كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية٢

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مبرهنة:

إذا كانت $(R,+,.)$ منطقة تكاملية، فإنّ جميع العناصر غير الصفرية فيها تملك نفس الرتبة الجمعية، وإذا كانت هذه الرتبة الجمعية متنهية وتساوي n، فإنّ $Char(R)=n$، أما إذا كانت غير متنهية فإنّ $Char(R)=0$

البرهان:

لنفرض أولاً وجود عنصر $b\neq 0$ من $(R,+,.)$ برتبة متنهية ولتكن n وبالتالي فإنّ $o(b)=n$، ولنبرهن أن جميع العناصر غير الصفرية a من R لها نفس الرتبة n.

لدينا:

$$nb=0 \Rightarrow a(nb)=0=a.0=0$$

$$(na)b=0 \Rightarrow na=0$$

لأن R منطقة تكاملية و $b\neq 0$

حتى تكون n هي رتبة a يجب أن يتحقق أيضاً أن n أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $na=0$

نفرض أنّه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث $n>m$ وتحقق أن $ma=0$، وبما أنّ:

$$ma=0 \Rightarrow b(ma)=b.0=0$$

$$\Rightarrow (mb)a=0 \Rightarrow mb=0$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

لأن R منطقة تكاملية و $a \neq 0$ وهذا تناقض مع

كون $o(b) = n \Leftarrow$

n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $n.a = 0$

وبالتالي $o(a) = n$ لكل a من R وبالتالي R

$Char(R) = n$

لنفرض أنه يوجد عنصر b من $(R, +, .)$ برتبة غير منتهية،

وبالتالي من جهة فإنّ جميع العناصر غير الصفرية من

المنطقة التكاملية $(R, +, .)$ لها رتبة غير منتهية،

من جهة ثانية فإنّ: $Char(R) = 0$

مناطق التحليل الوحيد

تعريف:

لتكن $(A, +, .)$ حلقة تبديلية إذا كان $\forall a \neq 0$

$b \neq 0$ عنصرين من A فإننا نقول إن a يقسم b أو نقول

إن a من مضاعفات b في A ونرمز لذلك بالرمز $a \mid b$

أو بالرمز $a = 0 \pmod b$ إذا كان بالإمكان إيجاد

عنصر c من A بحيث يكون $a = bc$

إذا كان b غير قاسم لـ a فإننا سنرمز لذلك بالرمز $b \nmid a$

نتائج:

لتكن $(A, +, .)$ حلقة تبديلية.

1) إذا كانت $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $c \neq 0$ ثلاثة

عناصر من A، إذا كان a قاسم لـ b في A و b قاسم

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لـ c في A فإن a ما لـ c في A.

2) إذا كانت $a\neq 0$ ، $b\neq 0$ و $c\neq 0$ ثلاث عناصر من A، وإذا كان a يقسم كلاً من b و c فإنّ a يقسم $\lambda b+\mu c$ في A ولكل $\lambda,\mu\in A$

3) إذا كانت $(A,+,.)$ ذات عنصر وحدة، ولتكن $a\neq 0$ عنصراً ما من A، فإنّ a يقسم نفسه في A.

$$a=a.1$$

4) إذا كانت $(A,+,.)$ ذات عنصر وحدة، ولتكن $a\neq 0$ عنصراً ما من A. إذا كان لـ a مقلوب في A بالنسبة للولبة $(.)$ فإنّ a يقسم أي عنصر من A في A.

$$b=b.1=b(a^{-1}.a)=(b.a^{-1})a$$

5) إذا كانت $(A,+,.)$ ذات عنصر وحدة 1، إنّ العناصر القابلة للقلب في A هي فقط العناصر التي لها مقاسم لـ 1 في A

$$1=a^{-1}.a$$

$$1=c.b \Rightarrow c=b^{-1}$$

لأن الكلمة تبديلية.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف:

لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة تبديلية ذات إذا كانت $a\neq 0$ و $b\neq 0$ عنصرين من A فإننا نقول عن العنصر d المنتمي إلى A إنّه قاسم مشترك أعظمي لـ a,b في A، ونرمز له بـ $d=(a,b)$ إذا تحقق:

① d قاسم مشترك لـ a و b في A أي أنّ:

$$d\mid a \;\&\; d\mid b$$

② إذا وجد قاسم مشترك آخر d' لـ a و b في A فإنّ d' يقسم d في A.

تعريف:

لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة، وليكن $a\neq 0$ و $b\neq 0$ عنصرين من A. نقول عن العنصرين a و b إنهما شريكان في A إذا كان بالإمكان كتابة أحد العنصرين a و b وليكن a بالشكل:

$$a=b\varepsilon$$

حيث ε عنصر قابل للقلب في A.

نتيجة:

لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة، وليكن $a\neq 0$ و $b\neq 0$ عنصرين من A، فإنّه إذا كان العنصر a شريك العنصر b فإنّ العنصر b شريك العنصر a أيضاً، وذلك لأنه:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إذا كان $a=b\varepsilon$ حيث ε عنصر قابل للقلب في A،
فإنّ: $b=a.\varepsilon^{-1}$

برهنة:

لتكن $(A,+,.)$ بنية تكاملية، ولتكن $a\neq 0$ & $b\neq 0$ عنصرين من A، إنّ الشرط اللازم والكافي لكي يكون a و b شريكين في A هو أن يكون كلّ من العنصرين a و b قاسم للآخر في A.

البرهان:

لزوم الشرط: الفرض: A و B شريكان في A.
المطلوب: كلّ من العنصرين a و b قاسم للآخر في A.
إثبات البرهان واضح من كون A و B شريكان في A.

كفاية الشرط: الفرض: كلّ من العنصرين a و b قاسم للآخر في A.
المطلوب: a و b شريكان في A.
بما أنّ كلّ من العنصرين a و b قاسم للآخر في A، فإنّه يوجد إذاً عنصرين c_1, c_2 من A بحيث يكون:

$$a=b.c_1 \quad \& \quad b=a.c_2$$

$$a=a.c_2.c_1 \Rightarrow a(1-c_2.c_1)=0$$

$$\Rightarrow 1-c_2.c_1=0$$

بما أنّ A منطقة تكاملية و $a\neq 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow c_2 \cdot c_1 = 1$

إذا المقسومين c_1, c_2 قابلان للقلب في A، وبالتالي العلاقات: $a = b c_1$ & $b = a \cdot c_2$ تبين لنا أن a, b شريكان في A.

الحلقات الإقليدية

تعريف:

الحلقة الإقليدية هي بنية تكاملية $(A, +, \cdot)$، في مقابل كل عنصر a منها يختلف عن الصفر وغير عدد صحيح معين غير سالب $\varphi(a)$ حيث $\varphi: A \to \mathbb{Z}^+$، حيث أن φ تحقق الشرطين الآتيين:

1) إذا كان $a \neq 0$ و $b \neq 0$ عنصرين من A بحيث أن b يقسم a في A فإن $\varphi(b) \leq \varphi(a)$

2) من أجل كل عنصرين a و $b \neq 0$ من A يوجد عنصران q, r من A بحيث يكون $a = bq + r$ وإذا أن r يكون صفراً أو يكون $\varphi(r) < \varphi(b)$

نتائج:

1) لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة إقليدية، ليكن $a \neq 0$ و $b \neq 0$ عنصرين من A. إذا كان a و b شريكان في A، فإن $\varphi(a) = \varphi(b)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

البرهان:

1) إذا كان a, b شريكان في A، فإنّ العلاقة بين a و b تلاؤم للأخرى في A، وبالتالي فإنّ:

$$\varphi(b) \leq \varphi(a) \quad \& \quad \varphi(a) \leq \varphi(b)$$

$$\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

2) لتكن $(A, +, \cdot)$ حلقة إقليدية، وليكن $a \neq 0$ و $b \neq 0$ عنصرين من A إذا كان a قاسم لـ b في A، وإذا كان $\varphi(a) = \varphi(b)$ فإنّ a و b شريكان في A.

البرهان:

بما أنّ $(A, +, \cdot)$ حلقة إقليدية، فإنه من أجل العنصرين a, b يوجد عنصران r, q بحيث يكون:

$$a = b \cdot q + r$$

و r إما أن يكون صفر أو يكون $\varphi(r) < \varphi(b)$

إن $r = 0$ لأنه إذا كانت $r \neq 0$ فإنّ:

$$\varphi(r) < \varphi(b) = \varphi(a) \Rightarrow \varphi(r) < \varphi(a)$$

وهذه ثنائية لأنّه بما أنّ a يقسم b في A فإنّه بالإمكان إيجاد عنصر c من A بحيث يكون: $b = a \cdot c$

وبالتالي فإنّ

$$a = b \cdot q + r \Rightarrow r = a - bq$$

$$r = a - a \cdot cq \Rightarrow a(1 - cq)$$

وبما أنّ a يقسم r في A، وبالتالي:

$$\varphi(a) \leq \varphi(r)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وهذا متناقض لو كون $\varphi(r) < \varphi(a)$ وهذا يعني $r=0$ وعليه:

$$a = b.q + r \;\&\; r=0 \Rightarrow a = b.q$$

وبالتالي b يقسم q في A، وبما أن q يقسم b في A، فإنّ b, q شريكان في A.

3) لتكن $(A, .)$ حلقة إبدالية، ولتكن $a \neq 0$ عنصراً من A. الشرط اللازم والكافي لكي يكون a قابلاً للقلب هو أن يكون $\varphi(a) = \varphi(1)$

البرهان:

لزوم الشرط: الفرض: a قابل للقلب

المطلب: $\varphi(a) = \varphi(1)$

بما أن a قابل للقلب فإنّ: $a.a^{-1} = 1$

حيث a^{-1} هو مقلوب a وعليه فإنّ $a, 1$ شريكان في A وبالتالي $\varphi(a) = \varphi(1)$

كفاية الشرط: الفرض $\varphi(a) = \varphi(1)$

المطلب a قابل للقلب

بما أن 1 يقسم a في A فإنّ: $a = 1.a$

وبما أن $\varphi(a) = \varphi(1)$، فإنّ $a, 1$ شريكان في A.

ومنه فإنّه بالإمكان إيجاد عنصر قابل للقلب c من A بحيث يكون $a.c = 1$ وهذا يبين لنا أن a قابل للقلب في A.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين:

لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة إقليدية، ولتكن $a\neq 0$ و $b\neq 0$ عنصرين من A، لنبرهن أن b غير قابل للقلب في A.

والمطلوب: بيان أن $\varphi(a)<\varphi(a\cdot b)$

الحل:

بما أن a يقسم $a\cdot b$ فإنّ:

$$\varphi(a)\leq\varphi(a\cdot b)$$

إنّ $\varphi(a)=\varphi(a\cdot b)$ علمنا أنّه إذا كان $\varphi(a)\neq\varphi(a\cdot b)$ فإنّ هذا يعني أنّ a يقسم $a\cdot b$ في A، بينما لنا أنّ a و $a\cdot b$ متباينان في A، وبالتالي يوجد عنصر قابل للقلب c في A، بحيث يكون:

$$a\cdot b=a\cdot c\Rightarrow a(b-c)=0\Rightarrow b-c=0$$

لأنّ A منطقة تكاملية، و $a\neq 0$ $\Leftarrow$ $b=c$ وهذا يناقض كون b غير قابل للقلب في A. وعليه فإنّ:

$$\varphi(a)\leq\varphi(a\cdot b)\ \&\ \varphi(a)\neq\varphi(a\cdot b)\Rightarrow$$

$$\varphi(a)<\varphi(a\cdot b)$$

وهو المطلوب.

النهاية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة