كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة : **التاسعة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٦

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(0)&=-1 \\ f'(1)&=-\frac{1}{4}\end{aligned}\right\} \Rightarrow M=\max\left\{|-1|,\left|-\frac{1}{4}\right|\right\}=1$$

$$\varepsilon \leq \frac{1-0}{2}(0.1)(1)=0.05$$

[2] طريقة أشباه المنحرفات:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

مساحة شبه المنحرف:

$$S_1 \simeq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

إذا أخذنا شبهي منحرفين:

$$S_2 \simeq \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1-x_0)+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2-x_1)$$

إذا قسمنا المسافة بين a و b إلى n جزءاً متساوياً

بواسطة النقاط:

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$$

طول كل من هذه الارتفاعات يساوي h

$$\frac{x_n-x_0}{n}=\frac{b-a}{n}=h$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

ويكون قد حصلنا على n من أشباه منحرف ارتفاع كل منها h
ويطلق بذلك جموع مساحات أشباه المنحرفات الناتجة بالملاحظة:

$$S \simeq \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1-x_0)+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2-x_1)+$$

$$\cdots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}(x_n-x_{n-1})$$

$$S \simeq h\left(\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right)$$

$$S \simeq \frac{h}{2}\left(y_0+y_n+2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})\right)$$

$$S \simeq \frac{h}{2}\left(y_0+y_n+2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

مثال:

$$\int_{1.1}^{2} x \ln x \, dx \; ; \quad h=0.1$$

x_i	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y_i	0.10484	0.21878	0.34107	0.47106	0.60819

x_i	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y_i	0.75200	0.90206	1.05801	1.21952	1.38629

$$S=\frac{0.1}{2}\left[0.10484+1.38629+2(0.21878+0.34107+0.47106+0.60819+0.75200+0.90206+1.05801+1.21952)\right]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$S = \frac{0.1}{2}\left[1.49113 + 11.14138\right]$$

$$S = \frac{0.1}{2}(12.632511) = 0.63162$$

* تعطى عبارة الخطأ المركب في هذه الطريقة بالعلاقة:

$$\varepsilon = \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot f''(c) \quad ; \quad c \in [a,b]$$

$$\varepsilon \leq \frac{b-a}{12} h^2 M \quad ; \quad M = \max\{|f''(a)|, |f''(b)|\}$$

$$\varepsilon \leq \frac{2-1.1}{12} (0.1)^2 \cdot M$$

$$M = \max\{|f''(1.1)|, |f''(2)|\}$$

$$f'(x) = \ln x + 1 \quad * \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(1.1) = 0.90909 \\ f''(2) = 0.5 \end{array}\right\} \Rightarrow M = \max\{(0.90909, 0.5)\}$$
$$M = 0.90909$$

$$\varepsilon \leq \frac{0.9}{12} (0.01)(0.90909)$$

$$\varepsilon \leq (0.075)(0.01)(0.90909)$$

$$\varepsilon \leq 0.000681817$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

طريقة سمبسون:

إذا قسمنا المجال $[a,b]$ إلى ثلاث نقاط:

x_i	x_0	x_1	x_2
y_i	y_0	y_1	y_2

$$P_2(x) = y_0 + R\Delta y_0 + \frac{R(R-1)}{2}\Delta^2 y_0$$

$$P_2(x_i) = f(x_i)$$

$$S = \int_a^b P_2(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+2h} \left(y_0 + R\Delta y_0 + \frac{R(R-1)}{2}\Delta^2 y_0\right) dx$$

$$R = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow dR = \frac{1}{h}dx$$

تغيير حدود التكامل:

$$x = x_0 \Rightarrow R = 0$$

$$x = x_0 + 2h \Rightarrow R = 2$$

$$S = h\left[y_0 R + \frac{R^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{R^3}{6} - \frac{R^2}{4}\right)\Delta^2 y_0\right]_0^2$$

$$S = h\left[2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 y_0\right]$$

$$S = h\left[2y_0 + 2y_1 - 2y_0 + \frac{1}{3}[y_2 - 2y_1 + y_0]\right]$$

$$S = h\left[\frac{1}{3}y_0 + \frac{4}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2\right] \to \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نقسم كل من المجالين السابقين إلى مجالين جديدين بواسطة النقاط: $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

$$S = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4]$$

إذا كانت $\frac{b-a}{h} = n$ عدد فردياً يمكن حساب التكامل في هذه الطريقة

إذا قسمنا المجال بين a, b إلى n جزءاً زوجياً نحصل على n تكاملاً

نعطي النتيجة النهائية:

$$S = \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})]$$

مثال:

$$\int_0^{1.2} x \cdot e^x \, dx, \quad h = 0.2$$

x_i	0	0,2	0.4	0.6	0.8	1	1.2
y_i	0	0.20816	0.46940	0.85999	1.51718	2.71828	5,06483

$$S = \frac{h}{3}[y_0 + y_6 + 4[y_1 + y_3 + y_5] + 2[y_2 + y_4]]$$

$$= \frac{0.2}{3}[0 + 5.06483 + 4[0,20816 + 0,85999 + 2,71828] + 2[0.46940 + 1.51718]]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$S = 0.06666\,[5.06483 + 15.14572 + 3.97316]$$

$$= 0.06666\,[24.18371] = 1.61208$$

مع ثقة واحدة مربعة.

