ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الاولى

اسئلة دوراات محلولة

جبر خطي ٢

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة)

بمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

الجمهورية العربية السورية | امتحان جبر خطي 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الأولى- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الأولى | اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (35 درجة) **1-** ليكن $f: V_1 \to V_2$ تطبيق خطي فوق حقل K. برهن أن الصورة العكسية وفق f لأي فضاء شعاعي جزئي W_2 من الفضاء V_2 هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V_1.

2- ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الشعاعي R^3 معرفاً وفق القاعدة:

$$f(x,y,z)=(x-y-z,x-2z,x-2y+z)$$

أ - أوجد مصفوفة الإنتقال T من الجملة $E=\{e_1=(1,1,1),e_2=(1,1,0),e_3=(1,0,0)\}$ إلى الجملة $D=\{d_1=(1,0,0),d_2=(0,1,0),d_3=(0,0,1)\}$.

ب - أوجد مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للجملة D بطريقين مختلفتين.

السؤال الثاني: (30 درجة) **1-** هل يوجد محول خطي يحقق الشرط $f(1,2)=(3,6)$, $f(-1,1)=(3,0)$ ؟ إذا كان ذلك ممكناً أوجد قاعدة تعريف له.

2 - أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمؤثر الخطي المعرف بالشكل:

$$f(x,y)=(2x+y,2x+3y)$$

السؤال الثالث: (25 درجة) **1-** في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ استخدم القاعدة $S=\{x_1=(1,-1,1),x_2=(2,2,0),x_3=(1,0,0)\}$ وطريقة جرام _ شميدت لبناء قاعدة نظامية التعامد لـ $\mathbb{R}^3$.

2- أوجد شكل ثنائي الخطية على $\mathbb{R}^2$ والممثل للمصفوفة $\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ بالنسبة للقاعدة $\{(1,1),(1,0)\}$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2025-2-23

د. علياء حكيم

A to Z

السؤال الأول [35]

ا) P_3 ⊇ V_1 مع أن V_1 ≠ ∅ ، $f^{-1}(W_2)$ ≠ ∅ لأن $f(0_{V_1}) = 0_{V_2} \in W_2$ ، فإن $0_{V_1} \in f^{-1}(W_2)$

ب) $\forall x_1, x_2 \in f^{-1}(W_2)$ ، $\alpha, \beta \in K \Rightarrow f(x_1), f(x_2) \in W_2$

$\Rightarrow \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \in W_2 \Rightarrow f(\alpha x_1 + \beta x_2) \in W_2$ 7/

$\Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in f^{-1}(W_2)$

ج) أ) نوجد $T_{E \to D}$ ثم نحصل على المطلوب.

$d_1 = (1,0,0) = 0(1,1,1) + 0(1,1,0) + 1(1,0,0)$

$d_2 = (0,1,0) = 0(1,1,1) + 1(1,1,0) - 1(1,0,0)$

$d_3 = (0,0,1) = 1(1,1,1) - 1(1,1,0) + 0(1,0,0)$ 5/

$$T_{E \to D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) أ)

$f(d_1) = f(1,0,0) = (1,1,1) = 1d_1 + 1d_2 + 1d_3$

$f(d_2) = f(0,1,0) = (-1,0,-2) = -d_1 + 0d_2 - 2d_3$

$f(d_3) = f(0,0,1) = (-1,-2,1) = -d_1 - 2d_2 + d_3$ 5/

$$[f]_D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ب)

$f(e_1) = f(1,1,1) = (-1,-1,0) = 0(1,1,1) - (1,1,0) + 0(1,0,0)$

$f(e_2) = f(1,1,0) = (0,1,-1) = -1(1,1,1) + 2(1,1,0) - 1(1,0,0)$

$f(e_3) = f(1,0,0) = (1,1,1) = 1(1,1,1) + 0(1,1,0) + 0(1,0,0)$ 5/

$$[f]_E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{D \to E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(1,1,1) = d_1 + d_2 + d_3$ 5/

$(1,1,0) = d_1 + d_2 + 0d_3$

$(1,0,0) = d_1 + 0d_2 + 0d_3$

$$[f]_D = T^{-1}_{E \to D} [f]_E T_{E \to D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$ 5/

السؤال الثاني [30]

ا) لتكن $\{v_1 = (-1,1), v_2 = (1,2)\}$ ، لكي تكون S مستقلة خطياً لازم

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1(-1,1) + \alpha_2(1,2) = (0,0)$

$\Rightarrow \begin{matrix} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{matrix} \xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{matrix} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \alpha_2 = 0 = \alpha_1$ 6

وحيث أن عدد عناصر S هو 2 وهو يساوي بعد الفضاء $\mathbb{R}^2$ وبالتالي S قاعدة لـ $\mathbb{R}^2$ ،

وبالتالي هو متكامل وهي كتبت البرهان

A to Z

$\Rightarrow (x,y) = \left(\frac{-2x+y}{3}\right)(-1,1) + \left(\frac{x+y}{3}\right)(1,2)$ 4

$\Rightarrow f(x,y) = \left(\frac{-2x+y}{3}\right)(3,0) + \left(\frac{x+y}{3}\right)(3,6)$

$= (-2x+y, 0) + (x+y, 2x+2y) = (-x+2y, 2x+y)$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2$ 12

$= \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4)$ 5

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 , \lambda_2 = 4$

نجد $\lambda_1 = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x+y=0$

$E_{\lambda_1} = \left\{ t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\} \Leftarrow x=-t \leftarrow y=t$ 5 نوض

E_{λ_1} basis $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \in E_{\lambda_1}$

نجد $\lambda_2 = 4$

$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow -2x+y=0$

$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{t}{2} \\ t \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\} \Leftarrow x = \frac{t}{2} \Leftarrow y=t$ 5 نوض

E_{λ_2} basis $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \in E_{\lambda_2}$

السؤال الثالث [25]

$y_1 = x_1 = (1,-1,1) \Rightarrow \|y_1\| = \sqrt{3} \Rightarrow z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 3 11

$y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1 = (2,2,0) - \langle (2,2,0), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \rangle \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= (2,2,0) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (2,2,0)$ 6

$\Rightarrow \|y_2\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \Rightarrow z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$y_3 = x_3 - \langle x_3, z_1 \rangle z_1 - \langle x_3, z_2 \rangle z_2$

$= (1,0,0) - \langle (1,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \rangle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$- \langle (1,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ 6

$= (1,0,0) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$= \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \|y_2\| = \sqrt{\frac{1+1+4}{36}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow z_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x_1,x_2) = x_2(1,1) + (x_1-x_2)(1,0)$ 12

$\Rightarrow f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1-x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1-y_2 \end{bmatrix}$ 5

$= \begin{bmatrix} 3x_2 - x_1 + x_2 & x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1-y_2 \end{bmatrix}$

$= 3x_1y_2 - 4x_2y_2 + (x_1-3x_2)(y_1-y_2)$ 5

$= 2x_1y_2 - x_2y_2 + x_1y_1 - 3x_2y_1$

A to Z

الجمهورية العربية السورية | امتحان جبر خطي 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الأولى- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب:

السؤال الأول: (40 درجة) **1-** ليكن f و g مؤثرين خطيين على الفضاء الشعاعي المنته البعد V ، ولتكن S جملة إحداثيات لـ V . أثبت أن $[f\circ g]_S=[f]_S.[g]_S$.

2- ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً معرفاً وفق القاعدة:

$$f(x,y)=(x-3y,x+y,2x-y)$$

ولنأخذ جملتي الإحاثيات لـ $\mathbb{R}^2$:

$$E=\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}\quad,\quad E'=\{e'_1=(3,-1),e'_2=(1,0)\}$$

وجملتي الإحاثيات لـ $\mathbb{R}^3$:

$$D=\{d_1=(1,0,0),d_2=(0,1,0),d_3=(0,0,1)\}\quad,\quad D'=\{d'_1=(1,1,1),d'_2=(1,1,0),d'_3=(1,0,0)\}$$

أ - عين $kerf$ وأوجد أساساً لها.

ب - أوجد مصفوفة الإنتقال T من الجملة D' إلى الجملة D .

ت - أوجد المصفوفة $[f]_{E'}^{D'}$ بطريقتين مختلفتين.

السؤال الثاني: (20 درجة) **1-** طبق نظرية كيلي هاملتون لإيجاد مقلوب المصفوفة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & -4\end{bmatrix}$$

2 - أوجد القيم الذاتية فقط للمؤثر الخطي المعرف بالشكل:

$$f(x,y,z)=(x-2y+2z,-2x+y-2z,2x-2y+z)$$

السؤال الثالث: (30 درجة) **1-** لتكن S مجموعة جزئية غير خالية من فضاء جداء داخلي V. برهن أن المجموعة المعامدة لـ S فضاء جزئي من V.

2- لنعرف الجداء الداخلي على $\mathbb{R}^3$ بالشكل:

$$<(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)>=2x_1y_1+x_2y_2+3x_3y_3$$

وليكن W فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الداخلي $\mathbb{R}^3$ ومولد بالشعاعين $x_2=(-1,1,3)$, $x_1=(1,-2,-1)$. أوجد المجموعة المعامدة لـ W، ثم أوجد أساساً لها.

3- ليكن $V=P_1$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي درجتها أصغر أو تساوي 1 ، مزوداً بالجداء الداخلي:

$$<f(x),g(x)>=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

ستخدم القاعدة $\{1,2x+1\}$ وطريقة جرام _ شميدت لبناء قاعدة نظامية التعامد لـ V .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2024-7-1

A to Z مكتبة

من جهة ثانية

$$[(f\circ g)(x)]_{\mathcal{E}'} = [f(g(x))]_{\mathcal{E}'} = [f]_{\mathcal{E}'}[g(x)]_{\mathcal{E}'} \quad (10)$$
$$= [f]_{\mathcal{E}'}[g]_{\mathcal{E}'}[x]_{\mathcal{E}} \quad \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$[f\circ g]_{\mathcal{E}}[x]_{\mathcal{E}} = [f]_{\mathcal{E}'}[g]_{\mathcal{E}'}[x]_{\mathcal{E}} \quad \forall x\in V$$

وبالتالي حسب الجملة السابقة فإن:

$$[f\circ g]_{\mathcal{E}} = [f]_{\mathcal{E}'}\cdot[g]_{\mathcal{E}'}$$

(12) أ)

$$\ker f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;;\; (x-3y, x+y, 2x-y) = (0,0,0)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3y=0 \\ x+y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Rightarrow 4y=0 \Rightarrow y=x=0 \quad /6$$

$$\Rightarrow \ker f = \{(0,0)\} \Rightarrow \ker f \neq \{\emptyset\}$$

ب)

$$d_1 = (1,0,0) = 0(1,1,1) + 0(1,1,0) + 1(1,0,0)$$
$$d_2 = (0,1,0) = 0(1,1,1) + 1(1,1,0) - 1(1,0,0)$$
$$d_3 = (0,0,1) = 1(1,1,1) - 1(1,1,0) + 0(1,0,0) \quad /5$$

$$T_{D'\to D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(13)

$$f(e_1') = f(3,-1) = (6,2,7) = 7(1,1,1) - 5(1,1,0) + 4(1,0,0)$$
$$f(e_2') = f(1,0) = (1,1,2) = 2(1,1,1) - 1(1,1,0) + 0(1,0,0) \quad /5$$

$$[f]_{E'}^{D'} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_1' = (3,-1) = 3e_1 - e_2 \Rightarrow Q_{E\to E'} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad /5$$
$$e_2' = (1,0) = 1e_1 + 0e_2$$

$$f(1,0) = (1,1,2) = 1d_1 + 1d_2 + 2d_3 \Rightarrow [f]_E^D = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad /5$$
$$f(0,1) = (-3,1,-1) = -3d_1 + d_2 - d_3$$

$$[f]_{E'}^{D'} = T\,[f]_E^D\,Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad /4$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

مكتبة A to Z

$\Rightarrow A^2 + A - 10\,I = 0 \Rightarrow A + I - 10A^{-1} = 0$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10}(A + I) = \frac{1}{10}\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ صفوفة f بالنسبة للقاعدة القانونية

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 + L_3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{-L_3 + L_2}$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (-1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda) - 8]$

$= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 8)$

$= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$

$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = (-1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-5)$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \quad \text{و} \quad \lambda_2 = 5$

سؤال إثبات:

1) أ) واضح أن $S^\perp \subseteq V$ لأن $\emptyset \neq S^\perp$ لأن $0 \in S^\perp$ لأن $\forall s \in S$ لدينا $\langle 0, s \rangle = 0$

$\forall x, y \in S^\perp, \alpha, \beta \in F, s \in S \Rightarrow \langle \alpha x + \beta y, s \rangle =$

$\alpha \langle x, s \rangle + \beta \langle y, s \rangle = \alpha 0 + \beta 0 = 0$

$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in S^\perp$

من (أ) و(ب) نجد أن $S^\perp$ فضاء شعاعي جزئي من V.

