كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية٢

المحاضرة :السابعة/عملي/

# {{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

القسم: رياضيات
السنة: الثانية
المادة: بنى جبرية ٢
الدكتور: .....
المحاضرة: السابعة عشر والأخيرة
التاريخ: / /
A to Z Library for university services

التمرين الأول:

ليكن $(A_1, +, .)$ حلقة جزئية من الحلقة $(A, +, .)$ و $B$ مثالية في الحلقة $(A, +, .)$ بيّن أنّ:

$$(A_1/(A_1 \cap B), +, .) \cong ((A_1+B)/B, +, .)$$

الحل:

لنعرف التطبيق $f: A_1 \to (A_1+B)/B$ بالشكل:

$$f(x) = x + B \quad \forall x \in A_1$$

أ) $\forall x_1, x_2 \in A_1 \Rightarrow f(x_1+x_2) = x_1+x_2+B =$

$$(x_1+B)+(x_2+B) = f(x_1)+f(x_2)$$

ب) $\forall x_1, x_2 \in A_1 \Rightarrow f(x_1 . x_2) = x_1 . x_2 + B =$

$$(x_1+B)(x_2+B) = f(x_1) . f(x_2)$$

ج) ليكن $y$ عنصراً من $A_1+B$ فإنّه لما كان كتابة بالشكل

$$y = a_1 + b \; ; \; a_1 \in A_1 \; \& \; b \in B$$

$$f(a_1) = a_1 + B = a_1 + B + B$$

$$= (a_1+B)+(b+B_1)$$

$$= (a_1+b)+B$$

$$= y + B \in (A_1+B)/B$$

وبالتالي:

$$\forall y+B \in (A_1+B)/B \Rightarrow \exists a_1 \in A_1 \; ; \; f(a_1) = y+B$$

وبالتالي $f$ غامر



مكتبة A to Z - كلية العلوم ( جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

ب) أي أن $\ker f = A_1 \cap B$ : ذلك

$$\forall x_1 \in \ker f \Rightarrow \ker f \subset A_1 \ \& \ f(x_1) = B$$
$$\Rightarrow x_1 \in A_1 \ \& \ x_1 + B = B$$
$$\Rightarrow x_1 \in A_1 \ \& \ x_1 \in B \Rightarrow x_1 \in A_1 \cap B$$
$$\ker f \subseteq A_1 \cap B \quad \cdots (1) \quad \Leftarrow$$

$$\forall x_2 \in A_1 \cap B \Rightarrow x_2 \in A_1 \ \& \ x_2 \in B$$
$$\Rightarrow x_2 \in A \ \& \ x_2 + B = B$$
$$\Rightarrow x_2 \in A_1 \ \& \ f(x_2) = B$$
$$\Rightarrow x_2 \in \ker f \Rightarrow A_1 \cap B \subseteq \ker f \quad \cdots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $\ker f = A_1 \cap B$

من أجل $(A, +, \cdot)$ و $(C, +, \cdot)$ نجد أن $f$ هومومورفيزم غامر من الحلقة $(A_1, +, \cdot)$ إلى الحلقة $((A_1+B)/B, +, \cdot)$ ونواته هي $\ker f = A_1 \cap B$ وبتطبيق مبرهنة الهومومورفيزمات نجد أن:

$$(A_1/(A_1 \cap B), +, \cdot) \cong ((A_1+B)/B, +, \cdot)$$

التمرين الثاني:

لتكن $B$ مثالية أولية في الحلقة التبديلية $(A, +, \cdot)$ ولتكن $A_1$ و $A_2$ مثاليتين في الحلقة $(A, +, \cdot)$ بحيث أن:

$$A_1 \cdot A_2 \subseteq B$$

بين أن إحدى المثاليتين $A_1$ أو $A_2$ محتواة في $B$.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

إن إحدى المثاليين $A_1$ أو $A_2$ محتواة في B لأنه إن لم يكن كذلك فإنه يمكن إيجاد عنصرين $a_1, a_2$ من $A_1$ و $A_2$ على الترتيب بحيث $a_1 \notin B$ و $a_2 \notin B$ ولكن $a_1, a_2 \in A_1, A_2$ ولكن $A_1 A_2 \subset B \Leftarrow a_1 a_2 \in B$ ولكن B مثالية أولية وإنّ انتماء العنصر $a_1 a_2$ إلى B يؤدي إلى انتماء أحد العنصرين $a_1$ أو $a_2$ إلى B وهذا تناقض

