كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية٢

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الوسائط توابع اختيارية :

إذا كانت العلاقة الجبرية ممثلة بدلالة توابع اختيارية فإننا نشتقها جزئياً للحصول على عدد كافٍ من المعادلات بحيث نستطيع أن نحذف منها التوابع الاختيارية ونشتقها.

1) العلاقة الجبرية تحوي تابع اختياري واحد لتابع معلوم
$f(x,y,z,g(u(x,y,z))) = 0$ حيث g تابع اختياري و f
تابعين معلومين.

نشتق العلاقة بالنسبة لكل من x, y ونحذف g و $\frac{dg}{du}$
من المعادلات الناتجة نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة.

مثال: $x^2 + y^2 + z^2 = g(2x+y)$

نشتق بالنسبة لـ x :

$$2x + 2zp = \frac{dg}{du} \cdot 2$$

نشتق بالنسبة لـ y :

$$2y + 2zq = \frac{dg}{du} \cdot 1$$

$$\Rightarrow 2x + 2zp = 4y + 4zq$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$$2yp - 4yq + 2x - 4y = 0$$

[2] إذا كانت المعادلة الجبرية تابعان اختياريان كل منهما تابع لتابع معلوم بالشكل:

$$Z = f(u(x,y,z)) + g(v(x,y,z))$$

f, g توابع اختيارية بينما u, v توابع معلومة.

تشكيل المعادلة التفاضلية: نشتق بالنسبة لـ x, y لنوجد p, q, r, s, t أي نحصل على ثلاث معادلات ونحذف التوابع الاختيارية ونشتقاتها نحصل على معادلة من المرتبة الثانية.

مثال:

$$z = f(x,y) + g(x)$$

نشتق بالنسبة لـ x:

$$p = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot y + \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\boxed{p = y \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}} \quad \cdots (1)$$

نشتق بالنسبة لـ y:

$$q = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot x \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{q}{x}} \quad \cdots (2)$$

نشتق بالنسبة لـ x مرة ثانية:

$$\boxed{r = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot y^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}} \quad \cdots (3)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نشتق بالنسبة لـ x,y :

$$S = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} xy + \frac{\partial f}{\partial u} \quad \text{---} (4)$$

نشتق بالنسبة لـ y مرة ثانية :

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot x^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{t}{x^2} \quad \text{---} (5)$$

بتعويض (5) و (2) في (4) :

$$S = x.y \frac{t}{x^2} + \frac{q}{x} \Rightarrow$$

$$xS = yt + q$$

** العلاقة الجبرية معرفة بتابع اختياري تابع لتابعين معلومين :

$$f\left(u(x,y,z), v(x,y,z)\right) = 0$$

f تابع اختياري و u,v تابعين معلومين .

نشتق بالنسبة لـ x,y نجد $\frac{\partial f}{\partial u}$ و $\frac{\partial f}{\partial v}$

فنحصل على معادلة من الشكل الخطي :

$$Pp + Qq = R$$

مثال $f(x, y^2 - z) = 0$

$$v = y^2 - z \quad , \quad u = x$$

نشتق بالنسبة لـ x :

$$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{df}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 0$$

$$F'_u + f'_v(-p) = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نشتق بالنسبة لـ y :

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$f'_u(0)+f'_v(2y-z)=0 \Rightarrow \boxed{2y-z=0}$$

مثال:

$$f(x-y,\ y^2-z)=0$$

$$u=x-y \qquad v=y^2-z$$

نشتق بالنسبة لـ x :

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$f'_u+f'_v(-p)=0$$

نشتق بالنسبة لـ y :

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$-f'_u+f'_v(2y-z)=0 \Rightarrow f'_u=f'_v(2y-z)$$

$$f'_v(2y-z)+f'_v(-p)=0 \Rightarrow \boxed{-p-z+2y=0}$$

تعريف:

نسمي كل معادلة تفاضلية جزئية تحوي التابع والمتحولات المستقلة والمشتقات الجزئية الأولى للتابع بالمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$f(x,y,z,p,q)=0 \quad \cdots \star$$

* تعريف الحل التام: هو علاقة بين التابع والمتحولات المستقلة وعدد من الثوابت الاختيارية يساوي عدد المتحولات المستقلة وهي تحقق المعادلة ★ وهي من الشكل:

$$f(x,y,z,a,b)=0$$

ملاحظة:

نسمي العلاقة التي تحقق المعادلة ★ ونكتب بالشكل $f(x,y,z,a)=0$ جزء من الحل التام.

ملاحظة:

إذا كان $f(x,y,z,a,b)=0$ حلاً تاماً للمعادلة ★ فإنه هذا الحل يمثل عدد لانهائي من الطوح التكاملية يتعين كل منها بإعطاء قيمة خاصة للثابتين.

إذا كان هناك سلك لهذه الطوح نقول حلاً شاذاً للمعادلة ★

الملق: هي كل نقطة من نقاط سطح تكاملي لكن العلاقة بين هذه النقط تحقق الحل التام أي لا يظهر من خلال الحل التام وهو بالشكل: $f(x,y,z)=0$ أي يحقق المعادلة التفاضلية ★ ولكن لا يظهر في الحل التام جزئياً بالنسبة للثوابت أي بالنسبة للمتحولات عدد مرات الاشتقاق يساوي الثوابت ونسمي الثوابت من الدرجات الأخيرة من علاقة الحل التام.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: $z = px + qy - p^2 - q^2$

الحل التام: $q \to b \, , \, p \to a$

$$z = ax + by - a^2 - b^2$$

نشتق بالنسبة لـ a:

$$0 = x - 2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{x}{2}}$$

نشتق بالنسبة لـ b:

$$0 = y - 2b \Rightarrow \boxed{b = \frac{y}{2}}$$

نعوض في علاقة الحل التام:

$$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \Rightarrow z = \frac{x^2+y^2}{4}$$

المعادلة التفاضلية الجزئية من الخطية من المرتبة الأولى:

هي أعلى مشتق يكون 1 ولا يهم حتى لو كان مضروب بـ z

تعريف:

كل معادلة تفاضلية جزئية من الشكل:

$$P(x,y,z)p + Q(x,y,z)q = R(x,y,z) \quad \cdots (1)$$

تسمى من الخطية ولم نقل خطية لأننا لا نلم شيء عن z إما يكون $\cos z$ أو $\sin z$ أو ...

وتسمى المعادلة (1) معادلة لاغرانج أو معادلة من الخطية من المرتبة الأولى.

* من أجل تلبولمدة تحولات الشكل العام:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi)P_1 + P_2(x_1, \dots, x_n, \xi)P_2 + \dots + P_n(x_1, \dots, x_n, \xi)P_n = R(x_1, \dots, x_n, \xi)$$

$$P_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x_1}$$

$$P_2 = \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \quad \dots \quad P_n = \frac{\partial \xi}{\partial x_n}$$

نظرية:

المعادلة التفاضلية لتابع اختياري تابع لتابعين معلومين u, v هي معادلة لاغرانج.

العكس: الحل العام لمعادلة لاغرانج هو تابع اختياري F تابع لتابعين معلومين u, v معينين كما يلي:

المكاملات الأولية للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{d\xi}{R}$$

من أجل تابع يوجد متحولات:

$$\frac{d\xi}{R} = \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n}$$

ونبحث عن n تكامل أولي من الشكل:

$$C_i = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi) \quad ; \quad i = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow \quad F(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n) = 0 \quad \text{الحل العام}$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + 2\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial t} = \xi - t$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بكتب المعادلة المساعدة:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{dt}{-1} = \frac{d\zeta}{\zeta - t}$$

$$2dx = dy \Rightarrow \boxed{2x - y = C_1 \; ; \; \psi_1}$$

$$\frac{dy}{2} = \frac{dt}{-1} \Rightarrow \boxed{y + 2t \; ; \; \psi_2}$$

$$\frac{dt}{-1} = \frac{d\zeta}{\zeta - t} \Rightarrow \frac{d\zeta}{dt} = -\zeta + t$$

$$\frac{d\zeta}{dt} + \zeta = t$$

$$\boxed{\psi_3 : e^t(\zeta - t + 1) = C_3}$$

الحل العام:

$$F(2x - y, y + 2t, e^t(\zeta - t + 1)) = 0$$

$$e^t(\zeta - t + 1) = G(2x - y, y + 2t)$$

$$\zeta - t + 1 = e^{-t} G(2x - y, y + 2t)$$

$$\zeta = t - 1 + e^{-t} G(2x - y, y + 2t)$$

مثال: $xp + yq = \zeta$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{d\zeta}{\zeta}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\psi_1 : \frac{x}{y} = C_1$ $\psi_2 : \frac{x}{z} = C_2$

$$F\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z}\right) = 0$$

(1) تسمى المتغيرات التالية $u(x,y,z) = a$ و $v(x,y,z) = b$ متغيرات مولدة للسطح $f(u,v) = 0$

(2) مسألة كوشي لتعيين الحل الخاص:

لإيجاد حل خاص للمعادلة مثلاً كأن يكون السطح المطلوب هو منحني معين نأخذ المتغيرات المميزة $u(x,y,z) = a$, $v(x,y,z) = b$ وعلاقة المنحني المطلوب نجد علاقة بين الثوابت a, b ونعوض a بـ u و b بـ v فنجد المنحني المطلوب

مثال: أوجد الحل الخاص للمعادلة $xq - yp = 0$ الذي يحوي المنحني:

$$\begin{cases} x^2 - z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

الحل: أولاً نوجد الحل العام

$u : z = C_1$

$v : x^2 + y^2 = C_2$

نعوض في المنحني المطلوب:

$\Rightarrow 1 = C_2 - C_1^2$

$\Rightarrow$ الحل الخاص $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(3)

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \quad \cdots (2)$$

ذات تفاضلات كلية هاها إنه وجد عبارة عن طوح تكاملية

أمثال توجيه لهذا الطوح $\vec{N_1}(P, Q, R)$

معادلة لاغرانج:

$$Pp + Qq - R = 0 \quad \cdots (3)$$

هاها طوح تكاملية أمثال توجيه الناظم لهذه الطوح

$\vec{N_2}(p, q, -1)$

$$\vec{N_1} \cdot \vec{N_2} = Pp + Qq - R = 0 \Rightarrow \vec{N_2} \perp \vec{N_1}$$

الطوح التكاملية للمعادلة (2) والطوح التكاملية للمعادلة (3) متعامدة.

السؤال: أوجد الطوح المتعامدة المعينة بالعلاقة $G(x,y,z) = C$

نفاضلها لنعوض P, Q, R نحصل على معادلة نشكل (a)

ثم نشكل معادلة لاغرانج ونوجد حلها لنحصل على الطوح المطلوب.

* أما إذا كان السؤال أوجد الطوح المتعامدة لطوح

المعينة بالعلاقة $f(u,v) = 0$ حيث f اختياري

لأنها تابعان معلومان نشكل لاغرانج ونوجد P, Q, R

ثم نشكل المعادلة ذات التفاضلات الكلية وحلها ينحل

على الطوح المطلوبة

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z