$S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \langle (x, y, z), (1, -2, -1) \rangle = 0$ و

$\langle (x, y, z), (-1, 1, 3) \rangle = 0\}$

$\Rightarrow S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 2y - z = 0$ و

$-x + y + 3z = 0\}$

$\Rightarrow x - 2y - z = 0$

$-y + 6z = 0$

$\Rightarrow y = 6z \Rightarrow x = 3z$ نفرض

$x = 12z + 3z = 15z$

$\Rightarrow x = \frac{15}{2}z$

$\Rightarrow S^\perp = \{(\frac{15}{2}z, 6z, z) ; z \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow$ أساس لـ $S^\perp$ هو $\{(\frac{15}{2}, 6, 1)\}$

مكتبة A to Z

$$y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1 = 2x+1 - 1\int_0^1 (2x+1)\cdot 1\, dx$$

$$= 2x+1 - \left[x^2+x\right]_0^1 = 2x+1-2 = 2x-1$$

$$\|y_2\|^2 = \int_0^1 (2x-1)^2\, dx = \int_0^1 (4x^2-4x+1)\, dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x\right]_0^1 = \frac{4}{3} - 2 + 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \|y_2\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \sqrt{3}(2x-1)$$

A to Z مكتبة

الجمهورية العربية السورية | امتحان جبر خطي 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الأولى- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الأولى | اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (35 درجة) **1-** ليكن $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً، ولتكن $x_1,x_2,...,x_n\in V$. إذا كانت المتجهات $x_1,x_2,...,x_n$ مستقلة خطياً وكان f متبايناً فبين أن المتجهات $f(x_1),f(x_2),...,f(x_n)$ تكون مستقلة خطياً .

2 -ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ معرفاً وفق القاعدة:

$$f(x,y,z)=(x-2y+z,x-y,2x-y+3z)$$

أ -أوجد أساس لـ $\operatorname{Im} f$.

ب - أوجد مصفوفة الإنتقال T من الجملة $E=\{e_1=(0,0,1),e_2=(0,1,1),e_3=(1,1,1)\}$ إلى الجملة $D=\{d_1=(1,0,0),d_2=(0,1,0),d_3=(0,0,1)\}$.

ت - إذا كان $X=(3,1,-1)$ فأجد $[X]_E$ بطريقتين مختلفتين.

ث - أوجد المصفوفة $[f]_E^D$.

السؤال الثاني: (30 درجة) **1-** هل يوجد محول خطي يحقق الشرط $f(1,2)=(-4,1)$, $f(1,3)=(-2,-1)$ ؟ إذا كان ذلك ممكناً أوجد قاعدة تعريف له.

2 - أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمؤثر الخطي المعرف بالشكل:

$$f(x,y)=(2x-y,-5x+6y)$$

السؤال الثالث: (25 درجة)

1- ليكن W فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$ مولد بالشعاعين $z_2=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, $z_1=(0,\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$. بين أن $\{z_1\ ,\ z_2\}$ مجموعة نظامية التعامد، ثم اكتب الشعاع $z=(0,2,1)$ كمجموع شعاعين أحدهما من W والآخر يعامد W.

2- أوجد شكل ثنائي الخطية على $\mathbb{R}^2$ والممثل للمصفوفة $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ بالنسبة للقاعدة $\{e_1=(-2,1),e_2=(1,0)\}$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2024-2-11

د. علياء حكيم

A to Z مكتبة

$$= (-2+y)(-7,-1) + (3x-y)(-4,1)$$
$$= (-8x+2y,\ 5x-2y)$$

2/ نوجد مصفوفة التحويل الخطي بالنسبة للقاعدة القانونية $\{(1,0),(0,1)\}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -5 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)(6-\lambda) - 5 = \lambda^2 - 8\lambda + 7$$
$$= (\lambda-1)(\lambda-7) \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ و } \lambda_2 = 7$$ 5/

عندما $\lambda_1 = 1$، فإن:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y=0 \\ -5x-5y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x-y=0$$

نفرض $y=\alpha \Leftarrow x=\alpha$

$$E_{\lambda_1} = \left\{\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix};\ \alpha \in \mathbb{R}\right\} \Rightarrow$$ أساس E_{λ_1} هو $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ 5/

عندما $\lambda_2 = 7$، فإن:

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow -5x - y = 0$$

نفرض $y=\alpha \Leftarrow x = -\frac{1}{5}\alpha$

$$E_{\lambda_2} = \left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{5}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix};\ \alpha \in \mathbb{R}\right\} \Rightarrow$$ أساس E_{λ_2} هو $\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ 5/

السؤال الثالث: [25]

$$\|z_1\| = \sqrt{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} = 1 \quad , \quad \|z_2\| = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = 1$$ 1/

$$\langle z_1, z_2 \rangle = 0 + \frac{2}{3\sqrt{5}} - \frac{2}{2\sqrt{5}} = 0$$ 6/

وبالتالي $\{z_1, z_2\}$ مجموعة نظامية متعامدة.

$$w = \langle x, z_1\rangle z_1 + \langle x, z_2\rangle z_2$$
$$= \left(\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$
$$= \frac{3}{\sqrt{5}}\left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{8}{9}, \frac{74}{45}, \frac{13}{45}\right)$$ 4/

$$a = x - w = (0,2,1) - \left(\frac{8}{9}, \frac{74}{45}, \frac{13}{45}\right) = \left(-\frac{8}{9}, \frac{16}{45}, \frac{32}{45}\right)$$

$$\Rightarrow x = a+w \ ; \quad w \in W \ \& \ a \perp W$$

2/ إذا كان $x = (x_1, x_2)$ عنصراً في $\mathbb{R}^2$، فإن:

$$x = (x_1, x_2) = x_2(-2,1) + (x_1+2x_2)(1,0)$$
$$\Rightarrow f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1+2x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_2 \\ y_1+2y_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3x_1+7x_2 & 2x_1+3x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_2 \\ y_1+2y_2 \end{bmatrix}$$ 10/
$$= 3x_1y_2 + 7x_2y_2 + 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$$
$$= 2x_1y_1 + 13x_2y_2 + 7x_1y_2 + 3x_2y_1$$

A to Z مكتبة

$\Rightarrow \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ (f متباين)

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ (لأن $x_1, \dots, x_n$ مستقلة خطياً) 8

$\Rightarrow$ $f(x_1), \dots, f(x_n)$ مستقلة خطياً

2) لدينا الأساس $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ لـ $\mathbb{R}^3$.

$f(1,0,0)=(1,1,2),\ f(0,1,0)=(-2,-1,-1),\ f(0,0,1)=(1,0,3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1_1+1_3]{2_1+1_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2_2+1_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ 7

وبالتالي $\{(1,1,2),(0,1,3),(0,0,4)\}$ أساس لـ $\operatorname{Im} f$.

ب)

$$\left.\begin{aligned} d_1=(1,0,0) &= 0(0,0,1) - 1(0,1,1) + 1(1,1,1) \\ d_2=(0,1,0) &= -1(0,0,1) + 1(0,1,1) + 0(1,1,1) \\ d_3=(0,0,1) &= 1(0,0,1) + 0(0,1,1) + 0(1,1,1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow {}_{E\to D}T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 5/

ت)

$(3,1,-1) = -2(0,0,1) - 2(0,1,1) + 3(1,1,1) \Rightarrow [x]_E = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 3/

ث)

$(3,1,-1) = 3d_1 + 1d_2 - d_3 \Rightarrow [x]_D = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 2/

$$[x]_E = {}_{E\to D}T\,[x]_D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$ 5/

ج)

$$\left.\begin{aligned} f(e_1)=f(0,0,1)=(1,0,3) &= 1d_1 + 0d_2 + 3d_3 \\ f(e_2)=f(0,1,1)=(-1,-1,2) &= -d_1 - d_2 + 2d_3 \\ f(e_3)=f(1,1,1)=(0,0,4) &= 0d_1 + 0d_2 + 4d_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow [f]_E^D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$ 5/

السؤال الثاني [30]

1) لنرى فيما إذا كانت $S=\{v_1=(1,3), v_2=(1,2)\}$ قاعدة لـ $\mathbb{R}^2$.

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$; $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1(1,3) + \alpha_2(1,2) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{-3_1+1_2} \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$ 7/

وبالتالي S مستقلة خطياً، وبما أن عدد عناصرها يساوي بعد الفضاء $\mathbb{R}^2$ وهو 2 فإن S قاعدة، وبالتالي يوجد حسب النظرية تطبيق خطي وحيد يحقق العلاقة:

$$(x,y) = \alpha(1,3) + \beta(1,2) = (\alpha+\beta,\ 3\alpha+2\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= \alpha+\beta \\ y &= 3\alpha+2\beta \end{aligned} \longrightarrow \alpha = x-\beta \Rightarrow y = 3x-3\beta+2\beta$$

$$\Rightarrow \beta = 3x-y$$

مكتبة A to Z

ربية العربية السورية | امتحان جبر خطي 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الأولى- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (35 درجة) **1**- برهن أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون التطبيق الخطي $f: V_1 \to V_2$ متبايناً هو أن يكون $Kerf = \{0_{V_1}\}$.

2- ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$. إذا علمت أن $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة f بالنسبة للجملة $E = \{e_1, e_2, e_3\}$.

أ - أوجد مصفوفة f بالنسبة للجملة $D = \{d_1 = e_1 , d_2 = 3e_1 - e_2 , d_3 = 2e_1 - e_2 + e_3\}$.

ب - أوجد مصفوفة f بالنسبة للجملة $S = \{e_3 , e_1, e_2\}$.

ت - إذا كانت $E = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$، أوجد المؤثر الخطي f الممثل للمصفوفة A بالنسبة للجملة E.

السؤال الثاني: (25 درجة) **1**- برهن أنه إذا كانت A و B مصفوفتان متشابهتان فإن لهما نفس كثير الحدود المميز.

2 - قطّر إن أمكن المصفوفة الآتية $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

السؤال الثالث: (30 درجة) **1**- لنعرف الجداء الداخلي على $V = M_2(\mathbb{R})$ بالشكل:

$$< A, B > = tr(BA^T)$$

أ - أوجد الزاوية θ الكائنة بين الشعاعين $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

ب - أوجد المجموعة المعامدة للمجموعة $S = \{C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\}$ من الفضاء V.

2- في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ استخدم القاعدة $S = \{x_1 = (2,1,1), x_2 = (1,-2,0), x_3 = (-1,0,0)\}$ وطريقة جرام _ شميدت لبناء قاعدة نظامية التعامد لـ $\mathbb{R}^3$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2023-7-9

CamScanner

السؤال الأول: [35]

لدينا الشرط b : الفرض: f متباين

المطلب: $\ker f = \{0\}$ ؟

$\forall x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0_{V_2} = f(0_{V_1})$ f متباين $\Rightarrow x = 0_{V_1}$ 5/

$\Rightarrow \ker f = \{0_{V_1}\}$

كتابة الشرط b: الفرض: $\ker f = \{0_{V_1}\}$ ؟

المطلب: f متباين

$\forall x_1, x_2 \in V_1 \; ; \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0_{V_2}$ 5/

$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0_{V_2} \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f = \{0_{V_1}\}$ ؟

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0_{V_1} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ f متباين

2) أ)

$$[f]_D = T^{-1}_{E \to D} \, [f]_E \, T_{E \to D}$$

$$T_{E \to D} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 5/

$e_1 = d_1 = d_1 + 0d_2 + 0d_3$

$e_2 = -d_2 + 3e_1 = -d_2 + 3d_1 = 3d_1 - d_2 + 0d_3$

$e_3 = d_3 - 2e_1 + e_2 = d_3 - 2d_1 - d_2 + 3d_1 = d_1 - d_2 + d_3$

$$T^{-1}_{E \to D} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 5/

$$[f]_D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 \\ -2 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 5/

ب)

$f(e_3) = e_3 + 3e_1 + 0e_1$

$f(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3 = e_3 - e_1 + e_2$

$f(e_2) = -e_1 + 2e_2 + 3e_3 = 3e_3 - e_1 + 2e_2$

$$[f]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ 5/

$(x,y,3) = x e_1 + x e_2 + x e_3$

$f(x,y,3) = x f(e_1) + y f(e_2) + 3 f(e_3)$

$= x(-e_1 + e_2 + e_3) + y(-e_1 + 2e_2 + 3e_3)$

$= x(-1,1,1) + y(-1,2,3) + 3(3,0,1)$

$= (-x - y + 3z, x + 2y, x + 3y + 3)$ 5

السؤال الثاني: [25]

لما أن A, B مصفوفتان متشابهتان فإنه يوجد مصفوفة غير شاذة X بحيث:

$X^{-1} B X = A \Rightarrow |A - \lambda I| = |X^{-1} B X - \lambda I|$ 6

$= |X^{-1} B X - \lambda X^{-1} X| = |X^{-1}(B - \lambda I) X|$

$= |X^{-1}||B - \lambda I||X| = |X^{-1}||X||B - \lambda I| = |B - \lambda I|$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{-i_2 + i_3} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}$$ 12

$$\xrightarrow{i_3 + i_2} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow q(\lambda) = (2-\lambda)[(4-\lambda)(6-\lambda) - 8]$$

$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 16)$

$= (2-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 8) = 0$ 6

$\Rightarrow \lambda_1 = 2$ ، $\lambda_2 = 8$ جذور مختلفة

من أجل $\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 6

نفرض $x_2 = \alpha$ ، $x_3 = \beta \in$

$x_1 = \alpha - \beta$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ أساس E_{λ_1}

$\dim E_{\lambda_1} = 2$

من أجل $\lambda_2 = 8$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[i_1 + i_3]{i_1 + i_2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$ 6

$\Rightarrow -2x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_2 - x_3 = 0$

$-2x_1 = -x_2 - x_3 = -2\alpha \iff x_2 = \alpha \iff x_3 = \alpha$ و x_1 4

$\Rightarrow x_1 = \alpha$

$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$ قاعدة E_{λ_2} $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\dim E_{\lambda_2} = 1$

المصفوفة قابلة للقطرية

حيث $B = P^{-1} A P$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 1

السؤال الثاني: [30]

$\|A\|^2 = \langle A, A \rangle = tr(A \cdot A^T) = tr\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$ 1

$= tr\left(\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \right) = 14 \Rightarrow \|A\| = \sqrt{14}$ 3

$\|B\|^2 = \langle B, B \rangle = tr(B \cdot B^T) = tr\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)$

$= tr\left(\begin{bmatrix} 17 & 11 \\ 11 & 10 \end{bmatrix} \right) = 27 \Rightarrow \|B\| = \sqrt{27}$ 3

$\langle A, B \rangle = tr(B \cdot A^T) = tr\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = tr\left(\begin{bmatrix} 11 & -8 \\ 10 & -6 \end{bmatrix} \right) = 5$ 3

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} = \dfrac{5}{\sqrt{14}\sqrt{27}}$ 1

$S^T = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 3 & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) ; \left\langle \begin{bmatrix} x & y \\ 3 & t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$ 1

$= \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 3 & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) ; tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 3 \\ y & t \end{bmatrix} \right) = 0 \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 3 & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) ; tr\left(\begin{bmatrix} 2x + y & 23 + t \\ x - 2y & 3 - 2t \end{bmatrix} \right) = 0 \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 3 & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) ; 2x + y + 3 - 2t = 0 \right\}$ 5

12

$y_1 = x_1 = (2, 1, 1) \Rightarrow \|y_1\| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$

$\Rightarrow z_1 = \dfrac{y_1}{\|y_1\|} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}} \right)$ 3

$y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1 = (1,-2,0) - \langle (1,-2,0), (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) \rangle$
$(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$

$= (-1,-2,0) + 0 \times (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = (1,-2,0)$

$\Rightarrow \|y_2\| = \sqrt{1+4} = 5 \Rightarrow z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$ 6

$y_3 = x_3 - \langle x_3, z_1 \rangle z_1 - \langle x_3, z_2 \rangle z_2$

$= (-1,0,0) - \langle (-1,0,0), (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) \rangle (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$

$- \langle (-1,0,0), (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0) \rangle (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$

$= (-1,0,0) + \frac{2}{\sqrt{6}} (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) + \frac{1}{\sqrt{5}} (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, 0)$

$= (-1,0,0) + (\frac{4}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}) + (\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 0)$

$= (-\frac{2}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{3})$ 6

$\Rightarrow \|y_3\| = \sqrt{\frac{4}{225} + \frac{1}{225} + \frac{25}{225}} = \frac{\sqrt{30}}{15}$

$\Rightarrow z_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = (-\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}})$

الجمهورية العربية السورية | امتحان جبر خطي 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الأولى- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (30 درجة) **1-** ليكن $f: V_1 \to V_2$ تطبيق خطي فوق حقل K. برهن أن الصورة المباشرة وفق f لأي فضاء شعاعي جزئي W من الفضاء V_1 هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V_2.

2- ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الشعاعي R^3 معرفاً وفق القاعدة:

$$f(x,y,z) = (x-y+z, x-2y, x+2y-z)$$

أ -أوجد مصفوفة الإنتقال T من الجملة $E = \{e_1 = (1,1,1), e_2 = (0,1,1), e_3 = (0,0,1)\}$ إلى الجملة $D = \{d_1 = (1,0,0), d_2 = (0,1,0), d_3 = (0,0,1)\}$.

ب -أوجد مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للجملة D بطريقين مختلفتين.

السؤال الثاني: (30 درجة) **1-** طبق نظرية كيلي هاملتون لإيجاد مقلوب المصفوفة الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

2 - أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمؤثر الخطي المعرف بالشكل:

$$f(x,y,z) = (-y-z, -2x+y-z, -2x+2y+2z)$$

السؤال الثالث: (30 درجة) **1-** ليكن V فضاء شعاعي فوق حقل تبديلي K، وليكن $f: V \to V$ مؤثراً خطياً. برهن أنه إذا كان W فضاء شعاعي جزئي من V أحادي البعد ومستقر بالنسبة لـ f، فإن كل شعاع يختلف عن الصفر من W يكون شعاع ذاتي لـ f.

2- لنعرف الجداء الداخلي على $\mathbb{R}^3$ بالشكل:

$$<(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)> = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

وليكن W فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الداخلي $\mathbb{R}^3$ ومولد بالشعاعين $x_1 = (1,1,-2)$, $x_2 = (-1,3,-1)$. أوجد المجموعة المعامدة لـ W، ثم أوجد أساساً لها.

3- ليكن $V = P_1$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي درجتها أصغر أو تساوي 1 ، مزوداً بالجداء الداخلي:

$$<f(x), g(x)> = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

استخدم القاعدة $\{3-x\ ,\ 2\}$ وطريقة جرام _ شميدت لبناء قاعدة نظامية التعامد لـ V .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2023-2-5

د. علياء حكيم

جبر خطي (2)
س(1) رياضيات / فصل (1)

السؤال الأول: [30]

1) أ) بما أن $f(W) \subseteq V_2$ و $f(W) \neq \emptyset$ لأن $0_{V_1} \in W$، ومنه $f(0_{V_1}) = 0_{V_2} \in W$

ب) $\forall y_1, y_2 \in f(W)$, $\alpha, \beta \in K \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in W$; $f(x_1) = y_1$ & $f(x_2) = y_2$ (10)

$\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = f(\underbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}_{\in W}) \in f(W)$

وبالتالي من (أ) و(ب) نجد أن $f(W)$ فضاء شعاعي جزئي من V_2.

ج) أ)

$d_1 = (1,0,0) = 1(1,1,1) - 1(0,1,1) + 0(0,0,1)$

$d_2 = (0,1,0) = 0(1,1,1) + 1(0,1,1) - 1(0,0,1)$ (20)

$d_3 = (0,0,1) = 0(1,1,1) + 0(0,1,1) + 1(0,0,1)$

$T_{E \to D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ن

ب) أ)

$f(d_1) = (1,1,1) = 1d_1 + 1d_2 + 1d_3$

$f(d_2) = (-1,-2,2) = -d_1 - 2d_2 + 2d_3$

$f(d_3) = (1,0,-1) = d_1 + 0d_2 - d_3$

$[f]_D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ن

ب) ب)

$f(e_1) = f(1,1,1) = (1,-1,2) = 1(1,1,1) - 2(0,1,1) + 3(0,0,1)$

$f(e_2) = f(0,1,1) = (0,-2,1) = 0(1,1,1) - 2(0,1,1) + 3(0,0,1)$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (1,0,-1) = 1(1,1,1) - 1(0,1,1) - 1(0,0,1)$

$[f]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ ن

$T_{D \to E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ن

$[f]_D = T^{-1}_{E \to D} [f]_E T_{E \to D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

ن

السؤال الثاني: [30]

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda)-3 = \lambda^2 - 7\lambda + 7$$ 1

$$\Rightarrow A^2 - 7A + 7I = 0 \Rightarrow A - 7I + 7A^{-1} = 0 \Rightarrow$$ 5

$$A^{-1} = -\frac{1}{7}(A - 7I) = \frac{1}{7}(-A + 7I)$$ (10)

$$= \frac{1}{7}\left(-\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$ 5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2+c_1}$$ 12 (20)

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -1 \\ -1-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{-l_1+l_2} \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ جذور مضاعف 6

من أجل $\lambda_2 = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[-l_1+l_3]{-2l_1+l_2} \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

حل المعادلة = الحوامة.

$$-2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$ 7

$$3x_2 + x_3 = 0$$

نفرض $x_3 = 4 \Leftarrow x_2 = -\frac{4}{3} \Leftarrow -2x_1 = x_2 + x_3 \Leftarrow x_1 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3} + 4\right) = -\frac{4}{3}$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 4 \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$$ أساس E_{λ_2} $\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

من أجل $\lambda_1 = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[2l_1+l_3]{2l_1+l_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7 العجلة الحوامة:

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$x_3 = 0$$

نفرض $x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = 4$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} ; 4 \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$$ أساس E_{λ_1} $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

السؤال الثالث [30]

1) لنبرهن أن $\{e\}$ أساس لـ W، وبالتالي فإن:

$$\forall\, 0\neq x\in W \Rightarrow x=\alpha e\ ;\ \alpha\in K-\{0\} \Rightarrow f(x)=f(\alpha e)=\alpha f(e)$$

وبما أن W مستقر بالنسبة لـ f، وبالتالي فإن $f(e)\in W$، ومنه

$$f(e)=\beta e\ ;\ \beta\in K \quad (8)$$

وبالتالي فإن:

$$f(x)=\alpha f(e)=\alpha(\beta e)=(\alpha\beta)e=(\beta\alpha)e=\beta(\alpha e)=\beta x$$

إذا x شعاع ذاتي لـ f.

2) $S^{\perp}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ \langle(x,y,z),(1,1,-2)\rangle=0$ و $\langle(x,y,z),(-1,3,-1)\rangle=0\}$ (10)

$$\Rightarrow S^{\perp}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x+2y-6z=0 \text{ و } -x+6y-3z=0\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y-6z=0 \\ -x+6y-3z=0 \end{cases} \text{ بالجمع } \begin{cases} x+2y-6z=0 \\ 8y-9z=0 \end{cases}$$

نفرض $z=8$ $\Leftarrow y=\frac{9}{8}x$ $\Leftarrow$ $x=-2y+6z=-\frac{9}{4}x+6x=\frac{15}{4}x$

$$\Rightarrow S^{\perp}=\{(\tfrac{15}{4}\alpha,\tfrac{9}{8}\alpha,\alpha)\ ;\ \alpha\in\mathbb{R}\} \quad (12)$$

3) $y_1=x_1=2 \Rightarrow \|y_1\|^2=\langle y_1,y_1\rangle=\int_0^1 4\,dx=[4x]_0^1=4$

$$\Rightarrow \|y_1\|=2 \Rightarrow z_1=\frac{y_1}{\|y_1\|}=\frac{2}{2}=1$$

$$y_2=x_2-\langle x_2-z_1\rangle z_1=x-3-\int_0^1(x-3)\,dx$$

$$=x-3+\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_0^1=x-3-\left(\frac{1}{2}-3\right)=x-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \|y_2\|^2=\langle y_2,y_2\rangle=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{12} \Rightarrow \|y_2\|=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow z_2=\frac{y_2}{\|y_2\|}=2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

الجمهورية العربية السورية | امتحان جبر خطي 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الأولى- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية/ نموذج A | اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (35 درجة) **1**- ليكن $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً معرفاً وفق القاعدة:

$$f(x,y)=(2x-y,x+y,3x-2y)$$

ولنأخذ جملتي الإحاثيات لـ $\mathbb{R}^2$:

$$E=\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\} \quad , \quad E'=\{e_1'=(2,1),e_2'=(1,0)\}$$

وجملتي الإحاثيات لـ $\mathbb{R}^3$:

$$D=\{d_1=(1,0,0),d_2=(0,1,0),d_3=(0,0,1)\} \quad , \quad D'=\{d_1'=(1,0,0),d_2'=(1,1,1),d_3'=(1,1,0)\}$$

أ - عين *kerf* وأوجد أساساً لها.

ب - أوجد المصفوفة $[f]_{E'}^{D'}$ بطريقتين مختلفتين.

2- إذا كان $f:V_1 \to V_2$ تطبيقاً خطياً. برهن أن *kerf* فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V_1 .

السؤال الثاني: (25 درجة) **1**- أوجد القيم الذاتية فقط للمؤثر الخطي المعرف بالشكل:

$$f(x,y,z)=(2x+y+z,x+2y+z,x+y+2z)$$

2 -قطّر إن أمكن المصفوفة الآتية $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$.

السؤال الثالث: (30 درجة) **1**- إذا كانت A مصفوفة تناظرية، وإذا كان X,Y شعاعين ذاتيين للمصفوفة A موافقين لقيمتين ذاتيتين λ,θ على الترتيب. برهن أن $X^TY=0$.

2- أوجد المجموعة المعامدة للمجموعة $S=\{x=(1,-2,-3)\}$ من الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ ، ثم أوجد قاعدة نظامية التعامد لـ S^T باستخدام طريقة جرام _ شميدت.

3- أوجد المؤثر القرين للمؤثر الخطي f المعرف على $\mathbb{C}^3$ بالشكل:

$$f(x,y,z)=(ix+y-2z,2iy+z,x+y-4iz)$$

ثم برهن أنه إذا كان f مؤثر شبه هرميتي فإن المؤثر if^* يكون هرميتي.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2022-6-26

د. علياء حكيم

السؤال الأول [35]

$\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x,y) = 0\}$ (8)

$\Rightarrow \ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; (2x-y, x+y, 3x-2y) = 0\}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \xrightarrow{-2(2)+(1)} \begin{cases} -3y = 0 \\ x + y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow \ker f = \{(0,0)\} \Rightarrow \ker f$ لا تحتوي على

(17)

$f(2,1) = (3,3,4) = 0(1,0,0) + 4(1,1,1) - (1,1,0)$

$f(1,0) = (2,1,3) = 1(1,0,0) + 3(1,1,1) - 2(1,1,0)$

$\Rightarrow [f]_{E}^{D'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ 4

$e'_1 = (2,1) = 2e_1 + 1e_2$

$e'_2 = (1,0) = 1e_1 + 0e_2 \Rightarrow T_{E \to E'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 3

$d_1 = (1,0,0) = 1(1,0,0) + 0(1,1,1) + 0(1,1,0)$

$d_2 = (0,1,0) = -1(1,0,0) + 0(1,1,1) + 1(1,1,0)$

$d_3 = (0,0,1) = 0(1,0,0) + 1(1,1,1) - 1(1,1,0)$

$Q^{-1}_{D \to D'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 4

$f(1,0) = (2,1,3) = 2d_1 + 1d_2 + 3d_3$

$f(0,1) = (-1,1,-2) = -1d_1 + d_2 - 2d_3 \Rightarrow [f]_{E}^{D} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ 4

$[f]_{E}^{D'} = Q^{-1}[f]_{E}^{D} T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ 2

$f(0_{V_1}) = 0_{V_2}$ لأن $\ker f \neq \emptyset$ و $\ker f \subseteq V_1$ أن P.2 واضح

وبالتالي $0_{V_1} \in \ker f$

(10) $\forall x_1, x_2 \in \ker f, \alpha, \beta \in K \Rightarrow f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$ (ب

$= \alpha \cdot 0_{V_2} + \beta \cdot 0_{V_2} = 0_{V_2} \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in \ker f$

من (P) و(ب) نجد أن $\ker f$ فضاء جزئي من V_1.

السؤال الثاني: [25]

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$ (10) 1.1

$$\xrightarrow{-c_2+c_3} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{l_2+l_2} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$q(\lambda) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda) - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = 0$$ (15) 2

$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ جذر وحيد ضاعف

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -1 \\ 4 & -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2l_1+l_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow$ نفرض $y = \alpha$ ومنه $x = \frac{\alpha}{2}$

$E_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow E_\lambda$ لـ ~~أساس~~ $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 8

$\Rightarrow \dim E_\lambda = 1 \neq 2$ المصفوفة غير قابلة للتقطير

السؤال الثالث: [30]

1) لنبدأ بـ $X^T A Y$ بما أن A تناظرية فإن:

$$X^T A Y = X^T A^T Y = (AX)^T Y = (\lambda X)^T Y = \lambda (X^T Y) \quad \dots (1)$$

وكذلك (10)

$$X^T A Y = X^T (\alpha Y) = \alpha (X^T Y) \quad \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$\lambda(x^T y) = \theta(x^T y) \Rightarrow (\lambda-\theta)(x^T y) = 0$

ولكن $\lambda \neq \theta$ ، وعليه $x^T y = 0$.

$S'^T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \langle (x,y,z), (1,-2,-3) \rangle = 0\}$ 12

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x-2y-3z = 0\}$ (12)

6/ نفرض $y = \alpha$ ، $z = \beta \Leftarrow x = 2\alpha + 3\beta$

$S'^T = \{(2\alpha+3\beta, \alpha, \beta) ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

S'^T ~~ج~~ $\{x_1 = (2,1,0), x_2 = (3,0,1)\}$

$y_1 = x_1 = (2,1,0) \Rightarrow \|y_1\| = \sqrt{5} \Rightarrow z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)$ 2

$y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1 = (3,0,1) - \langle (3,0,1), (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0) \rangle (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$

$= (3,0,1) - \frac{6}{\sqrt{5}}(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0) = (3,0,1) - (\frac{12}{5}, \frac{6}{5}, 0)$

$= (\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1) \Rightarrow \|y_2\| = \frac{\sqrt{70}}{5}$ 4

$\Rightarrow z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = (\frac{3}{\sqrt{70}}, -\frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}})$

$[f]_{S'} = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & -2 \\ 0 & 2i & 1 \\ 1 & -1 & -4i \end{bmatrix}$ (8) 3

$[f]_S^T = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \\ -2 & 1 & -4i \end{bmatrix} \Rightarrow [f^*]_{S'} = \overline{[f]_S^T} = \begin{bmatrix} -1-i & 0 & 1 \\ 1 & -2i & -1 \\ -2 & 1 & 4i \end{bmatrix}$

$f^*(x,y,z) = ((-1-i)x + z, x - 2iy + z, -2x, y + 4iz)$ 4

$(if)^* = \overline{i} f^* = -if$ ★

وبما أن f شبه هرميتي فإن $f = -f^*$ ، وعليه

$(if^*)^* = -i(-f^*) = if^*$ 4

وعليه if^* هرميتي.

الجمهورية العربية السورية | امتحان جبر خطي 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الأولى- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية/ نموذج B | اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (35 درجة) **1-** ليكن $f:V\to W$ تطبيقاً خطياً، ولتكن $x_1,x_2,...,x_n\in V$. برهن أنه إذا كانت المتجهات $f(x_1),f(x_2),...,f(x_n)$ تولد $\mathrm{Im}f$ وكان f متبايناً فإن المتجهات $x_1,x_2,...,x_n$ تولد V .

2- ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ تطبيقاً خطياً معرفاً وفق القاعدة:

$$f(x,y)=(x-2y,x-y,2x-3y)$$

ولنأخذ جملتي الإحاثيات لـ $\mathbb{R}^2$:

$$E=\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}\quad,\quad E'=\{e_1'=(0,1),e_2'=(1,2)\}$$

وجملتي الإحاثيات لـ $\mathbb{R}^3$:

$$D=\{d_1=(1,0,0),d_2=(0,1,0),d_3=(0,0,1)\}\quad,\quad D'=\{d_1'=(1,1,1),d_2'=(1,0,0),d_3'=(1,1,0)\}$$

أ - عين $kerf$ وأوجد أساساً لها.

ب - أوجد المصفوفة $[f]_{E'}^{D'}$ بطريقتين مختلفتين.

السؤال الثاني: (25 درجة) **1-** قطّر إن أمكن المصفوفة الآتية $A=\begin{bmatrix}6 & -8\\ 2 & -2\end{bmatrix}$.

2- أوجد القيم الذاتية فقط للمؤثر الخطي المعرف بالشكل:

$$f(x,y,z)=(x-y-z,x+3y+z,-x-y+z)$$

السؤال الثالث: (30 درجة) **1-** ليكن V فضاء شعاعي فوق حقل تبديلي K ، وليكن $f:V\to V$ مؤثراً خطياً. برهن أنه إذا كان a شعاعاً ذاتياً موافقاً للقيمة الذاتية λ ، فإن الفضاء الشعاعي الجزئي $Span(a)$ أحادي البعد ومستقر بالنسبة لـ f .

2- أوجد المجموعة المعامدة للمجموعة $S=\{x=(1,2,-1)\}$ من الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ ، ثم أوجد قاعدة نظامية التعامد لـ S^T باستخدام طريقة جرام _ شميدت.

3- أوجد المؤثر القرين للمؤثر الخطي f المعرف على $\mathbb{C}^3$ بالشكل:

$$f(x,y,z)=(x-iy-z,x-2iz,x+iy-2z)$$

ثم برهن أنه إذا كان f مؤثر شبه هرميتي فإن المؤثر if^* يكون هرميتي.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2022-6-26

د. علياء حكيم

السؤال الأول: [35]

1) ليكن x عنصراً من $\bar{V}$، عندئذ $f(x) \in \mathrm{Im} f$، وبالتالي توجد مقادير سلمية $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ بحيث أن:

$$f(x) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) = f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \quad (10)$$

وبما أن f متباين فإن:

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \qquad \forall x \in \bar{V}$$

أي $x_1, \dots, x_n$ تولد $\bar{V}$.

2) $\mathrm{Ker} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; f(x,y) = (0,0,0)\}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{matrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -r_1 + r_2 \\ \Rightarrow \end{matrix}} \begin{matrix} x - 2y = 0 \\ y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{matrix} \quad (8) \quad \rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$\Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{(0,0)\} \Rightarrow \mathrm{Ker} f$ هو أصغر ϕ (17)

$\frac{1}{2}$ 2)

$$f(0,1) = (-2,-1,-3) = -3(1,1,1) - 1(1,0,0) + 2(1,1,0)$$

$$f(1,2) = (-3,-1,-4) = -4(1,1,1) - 2(1,0,0) + 3(1,1,0)$$

$$[f]_{E}^{D'} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad 4$$

$\frac{1}{2}$ b)

$$\left.\begin{matrix} e_1' = 0e_1 + 1e_2 \\ e_2' = 1e_1 + 2e_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow T_{E \to E'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 3$$

$$d_1 = (1,0,0) = 0(1,1,1) + 1(1,0,0) + 0(1,1,0)$$

$$d_2 = (0,1,0) = 0(1,1,1) - (1,0,0) + 1(1,1,0)$$

$$d_3 = (0,0,1) = 1(1,1,1) + 0(1,0,0) - 1(1,1,0) \quad 4$$

$$Q^{-1}_{D \to D'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f(e_1) = f(1,0) = (1,1,2) = 1d_1 + 1d_2 + 2d_3$$

$$f(e_2) = f(0,1) = (-2,-1,-3) = -2d_1 - d_2 - 3d_3$$

$$[f]_{E}^{D} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad 4$$

$$[f]_{E'}^{D'} = Q^{-1}[f]_D^E T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

السؤال الثاني : [15]

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -8 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(-2-\lambda) + 16$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + \lambda = (\lambda - 2)^2$$

(15)

$$\Rightarrow (\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$ جذر وحيد

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x - 4y = 0$$

نفرض $y = \alpha \Leftarrow x = 2\alpha$

$$E_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow E_\lambda$$ أساس $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 8

$\Rightarrow \dim E_\lambda = 1 \neq 2 \Rightarrow$ المصفوفة غير قابلة للتقطير

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2+c_3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{-l_3+l_2}$$

(20)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

جذر وحيد $\lambda_2 = 2$

السؤال الثالث : [30]

1 بما أن a شعاع ذاتي فإن $a \neq 0$ ، وبالتالي $\{a\}$ أساس

$\text{span}(a)$ وهو $\text{span}\{a\}$ أحادي البعد ، وكذلك

$\forall x \in \text{span}(a) \Rightarrow x = \alpha a \; ; \; \alpha \in K$

(10)

$$f(x) = f(\alpha a) = \alpha f(a) = \alpha \lambda a = (\alpha\lambda)a \in \text{span}(a)$$

وبالتالي $\text{span}(a)$ مستقر بالنسبة لـ f.

2 $S^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \langle (x,y,z), (1,2,-1) \rangle = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x + 2y - z = 0\}$

(12)

$x = -2\alpha + \beta \iff z = \beta$ ، $y = \alpha$ نعوض

$S'^{\perp} = \{(-2\alpha+\beta, \alpha, \beta) ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ 5

$\Rightarrow \{x_1 = (-2,1,0) , x_2 = (1,0,1)\}$ أساس لـ $S'^{\perp}$

$\Rightarrow y_1 = x_1 = (-2,1,0) \Rightarrow \|y_1\| = \sqrt{5} \Rightarrow z_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$ 2

$y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1 = (1,0,1) - \langle (1,0,1), \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) \rangle \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$

$= (1,0,1) + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) = (1,0,1) + \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$

$y_2 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) \Rightarrow \|y_2\| = \frac{\sqrt{30}}{5} \Rightarrow z_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$ 4

$[f]_{S'} = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 1 & 0 & -2i \\ 1 & i & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow [f]^{T}_{S'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -i & 0 & i \\ -1 & -2i & -2 \end{bmatrix}$ 3

$\Rightarrow [f^*]_{S'} = \overline{[f]_{S'}}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i & 0 & -i \\ -1 & 2i & -2 \end{bmatrix}$ 4 (8)

$\Rightarrow f^*(x,y,z) = (x+y+z, ix - iz, -x + 2iy - 2z)$

$(if)^* = \bar{i} f^{**} = -if$ ✶✶

وحاليًا f ليست هرميتية فإن $f \neq -f^*$ ، وبالتالي

$(if^*)^* = -i(-f^*) = if^* \Rightarrow$ if^* هرميتية

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان جبر خطي 2
لطلاب السنة الأولى- رياضيات
الدورة الفصلية الأولى

المدة ساعتان
الدرجة العظمى: 90 درجة
اسم الطالب:

السؤال الأول: (30 درجة) **1**- ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ معرفاً وفق القاعدة:

$$f(x,y,z)=(x-y-z,x-2z,2x-y+z)$$

أ- أوجد مصفوفة الإنتقال T من الجملة $E=\{e_1=(0,0,1),e_2=(0,1,1),e_3=(1,1,1)\}$ إلى الجملة $D=\{d_1=(1,0,0),d_2=(0,1,0),d_3=(0,0,1)\}$.

ب- أوجد مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للجملة D بطريقين مختلفتين.

2- ليكن $f:V_1\to V_2$ تطبيق خطي فوق حقل K. برهن أن الصورة العكسية وفق f لأي فضاء شعاعي جزئي W_2 من الفضاء V_2 هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V_1.

السؤال الثاني: (30 درجة) **1**- هل يوجد محول خطي يحقق الشرط $f(-1,1)=(3,0)$, $f(2,4)=(6,12)$ ؟ إذا كان ذلك ممكناً أوجد قاعدة تعريف له.