نتيجة: إذا كانت B مثالية أولية في الحلقة التبديلية $(A, +, \cdot)$ وإذا كان n عدد صحيح موجب وإذا فرضنا أنّ $A_1$ مثالية في الحلقة A بحيث:

$$A_1^n = \underbrace{A_1 A_1 \dots A_1}_{n \text{ مرة}} \subset B \Rightarrow A_1 \subset B$$

التمرين الثالث:

في الحلقة $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ بيّن أنّ:

(1) بيّن أنّ:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} ; a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$M_2(\mathbb{R})$ حلقة جزئية من

(2) برهن أنّ:

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

مثالية في الحلقة $(A, +, \cdot)$ وكل I مثالية في الحلقة $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(3) برهن أن $I$ أعظمية في $A$ :

الحل: (1) و طبيعية

(2) آ) واضح أن $I \subset A$ و $I \neq \phi$ لأن:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

ب)

$$\forall x = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \& \; y = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

$$\Rightarrow x - y = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

ج)

$$\forall x = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I \; \& \; a = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in A$$

$$\Rightarrow x \cdot a = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

$$a \cdot x = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 a_1 & a_2 b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

$\Leftarrow$ بما أن $a, b, c, d$ كما أن $I$ مثالية في الحلقة $(A_3, +, \cdot)$

$$\forall x = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I \quad \& \; y = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$x \cdot y = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a a_1 + b c_1 & a b_1 + b d_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

$$y.x = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a & a_1 b \\ c_1 a & c_1 b \end{bmatrix} \notin I$$

$\Leftarrow I$ ليست مثالية في $M_2(\mathbb{R})$

(3) لنفرض أن $J$ مثالية في $A$ حيث أن:

$I \subsetneq J \subseteq A$ بما أن $I \subsetneq J$ فإنه يوجد عنصر $x$ في $J$ ولا ينتمي إلى $I$ أي: $x = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in J$ ; $d \neq 0$

بما أن $d \neq 0$ فإن $\frac{1}{d} \in \mathbb{R}$ وبالتالي:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix}}_{\in A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}}_{\in J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in J$$

ولدينا:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I \subsetneq J \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\in J} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\in J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in J$$

$\Rightarrow I_2 \in J \Rightarrow J = A$

$\Leftarrow I$ أعظمية في $A$.

التمرين الرابع:

لتكن $R$ حلقة الأعداد الصحيحة الزوجية بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتين ولتكن $S = 4\mathbb{Z} \subsetneq 2\mathbb{Z}$ برهن أن $S$ مثالية في $R$ وهل $S$ أعظمية وهل $S$ أولية.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

أ) لنبرهن أن $\phi \neq S \subset 2\mathbb{Z}$

ب) $\forall x,y \in S \Rightarrow \exists m,m' \in \mathbb{Z} ; x=4m \ \& \ y=4m'$

$\Rightarrow x.y = 4m-4m' = 4(m-m') \in S$

ج) $\forall x \in 4\mathbb{Z} = S \ \& \ y = 2\mathbb{Z} = R \Rightarrow$

$\exists m \in \mathbb{Z} ; x = 4m$

$\Rightarrow x.y = (4m).y = 4(m.y) \in 4\mathbb{Z} = S$

د) بما أن S مثالية في R

لنفرض وجود مثالية I بحيث أن:

$4\mathbb{Z} = S \subsetneq I \subseteq R = 2\mathbb{Z}$

ولنبرهن أن $I = R$ هي الحلقة كلها.

بما أن:

$S \subsetneq I$ فإنه يوجد عنصر $x$ بحيث $x \notin S \ \& \ x \in I$

وبالتالي فإنه:

$x = 4m+2 \ ; \ m \in \mathbb{Z}$

لدينا $4m \in S \subseteq I \Rightarrow -4m \in S \subseteq I$

$x + (-4m) \in I \Rightarrow 4+2-4m = 2 \in I$

$\Rightarrow 2\mathbb{Z} \subseteq I \Rightarrow I = 2\mathbb{Z} = R$

وبالتالي ما سبق نجد أن S مثالية أعظمية.

لنفرض أن $a=2 \ , \ b=6 \Rightarrow a,b \in 2\mathbb{Z} = R$

$\& \ a,b \notin 4\mathbb{Z} = S \Rightarrow a.b = 2 \times 6 = 12 \in 4\mathbb{Z} = S$

S ليست مثالية أولية.



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التمرين الخامس :

ليكن $(A, +, \cdot)$ حلقة تبديلية ولتكن $B$ مثالية من الحلقة $(A, +, \cdot)$ بحيث $B \neq A$ بين أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المثالية $B$ أولية من الحلقة $(A, +, \cdot)$ هو أن $A/B$ تحوي حلقة المتممة $(A/B, +, \cdot)$ قواسم للصفر.

الحل :

لزوم الشرط : الفرض : $B$ مثالية أولية في الحلقة $(A, +, \cdot)$

المطلوب : $(A/B, +, \cdot)$ تحوي قواسم الصفر.

إن الحلقة $(A/B, +, \cdot)$ تحوي قواسم الصفر وذلك لأنه إذا كانت الحلقة $(A/B, +, \cdot)$ قواسم للصفر فإنه يكفي إيجاد عنصرين $a_1, a_2$ من $A$ بحيث يكون :

$$a_1 + B \neq B \ \& \ a_2 + B \neq B$$

ولكن :

$$(a_1 + B)(a_2 + B) = B \Rightarrow a_1 \cdot a_2 + B = B$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot a_2 \in B \Rightarrow$$

إما $a_1 \in B$ أو $a_2 \in B$ $\Leftarrow$

إما $a_1 + B = B$ أو $a_2 + B = B$

وهذا تناقض مع كون $a_2 + B \neq B \ \& \ a_1 + B \neq B$

كفاية الشرط :

الفرض : $(A/B, +, \cdot)$ تحوي قواسم الصفر

المطلوب : $B$ مثالية أولية في الحلقة $(A, +, \cdot)$

ليكن $x, y$ عنصرين من $A$ بحيث أن : $x \cdot y \in B$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow x.y + Bx + B = B \Rightarrow (x+B)(y+B) = B$

وبما أن $(A/B, +, .)$ تحوي مواسم الصفر فإنه إحدى المقدرين $x+B$ أو $y+B$ يساوي إلى $B$ وبما فإنه إحدى المقدرين $x$ أو $y$ على الأقل يتمي إلى $B$ وبالتالي $B$ مثالية أولية.

التمرين السادس:

لتكن $(\mathbb{R}, +, .)$ حلقة الأعداد الحقيقية بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتين وليكن:

$$f = \{ x + y\sqrt{2} \; ; \; x, y \in \mathbb{Q} \}$$

بين أن $(f, +, .)$ حقل جزئي من الحقل $(\mathbb{R}, +, .)$

الحل:

أ) واضح أن $f \subset \mathbb{R}$ وأن $f$ يحوي عنصرين على الأقل هما $1, 0$

ب) $\forall u, v \in f$ ; $u = x + y\sqrt{2}$ ; $x, y \in \mathbb{Q}$

$v = x_1 + y_1\sqrt{2}$ ; $x_1, y_1 \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow u - v = x + y\sqrt{2} - (x_1 + y_1\sqrt{2})$$
$$= x + y\sqrt{2} - x_1 - y_1\sqrt{2}$$
$$\forall u - v = \underbrace{x - x_1}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(y - y_1)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{2} \in f$$

$$\Rightarrow u - v \in f$$



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\forall u, v \in F ; v \neq 0 \Rightarrow$ (2)

$u = x + y\sqrt{2} \; ; \; x, y \in Q$

$v = x_1 + y_1\sqrt{2} \; ; \; x_1, y_1 \in Q$

$$\Rightarrow u \cdot v^{-1} = \frac{u}{v} = \frac{x + y\sqrt{2}}{x_1 + y_1\sqrt{2}} \cdot \frac{x_1 - y_1\sqrt{2}}{x_1 - y_1\sqrt{2}}$$

$$u \cdot v^{-1} = \frac{x \cdot x_1 - x y_1\sqrt{2} + y x_1\sqrt{2} - 2yy_1}{x_1^2 - 2y_1^2}$$

$$u \cdot v^{-1} = \frac{x \cdot x_1 - 2yy_1 + (yx_1 - x \cdot y_1)\sqrt{2}}{x_1^2 - 2y_1^2}$$

$$u \cdot v^{-1} = \frac{x \cdot x_1 - 2yy_1}{x_1^2 - 2y_1^2} + \frac{yx_1 - x \cdot y_1}{x_1^2 - 2y_1^2}\sqrt{2} \in F$$

ومنه جزئية من $(F, +, \cdot)$ نجد أن $(Q, +, \cdot)$ حقل

الحقل $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

النهاية



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة