كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية٢

المحاضرة : العاشرة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة التي درجتها أعلى من الثانية

غير المتجانسة:

شكلها العام: $f(D,D')z = R(x,y) \quad \cdots (1)$

حلها العام هو الحل العام للمعادلة المتجانسة مضافاً إليه حل خاص لغير المتجانسة.

$$z_p = \frac{1}{f(D,D')} R(x,y)$$

إذا كان $f(D,D')$ يكتب على شكل جداء أقواس:

$$f(D,D') = (D - m_1D')(D - m_2D') \cdots (D - m_nD')$$

عندئذٍ فإن:

$$z_p = \frac{1}{(D - m_1D')(D - m_2D') \cdots (D - m_nD')} R(x,y)$$

$$z_p = \frac{1}{D - m_1D'} \cdot \frac{1}{D - m_2D'} \cdots \frac{1}{D - m_nD'} R(x,y) \quad \cdots (*)$$

حالة خاصة:

$$(D - mD')z = R(x,y)$$

$$p - mq = R(x,y)$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{dz}{R(x,y)}$$

$$y+mx=a \Rightarrow y=a-mx$$

$$z=\int R(x,a-mx)\,dx+b$$

$$F\left(y+mx, z-\int R(x,a-mx)\,dx\right)=0$$

$$z-\int R(x,a-mx)\,dx=f(y+mx)$$

$$z=f(y+mx)+\int R(x,a-mx)\,dx$$

الحل العام للمعادلة

$$\Rightarrow z_p=\int R(x,a-mx)\,dx$$

$$\frac{1}{D-mD'}R(x,y)=\int R(x,a-mx)\,dx$$

وهكذا نجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة أي نبحث عن المشتقة $\star$ بإجراء المكاملة على التوالي بغض النظر عن الترتيب.

مثال:

$$(D-2D')z=3x^2+y$$

$$z_h=f(y+2x)$$

$$\Rightarrow y+2x=a \Rightarrow y=a-2x$$

$$z_p=\frac{1}{D-2D'}(3x^2+y)=\int(3x^2+a-2x)\,dx$$

$$=x^3+ax-x^2=x^3+(y+2x)x-x^2$$

$$=x^3+yx+x^2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$z = f(y+2x) + x^3 + yx + x^2$$

مثال:

$$(D-D')(D+D')z = 1+y$$

$$z_h = f_1(y+x) + f_2(y-x)$$

$$z_p = \frac{1}{D-D'} \cdot \frac{1}{D+D'}(1+y) \quad ; \quad y = a+x$$

$$z_p = \frac{1}{D-D'} \int (1+a+x)\,dx$$

$$z_p = \frac{1}{D-D'} \left(x + (y-x)x + \frac{x^2}{2}\right) \quad ; \quad y = b-x$$

$$z_p = \int -\frac{x^2}{2} + x + x(b-x)\,dx$$

$$z_p = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{b}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}$$

$$z_p = -\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}(y+x) = \frac{x^2}{2}(y+1)$$

$$z = f_1(y+x) + f_2(y-x) + \frac{x^2}{2}(y+1)$$

حالات خاصة:

$$f(D,D')e^{ax+by} = f(a,b)e^{ax+by} \quad (1)$$

$$\frac{1}{f(D,D')}e^{ax+by} = \frac{1}{f(a,b)}e^{ax+by} \quad ; \quad f(a,b) \neq 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أما إذا كان $F(a,b)=0$ أي $\frac{a}{b}$ مثل $F(D,D')=0$

$$F(D,D') = (bD - aD')\,G(D,D') \quad ; \quad G(a,b) \neq 0$$

$$\frac{1}{F(D,D')}\,e^{ax+by} = \frac{1}{bD-aD'} \cdot \frac{1}{G(a,b)}\,e^{ax+by}$$

$$= \frac{1}{G(a,b)} \cdot \frac{1}{bD-aD'}\,e^{ax+by}$$

بالمثل

$$F(D^2, DD', D'^2)\sin(ax+by) = F(-a^2, -ab, -b^2)\sin(ax+by) \quad (2)$$

$$F(D^2, DD', D^2)\cos(ax+by) = F(-a^2, -ab, -b^2)\cos(ax+by)$$

$$\frac{1}{F(D^2,DD',D'^2)}\sin(ax+by) = \frac{1}{F(-a^2,-ab,-b^2)}\sin(ax+by)$$

حيث $F(-a^2, -ab, b^2) \neq 0$

$$\frac{1}{F(D^2,DD',D^2)}\cos(ax+by) = \frac{1}{F(-a^2,-ab,-b^2)}\cos(ax+y)$$

حيث $F(-a^2,-ab,-b^2) \neq 0$

- إذا كان $F(-a^2,-ab,-b^2)=0$ عندئذٍ سنستخدم طرائق أخرى:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

متباينات أويلر:

$$\sin(ax+by) = \frac{e^{i(ax+by)} - e^{-i(ax+by)}}{2i}$$

$$\cos(ax+by) = \frac{e^{i(ax+by)} + e^{-i(ax+by)}}{2}$$

مثال:

$$\frac{1}{D^2 - D'^2} e^{2x-y} = \frac{1}{3} e^{2x-y}$$

$$\frac{1}{D^2 - 4DD' - 3D'^2} \sin(x+y) = \frac{1}{6} \sin(x+y)$$

الحالات: القاعدية ذات الأمثال الثابتة غير متجانسة المرتبة و المتجانسة:

شكلها العام:

$$(D^n + A_1 D^{n-1} D' + A_2 D^{n-2} D'^2 + \dots + A_n D'^n + B_1 D^{n-1} + B_2 D^{n-2} D' + \dots + B_n D'^{n-1} + \dots + C_1 D + C_2 D' + K)z = 0$$

$$f(D, D')z = 0 \quad \dots (1)$$

لإيجاد الحل العام نراعي الحالتين:

(1) يمكن تفريق $f(D, D')$ إلى جداء أقواس من الشكل:

$$(D - m_1 D' - n_1)$$

فوجد الحل العام:

$$(D - m_1 D' - n_1)z = 0$$

$$p - m_1 q = n_1 z$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m_1} = \frac{dz}{n_1 z}$$

$$\left.\begin{aligned} y + m_1 x &= C_1 \\ z e^{-n_1 x} &= C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(y + m_1 x, z e^{-n_1 x}) = 0$$

$$z = e^{n_1 x} f(y + m_1 x)$$

$$(D - m_1 D' - n_1)^p z = 0$$

الحل العام:

$$z = e^{n_1 x}\left(f_1(y + m_1 x) + x f_2(y + m_1 x) + \cdots + x^{p-1} f(y + m_1 x)\right)$$

مثال:

$$(D + 2D' - 3)^3 z = 0$$

$$z = e^{3x}\left(f_1(y - 2x) + x f_2(y - 2x) + x^2 f_3(y - 2x)\right)$$

الحل العام للمعادلة:

$$(D - m_1 D' - n_1)(D - m_2 D - n_2) z = 0$$

حيث:

$$z = e^{n_1 x} f(y + m_1 x) + e^{n_2 x} f(y + m_2 x)$$

(2) $f(D, D')$ غير قابل للتحليل على شكل جداء

أقترب عندها نفرض أن للمعادلة حل من الشكل: $z = C e^{ax + by}$ ونعوض في المعادلة $f(D, D') z = 0$

فيجب أن:

$$f(D, D') C e^{ax + by} = 0 \Rightarrow$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$C f(a,b)\, e^{ax+by} = 0$$

$$f(a,b) = 0$$

وبذلك نعين أحد الثوابت a أو b بدلالة الآخر ونحل كما في الحل العام.

مثال:

$$(D - D'^2 - 1)z = 0$$

نفرض أن لها حل من الشكل:

$$z = Ce^{ax+by}$$

$$f(a,b) = a - b^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = b^2 + 1$$

$$z = Ce^{(b^2+1)x+by}$$

المعادلات التفاضلية ذات الأمثال الثابتة غير متجانسة المرتبة وغير المتجانسة:

شكلها العام:

$$f(D, D')z = R(x,y)$$

حلها العام هو عبارة عن حل عام للمعادلة المتجانسة مضافاً إليه حل خاص لغير المتجانسة.

$$(D - m_1 D' - n_1)z = R(x,y)$$

$$p - m_1 q - n_1 z = R(x,y)$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m_1} = \frac{dz}{n_1 z + R(x,y)}$$

$$y + m_1 x = c_1$$

$$\Rightarrow y = c_1 - m_1 x$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{R(x, c_1 - m_1 x) + n_1 z}$$

$$\frac{dz}{dx} - n_1 z = R(x, c_1 - m_1 x)$$

معادلة تفاضلية عامل تكاملها :

$$\mu = e^{-n_1 x}$$

$$z = e^{n_1 x}\left(\int e^{-n_1 x} R(x, c_1 - m_1 x)\, dx + c_2\right)$$

$$F\left(y + m_1 x,\ z e^{-n_1 x} - \int e^{-n_1 x} R(x, c_1 - m_1 x)\, dx\right) = 0$$

$$z = e^{n_1 x}\left(\int e^{-n_1 x} R(x, c_1 - m_1 x)\, dx + f(y + m_1 x)\right)$$

$$z = \underbrace{e^{n_1 x} f(y + m_1 x)}_{z_h} + \underbrace{e^{n_1 x} \int e^{-n_1 x} R(x, c_1 - m_1 x)\, dx}_{z_p}$$

$$\frac{1}{D - m_1 D' - n_1} R(x, y) = e^{n_1 x} \int e^{-n_1 x} R(x, c_1 - m_1 x)\, dx$$

و $y + m_1 x = c_1$

في حال كان لدينا أكثر من مؤثر عكسي يحسب تأثير المؤثر العكسي الأول على R ثم نأخذ تأثير المؤثر الثاني على الناتج ، وهكذا ...

مثال :

$$(D + D' - 1) z = e^{2x + y}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$z_h = e^x f(y-x)$$

$$z_p = \frac{1}{D+D'-1} e^{2x+y} = \frac{1}{2} e^{2x+y}$$

$$z = e^x f(y-x) + \frac{1}{2} e^{2x+y}$$

مثال:

$$(2D-D')(D+D'-1)z = e^{3x-y}$$

$$z_h = e^x f_1(y-x) + f_2\left(y+\frac{1}{2}x\right)$$

$$z_p = \frac{1}{2D-D'} \cdot \frac{1}{(D+D'-1)} e^{3x-y} = \frac{1}{2D-D'}(1)\, e^{3x-y}$$

$$z_p = z_p = \frac{1}{7} e^{3x-y}$$

$$\Rightarrow z = e^x f_1(y-x) + f_2\left(y+\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{7} e^{3x-y}$$

المعادلات التفاضلية الخطية التي ترد إلى ذات الأمثال الثابتة:

a) المتجانسة بالنسبة لـ x, y

$$f(xD, yD')z = 0$$

ترد إلى أمثال ثابتة بفرض $x = e^x$, $y = e^y$

$$X = \ln x \quad , \quad Y = \ln y$$

$$xD = x\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} = B$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$yD' = y\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y} = B'$$

$$f(B, B')z = 0$$

$$f(xD, D')z = 0$$

(b) متجانسة بالنسبة لـ x:

نفرض $X = \ln x$ حيث:

$$xD = B = \frac{\partial}{\partial X}$$

$$f(B, D)z = 0$$

$$f(D, yD')z = 0$$

(c) متجانسة بالنسبة لـ y:

$$yD' = B' = \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow f(D, B')z = 0$$

مثال:

$$(x^2D^2 + xD - D'^2)z = 0$$

متجانسة بالنسبة لـ x

$$X = \ln x$$

$$xD = B$$

$$xDz = x\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X} = Bz$$

$$x^2D^2z = x^2D(Dz) = x^2D\left(\frac{1}{x}Bz\right)$$

$$= x^2\left(\frac{-1}{x^2}\right)Bz + \frac{x^2}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$x^2D^2z = (-B + B^2)z$$

$$(B^2 - B + B - D'^2)z = 0 \Rightarrow (B^2 - D'^2)z = 0$$

$$(B - D')(B + D')z = 0$$

$$z = f_1(y + x) + f_2(y - x)$$

$$z = f_1(y + \ln x) + f_2(y - \ln x)$$

مثال:

$$(x^2D^2 - y^2D'^2)z = 0$$

نعابث بالنسبة لـ y, x:

نعرض أن: $Y = \ln y \quad X = \ln x$

$$(B^2 - B - B'^2 + B')z = 0$$

$$(B - B')(B + B' - 1)z = 0$$

$$z = f_1(Y + X) + e^X f_2(Y - x)$$

$$z = f_1(\ln y + \ln x) + x f_2(\ln y - \ln x)$$

$$z = f_1(\ln xy) + x f_2\left(\ln \frac{y}{x}\right)$$

$$z = f_1(xy) + x f_2\left(\frac{y}{x}\right)$$

النهاية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة