كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٤

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المشتقات الجزئية وتفاضل التابع بعدة متحولات:

المشتقات الجزئية:

لتكن $u = f(x, y, z)$ تابعة معرفة في جوار ما للنقطة $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ وتعويض في التابع u: $y = y_0$ و $z = z_0$ نجد $f(x) = f(x, y_0, z_0)$ وهي تابعة لمتحول واحد فقط هو x عندئذٍ ندعو مشتق التابع $f(x)$ بالنسبة لـ x في النقطة $x = x_0$ بالمشتق الجزئي للتابع u في النقطة $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ بالنسبة لمتحول x ونرمز له بأحد الرموز التالية f'_x أو u'_x أو $\frac{\partial f}{\partial x}$ أو $\frac{\partial u}{\partial x}$

ونكتب:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x, y_0, z_0)}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

وبالاعتماد على تعريف مشتق التابع التابعة لمتحول واحد نكتب:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} f \quad ;$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$\Delta_x f = \Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$

$\Delta_x f = f(x_0, y_0, z_0) - f(x_0, y_0 + z_0)$

& $\Delta x = x - x_0$

يشكل مشابه لما سبق نعرف المشتق الجزئي للدالة u في النقطة $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ بالنسبة للمتحول y ونرمز له بأحد الرموز التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f'_y, \quad u'_y$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = \frac{\partial f(y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x_0, y, z_0)}{\partial y}\Big|_{y=y_0}$$

وبالاعتماد على تعريف المشتق لدالة تابعة لمتحول واحد نكتب:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y + z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = \lim_{* \Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} \quad ; \quad \Delta_y f = \Delta_y u =$$

$$f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$$

$$\Delta_y f = f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) \quad \&$$

$$\Delta y = y - y_0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبشكل مشابه لما سبق نعرف المشتق الجزئي للدالة u في النقطة $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ بالنسبة للمتحول z ونرمز له بأحد الرموز التالية: u'_z ، f'_z ، $\frac{df}{dz}$ ، $\frac{\partial u}{\partial z}$

$$\frac{\partial u(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}=\frac{df(z)}{dz}=\frac{df(x_0,y_0,z_0+\Delta z)}{dz}\Big|_{z=z_0}$$

وبالاعتماد على تعريف مشتق الدالة التابعة لمتحول واحد نكتب:

$$\frac{\partial u(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta z}$$

$$\frac{\partial u(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta_z f}{\Delta z}\ ;$$

$$\Delta_z f=\Delta_z u=f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)$$
$$=f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)\quad \&$$
$$\Delta z=z-z_0$$

$$f'_{x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i}\ ;$$

$$\Delta_{x_i} f=f(x_0^\circ,\dots,x_i^\circ+\Delta x_i,x_{i+1}^\circ,\dots,x_n^\circ)-$$
$$f(x_0^\circ,\dots,x_i^\circ,\dots,x_n^\circ)$$
$$\Delta_{x_i} f=f(x_0^\circ,\dots,x_i,x_{i+1}^\circ,\dots,x_n^\circ)-f(x_0^\circ,\dots,x_i^\circ,\dots,x_n)$$
$$\Delta x_i=x_i-x_i^\circ$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ندعو المشتقات الجزئية f'_x ، f'_y ، f'_z بالمشتقات الجزئية للدالة f من المرتبة الأولى.

تعريف: ندعو تفاضل الدالة $u = f(x, y, z)$ بالنسبة للمتحول x حيث y, z ثابتان بالتفاضل الجزئي للدالة f بالنسبة للمتحول x ونرمز له بالرمز $d_x f$ ونكتب:

$$d_x f = \frac{\partial f}{\partial x} dx = f'_x dx$$

وبشكل مشابه نجد أن التفاضل الجزئي للدالة f بالنسبة للمتحول y هو:

$$d_y f = \frac{\partial f}{\partial y} dy = f'_y dy$$

والتفاضل الجزئي للدالة f بالنسبة للمتحول z هو:

$$d_z f = \frac{\partial f}{\partial z} dz = f'_z dz$$

ويكون التفاضل الكلي للدالة f والذي نرمز له بالرمز df أو du هو:

$$df = du = d_x f + d_y f + d_z f$$
$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$$

التفاضل الكلي عبارة عن مجموع التفاضلات الجزئية للدالة f.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: احسب التفاضل التام أو الكلي للدالة f حيث:

$$u = f(x,y) = xy\,e^{y/x}$$

الحل:

نعلم أن التفاضل التام لدالة f التابعة لمتحولين x,y يعطى بالشكل:

$$df = du = d_x f + d_y f = f'_x\,dx + f'_y\,dy$$

* حساب f'_x:

$$f'_x = y\,e^{y/x} + \left(-\frac{y}{x^2}\,(xy)\,e^{y/x}\right)$$

$$f'_x = y\,e^{y/x} - \frac{y^2}{x}\,e^{y/x} = e^{y/x}\left(y - \frac{y^2}{x}\right)$$

* حساب f'_y:

$$f'_y = x\,e^{y/x} + xy\,\frac{1}{x}\,e^{y/x} = e^{y/x}(x+y)$$

نعوض في عبارة التفاضل التام نجد أن:

$$df = y\,e^{y/x}\left[1 - \frac{y}{x}\right]dx + \left[(x+y)\,e^{y/x}\right]dy$$

قابلية المفاضلة لدالة تابعة لمتحولين:

لتكن $z = f(x,y)$ دالة معرفة على أي جوار مفتوح للنقطة $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ وليكن هذا الجوار هو $N(M_0, \varepsilon)$ وليكن $M = (x,y)$ نقطة أيضاً من هذا الجوار عندئذٍ فإن تزايد المتحولين x,y هما $\Delta x = x - x_0$ و $\Delta y = y - y_0$ والمسافة بين النقطتين

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حيث M_0, M :

$$d = d(M, M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$$

حيث: $(\Delta x)^2 = \Delta x^2$ & $(\Delta y)^2 = \Delta y^2$

يكون التزايد الكلي (التغير الكلي) أو التام للدالة z في النقطة M_0 هو:

$$\Delta z(M_0) = \Delta f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$
$$= f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

تعريف الدالة القابلة للمفاضلة:

نقول الدالة: $z = f(x, y)$ قابلة للمفاضلة في النقطة $M_0 = (x_0, y_0)$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$\exists A, B;\ \Delta z = \Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \varphi(\Delta x, \Delta y),\ d \to 0 \quad (*)$$

حيث:

$$\lim_{\substack{d \to 0 \\ (\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0)}} \varphi(\Delta x, \Delta y) = 0$$

حيث

$$\varphi(0,0) = 0 \quad \& \quad d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

إذا كانت الدالة $z = f(x, y)$ قابلة للمفاضلة فإننا نقول الجزء الخطي: $A\Delta x + B\Delta y$ من الشرط $(*)$ بالتفاضل التام أو الكلي للدالة f ونرمز له بالرمز df

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ونكتب $df = A\Delta x + B\Delta y$ ونوزع و $\Delta x = dx$ كما أن $\Delta y = dy$

$$df = A\,dx + B\,dy$$

نظرية: إذا كانت $z = f(x,y)$ دالة قابلة للمفاضلة في النقطة $M_0(x_0, y_0)$ وكان تفاضلها التام هو $df = A\,dx + B\,dy$ عندئذٍ فإنّ لهذه الدالة مشتقات جزئية في النقطة M_0 ويكون لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = A \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = B$$

ونكتب عندئذٍ:

$$df = f'_x\,dx + f'_y\,dy$$

نتيجة: يصبح الشرط (*) بالشكل:

$$\Delta z = \Delta f = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + \varphi(\Delta x, \Delta y)d$$

بالعكس نظرية مباشرة:

الدالة $z = f(x,y)$ دالة قابلة للمفاضلة في النقطة $M_0 = (x_0, y_0)$ إذا وفقط إذا:

$$\exists\, f'_x(M_0), f'_y(M_0);\ \Delta f(M_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + \varphi(\Delta x, \Delta y)d \quad \ldots (**)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varphi(\Delta x, \Delta y) = 0 \quad , \quad d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة ثانية :

في التطبيقات العملية (الأمثلة) عندما يطلب إليك دراسة قابلية الدالة f للمفاضلة في نقطة ما لتكن M_0 نتبع مايلي :

أولاً : نحسب الثوابت A و B وفقاً لنظرية السابقة كمايلي :

$$A = f'_x(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} \quad \& \quad B = f'_y(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}$$

نأخذ العبارة Δf ونطرح منها قيمة كلاً من A و B ثم نحسب منها الدالة $\varphi(\Delta x, \Delta y)$ ونختبر فيما إذا كانت :

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varphi(\Delta x, \Delta y) = 0$$

وتصادف هنا الحالتين :

① $\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varphi(\Delta x, \Delta y) = 0$ عندئذٍ نقول إن

الدالة φ دالة لامتناهية في الصغر والدالة f دالة قابلة للمفاضلة في النقطة M_0

② $\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varphi(\Delta x, \Delta y) \neq 0$ أي أن φ ليست دالة لامتناهية في الصغر وبالتالي الدالة f غير قابلة للمفاضلة في النقطة M_0

مثال : إذا كانت $z = f(x,y)$ وطلب منك حساب $f'_x(M_0)$ و $f'_y(M_0)$ أي حساب المشتقات الجزئية من

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المرتبة الأولى للتابع f في نقطة معينة (إن وجدت) عندئذٍ من الأفضل أن نحسبها من تعريف f'_x و f'_y بالاعتماد على النهايات أي:

$$f'_x(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} \quad ; \quad f'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}$$

لأنه إذا أردنا حساب f'_x باشتقاق التابع f بالنسبة لـ x بشكل عام ثم عوضنا بالنقطة M_0 عندئذٍ يمكن أن يصادفنا عدم تعيين فنتجنبه بحساب $f'_x(M_0)$ باستخدام العلاقات أعلاه وكذلك بالنسبة لـ $f'_y(x_0)$

مثال: لتكن التابع $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

المطلوب: ادرس تابلية التابع f للمفاضلة في النقطة $(0,0)$

الحل:

نكتب تزايد التابع f بالشكل:

$$\Delta f(0,0) = A\Delta x + B\Delta y + \varphi(\Delta x, \Delta y)d$$

حيث كلٌّ من A و B من العلاقات:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

$$B = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta y^3}}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} 1 = 1$$

نعوض في العبارة (*) نجد أن:

$$\Delta f(0,0) = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = \Delta x + \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} = \Delta x + \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

ومنه:

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} - \Delta x - \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

لكن نتحقق فيما إذا كانت ε دالة كتاهية في الصفر من أجل ذلك نأخذ المتالية:

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

ولكن:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3}} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{\frac{\sqrt[3]{2}}{n} - \frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}}$$

$$\varepsilon\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وبالتالي:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \neq 0$$

وبالتالي الدالة $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ ليست دالة كتاهية في الصفر والدالة f ليست دالة قابلة للاشتقاق في النقطة $(0,0)$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^2$ بالشكل:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & ; x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ; x^2+y^2=0\end{cases}$$

المطلوب: دراسة قابلية الدالة f للمفاضلة في النقطة $(0,0)$

الحل: نكتب تزايد الدالة f في النقطة $(0,0)$ بالشكل التالي:

$$\Delta f(0,0)=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=$$
$$f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

ثم نحسب $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y}\frac{\Delta y f}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y^2}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\Delta y=0$$

ثم نعوض في عبارة التزايد فنجد أن:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{\Delta x^4+\Delta y^4}{\Delta x^2+\Delta y^2} = \varphi(\Delta x,\Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$\Rightarrow \varphi(\Delta x,\Delta y) = \frac{\Delta x^4+\Delta y^4}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{3/2}}$$

لنتحقق أن φ دالة كاملية في الصفر.

$$0 < \left|\frac{\Delta x^4+\Delta y^4}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{3/2}}\right| = \frac{\Delta x^4+\Delta y^4}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{3/2}} \leq \frac{\Delta x^4+2\Delta x^2\Delta y^2+\Delta y^4}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{3/2}}$$

$$0 < \left|\frac{\Delta x^4+\Delta y^4}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{3/2}}\right| \leq \frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)^2}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{3/2}} = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = 0$$

وحسب مبرهنة الاحاطة فإن:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \varphi(\Delta x,\Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x^4+\Delta y^4}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{3/2}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \varphi(\Delta x,\Delta y) = 0$$

وبالتالي الدالة $\varphi(\Delta x,\Delta y)$ دالة كاملية في الصفر

وبنفس البرهان p مماثلة للمفاضلة

النهاية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z