كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي٢

المحاضرة : **الثالثة عشر /نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مثال:

$$\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x|\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 1 + 1 = 2.$$

مثال:

$$I = \int_1^3 |(x-1)(x^2-4)|\,dx$$

نبحث إشارة الجداء $(x-1)(x^2-4)$

x	-2		1		2
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	0
$(x-1)(x^2-4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

x		2		3
$x-1$	$+$	$+$	$+$	
x^2-4	$-$	0	$+$	
$(x-1)(x^2-4)$	$-$	0	$+$	

$$I = \int_1^2 -(x-1)(x^2-4)\,dx + \int_2^3 (x-1)(x^2-4)\,dx$$

$$= \int_1^2 (-x+1)(x^2-4)\,dx + \int_2^3 (x-1)(x^2-4)$$

$$= \int_1^2 (-x^3+4x+x^2-4) + \int_2^3 (x^3-4x-x^2+4)$$

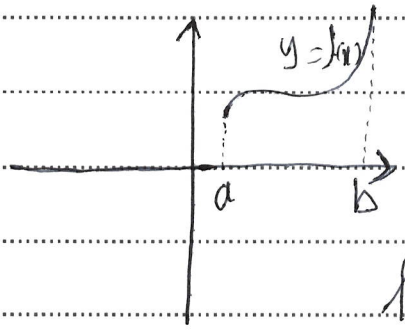
$$= [-x^3+4x+x^2-4]_1^2 + [x^3-4x-x^2+4]_2^3 = [0] + [10-0]$$

$$= 10.$$

تطبيقات هندسية على استخدام التكامل المحدد

① ما هي أطوال أقواس المنحنيات

أولاً: في الإحداثيات الديكارتية



$y = f(x);\ a \le x \le b$

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

مثال: أوجد طول قوس منحنى التابع $y = -\ln\cos x$ حيث $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

الحل:

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$y' = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|\frac{1}{\cos x}\right| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \left[\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left|\tan\frac{3\pi}{8}\right|$$

مثال: أوجد طول قوس منحنى التابع $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ المعرف على المجال $I = [0, 1]$

الحل:

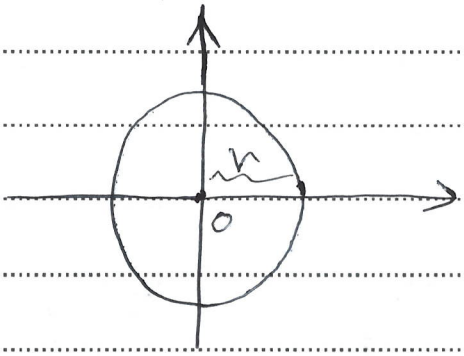
$f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$f'(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$

$$\left[\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\right]_0^1 = \frac{4}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: اوجد طول محيط الدائرة $x^2+y^2=r^2$ باستخدام التكامل المحدد.



$y^2 = r^2 - x^2$

$y = \sqrt{r^2-x^2}$ أو $-\sqrt{r^2-x^2}$

طول محيط الدائرة $L = 4\int_0^R \sqrt{1+y'^2}\,dx = 4\int_0^R \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}\right)}\,dx$

$4\int_0^R \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = 4\int_0^R \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx = 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$

$= 4\times r\int \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = 4r\left[\arcsin x\,\frac{x}{r}\right]_0^r = 4r\times\frac{\pi}{2}$

$= 2\pi r$

2- إذا كان المنحني معطى بالشكل الوسيطي $x = x(t)$

$y = y(t)\ ;\ \alpha \le t \le \beta$

حيث $x(t)$ و $y(t)$ دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال $[\alpha,\beta]$ والمشتقات على هذا المجال.

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

مثال: احسب طول قوس من التابع المعطى بالشكل الوسيطي

$x = \cos t + t\sin t$

$y = \sin t - t\cos t\ ;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

$x' = -\sin t + \sin t + t\cos t$

$x' = t\cos t$

$* \; y = \cos t - \cos t + t\sin t$

$y' = t\sin t$

$$\ell = \int_0^{\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{t^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\, dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$$

مثال: طول قوس منحنية التابع المعرف بالشكل الوسيطي:

$x = x(t) = a(t - \sin t)$; $a > 0$

$y = y(t) = a(1 - \cos t)$; $0 < t \le 2\pi$.

الحل:

$x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a\sin t$.

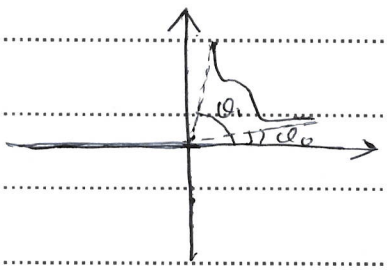
$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2 - 2a^2\cos t}\, = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt.$$

$$= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} |\sin\tfrac{t}{2}|\, dt.$$

$$2a \int_0^{2\pi} \sin\tfrac{t}{2}\, dt = 2a\left[-2\cos\tfrac{t}{2}\right]_0^{+2\pi} = 8a$$

مثال: إذا كانت r الدالة معطاة بالشكل القطبي:

$r = f(\theta)$; $\theta_0 < \theta < \theta_1$



$$\ell = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta.$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: احسب طول قوس منحنى التابع المعطى بالاحداثيات القطبية

$r = a(1+\cos\theta)$; $a>0$ $\quad 0 \le \theta \le \pi$

الحل:

$r' = a(-\sin\theta) = -a\sin\theta$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta+a\sin^2\theta)}\,d\theta$$

$$= a\int_0^{\pi} \sqrt{(1+2\cos\theta+1)}\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\,a\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\,a\int_0^{\pi} \sqrt{(2\cos^2\frac{\theta}{2})}\,d\theta = 2a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2a\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$2a\left[2\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin\theta\right]_0^{\pi} = 4a.$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة