

الدكتور :

المحاضرة:

13 نظرية



التاريخ: / /

A to Z Library for university services

القسم: الرياضيات -

السنة: الأولى

المادة: تحليل رياضي

مثال:

$$\int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ = 1 + 1 = 2.$$

مثال:

$$I = \int_1^3 |(x-1)(x^2-4)| dx$$

$$(x-1)(x^2-4)$$

دراسة إشارة الجداء

x	-2	1	2
x-1	-	-	+
x ² -4	+	+	-
(x-1)(x ² -4)	-	+	-

$$I = \int_1^2 -(x-1)(x^2-4) dx + \int_2^3 (x-1)(x^2-4) dx$$

$$= \int_1^2 (-x^3+4x+x^2-4) dx + \int_2^3 (x^3-4x-x^2+4) dx$$

$$= \int_1^2 (-x^3+4x+x^2-4) dx + \int_2^3 (x^3-4x-x^2+4) dx$$

$$= [-\frac{x^4}{4}+2x^2+\frac{x^3}{3}-4x]_1^2 + [\frac{x^4}{4}-2x^2-\frac{x^3}{3}+4x]_2^3 = [0] + [10-0] \\ = 10.$$

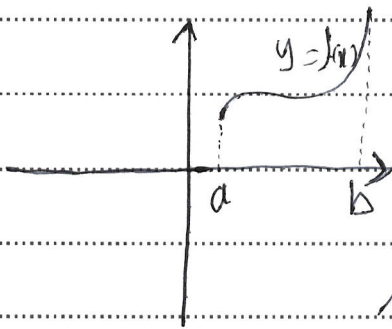


تجربا - من اجل عدم قيام السكاك بالسر

① ما به أحوال أقوا رب المنزلة

أولاً: في الامتحانات الدراسية

$$y = f(x); a \leq x \leq b.$$



$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

مثال: ۱. دہ طول قوس منحیہ التابیہ $y = 1 - \cos x$ دہ

$$x \in [0, \frac{\sqrt{y}}{y}]$$

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$$

$$y' = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| \frac{1}{\cos x} \right| \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \left[\ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \left| \tan \frac{3\pi}{8} \right|$$

المسألة: $f(x) = \frac{2}{3}x^3$ من أجل $I = [0, 1]$ أوجد طول قوس

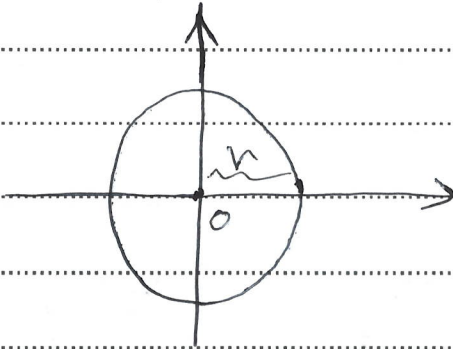
التأثير على النقطة (0/0) إلى النقطة $(\frac{2}{3}, 1)$

$$f(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \Rightarrow \int \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int \sqrt{1 + x} dx$$

$$\left[\frac{2}{3} \sqrt{1+x^3} \right]_0^1 = \frac{4}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3}$$

مثال: اوجد طول محيط الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ باستخدام التكامل



$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{أو} \quad -\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$P = \int_0^R 4x \sqrt{1 + y'^2} dx = 4x \int_0^R \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx$$

$$4x \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4x \int_0^R \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^R \frac{4r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= 4xr \int_0^R \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4r [\arcsin \frac{x}{r}]_0^R = 4r \times \frac{\pi}{2} = 2\pi r$$

2- إذا كان المنحنى معطى بالشكل المعطى $x = x(t)$

$$y = y(t) ; a \leq t \leq b$$

حيث $x(t)$ و $y(t)$ دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال

$[a, b]$ ولا يتقاطعت على هذا المجال

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

مثال: اوجد طول قوس منحنى التايو المعطى بالشكل المعطى

$$x = \cos t + t \sin t$$

$$y = \sin t - t \cos t ; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

الحل

$$x' = -\sin t + \sin t + t \cos t$$

$$x' = t \cos t$$

$$* y = \cos t - \cos t + t \sin t$$

$$y' = t \sin t$$

$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^{\pi} \sqrt{t^2} dt = \int_0^{\pi} t dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

بالإضافة إلى قوة متجهة التغير المتجه بالأسفل البسيط

$$x = x(t) = a(t - \sin t) \text{ حيث } a > 0$$

$$y = y(t) = a(1 - \cos t) \text{ حيث } 0 \leq t \leq 2\pi$$

الحل

$$x' = a(1 - \cos t), \quad y' = a \sin t$$

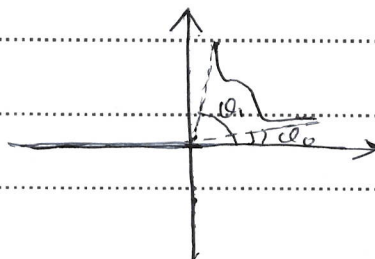
$$P = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2 - 2a^2 t \cos t} dt = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt$$

$$= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \left(\frac{t}{2}\right)} dt = 2a \int_0^{2\pi} |\sin \frac{t}{2}| dt$$

$$2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2a [-2 \cos \frac{t}{2}]_0^{2\pi} = 8a$$

بالإضافة إلى قوة متجهة التغير المتجه بالأسفل البسيط

$$r = r(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \alpha$$



$$P = \int_0^{\alpha} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

مثال: اكتب طول قوس منحنى التاربز المثلث بالاعتماديات القطبية

$$r = a(1 + \cos \theta) \text{ و } a > 0 \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

الحل:

$$r' = a(-\sin \theta) = -a \sin \theta$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} d\theta$$

$$= a \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos \theta + 1} d\theta$$

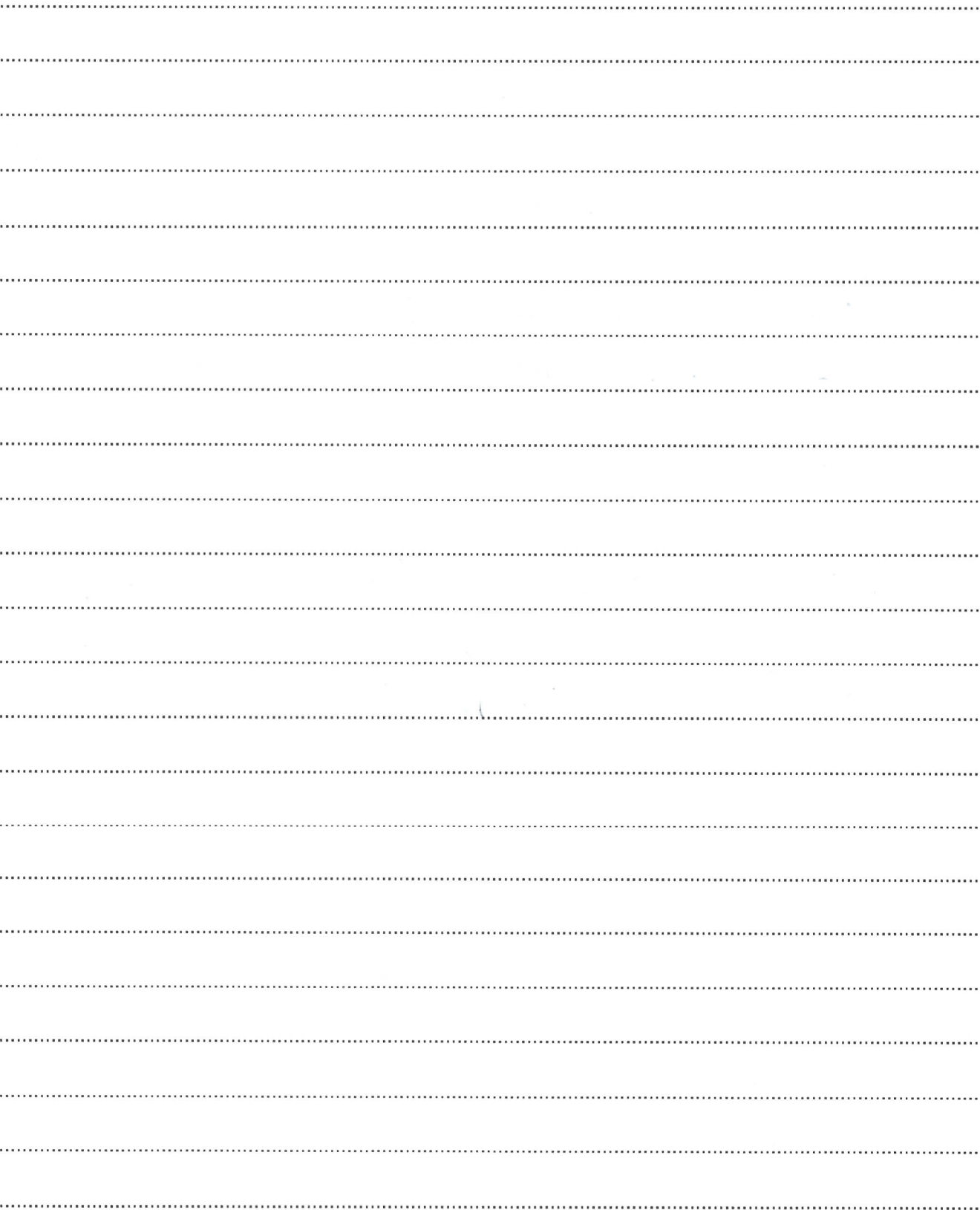
$$= \sqrt{2} a \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta$$

$$= \sqrt{2} a \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 2a [2\sin \frac{\theta}{2}]_0^{\pi}$$

$$2a [2\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin 0]_0^{\pi} = 4a$$

النتيجة النهائية

THE STATE OF TEXAS, COUNTY OF DALLAS, ss. I, _____, Clerk of the County of Dallas, do hereby certify that the foregoing is a true and correct copy of the original as the same appears from the records of said County.



THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS