كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية٢

المحاضرة : التاسعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٦

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

- أوجد السطوح المتعامدة مع السطوح الكلية للمعادلة:

$$(y+3z)dx+(x+2z)dy+(3x+2y)dz=0$$

لإيجاد السطوح المتعامدة نكتب بمعادلة لاغرانج وناظرها:

$$(y+3z)p+(x+2z)q=3x+2y$$

- أوجد قيمة $f(x,y,z)$ حتى يكون المعادلة:

$$yz^3dx-x^2zdy+f(x,y,z)dz=0$$

حل:

الحل:

$$\begin{vmatrix} yz^3 & -x^2z & f \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^3 & -x^2z & f \end{vmatrix}=0$$

$$yz^3\left(\frac{\partial f}{\partial y}+x^2\right)+x^2z\left(\frac{\partial f}{\partial x}-3yz^2\right)+f(-2xz-z^3)=0$$

$$x^2z\frac{\partial f}{\partial x}+yz^3\frac{\partial f}{\partial y}+0\frac{\partial f}{\partial z}=2x^2yz^3+f(2xz+z^3)$$

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x}+yz^2\frac{\partial f}{\partial y}+0\frac{\partial f}{\partial z}=2x^2yz^2+f(2x+z^2)$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{yz^2} = \frac{dz}{0} = \frac{dp}{2x^2yz^2 + p(2x+z^2)}$$

$$\psi_1 : z = C_1$$

$$\psi_2 : y \cdot e^{z^2/x} = C_2$$

$$\psi_3 = \frac{1}{x^2} e^{z^2/x} p - \frac{2}{x} y e^{z^2/x} z^2 = C_3$$

$$F\left(z, y e^{z^2/x}, \frac{1}{x^2} p - \frac{2}{x} y e^{z^2/x} z^2\right) = 0$$

$$\frac{1}{x^2} e^{z^2/x} p - \frac{2}{x} y e^{z^2/x} z^2 = H\left(z, y e^{z^2/x}\right)$$

نختار $H = 0$ فيكون :

$$p = 2xyz^2$$

المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من المرتبة الأولى :

شكلها العام :

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \quad \cdots (1)$$

نستخدم طريقة شارب لحل هذه المعادلات :

تتلخص طريقة شارب بإيجاد معادلة تفاضلية ثانية من الشكل :

$$\varphi(x, y, z, p, q) = C_1 \quad \cdots (2)$$

وبالتالي يصبح لدينا جملة معادلتين حيث يمكن بحلهما :

$$p = p(x, y, z, C_1)$$

$$q = q(x, y, z, C_1)$$

بما أن $z = z(x, y)$ حل للمعادلة (1) فهو يحقق :

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$dz = p\,dx + q\,dy \quad \cdots (3)$$

وهي معادلة تفاضلية ذات تفاضلات كلية قابلة للاكاملة

بكاملتها ونحصل على z كتابع لـ x, y, c_1 و ثابت كيفي c_2

وبالتالي:

$$\Phi(x, y, z, c_1, c_2) = 0$$

وهو تكامل تام للمعادلة (1)

القطعة الأسارية هي إيجاد: $\varphi(x, y, z, p, q) = c_1$

ونحصل عليها من الحل العامة:

$$\frac{dx}{F'_p} = \frac{dy}{F'_q} = \frac{dz}{pF'_p + qF'_q} = \frac{-dp}{F'_x + pF'_z} = \frac{-dq}{F'_y + qF'_z} \quad \cdots (4)$$

أي حل للجملة (4) تتضمن p أو q أو كليهما يمكن أن

يكون المعادلة (2) الخطوية شرط أن z يكون مرتبط خطياً

مع (1).

مثال:

$$xp + yq = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0} = \frac{-dp}{p} = \frac{-dq}{q}$$

$$xp = c_1 \Rightarrow p = \frac{c_1}{x}$$

$$q = \frac{-c_1}{y}$$

$$dz = \frac{c_1}{x}dx - \frac{c_1}{y}dy$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$z = c_1 \ln x - c_1 \ln y + c_2 = c_1 \ln \frac{x}{y} + c_2$$

$$z = c_1 \ln \frac{x}{y} + c_2$$

وهو الحل التام للمعادلة التفاضلية الجزئية.

بفرض أن شكل الحالة:

$$f(p,q) = 0 \quad [1]$$

$$\frac{dx}{F'_p} = \frac{dy}{F'_q} = \frac{dz}{pF'_p + qF'_q} = \frac{-dp}{0} = \frac{-dq}{0}$$

$$F'_x = F'_y = F'_z = 0$$ بالتالي أن:

$p = c_1$ بالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن

$$\Rightarrow f(c_1, q) = 0 \Rightarrow q = f(c_1)$$

$$dz = c_1\,dx + f(c_1)\,dy$$

$$z = c_1 x + f(c_1) y + c_2$$

$F(y,p,q) = 0$ أو $F(x,p,q) = 0$ [2]

$F_x = F_z = 0$ $\qquad$ $F_y = F_z = 0$

$p = c_1$ $\qquad$ $q = c_1$

$F(z,p,q) = 0$ [3]

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$F_x = F_y = 0 \Rightarrow \boxed{p = c_1 q} \Rightarrow F(z, c_1 q, q) = 0$

4) $F(x, y, z, p) = 0$ أو $F(x, y, z, q) = 0$

$F_p = 0 \Rightarrow x = c_1$ $\quad$ $F_q = 0 \Rightarrow y = c_1$

$F(x, y, z, p, c_1) = 0$ معادلة تفاضلية عادية

أو $F(y, z, q, c_1) = 0$ معادلة تفاضلية عادية

5) معادلة كليرو الخطية:

$px + qy + f(p, q) - z = 0$

$F_x = p$ ، $F_y = q$ ، $F_z = -1$

$p = c_1$

$q = c_2$

$z = c_1 x + c_2 y + f(c_1, c_2)$

6) المعادلة العجائبية بالنسبة لـ x أو y أو z

غير الحالات:

$F(z, xp, y, q) = 0$ ⑨

$Y = \ln y$ ، $X = \ln x$

$x.p = x \frac{\partial z}{\partial x} = x \frac{\partial z}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X} = p_1$

$y.q = y \frac{\partial z}{\partial y} = y \frac{\partial z}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial Y} = q_1$

$F(z, p_1, q_1) = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$F(z, xp, yq) = 0 \quad (b)$$

$$X = \ln x \quad , \quad p_1 = xp$$

$$F(z, p_1, q_1) = 0$$

$$F\left(\frac{xp}{z}, \frac{yq}{z}\right) = 0 \quad (c)$$

$$X = \ln x \qquad Y = \ln y \; , \; Z = \ln z$$

$$\frac{xp}{z} = \frac{x\frac{\partial z}{\partial x}}{z} = x \cdot \frac{\partial z}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{1}{z} = \frac{\partial Z}{\partial X}$$

$$\frac{xp}{z} = p_1$$

$$\frac{yq}{z} = \frac{y\frac{\partial z}{\partial y}}{z} = \frac{\partial Z}{\partial y} = q_1$$

$$F(p_1, q_1) = 0$$

المراتب العليا :

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية ذات المراتب العليا وذات الأمثال الثابتة :

سنكلها العام :

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} + A_2 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2} + \cdots +$$

$$B_1 \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + B_2 \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-2}\partial y} + \cdots + C_1 \frac{\partial z}{\partial x} + C_2 \frac{\partial z}{\partial y} + kz = R(x,y)$$

حيث: $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n, C_1, C_2, k$

ثوابت و R تابع لـ x, y

- إذا كانت $R = 0$ تكون المعادلة متجانسة.
- إذا كان $\forall i = \overline{1,n}$ كل R, k, C_2, C_1, A_i, B_i

توابع لـ x, y تسمى معادلة ذات أشكال متغيرة.

المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية ذات الأشكال الثابتة و المتجانسة:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} + \cdots + A_n \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = 0 \quad \cdots (1)$$

نرمز بـ $D = \frac{\partial}{\partial x}$ و $D' = \frac{\partial}{\partial y}$

$$(D^n + A_1 D^{n-1} D' + A_2 D^{n-2} D'^2 + \cdots + A_n D'^n) z = 0 \quad \cdots (2)$$

$$f(D, D') z = 0$$

حيث $f(D, D')$ كثير حدود من الدرجة n بالنسبة للمؤثر D.

نوجد حلول المعادلة المميزة $F(D, D') = 0$

$$(D - m_1 D')(D - m_2 D') \cdots (D - m_n D') z = 0 \quad \cdots (3)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(3) الحالة الثالثة

$$(D - m_1 D')z = 0$$

$$p - m_1 q = 0 \Rightarrow \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m_1} = \frac{dz}{0}$$

$$\psi_1 : z = c_1$$

$$\psi_2 : y + m_1 x = c_2$$

$$F(z, y + m_1 x) = 0 \Rightarrow z = f_1(y + m_1 x)$$

~~$(D - m_1 D')v = 0$~~ $(D - m_1 D')(D - m_2 D')z = 0$

$(D - m_2 D')z = v$ نفرض

$(D - m_1 D')v = 0$

$v = f_1(y + m_1 x)$

$(D - m_2 D')z = f_1(y + m_1 x)$

$p - m_2 q = f_1(y + m_1 x)$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m_2} = \frac{dz}{f_1(y + m_1 x)}$$

$$y + m_2 x = c_1 \Rightarrow y = c_1 - m_2 x$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{f(c_1 - m_2 x + m_1 x)}$$

$$z = f_2(c_1 + (m_1 - m_2)x) + c_2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$z = f_2(y + m_1 x) + C_2$$

$$F(y + m_2 x, z - f(y + m_1 x)) = 0$$

$$z - f_2(y + m_1 x) = f_3(y + m_2 x)$$

$$z = f_2(y + m_1 x) + f_3(y + m_2 x)$$

$$z = f_1(y + m_1 x) + f_2(y + m_2 x) + \dots + f_n(y + m_n x)$$

مثال:

$$(D^2 - 3DD' + 2D'^2)z = 0$$

$$\Delta = 9D'^2 - 8D'^2 = D'^2$$

$$D_1 = \frac{3D' + D'}{2} = 2D'$$

$$D_2 = \frac{3D' - D'}{2} = D'$$

$$(D - 2D')(D - D')z = 0$$

$$z = f_1(y + 2x) + f_2(y + x)$$

مثال:

$$(D^2 + D'^2)z = 0$$

$$(D - iD')(D + iD')z = 0$$

$$z = f_1(y + ix) + f_2(y - ix)$$

في حالة: إذا كانت أحد الأقواس:

$$(D - mD')^2 z = 0$$

$$z = x f_1(y + mx) + f_2(y + mx)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$(D-mD')^p z = 0$$

$$z = x^{p-1} f_1(y+mx) + x^{p-2} f_2(y+mx) + \cdots + f_p(y+mx)$$

مثال:

$$D^3 z = 0$$

$$z = f_1(y) + x f_2(y) + x^2 f_3(y)$$

$$D'^3 z = 0$$

$$z = f_1(x) + y f_2(x) + y^2 f_3(x)$$

$$r - 2s = 0 \Rightarrow (D^2 - 2DD')z = 0$$

$$D(D-2D')z = 0 \Rightarrow z = f_1(y) + f_2(y+2x)$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z