 \end{cases}$ المعطى

نعوض في ψ_2 نجد أن:

$$(z^2)^4 - (-z^3)^2 z^2 = c_2$$

$$z^8 - z^8 = c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

فيكون الحل المطلوب هو:

$$\boxed{y^4 - x^2 y^2 = 0}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة