كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة : **الثامنة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

4| طريقة المربعات الصغرى:

$y = f(x)$

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

ليس من الضروري أن تكون الأبعاد بين النقاط x_i ثابتة

$$x_{i+1} - x_i \neq h$$

يطلب عادةً إيجاد كثيرة الحدود $P(x)$ من $m < n$

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$$

يطلب تعيين قيم الثوابت: $a_0, a_1, \dots, a_m$ عندها يطلب

حل $m+1$ معادلة بـ $m+1$ مجهولاً.

تعطى المعادلات بالعلاقة التالية:

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^s + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{s+1} + \dots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{s+m} = \sum_{i=0}^{n} x_i^s y_i$$

حيث:

$s = \overline{0,m}$ و $i = \overline{0,n}$ نعتبر أن $x^0 = 1$ مهما كانت x أي أن $0^0 = 1$ حالة هامة تمط في هذه الطريقة

مثال:

ليكن لدينا الحالة المعطاة بالجدول التالي:

x_i	1	2	3	4
y_i	2	5	8	11

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

أوجد كثيرة حدود من الدرجة الأولى تمثل $P(x) = a_0 + a_1 x$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^{s} + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{s+1} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{s} y_i$$

$$s=0 \Rightarrow a_0 \sum_{i=0}^{3} x_i^{0} + a_1 \sum_{i=0}^{3} x_i^{1} = \sum_{i=0}^{3} x_i^{0} y_i$$

$$a_0(1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0) + a_1(1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1) = (1^0 \times 2 + 2^0 \times 5 + 3^0 \times 8 + 4^0 \times 11)$$

$$\boxed{4a_0 + 10a_1 = 26} \quad \text{---} \quad (1)$$

$$s=1 \Rightarrow a_0 \sum_{i=0}^{3} x_i^{1} + a_1 \sum_{i=0}^{3} x_i^{2} = \sum_{i=0}^{3} x_i^{1} y_i$$

$$a_0(1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1) + a_1(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = (1^1 \times 2 + 2^1 \times 5 + 3^1 \times 8 + 4^1 \times 11)$$

$$\boxed{10a_0 + 30a_1 = 80} \quad \text{---} \quad (2)$$

$$-3(1) + (2) \Rightarrow -2a_0 = -2 \Rightarrow \boxed{a_0 = -1}$$

نعوض في (1) نجد أن:

$$-4 + 10a_1 = 26$$

$$10a_1 = 30$$

$$\boxed{a_1 = 3}$$

$$\boxed{P_1(x) = -1 + 3x}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الفصل الخامس:

الطرائق العددية (التقريبية) في حساب المشتقات والتكاملات للدوال:

1. لحساب مشتق دالة $y=f(x)$ المعطاة بجدول قيم

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

نوجد كثيرة حدود الاستيفاء $P_n(x)$ بإحدى الطرائق التي درسناها سابقاً

لنبدأ بطريقة نيوتن-غريغوري الأمامية:

$$P_n(x)=y_0+R\Delta y_0+\frac{R(R-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{R(R-1)(R-2)}{3!}\Delta^3 y_0+\cdots$$

$$\frac{dP_n(x)}{dx}=P_n'(x)=\frac{dP_n(x)}{dR}\cdot\frac{dR}{dx};\quad \frac{dR}{dx}=\frac{d\frac{x-x_0}{h}}{dx}=\frac{1}{h}$$

$$P_n'(x)=\frac{1}{h}\cdot\frac{dP_n(x)}{dR}$$

$$P_n'(x)=\frac{1}{h}\left(\Delta y_0+\frac{(2R-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{(3R^2-6R+2)}{3!}\Delta^3 y_0+\cdots\right)$$

$$P_n''(x)=\frac{d^2P_n(x)}{dx^2}=\frac{1}{h^2}\cdot\frac{d^2P_n(x)}{dR^2}$$

$$P_n''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+(R-1)\Delta^3 y_0+\cdots\right]$$

$$P_n^{(3)}(x)=\frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0+\cdots\right]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: تطبق هذه الطريقة وهذه القوانين لحساب قيمة المشتق بنقطة لا تنتمي إلى نقاط الارتكاز.

المشتقات في نقاط الارتكاز:

1) من أجل $x=x_0$ نجد أن $R=0$ وبالتالي نعوض في القوانين السابقة نجد أن:

$$P_n'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \dots\right]$$

$$x=x_1 \Rightarrow R=1$$

$$P_n'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_1 - \frac{\Delta^2 y_1}{2} + \frac{\Delta^3 y_1}{3} - \frac{\Delta^4 y_1}{4} + \dots\right]$$

$$P_n'(x_i) = \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{k+1}\Delta^{k+1} y_i$$

مثال: لتكن لدينا التابع $y=f(x)$ المعطاة بالجدول التالي:

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	1	1.0948	1.1787	1.2509	1.3105	1.3570

المطلوب:

أوجد جدول الفروق الأمامية.

أوجد المشتق الأول في نقطتي الارتكاز x_0, x_2

الحل:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	1					
		0.0948				
0.1	1.0948		-0.0109			
		0.0839		-0.0008		
0.2	1.1787		-0.0117		-0.0001	
		0.0722		-0.0009		0.0005
0.3	1.2509		-0.0126		0.0004	
		0.0596		-0.0005		
0.4	1.3105		-0.0131			
		0.0465				
0.5	1.3570					

$$P_n'(x_0) = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k+1} \Delta^{k+1} y_0$$

$$P_n'(x_0) = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \frac{1}{k+1} \Delta^{k+1} y_0$$

$$P_n'(x_0) = \frac{1}{0.1} \left(\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \frac{1}{5} \Delta^5 y_0 \right)$$

$$P_n'(x_0) = 10 \left(0.0948 - \frac{1}{2}(-0.0109) + \frac{1}{3}(-0.0008) - \frac{1}{4}(-0.0001) + \frac{1}{5}(0.0005) \right)$$

$$P_n'(x_0) = 10(0.100108) = 1.00108$$

$$P_n'(x_2) = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{k+1} \Delta^{k+1} y_2$$

$$P_n'(x_2) = \frac{1}{0.1} \left[\Delta y_2 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_2 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_2 \right]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$P_n'(x_2) = \frac{1}{h}\left(0.0722 - \frac{1}{2}(-0.0126) + \frac{1}{3}(0.0005)\right)$$

$$P_n'(x_2) = \frac{1}{0.1}(0.078333) = 0.78333$$

عبارة الخطأ المرتكب:

تعطى عبارة الخطأ المرتكب في هذه الطريقة بالعلاقة:

$$\varepsilon' = \frac{h^n}{n+1} f^{(n+1)}(c) \quad ; \quad c \in [x_0, x_n]$$

$$\varepsilon' \leq \frac{h^n}{n+1} M \quad ; \quad M = \max\{|f^{(n+1)}(x_0)|, |f^{(n+1)}(x_n)|\}$$

مثال: لتكن لدينا الدالة $f(x) = x \ln x$ المعطاة بالجدول التالي:

x_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
y_i	0	0.21878	0.47106	0.75200	1.05801	1.38629

المطلوب:

① أوجد جدول الفروق الأمامية لهذه الدالة.

② أوجد قيمة المشتق الأول لهذه الدالة في النقطة $x_1 = 1.2$

③ احسب الخطأ المرتكب.

(وظيفة)

2 التكاملات العددية:

لحساب قيمة تكامل الدالة $f(x)$ على المجال $[x_0, x_n]$ لدالة معطاة بنقاط الارتكاز (x_i, y_i) بجدول مرفق والمطلوب حساب التكامل: $S = \int_a^b f(x)\,dx$ بالنحو التالي:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المساحة المحصورة بين منحني الدالة المطاة ومحور الفواصل وكل من المستقيمين $x=a$, $x=b$ وسنعتمد الطرائق التالية:

(1) طريقة المستطيلات:

أ) المستطيلات الداخلية:

$$S \cong (b-a)\cdot f(a)$$

$$S \cong (x_1-x_0) f(x_0) + (x_2-x_1) f(x_1)$$

$$S \cong (x_1-x_0) f(x_0) + (x_2-x_1) f(x_1) + (x_3-x_2) f(x_2) + (x_4-x_3) f(x_3)$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$\frac{b-a}{n} = h \Rightarrow x_{i+1} - x_i = h$$

$$S \cong (x_1-x_0) f(x_0) + (x_2-x_1) f(x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

$$S \cong h y_0 + h y_1 + \dots + h y_{n-1} = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

ب) المستطيلات الخارجية:

$$S \cong (b-a) f(b)$$

$$S \cong (x_1-x_0) f(x_1) + (x_2-x_1) f(x_2)$$

$$S \cong (x_1-x_0) f(x_1) + (x_2-x_1) f(x_2) + (x_3-x_2) f(x_3) + (x_4-x_3) f(x_4)$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$\frac{b-a}{n} = h \Rightarrow h = x_{i+1} - x_i$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$S \simeq (x_1 - x_0) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) f(x_n)$$

$$S \simeq h y_1 + h y_2 + \cdots + h y_n = h \sum_{i=1}^{n} y_i$$

مثال: أوجد القيمة العددية للتكامل الآتي:

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} \quad ; \quad h = 0.1$$

حيث الدالة $\frac{1}{x+1}$ معرفة بالجدول التالي:

x_i	y_i	x_i	y_i
0	1	0.6	0.625
0.1	0.90909	0.7	0.58823
0.2	0.83333	0.8	0.55555
0.3	0.76923	0.9	0.52631
0.4	0.71428	1	0.5
0.5	0.66666		

حل بطريقتين:

الحل:

أ) الطريقة:

$$S \simeq h \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

$$S \simeq 0.1 [1 + 0.90909 + 0.83333 + 0.76923 + 0.71428 + 0.66666 + 0.625 + 0.58823 + 0.55555 + 0.52631]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$S \simeq 0.718762$ وحدة مربعة

ب) الطريقة:

$$S \simeq h \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$S \simeq 0.1[0.90909 + 0.83333 + 0.76923 + 0.71428 + 0.66666 + 0.625 + 0.58823 + 0.55555 + 0.52631 + 0.5]$$

$S \simeq 0.66876$ وحدة مربعة

الخطأ المرتكب:

تعطى عبارة الخطأ المرتكب بالعلاقة:

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2} h \cdot f'(c) \quad ; \quad c \in [x_0, x_n]$$

$$\varepsilon \leq \frac{b-a}{2} h M \quad ; \quad M = \max\{|f'(x_0)|, |f'(x_n)|\}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة