كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة : **العاشرة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية:

① طريقة أولر:

$y' = f(x,y)$ ، h

$y(x_0) = y_0$

$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$

$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$

② طريقة أولر المحسنة (المعدلة):

$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(y_0' + \overline{y_1'})$

$\overline{y_1'} = f(x_1, \overline{y_1})$

$\overline{y_1} = y_0 + hf(x_0, y_0)$

مثال: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية:

$xy' = x^2 - xy$

$y(1) = 1$ أوجد الحل y_2 والشرط الابتدائي

$h = 0.1$

الحل:

$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(y_0' + \overline{y_1'})$

$\overline{y_1'} = f(x_1, \overline{y_1})$

$\overline{y_1} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + (0.1)(0) = 1$

$\bar{y_1'} = f(x_1, \bar{y_1})$; $x_1 = x_0 + 0.1 = 1.1$

$\bar{y_1'} = 1.1 - 1 = 0.1$

$y_1 = 1 + \frac{0.1}{2}(0 + 0.1) = 1.005$

$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(y_1' + \bar{y_2'})$

$\bar{y_2'} = f(x_2, \bar{y_2})$

$\bar{y_2} = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.005 + 0.1(1.1 - 1.005)$

$\bar{y_2} = 1.005 + 0.0095 = 1.0145$

$\bar{y_2'} = f(x_2, \bar{y_2})$; $x_2 = 1.1 + 0.1 = 1.2$

$\bar{y_2'} = 1.2 - 1.0145 = 0.1855$

$y_2 = 1.005 + \frac{0.1}{2}(0.095 + 0.1855)$

$y_2 = 1.005 + 0.01402$

$y_2 = 1.01902$

③ طريقة منشو تايلور:

لحل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى:

$y' = f(x, y)$ ، $y(x_0) = y_0$ ، $[a, b]$

نقسم المجال $[a, b]$ إلى جالات جزئية:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

$\frac{b-a}{n} = h$; $h = x_{i+1} - x_i$

سنستخدم في هذه الحالة منشو تايلور في المجال الأول

$[x_0, x_1]$

منشر دالة الحل $y=f(x)$ في جوار x_0 :

$$f(x)=y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots$$

عندما $x=x_1$ في الجوار $y=y_1$

$$y_1=y_0+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}h^3+\cdots$$

$$y''=f'_x+f'_y\cdot y'=f'_x+f'_y\cdot f \Rightarrow y''_0=(f'_x)_0+(f'_y)_0 f_0$$

$$y'''=(f'_x)'_x+(f'_x)'_y\cdot y'+\left((f'_y)'_x+(f'_y)'_y\cdot y'\right)f+(f'_x+f'_y\cdot f)f'_y$$

$$y'''=f''_{x,x}+f''_{x,y}\cdot y'+(f''_{y,x}+f''_{y,y}\cdot y')f+(f'_x+f'_y\cdot f)f'_y$$

$$\left[[f^{(n)}]^k\right]'=k\,(f^{(n)})^{k-1}f^{(n+1)}$$

$$(y'')'=\left([y'']^1\right)'=1\,(y'')^{1-1}\cdot y'''=y'''$$

$$(y''^2)'=2y''y'''$$

مثال: أوجد الحل y للمعادلة $y(0)=0$, $h=0.1$

$$y'=y^2+1$$

بحيث أوجد قيمة y عند $x=0.3$ بمنشور تايلور.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

$$y_1 = y_0 + y_0' h + \frac{y_0''}{2!} h^2 + \frac{y_0'''}{3!} h^3 + \frac{y_0^{(4)}}{4!} h^4$$

$y_0 = 0$

$y_0' = 1$

$$y'' = 2y \cdot y' \Rightarrow y_0'' = 2 \cdot y_0 \cdot y_0' = 0$$

$$y''' = 2(y'^2 + y'' y) \Rightarrow y_0''' = 2(y_0'^2 + y_0'' \cdot y_0) = 2$$

$$y''' = 2(2 \cdot y' \cdot y'' + y''' y + y' \cdot y'')$$

$$= 2(2y_0' \cdot y_0'' + y_0''' \cdot y_0 + y_0' \cdot y_0'') = 0$$

$$y_1 = 0 + 0.1 + \frac{0}{2!}(0.1)^2 + \frac{2(0.1)^3}{6} + \frac{0}{4!}(0.1)^4$$

$$y_1 = 0.1 + \frac{(0.1)^3}{3}$$

$$y_1 = 0.1003$$

(4) طريقة رونج-كوتا:

* يعطى الحل لمعادلة التفاضلية الخطية $y' = f(x,y)$ والشرط الابتدائي الحل $y_0 = y(x_0)$, h وباستخدام قيم محددة منتهية تأخذ تكون الحل y_1 بالشكل:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4]$$

حيث:

$$k_1 = h\,f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = h\,f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

مثال:

أوجد الحل y_1 للمعادلة $y' = x + y$ بالشرط الابتدائي:

$$y(0) = 1 \quad , \quad h = 0,2$$

الحل:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4]$$

$$k_1 = h\,f(x_0, y_0) = 0.2\,f(0,1)$$

$$k_1 = 0.2(0+1) = 0.2$$

$$k_2 = h\,f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_2 = (0,2)\,f(0.1, 1 + 0.1) = 0.2(0.1 + 1.1) = 0.2(1.2)$$

$$= 0.24$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.2\,f(0.1, 1 + 0.12)$$

$$k_3 = (0.2)f(0.1, 1.12) = 0.2(0.1 + 1.12)$$

$$= (0.2)(1.22) = 0.244$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$k_4 = hf(x_0+h, y_0+k_3) = 0.2f(0.2, 1+0.244)$$
$$= 0.2(0.2+1.244) = 0.2(1.444)$$
$$= 0.2888$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}[0.2 + 2(0.24+0.244) + 0.2888]$$
$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}[0.4888 + 2(0.484)]$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}[0.4888 + 0.968]$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(1.4568) = 1 + 0.2428$$

$$y_1 = 1.2428$$

النهاية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z