* الخطأ المرتكب في طريقة سمبسون :

$$\varepsilon = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c) \; ; \; c \in [a,b]$$

$$\varepsilon \leq \frac{b-a}{180} h^4 . M \; ; \; M = \max\{|f^{(4)}(a)|, |f^{(4)}(b)|\}$$

$$f(x) = x e^{x^2}$$

$$f'(x) = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}$$

$$f''(x) = 2x e^{x^2} + 4x e^{x^2} + 4x^3 e^{x^2}$$

$$f''(x) = 6x e^{x^2} + 4x^3 e^{x^2}$$

$$f^{(3)}(x) = e^{x^2}[6 + 24x^2 + 8x^4]$$

$$f^{(4)}(x) = 2x e^{x^2}[6 + 24x^2 + 8x^4] + e^{x^2}[48x + 32x^3]$$

$$f^{(4)}(x) = e^{x^2}[60x + 80x^3 + 16x^5]$$

$$\varepsilon \leq \frac{1.2 - 0}{180} (0.2)^4 (M)$$

$$M = \max\{|f^{(4)}(0)|, |f^{(4)}(1.2)|\}$$

$$f^{(4)}(0) = 0 \quad , \quad |f^{(4)}(1.2)| = 10.55,39815$$

$$\Rightarrow$$

$$\varepsilon \leq \frac{(1.2)}{180} (10.55,39815)(0.2)^4$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\varepsilon \leq (1.2)(5.86332)(0.2)^4$

$\varepsilon \leq (7.03598)(0.0016)$

$\varepsilon \leq 0.011257568$

الفصل السادس:

الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية:

في الكثير من الدراسات والأبحاث الرياضية والهندسية و الفيزيائية نحصل على معادلات تفاضلية من مراتب عليا أو حل من المعادلات التفاضلية لا يمكن حلها بطرائق التحليلية لذلك نلجأ إلى الطرائق العددية , هذا لا نحصل على صيغة حل المعادلة $y=f(x)$ والتي من الشكل $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ بينما نحصل على القيمة العددية لهذا الحل والموجود في المجال المغلق $[a,b]$

سندرس في هذا الفصل حلول عددية لمعادلات تفاضلية من المرتبة الأولى تعطى بالشكل: $y'=f(x,y)$ مع شرط ابتدائي: $y(x_0)=y_0$ مرفق مع كل مسألة حيث الحل المطلوب موجود بدءاً في المجال $[a,b]$ وهذا نحتاج إلى تجزئة المجال إلى n جزء بواسطة النقاط

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$$

حيث:

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\dots[x_{n-1},x_n]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نبدأ رحلة البحث عن قيمة الحل في المجال الأول بالاعتماد على الشرط الابتدائي نحصل على قيمة تقريبية للحل نستقل بها إلى المجال الثاني فنحصل على القيمة التقريبية y_1 وهكذا إلى أن نصل إلى القيمة التقريبية y_n.

تعتمد جميع الطرائق التقريبية على نشر الحل $y=f(x)$ حسب متسلسلة تايلور:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

لندرس الطرائق التالية:

① طريقة أولر:

تعتمد هذه الطريقة في حل المعادلة التفاضلية $y'=f(x,y)$ على تجزئة المجال $[a,b]$ إلى n مجال جزئي طول كل من هذه المجالات:

$$h=\frac{b-a}{n} \quad ; \quad h=x_{i+1}-x_i$$

نأخذ في هذه الطريقة الحدين الأول والثاني فقط من منشور تايلور:

$$y=y_0+y'_0(x-x_0)$$

نعوض في المجال الأول وذلك بتعويض كل x بـ x_1 نجد:

$$y_1=y_0+y'_0 h \quad ; \quad y'_0=f(x_0,y_0)$$

وهكذا ..

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: أوجد قيمة الحل y_2 للمعادلة التفاضلية:

$$x' = xy^2$$

حيث الشروط الابتدائية: $y(0.5) = 0.5$ و $h = 0.1$

الحل:

$$y_1 = y_0 + y'_0 h$$

$$y_1 = 0.5 + 0.125(0.1) = 0.5 + 0.0125$$

$$y_1 = 0.5125$$

$$y_2 = 0.5125 + y'_1 h$$

$$y'_1 = (0.6)(0.5125)^2 = 0.15759$$

$$y_2 = 0.5125 + 0.15759 \times 0.1$$

$$y_2 = 0.5125 + 0.015759$$

$$y_2 = 0.528259$$

(2) طريقة أولر المحسنة (المعدلة):

وتعتمد هذه الطريقة في إيجاد القيمة العددية للحل على تقسيم المجال $[a,b]$ إلى n مجال جزئي طول كل منها h ثم نشر دالة الحل في متسلسلة تايلور حول النقطة x_0 ونكتفي بثلاثة حدود من نشور تايلور:

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{2}(x - x_0)^2$$

نعوض $x = x_1$ فنجد $y = y_1$

$$y_1 = y_0 + y'_0 h + \frac{y''_0}{2} h^2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Delta y = y_1 - y_0$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} \Rightarrow y' \cong \frac{y_1 - y_0}{\Delta x}$$

$$y'' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1' - y_0'}{\Delta x} \Rightarrow y'' \cong \frac{y_1' - y_0'}{\Delta x} = \frac{y_1' - y_0'}{h}$$

$$y_1 = y_0 + y_0' h + \frac{y_1' - y_0'}{2h} \cdot h^2$$

$$y_1 = y_0 + y_0' \frac{h}{2} + y_1' \frac{h}{2}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(y_0' + \bar{y}_1')$$

$$\bar{y}_1' = f(x_1, \bar{y}_1)$$

$$\bar{y}_1 = y_0 + h f'(x_0, y_0)$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z