2 – قطر إن أمكن المؤثر الخطي f المعرف على $\mathbb{R}^2$ وفق القاعدة:

$$f(x,y,z)=(2x+y,-2x+5y)$$

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- لتكن S مجموعة جزئية غير خالية من فضاء جداء داخلي V. برهن أن المجموعة المعامدة لـ S فضاء جزئي من V .

2- ليكن W فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$ مولد بالشعاعين $z_1=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}),z_2=(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$. بين أن $\{z_1\ ,\ z_2\}$ مجموعة نظامية التعامد، ثم اكتب الشعاع $z=(1,0,2)$ كمجموع شعاعين أحدهما من W والآخر يعامد W.

3- أوجد شكل ثنائي الخطية على $\mathbb{R}^2$ والممثل للمصفوفة $\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ بالنسبة للقاعدة $\{(1,3),(0,1)\}$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2022-2-10

د. علياء حكيم

$a = x - w = (1,0,2) - \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow x = a + w \quad ; \quad w \in W \;\&\; a \perp W$ ✓

3

$(x,y) = x(1,3) + (y-3x)(0,1)$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 - 3x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 - 3y_1 \end{bmatrix}$$ ✓

$$= \begin{bmatrix} -2x_1 + 5x_2 - 15x_1 & 3x_1 + x_2 - 3x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 - 3y_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -17x_1 + 5x_2 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 - 3y_1 \end{bmatrix}$$ ✓

$$= -17x_1y_1 + 5x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_2y_1 = -17x_1y_1 + 2x_2y_1 + x_2y_2$$

من أجل $\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow -x_1 + x_2 = 0$$

نفرض $x_2 = \alpha$ $\Leftarrow$ $x_1 = \alpha$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \text{أساس } M_1 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ /5

من أجل $\lambda_2 = 4$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow -2x_1 + x_2 = 0$$

نفرض $x_2 = \alpha$ $\Leftarrow$ $-2x_1 = -\alpha$ $\Leftarrow$ $x_1 = \frac{\alpha}{2}$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} \\ \alpha \end{pmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \text{أساس } E_{\lambda_2} \left\{ v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ /5

وبالتالي β قابل للتقطير وفق القاعدة $\{v_1, v_2\}$

السؤال الثالث: [30]

1) أ) واضح أن $S^\perp \subseteq V$ و $S^\perp \neq \varnothing$ لأن $0 \in S^\perp$ لأن $0 \perp s$ مهما يكن s من S /3

ب)
$$\forall x, y \in S^\perp,\ \alpha, \beta \in F, s \in S \Rightarrow \langle \alpha x + \beta y, s \rangle = \alpha \langle x, s \rangle + \beta \langle y, s \rangle = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$ /6

$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in S^\perp$

في 1) و ب) بينا أن $S^\perp$ فضاء شعاعي جزئي من V

ج)
$$\|z_1\| = \langle z_1, z_1 \rangle = \sqrt{0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$\|z_2\| = \langle z_2, z_2 \rangle = \sqrt{\frac{4}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 1$$ /4

$$\langle z_1, z_2 \rangle = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = 0$$

وبالتالي $\{z_1, z_2\}$ مجموعة ناظمية متعامدة.

$$w = \langle x, z_1 \rangle z_1 + \langle x, z_2 \rangle z_2$$ /7

$$= \langle (1,0,2), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) + \langle (1,0,2), (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) \rangle (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2}}(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{4}{\sqrt{6}}(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = (0, -1, 1) + (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$$= (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$$

السؤال الثاني: [30]

1 مستقلة خطياً لأنه $\{(2,4),(-1,1)\}$.

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$; $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1(2,4) + \alpha_2(-1,1) = (0,0)$

$\Rightarrow \begin{matrix} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{matrix} \Big\} \rightarrow \begin{matrix} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_3 = 0 \end{matrix} \Big\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

5 وبما أن عدد عناصر $\{(2,4),(-1,1)\}$ يساوي 2 من بعد الفضاء $\mathbb{R}^2$ فان هذه المجموعة قاعدة لـ $\mathbb{R}^2$ وبالتالي هذه المجموعة تصف العلاقة المفروضة

$(x,y) = \alpha(2,4) + \beta(-1,1)$

$\Rightarrow \begin{matrix} 2\alpha - \beta = x \\ 4\alpha + \beta = y \end{matrix} \Big\} \xrightarrow{-2r_1 + r_2} \begin{matrix} 2\alpha - \beta = x \\ 3\beta = -2x + y \end{matrix}$

$\Rightarrow \beta = \frac{-2x + y}{3}$

$\Rightarrow 2\alpha = x + \beta = x + \frac{-2x + y}{3} = \frac{x + y}{3}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{x+y}{6}$ ✓ 10

$\Rightarrow (x,y) = \frac{x+y}{6}(2,4) + \frac{-2x+y}{3}(-1,1)$

$f(x,y) = \frac{x+y}{6} f(2,4) + \frac{-2x+y}{3} f(-1,1)$

$= \frac{x+y}{6}(6,12) + \frac{-2x+y}{3}(3,0)$

$= (x+y, 2x+2y) + (-2x+y, 0)$

$= (-x+2y, 2x+2y)$

12

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) + 2$ 5

$= \lambda^2 - 7\lambda + 10 + 2$

$= \lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 4)(\lambda - 3)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 4$

السؤال الأول: [30]

أ) 1

$d_1 = (1,0,0) = 0(0,0,1) - 1(0,1,1) + 1(1,1,1)$

$d_2 = (0,1,0) = -1(0,0,1) + 1(0,1,1) + 0(1,1,1)$

$d_3 = (0,0,1) = 1(0,0,1) + 0(0,1,1) + 0(1,1,1)$

ب) 3

$$T_{E \to D} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ج) 3

$f(d_1) = (1,1,2) = 1d_1 + 1d_2 + 2d_3$

$f(d_2) = (-1,0,-1) = -1d_1 + 0d_2 - 1d_3$

$f(d_3) = (-1,-2,1) = -1d_1 - 2d_2 + 1d_3$

$$\Rightarrow [f]_D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ب) 2

$f(e_1) = (-1,-2,1) = 3(0,0,1) - 1(0,1,1) - 1(1,1,1)$

$f(e_2) = (-2,-2,0) = 2(0,0,1) + 0(0,1,1) - 2(1,1,1)$

$f(e_3) = (-1,-1,2) = 3(0,0,1) + 0(0,1,1) - 1(1,1,1)$ ج) 3

$$[f]_E = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = T_{D \to E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ د) 2

$$[f]_D = T^{-1}_{E \to D} [f]_E T_{E \to D}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ هـ) 2

2 ف) واضح أن $0_{V_1} \in f^{-1}(W_2)$. إذن $f^{-1}(W_1) \neq \emptyset$ لأن $f(0_{V_1}) = 0_{V_2} \in W_2$

3 وبالتالي $0_V \in f^{-1}(W_2)$

ب)

$\forall x_1, x_2 \in f^{-1}(W_2), \alpha, \beta \in K \Rightarrow f(x_1), f(x_2) \in W_2$

$\Rightarrow \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \in W_2$ (W_2 فضاء شعاعي)

$\Rightarrow f(\alpha x_1 + \beta x_2) \in W_2 \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in f^{-1}(W_2)$ 7

من (أ) و(ب) نجد أن $f^{-1}(W_2)$ فضاء شعاعي جزئي من V_1.

الجمهورية العربية السورية | امتحان جبر خطي 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الأولى- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب:

السؤال الأول: (30 درجة) **1**- ليكن $f:V_1\to V_2$ تطبيق خطي فوق حقل K. برهن أن الصورة العكسية وفق f لأي فضاء شعاعي جزئي W_2 من الفضاء V_2 هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V_1.

2- ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$. إذا علمت أن $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&1&0\\-1&2&-1\end{bmatrix}$ هي مصفوفة f بالنسبة للجملة $E=\{e_1,e_2,e_3\}$.

أ- أوجد مصفوفة f بالنسبة للجملة $D=\{d_1=e_1\,,d_2=e_1-e_2\,,d_3=e_1+2e_2-e_3\}$.

ب- إذا كانت $E=\{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)\}$. أوجد المؤثر الخطي f الممثل للمصفوفة A بالنسبة للجملة E.

السؤال الثاني: (35 درجة) **1**- طبق نظرية كيلي هاملتون لإيجاد مقلوب المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{bmatrix}$.

2- قطّر إن أمكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}2&-1\\-4&5\end{bmatrix}$.

السؤال الثالث: (25 درجة) **1**- ليكن V فضاء شعاعي فوق حقل تبديلي K ، وليكن $f:V\to V$ مؤثراً خطياً. برهن أنه إذا كان W فضاء شعاعي جزئي من V أحادي البعد ومستقر بالنسبة لـ f، فإن كل شعاع يختلف عن الصفر من W يكون شعاع ذاتي لـ f.

2- أوجد المجموعة المعامدة للمجموعة $S=\{x=(1,1,-2)\}$ من الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ ، ثم أوجد قاعدة نظامية التعامد لـ S^T باستخدام طريقة جرام _ شميدت.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2021-7-11

د. علياء حكيم

A to Z

السؤال الأول:

أ) واضح أن $f^{-1}(W_2) \subseteq V_1$ ، أن $f^{-1}(W_2) \neq \emptyset$ لأن $f(0_{V_1}) = 0_{V_2} \in W_2$

وبالتالي $0_{V_1} \in f^{-1}(W_2)$.

ب) $\forall x_1, x_2 \in f^{-1}(W_2), \alpha, \beta \in K \Rightarrow f(x_1), f(x_2) \in W_2$

$\Rightarrow \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \in W_2 \Rightarrow f(\alpha x_1 + \beta x_2) \in W_2$

$\Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in f^{-1}(W_2)$

من (أ) و (ب) كل أن $f^{-1}(W_2)$ فضاء جزئي من V_1.

$$T_{E \to D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$e_1 = d_1 = d_1 + 0d_2 + 0d_3$

$e_2 = -d_2 + e_1 = -d_2 + d_1 = d_1 - d_2 + 0d_3$

$e_3 = -d_3 + e_1 + 2e_2 = -d_3 + d_1 + 2d_1 - 2d_2 = 3d_1 - 2d_2 - d_3$

$$T_{D \to E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[f]_D = T^{-1}_{E \to D} [f]_E T_{E \to D}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 13 \\ 0 & 5 & -12 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$(x, y, z) = x e_1 + y e_2 + z e_3$

$\Rightarrow f(x, y, z) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3)$

$= x(e_1 + 2e_2 - e_3) + y(-e_1 + e_2 + 2e_3) + z(2e_1 - e_3)$

$= x(1, 2, -1) + y(-1, 1, 2) + z(2, 0, -1)$

$= (x - y + 2z, 2x + y, -x + 2y - z)$

A to Z

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 3 \\ 4 & 1 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)[(-1-\lambda)(8-\lambda)-3] + 2(2+4(1+\lambda))$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda - 8 - 3) + (4+8+8\lambda)$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda - 11 - \lambda^3 + 7\lambda^2 + 11\lambda + 12 + 8\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 + 12\lambda + 1$$

$$\Rightarrow -A^3 + 8A^2 + 12A + I = 0$$

$$-A^2 + 8A + 12I + A^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = A^2 - 8A - 12I$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 18 \\ 12 & 4 & 25 \\ 38 & 7 & 75 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 18 \\ 12 & 4 & 25 \\ 38 & 7 & 75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 & -16 \\ -16 & 8 & -24 \\ -32 & -8 & -64 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 - 4$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \text{و} \quad \lambda_2 = 6$$

من أجل $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow x - y = 0$$

نفرض $y = \alpha \Leftarrow x = \alpha$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{و} \quad E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\dim E_{\lambda_1} = 1$

من أجل $\lambda_2 = 6$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 4x + y = 0$$

نفرض $x = -\frac{1}{4}\alpha \Leftarrow y = \alpha$

b/ $\Rightarrow E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow E_{\lambda_2}$ أساس $= \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\dim E_{\lambda_2} = 1$

وبالتالي المصفوفة قابلة للتقطير

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 3

$B = P^{-1} A P$

السؤال الثالث: [25]

1/ لنعرف أن $e \neq 0$ أساس لـ W، وبالتالي فإن:

$\forall 0 \neq x \in W \Rightarrow x = \alpha e \quad ; \alpha \in K - \{0\}$

$\Rightarrow f(x) = f(\alpha e) = \alpha f(e)$

وبما أن W تغير بالتحويل f فإن $f(e) \in W$، ومنه:

$f(e) = \beta e \quad ; \beta \in K$ 7

وبالتالي فإن:

$f(x) - x f(e) = \alpha(\beta e) = (\alpha\beta)e = (\beta\alpha)e$

$= \beta(\alpha e) = \beta x$

إذا x شعاع ذاتي لـ x.

$W^{\perp} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \langle (x,y,z), (1,1,-2) \rangle = 0 \}$ 2

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y - 2z = 0 \}$

نعرف $y = \alpha$ $\Leftarrow$ $z = \beta = 3$ $\rightarrow$ $x = -\alpha + 2\beta$

$\Rightarrow W^{\perp} = \{ (-\alpha + 2\beta, \alpha, \beta) \quad ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$ 1/2

$\Rightarrow \{ (-1, 1, 0), (2, 0, 1) \}$ أساس لـ $W^{\perp}$

$y_1 = (-1,1,0) \Rightarrow \|y_1\| = \sqrt{2} \Rightarrow z_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ 3/

$y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1$

$= (2,0,1) - \langle (2,0,1), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \rangle \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} 0 \right)$

2

$$= (2,0,1) + \frac{2}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$= (2,0,1) + (-1, 1, 0) = (1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \|y_2\| = \sqrt{3} \Rightarrow z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

A to Z

الجمهورية العربية السورية	امتحان جبر خطي 2	المدة ساعتان
جامعة طرطوس	لطلاب السنة الأولى- رياضيات	الدرجة العظمى: 90 درجة
كلية العلوم	الدورة الفصلية الأولى	اسم الطالب:

السؤال الأول: (30 درجة) **1-** ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ معرفاً وفق القاعدة:

$$f(x,y,z)=(x-y+2z,2x+y-4z,x-2y-z)$$

أ- أوجد مصفوفة الإنتقال T من الجملة $E=\{e_1=(0,0,1),e_2=(0,1,1),e_3=(1,1,1)\}$ إلى الجملة $D=\{d_1=(1,0,0),d_2=(0,1,0),d_3=(0,0,1)\}$.

ب- أوجد مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للجملة D بطريقين مختلفتين.

2- ليكن $f:V_1\to V_2$ تطبيق خطي فوق حقل K. برهن أن الصورة المباشرة وفق f لأي فضاء شعاعي جزئي W من الفضاء V_1 هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V_2.

السؤال الثاني: (30 درجة) **1-** هل يوجد محول خطي يحقق الشرط $f(3,3)=(-6,0)$, $f(1,2)=(1,2)$ ؟ إذا كان ذلك ممكناً أوجد قاعدة تعريف له، ثم احسب $f^{-1}(1,0)$.

2 - أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمؤثر الخطي المعرف بالشكل:

$$f(x,y,z)=(2x+3y,x+4y)$$

السؤال الثالث: (30 درجة) **1-** في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ استخدم القاعدة $S=\{x_1=(1,2,1),x_2=(1,1,0),x_3=(2,0,0)\}$ وطريقة جرام _ شميدت لبناء قاعدة نظامية التعامد لـ $\mathbb{R}^3$.

2- أوجد شكل ثنائي الخطية على $\mathbb{R}^2$ والممثل للمصفوفة $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ بالنسبة للقاعدة $\{(2,1),(1,0)\}$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2021-2-11

د. علياء حكيم

السؤال الأول: [35]

1) أ) [1

$d_1 = (1,0,0) = 0(0,0,1) - 1(0,1,1) + 1(1,1,1)$

$d_2 = (0,1,0) = -1(0,0,1) + 1(0,1,1) + 0(1,1,1)$

$d_3 = (0,0,1) = 1(0,0,1) + 0(0,1,1) + 0(1,1,1)$

$$T_{E \to D} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$f(d_1) = f(1,0,0) = (1,2,1) = 1d_1 + 2d_2 + 1d_3$

$f(d_2) = f(0,1,0) = (-1,1,-2) = -d_1 + d_2 - 2d_3$

$f(d_3) = f(0,0,1) = (2,-4,-1) = 2d_1 - 4d_2 - d_3$

$$[f]_D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$f(e_1) = f(0,0,1) = (2,-4,-1) = +3(0,0,1) - 6(0,1,1) + 2(1,1,1)$

$f(e_2) = f(0,1,1) = (1,-3,-3) = 0(0,0,1) - 4(0,1,1) + 1(1,1,1)$

$f(e_3) = f(1,1,1) = (2,-1,-2) = -1(0,0,1) - 3(0,1,1) + 2(1,1,1)$

$$[f]_E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -6 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}_{E \to D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$e_1 = (0,0,1) = 0d_1 + 0d_2 + d_3$

$e_2 = (0,1,1) = 0d_1 + d_2 + d_3$

$e_3 = (1,1,1) = d_1 + d_2 + d_3$

$$[f]_D = T^{-1}_{E \to D} [f]_E T_{E \to D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -6 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & -3 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$f(W) \subseteq V_2$ لأن $f(W) \neq \emptyset$ ، $0_V \in W$ لأن واضح أن (2)

$f(0_{V_1}) = 0_{V_2} \in f(W)$ ومنه (1)

$\forall y_1, y_2 \in f(W)$, $\alpha, \beta \in K \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in W$;

$f(x_1) = y_1$ و $f(x_2) = y_2$

$\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \overset{f \text{ خطي}}{=} f(\alpha x_1 + \beta x_2)$

ولكن $\alpha x_1 + \beta x_2 \in W$ لأن W فضاء شعاعي، ومنه:

$\alpha y_1 + \beta y_2 = f(\alpha x_1 + \beta x_2) \in f(W)$

وبالتالي من (1) و(2) نجد أن $f(W)$ فضاء شعاعي جزئي من V_2.

السؤال الثاني:

(15)

$\{v_1 = (1,2), v_2 = (3,3)\}$ $\alpha(1,2) + \beta(3,3) = (0,0)$

$\Rightarrow (\alpha + 3\beta, 2\alpha + 3\beta) = (0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \overset{\times -1}{\Rightarrow}$ $\alpha + 3\beta = 0$

$\alpha = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = 0$

$\{v_1, v_2\}$ مستقلة خطياً

بما أن $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ يساوي عدد عناصر المجموعة $\{v_1, v_2\}$

و بما أن $\{v_1, v_2\}$ مستقلة خطياً فهي قاعدة لـ $\mathbb{R}^2$.

وبالتالي يوجد تطبيق خطي وحيد يحقق العلاقة.

$(x, y) = \alpha(1,2) + \beta(3,3)$

$\Rightarrow (x, y) = (\alpha + 3\beta, 2\alpha + 3\beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ 2\alpha + 3\beta = y \end{cases} \overset{-L_1 + L_2}{}$

$\Rightarrow \alpha = -x + y \Rightarrow 3\beta = x - \alpha = x + x - y$

$\beta = \dfrac{2x - y}{3}$

$\Rightarrow f(x,y) = (-x+y) f(1,2) + \left(\dfrac{2x-y}{3}\right) f(3,3)$

$= (-x+y)(1,2) + (2x - y)(-6,0)$

$= (-x + y, -2x + 2y) + (-4x + 2y, 0)$

$f^{-1}(1,0) = (x,y) \Rightarrow (1,0) = f(x,y)$

$\Rightarrow (1,0) = (-5x+3y, -2x+2y)$

$\Rightarrow \begin{cases} -5x+3y = 1 \\ -2x+2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$ 3/

$\Rightarrow -5x+3x = 1 \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} = y$

$\Rightarrow f^{-1}(1,0) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$ (1.5) 1.2

$\Rightarrow (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-5) = 0$ 5/

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \& \quad \lambda_2 = 5$

من أجل $\lambda_1 = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 3y = 0$

نفرض $y = \alpha \Leftarrow x = -3\alpha$ 5/

$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} -3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ أساس لـ E_{λ_1}

من أجل $\lambda_2 = 5$

$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow$ 5/

$x = \alpha, \ y = \alpha$

$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow E_{\lambda_2}$ أساس لـ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

السؤال الثالث: [25] (10)

$y_1 = x_1 \Leftarrow$ 1

$z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$ 3/

$$y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1$$

$$= (1,1,0) - \langle (1,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \rangle \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= (1,1,0) - \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= (1,1,0) - \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \|y_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ 1 6/

$$\therefore \frac{y_2}{\|y_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y_3 = x_3 - \langle x_3, z_1 \rangle z_1 - \langle x_3, z_2 \rangle z_2$$

$$= (2,0,0) - \langle (2,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \rangle \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$- \langle (2,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (2,0,0) - \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) - \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (2,0,0) - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) - (1, 0, -1)$$

$$= \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$ 6/

$$\|y_3\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow z_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(10)

$$(x_1, x_2) = x_2(2,1) + (x_1 - 2x_2)(1,0)$$ 12

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 - 2y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3x_2 + 2x_1 - 4x_2 & -x_2 + x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 - 2y_2 \end{bmatrix}$$ 5

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 & x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 - 2y_2 \end{bmatrix}$$ 5/

$$= 2x_1y_2 - x_2y_2 + x_1y_1 - 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + 6x_2y_2$$

الجمهورية العربية السورية | امتحان جبر خطي 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الأولى- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب:

السؤال الأول: (35 درجة) 1- ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ معرفاً وفق القاعدة:

$$f(x,y,z)=(x+y-z,x+2y-2z,x-z)$$

أ - أوجد أساس لـ $\operatorname{Im} f$.

ب - إذا كان $v=(1,2,2)$ ، وكانت $E=\{e_1=(1,0,0),e_2=(1,1,0),e_3=(1,1,1)\}$ جملة احداثيات للفضاء $\mathbb{R}^3$. أوجد $[f(v)]_E$ بطرقتين مختلفتين.

2 -إذا كان $f:V_1\to V_2$ تطبيق خطي. برهن أن $kerf$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V_1 .

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- أوجد القيم الذاتية فقط للمؤثر الخطي المعرف بالشكل:

$$f(x,y,z)=(2x+2y+3z,x+3y+3z,x+2y+4z)$$

2 -قطّر إن أمكن المصفوفة الآتية $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}$.

السؤال الثالث: (25 درجة) 1- لنعرف الجداء الداخلي على $\mathbb{R}^3$ بالشكل:

$$<(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)>=x_1y_2+x_2y_1+x_3y_3$$

وليكن W فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الداخلي $\mathbb{R}^3$ ومولد بالشعاعين $x_1=(3,1,-2)$, $x_2=(1,2,-1)$. أوجد المجموعة المعامدة لـ W ، ثم أوجد أساساً لها.

2- ليكن $V=P_1$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي درجتها أصغر أو تساوي 1 ، مزوداً بالجداء الداخلي:

$$<f(x),g(x)>=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

استخدم القاعدة $\{1,x-1\}$ وطريقة جرام _ شميدت لبناء قاعدة نظامية التعامد لـ V .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2020-8-9

د. علياء حكيم

جامعة قطر (2)
سنة رياضيات

التمرين الأول:

$f(1,0,0) = (1,1,1)$

$f(0,1,0) = (1,2,0)$

$f(0,0,1) = (-1,-2,-1)$

3/

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1 \end{matrix} \quad \left| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix} \right]$$

3/ $L_2 \to L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6

$(1,1,1), (0,1,-1), \ldots$

$f(1,+2,2) = (1,1,-1)$

$f(v_1) = a(1,0,0) + 2(1,1,0) - 1(1,1,1)$

$$[f(v_1)]_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3/

$f(e_1) = (1,1,1) = a d_1 + 0 d_2 + 1 d_3$

$f(e_2) = (2,3,1) = -1(1,0,0) + 2(1,1,0) + 1(1,1,1)$

$f(e_3) = (1,1,0) = 0 d_1 + d_2 + 0 d_3$

5/

$$[f]_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$v = (1, 2, 2) = -2(1,0,0) - 0(1,1,0) + 2(1,1,1)$

$$[v]_E = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[f(v)]_E = [f]_E [v]_E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(10)

3) واضح أن $\ker f \subseteq V$ لأن $\ker f \neq \emptyset$ لأن $0_V \in \ker f$ لأن $f(0_V) = 0_W$

لكل $x_1, x_2 \in \ker f$, $\alpha, \beta \in K$ ⇒

$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$ لأن f تطبيق خطي

$= \alpha 0_{W_1} + \beta 0_{W_1}$ (x_1, x_2 من $\ker f$)

$= 0_{W_1}$ ⇒ $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \ker f$

ومنه (P) صحيحة أي أن $\ker f$ فضاء شعاعي جزئي من V.

السؤال الثاني:

1) إن مصفوفة f بالنسبة للعناصر الكانونية هي:

(10)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{-c_2 + c_3}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & -1+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{l_3 - l_2} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 3 \\ 1 & 6-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(1-\lambda)((2-\lambda)(6-\lambda)-5)$$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+12-5)$$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+7)$$

$$=(1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-7)$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=7$$

$$|A-\lambda I| = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$=(2-\lambda)(1-\lambda)-12$$

$$=\lambda^2-3\lambda+2-12$$

$$=\lambda^2-3\lambda-10$$

$$=(\lambda-5)(\lambda+2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1=5,\quad \lambda_2=-2$$

$\lambda_1=5$ من أجل

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

المعادلة المكافئة $-3x_1+4x_2=0$

$x_2=\alpha \Leftarrow$

$$x_1=\frac{4}{3}\alpha$$

$$E_{\lambda_1}=\left\{\begin{bmatrix}\frac{4}{3}\alpha\\ \alpha\end{bmatrix};\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

E_{λ_1} قاعدة $\begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\ 1\end{bmatrix}$

$\lambda_2=-2$ من أجل

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

المعادلة المكافئة

نعوض $\lambda = -2$ $\Leftarrow$ $x_1 = -\alpha$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

و المصفوفة قابلة للتقطير ،

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

السؤال الثالث :

$$W^{\perp} = \{ (x,y,3) ; \langle (x,y,3) | (3,1,-2) \rangle = 0 \}$$

(10)

$$\langle x,y,3 \rangle . \langle 1,2,-1 \rangle = 0$$

$$= \{ (x,y,3) ; x + 3y - 2z = 0 \}$$

$$2x + y - z = 0$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \xrightarrow{-2L_1 + L_2}$$

5

$$x + 3y - 2z = 0$$

$$-5y + 3z = 0$$

$z = \alpha \Leftarrow 3 = \alpha$

$$y = \frac{3}{5}\alpha$$

$$x = -3y + 2z \quad \cdot \quad -\frac{1}{5}\alpha + 2\alpha = \frac{1}{5}\alpha$$

$$W = \{ (\tfrac{1}{5}\alpha, \tfrac{3}{5}\alpha, \alpha) ; \alpha \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ \alpha (\tfrac{1}{5}, \tfrac{3}{5}, 1) \}$$

5

$y_1 = x_1 = 1$

$\Rightarrow \|y_1\|^2 = \int_0^1 1 \cdot 1 \, dx = [x]_0^1 = 1$

$\Rightarrow \|y_1\| = 1$

$\Rightarrow z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = 1$

$y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1$

$= (x-1) - \langle (x-1), 1 \rangle 1$

$= (x-1) - \int_0^1 (x-1)\, dx =$

$= (x-1) - \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1$

$= x - 1 + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$

$\|y_2\|^2 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4})\, dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow \|y_2\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow z_3 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان جبر خطي 2
لطلاب السنة الأولى- رياضيات
الدورة الفصلية الأولى

المدة ساعتان
الدرجة العظمى: 90 درجة
اسم الطالب:

السؤال الأول: (35 درجة)

1- برهن أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون التطبيق الخطي $f: V_1 \to V_2$ متبايناً هو أن يكون $Ker f = \{0\}$.

2- ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ معرفاً وفق القاعدة:

$$f(x,y,z) = (x - y + 2z, x - 2y, 2x - y + 3z)$$

أ- أوجد أساس لـ $\operatorname{Im} f$.

ب- أوجد مصفوفة الإنتقال T من الجملة $E = \{e_1 = (0,0,1), e_2 = (0,1,1), e_3 = (1,1,1)\}$ إلى الجملة $D = \{d_1 = (1,0,0), d_2 = (0,1,0), d_3 = (0,0,1)\}$.

ت- إذا كان $X = (2,1,-1)$ فأجد $[X]_E$ بطرقتين مختلفتين.

ث- أوجد المصفوفة $[f]_E^D$.

السؤال الثاني: (20درجة) قطّر إن أمكن المصفوفة الآتية $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

السؤال الثالث: (35 درجة) **1-** إذا كان V فضاء جداء داخلي، وكانت S مجموعة متعامدة في V ولا تحوي الصفر. برهن أن S مستقلة خطياً.

2- ليكن W فضاء شعاعي جزئي من $P_2[x]$ مولد بالشعاعين $z_1 = 1$, $z_2 = \sqrt{3}(2x-1)$. بين أن $\{z_1 , z_2\}$ مجموعة نظامية التعامد، ثم اكتب الشعاع $z = x - 1$ كمجموع شعاعين أحدهما من W والآخر يعامد W.

3- أوجد شكل ثنائي الخطية على $\mathbb{R}^2$ والممثل للمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ بالنسبة للقاعدة $\{(2,1),(1,0)\}$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2020-2-6

د. علياء حكيم

Scanned by CamScanner

سلم تصحيح هم حلين (2)
سنة أولى رياضيات
فصل أول 2019-2020

(1)

التمرين الأول: [5 5]

1) لزوم الشرط b: الفرض: f متباين
(10) المطلوب: $\ker f = \{0\}$ ؟

إذا كان x عنصراً من $\ker f$ فإن $f(x) = 0$ ، وبالتالي $f(x) = f(0)$.
وبما أن f متباينة فإن $x = 0$ ، وبالتالي $\ker f = \{0\}$.

كفاية الشرط b: الفرض: $\ker f = \{0\}$ ؟
المطلوب: f متباين. 5

$\forall x_1, x_2 \in V$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0$
$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f = \{0\}$
$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

وبالتالي f متباين

(25) 2) لدينا الأسئلة $\mathbb{R}^3$ تولد $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$f(1,0,0) = (1,1,2)$ 5
$f(0,1,0) = (-1,-2,-1)$
$f(0,0,1) = (1,0,3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2l_1+l_3]{l_1+l_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2l_3+l_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

وبالتالي $\{(1,1,2), (0,-1,1), (0,0,-3)\}$ أساس لـ $\operatorname{Im} f$

ب)
$d_1 = (1,0,0) = 0(0,0,1) - (0,1,1) + 1((1,1,1)$
$d_2 = (0,1,0) = -(0,0,1) + 1(0,1,1) + 0(1,1,1)$
$d_3 = (0,0,1) = 1(0,0,1) + 0(0,1,1) + 0((1,1,1)$

$$T_{E \to D} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 5

Scanned by CamScanner

إن $ab = 0$ ، لأنه إذا كان $ab \neq 0$ ، فإن :

$$0 \neq ab \in R_s R_s \subseteq R_{ss} \quad \& \quad ab \in R_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab \in R_s \cap R_{ss} \Rightarrow R_s = R_{ss} \Rightarrow s = ss$$

أي أن s عنصر جامد في S ، ولكن e هو العنصر الجامد الوحيد في S و $s \neq e$ وهذا تناقض . ومنه $ab = 0$ ، و بالتالي فإن :

$$ab = 0 \quad \& \quad a + b = ab \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$$

ومنه :

$$ab = 0 \Rightarrow a(-a) = 0 \Rightarrow aa = 0$$

($\Rightarrow$) الفرض : $aa = 0$.

الطلب : a عنصر شبه نظامي من اليمين في R_s .

بما أن $a \in R_s$ فإن $-a \in R_s$ ، كما أن :

$$a + (-a) - (a)(-a) = a - a + (aa) = 0 + 0 = 0$$

وبالتالي فإن :

$$-a \in R_s \quad \& \quad a + (-a) - (a)(-a) = 0$$

ومن ثم فإن a عنصر شبه نظامي من اليمين في R_s .

Scanned by CamScanner

$$[x]_D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x = (2,1,1) = -2(0,0,1) - (0,1,1) + 2(1,1,1)$$

$$[x]_E = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[x]_E = \underset{E \to D}{T}\,[x]_D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7

5

$$f(e_1) = f(0,0,1) = (2,0,3) = 2d_1 + 0d_2 + 3d_3$$

$$f(e_2) = f(0,1,1) = (1,-2,2) = 1d_1 + 2d_2 + 2d_3$$

$$f(e_3) = f(1,1,1) = (2,1,-4) = 2d_1 - d_2 + 4d_3$$

5

$$[f]_E^D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

السؤال الثاني: [20]

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) + 1) + (1 + (1-\lambda) - (-1+3-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

6

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 2$$ هذه هي القيم الذاتية

من أجل $\lambda_1 = 1$

$$\begin{cases} -y - 3 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \xrightarrow{i_2 + i_3'} \begin{cases} -y - 3 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

نعوض في $z = \alpha \Leftarrow y = -\alpha \Leftarrow x = \alpha$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} E_{\lambda_1}$$

6

Scanned by CamScanner

2-4. مبرهنة : لتكن R حلقة ذات عنصر وحدة 1 ، ولتكن S نصف زمرة اختزالية تملك

عنصراً جامداً e ، ولنفرض أن $R = \bigoplus_{s\in S} R_s$ تدريج للحلقة R وفق نصف الزمرة S . إذا كان

s عنصراً من S بحيث إن $s \neq e$ ، وكان a عنصراً من R_s ، فإن الشرط اللازم والكافي لكي

يكون العنصر a شبه نظامي يميني (شبه نظامي يساري ، شبه نظامي) في R_s هو أن يكون :

$$aa = 0$$

البرهان : سنبرهن المبرهنة في الحالة التي يكون فيها a شبه نظامي يميني . البرهان مماثل

في الحالتين التي يكون فيها a شبه نظامي يساري أو شبه نظامي .

$\Leftarrow$) الفرض : a عنصر شبه نظامي من اليمين في R_s .

الطلب : $aa = 0$.

بما أن a عنصر شبه نظامي من اليمين في R_s ، فإنه يوجد عنصر b من R_s بحيث يكون :

$$a + b - ab = 0$$

وبالتالي يكون :

$$a + b = ab$$

بما أن $a, b \in R_s$ ، فإن $ab \in R_s$ (وذلك لأن $a + b = ab$) .

Scanned by CamScanner

$$\left.\begin{aligned} -x-y-z&=0\\ x+y+z&=0\\ -x-y-z&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x+y+z=0 \quad 6/$$

$$x=-\alpha-\beta \Leftarrow y=\alpha,\ z=\beta$$

$$E_{\lambda_2}=\left\{\begin{bmatrix}-\alpha-\beta\\ \alpha\\ \beta\end{bmatrix};\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\dim E_{\lambda_2}=2 \Leftarrow E_{\lambda_2}$$

● المصفوفة قابلة للقطرية

$$P=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix} \quad 2/$$

السؤال الثالث: [35]

1) لتكن $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعة كيفية من E فضاء.

(1ن) لبرهن أنها مستقلة خطياً. لنبرهن أن:

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n=0$$

حيث α_i سلميات كيفية. عندئذ:

$$\langle \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n, x_1\rangle=0 \quad 6/$$

$$\Rightarrow \alpha_1\langle x_1,x_1\rangle+\alpha_2\langle x_2,x_1\rangle+\dots+\alpha_n\langle x_n,x_1\rangle=0$$

$$\Rightarrow \alpha_1\langle x_1,x_2\rangle+\alpha_2\,0+\dots+\alpha_n\,0=0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1\langle x_1,x_1\rangle=0 \quad 6/$$

إذن $x_1\neq 0$، وبالتالي $\langle x_1,x_1\rangle\neq 0$

بنفس الطريقة نجد أن $\alpha_i=0$ من أجل كل $i=1,2,\dots,n$، وهذا يبين أن $\{x_1,\dots,x_n\}$ مستقلة خطياً. وبالتالي E مستقل خطياً.

2) (1ن)

$$\langle z_1,z_2\rangle=\int_0^1\sqrt{3}(2x-1)\,dx=\sqrt{3}\left[x^2-x\right]_0^1=0$$

$$\langle z_1,z_1\rangle=\int_0^1 1\,dx=\left[x\right]_0^1=1$$

$$\langle z_2,z_2\rangle=\int_0^1(\sqrt{3}(2x-1))^2\,dx=3\int_0^1(4x^2-4x+1)\,dx$$

Scanned by CamScanner

$$= 3\left[\frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x\right]_0^1 = 3(\frac{}{3}$$

مجموعة نظامية المقاس. $\{z_1, z_2\}$

$$w = \langle z, z_1\rangle z_1 + \langle z, z_2\rangle z_2$$

$$= \int_0^1 (x-1)\,dx\,1 + \left(\sqrt{3}\int_0^1 (x-1)(2x-1)\,dx\right)\sqrt{3}(2x$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + 3\left(\int_0^1 (2x^2 - 3x + 1)\,dx\right)(2x-1)$$

$$= -\frac{1}{2} + 3\left[\frac{2x^2}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 (2x-1)$$ (4)

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2x-1) = -1 + x$$

$$a = z - w = x - 1 - x + 1 = 0$$

$\Rightarrow z = a + w$; $w \in W$ & $a \perp W$

(13)

3 إذا كان $x = (x_1, x_2)$ عنصراً ما من $\mathbb{R}^2$، فإن:

$$(x_1, x_2) = x_2(2,1) + (x_1 - 2x_2)(1,0)$$ 6

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 - 2y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3x_1 - 4x_2 & x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 - 2y_2 \end{bmatrix}$$

$$= 3x_1 y_2 - 4x_2 y_2 + x_1 - 3x_2)(y_1 - 2y_2)$$

$$= x_1 y_2 + 2x_2 y_2 + x_1 y_1 - 3x_2 y_1$$ 7

Scanned by CamScanner

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان جبر خطي 2
لطلاب السنة الأولى- رياضيات
الدورة الفصلية الثالثة

المدة ساعتان
الدرجة العظمى: 90 درجة
اسم الطالب:

السؤال الأول: (35 درجة)

1- ليكن f و g مؤثرين خطيين على الفضاء الشعاعي المنته البعد V ، ولتكن S جملة إحداثيات لـ V . أثبت أن:

$$[f \circ g]_S = [f]_S \cdot [g]_S$$

2- ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الشعاعي R^3 معرفاً وفق القاعدة:

$$f(x,y,z) = (x - y + 2z, x + z, x - 2y + 3z)$$

أ- عين $Kerf$ وأوجد قاعدة لها.

ب- أوجد مصفوفة الإنتقال T من الجملة $E = \{e_1 = (1,1,1), e_2 = (0,1,1), e_3 = (0,0,1)\}$ إلى الجملة $D = \{d_1 = (1,0,0), d_2 = (0,1,0), d_3 = (0,0,1)\}$.

ت- أوجد مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للجملة D بطريقين مختلفتين.

السؤال الثاني: (30درجة) 1- طبق نظرية كيلي هاملتون لإيجاد مقلوب المصفوفة الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2- ليكن f مؤثراً خطياً على C^2 معرفاً بالشكل $f(x,y) = (y,-x)$. أوجد جميع الفضاءات الشعاعية الجزئية من C^2 المستقرة بالنسبة لـ f .

السؤال الثالث: (25 درجة) 1- أثبت أن القيم الذاتية لمؤثر هرميتي هي أعداد حقيقية.

2- أوجد المتمم العامودي للفضاء الجزئي W من الفضاء الاقليدي R^3 والمولد بالأشعة $\{x_1 = (1,2,1), x_2 = (1,3,-1)\}$ ، ثم أوجد قاعدة نظامية التعامد لـ W^T .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2019-8-5

مكتبة A to Z

مكتبة A to Z

السؤال الأول: [35]

(1) ليكن x عنصراً كيفياً في V. لدينا:

$$[(f \circ g)(x)]_S = [f \circ g]_S [x]_S \quad \dots (1)$$

ومن جهة ثانية:

$$[(f \circ g)(x)]_S = [f(g(x))]_S = [f]_S [g(x)]_S$$

$$= [f]_S [g]_{S'} [x]_{S'} \quad \dots (2)$$

من (1) و(2) نجد أن:

$$[f \circ g]_S [x]_S = [f]_S [g]_{S'} [x]_S$$

وبما أن x عنصر كيفي فإن:

$$[f \circ g]_{S'} = [f]_S [g]_{S'}$$

(2) $\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{-L_1 + L_2 \\ -L_1 + L_3}} \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

نفرض $z = \alpha \Leftarrow y = z = \alpha \Leftarrow x = y - 2z = \alpha - 2\alpha = -\alpha$

$$\ker f = \{(-\alpha, \alpha, \alpha) ; \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$\ker f$ قاعدته $(-1, 1, 1)$ و

(3) $v_1 = (1, 0, 0) = 1(1, 1, 1) - 1(0, 1, 1) + 0(0, 0, 1)$

$v_2 = (0, 1, 0) = 0(1, 1, 1) + 1(0, 1, 1) - 1(0, 0, 1)$

(2)

$$T_{E \to D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(10)

(b) (1)

$$f(d_1) = f(1,0,0) = (1,1,1) = 1d_1 + 1d_2 + 1d_3$$

$$f(d_2) = f(0,1,0) = (-1,0,-2) = -1d_1 + 0d_2 - 2d_3$$

$$f(d_3) = f(0,0,1) = (2,1,3) = 2d_1 + d_2 + 3d_3$$ (2)

$$[f]_D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) (2)

$$T^{-1}_{D \to E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(e_1) = f(1,1,1) = (2,2,2) = 2e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$f(e_2) = f(0,1,1) = (+1,1,1) = 1(1,1,1) + 0(0,1,1) + 0(0,0,1)$$

$$f(e_3) = f(0,0,1) = (2,1,3) = 2(1,1,1) - 1(0,1,1) + 2(0,0,1)$$

$$[f]_E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ (2)

$$[f]_D = T^{-1}\,[e]_D\,T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & +1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ (2)

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

مكتبة A to Z

مكتبة A to Z

السؤال الثالث: [30]

ا) (20)

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 3 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -[-\lambda(2-\lambda)(4-\lambda)-3-1]-[-(4-\lambda)-\lambda-3(2-\lambda)]$$

$$= [-\lambda(\lambda^2-6\lambda+8)-4]-[3\lambda-10] \quad \text{10}$$

$$= -\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6$$

وبالتالي:

$$-A^3+6A^2-11A+6I=0$$

$$-A^2+6A-11I+6A^{-1}=0$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{6}(A^2-6A+11I)$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 3 & 14 & 13 \\ -3 & -5 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{5}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\left[\begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 3 & 14 & 13 \\ -3 & -5 & -4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 12 & 6 & 6 \\ 6 & 24 & 18 \\ -6 & -6 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}\right)$$

$$=+\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{5}$$

(10)

ج) لنوجد A مصفوفة الدوران الخطي L بالنسبة للقاعدة القانونية $\{(1,0),(0,1)\}$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+1 \Rightarrow d(\lambda)=2$$

$$\Rightarrow \lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i$$

من أجل $\lambda_1=i$ فإن:

$$\begin{matrix} ix_1-x_2=0 \\ x_1+ix_2=0 \end{matrix} \xrightarrow{i\times(1)+(2)} \begin{matrix} ix_1-x_2=0 \\ 0=0 \end{matrix}$$

$$-x_1=1 \Rightarrow ix_1=x_2=-i \Rightarrow x_1=-i \quad \text{1}$$

مكتبة A to Z

$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} ix \\ x \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{C} \right\}$ (1)

$E_{\lambda_1} \perp \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

في أصل $\lambda_1 = -i$ ، فإن:

$$\begin{matrix} -ix_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - ix_2 = 0 \end{matrix} \xrightarrow{-i(i,1)+i_2} -ix_1 - x_2 = 0$$

نفرض $x_2 = \alpha$ ، فإن

$$-ix_1 - x_2 \Rightarrow x_1 = ix_2 \Rightarrow x_1 = i\alpha$$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} ix \\ x \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{C} \right\}$$

ب/

$$E_{\lambda_2} \perp \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- الفضاءات الجزئية المتولدة بأشعة f هي:

$\mathbb{C}^1$, $\mathbb{C}^2$, $\mathrm{Span}(v_1)$, $\mathrm{Span}(v_2)$

حـ/ برهن

السؤال الثالث: [25]

1/ ليكن f مؤثراً هرميتي على الفضاء الخطي (الوقليدي) V ، ولتكن $\lambda \neq 0$ قيمة ذاتية لـ f ، وليكن x شعاعاً ذاتياً مرافقاً القيمة الذاتية λ. لدينا:

$$\langle f(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \quad \ldots (1)$$

وبصفة أخرى لدينا:

2/

$$\langle f(x), x \rangle = \langle x, f^*(x) \rangle = \langle x, f^2(x) \rangle$$

$$= \langle x, f(\alpha x) \rangle = \langle x, \alpha x \rangle$$

$$= \bar{\lambda} \langle x, x \rangle \quad \ldots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$\lambda \langle x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$$

$$\Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) \langle x, x \rangle = 0$$

بما أن x شعاع ذاتي، فهو $x \neq 0$ ، وبالتالي $\langle x, x \rangle \neq 0$ ، ومنه:

$$\lambda - \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

مكتبة A to Z

12

$$W^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \langle (x,y,z),(1,+2,1)\rangle = 0 \ \text{و} \ \langle (x,y,z),(1,+3,-1)\rangle = 0 \}$$

$$W^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x+2y+3=0 \ \text{و} \ x-3y-z=0 \}$$

$$\begin{matrix} x+2y+z=0 \\ x+3y-z=0 \end{matrix} \xrightarrow{-1,+1,} \begin{matrix} x+2y+z=0 \\ y-2z=0 \end{matrix}$$

نفرض $z=2$ ← $y=2z$

$$x = -2y-z = -2(2z)-z = -4z-z = -5z$$

$$W^{\perp} = \{(-5z, 2z, z) ; z \in \mathbb{R}\}$$

وبالتالي $(-5,2,1)$ قاعدة لـ $W^{\perp}$

$(\frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}})$ قاعدة نظامية لـ $W^{\perp}$

مكتبة A to Z

د. علياء صبح

الجمهورية العربية السورية | امتحان جبر خطي 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الأولى- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب:

السؤال الأول: (30 درجة) **1**- ليكن $f:V_1\to V_2$ تطبيق خطي فوق حقل K. برهن أن الصورة العكسية وفق f لأي فضاء شعاعي جزئي W_2 من الفضاء V_2 هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V_1.

2- ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$. إذا علمت أن $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&1&0\\-1&2&-1\end{bmatrix}$ هي مصفوفة f بالنسبة للجملة $E=\{e_1,e_2,e_3\}$.

أ- أوجد مصفوفة f بالنسبة للجملة $D=\{d_1=e_1\,,d_2=e_1-e_2\,,d_3=e_1+2e_2-e_3\}$.

ب- إذا كانت $E=\{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)\}$. أوجد المؤثر الخطي f الممثل للمصفوفة A بالنسبة للجملة E.

السؤال الثاني: (35 درجة) **1**- طبق نظرية كيلي هاملتون لإيجاد مقلوب المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{bmatrix}$.

2- قطّر إن أمكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}2&-1\\-4&5\end{bmatrix}$.

السؤال الثالث: (25 درجة) **1**- ليكن V فضاء شعاعي فوق حقل تبديلي K ، وليكن $f:V\to V$ مؤثراً خطياً. برهن أنه إذا كان W فضاء شعاعي جزئي من V أحادي البعد ومستقر بالنسبة لـ f، فإن كل شعاع يختلف عن الصفر من W يكون شعاع ذاتي لـ f.

2- أوجد المجموعة المعامدة للمجموعة $S=\{x=(1,1,-2)\}$ من الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ ، ثم أوجد قاعدة نظامية التعامد لـ S^T باستخدام طريقة جرام _ شميدت.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2021-7-11

د. علياء حكيم

A to Z

السؤال الأول:

أ) واضح أن $f^{-1}(W_2) \subseteq V_1$ ، أن $f^{-1}(W_2) \neq \emptyset$ لأن $f(0_{V_1}) = 0_{V_2} \in W_2$

وبالتالي $0_{V_1} \in f^{-1}(W_2)$.

ب) $\forall x_1, x_2 \in f^{-1}(W_2), \alpha, \beta \in K \Rightarrow f(x_1), f(x_2) \in W_2$

$\Rightarrow \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \in W_2 \Rightarrow f(\alpha x_1 + \beta x_2) \in W_2$

$\Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in f^{-1}(W_2)$

من (أ) و (ب) كل أن $f^{-1}(W_2)$ فضاء جزئي من V_1.

$$T_{E \to D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$e_1 = d_1 = d_1 + 0d_2 + 0d_3$

$e_2 = -d_2 + e_1 = -d_2 + d_1 = d_1 - d_2 + 0d_3$

$e_3 = -d_3 + e_1 + 2e_2 = -d_3 + d_1 + 2d_1 - 2d_2 = 3d_1 - 2d_2 - d_3$

$$T_{D \to E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[f]_D = T^{-1}_{E \to D} [f]_E T_{E \to D}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 13 \\ 0 & 5 & -12 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$(x, y, z) = x e_1 + y e_2 + z e_3$

$\Rightarrow f(x, y, z) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3)$

$= x(e_1 + 2e_2 - e_3) + y(-e_1 + e_2 + 2e_3) + z(2e_1 - e_3)$

$= x(1, 2, -1) + y(-1, 1, 2) + z(2, 0, -1)$

$= (x - y + 2z, 2x + y, -x + 2y - z)$

A to Z

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 3 \\ 4 & 1 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)[(-1-\lambda)(8-\lambda)-3] + 2(2+4(1+\lambda))$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda - 8 - 3) + (4+8+8\lambda)$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda - 11 - \lambda^3 + 7\lambda^2 + 11\lambda + 12 + 8\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 + 12\lambda + 1$$

$$\Rightarrow -A^3 + 8A^2 + 12A + I = 0$$

$$-A^2 + 8A + 12I + A^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = A^2 - 8A - 12I$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 18 \\ 12 & 4 & 25 \\ 38 & 7 & 75 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 18 \\ 12 & 4 & 25 \\ 38 & 7 & 75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 & -16 \\ -16 & 8 & -24 \\ -32 & -8 & -64 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 - 4$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \text{و} \quad \lambda_2 = 6$$

من أجل $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow x - y = 0$$

نفرض $y = \alpha \Leftarrow x = \alpha$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{و} \quad E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\dim E_{\lambda_1} = 1$

من أجل $\lambda_2 = 6$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 4x + y = 0$$

نفرض $x = -\frac{1}{4}\alpha \Leftarrow y = \alpha$

b/ $\Rightarrow E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow E_{\lambda_2}$ أساس $= \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\dim E_{\lambda_2} = 1$

وبالتالي المصفوفة قابلة للتقطير

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 3

$B = P^{-1} A P$

السؤال الثالث: [25]

1/ لنعرف أن $e \neq 0$ أساس لـ W، وبالتالي فإن:

$\forall 0 \neq x \in W \Rightarrow x = \alpha e \quad ; \alpha \in K - \{0\}$

$\Rightarrow f(x) = f(\alpha e) = \alpha f(e)$

وبما أن W تغير بالتحويل f فإن $f(e) \in W$، ومنه:

$f(e) = \beta e \quad ; \beta \in K$ 7

وبالتالي فإن:

$f(x) - x f(e) = \alpha(\beta e) = (\alpha\beta)e = (\beta\alpha)e$

$= \beta(\alpha e) = \beta x$

إذا x شعاع ذاتي لـ x.

$W^{\perp} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \langle (x,y,z), (1,1,-2) \rangle = 0 \}$ 2

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y - 2z = 0 \}$

نعرف $y = \alpha$ $\Leftarrow$ $z = \beta = 3$ $\rightarrow$ $x = -\alpha + 2\beta$

$\Rightarrow W^{\perp} = \{ (-\alpha + 2\beta, \alpha, \beta) \quad ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$ 1/2

$\Rightarrow \{ (-1, 1, 0), (2, 0, 1) \}$ أساس لـ $W^{\perp}$

$y_1 = (-1,1,0) \Rightarrow \|y_1\| = \sqrt{2} \Rightarrow z_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ 3/

$y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1$

$= (2,0,1) - \langle (2,0,1), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \rangle \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} 0 \right)$

2

$$= (2,0,1) + \frac{2}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$= (2,0,1) + (-1, 1, 0) = (1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \|y_2\| = \sqrt{3} \Rightarrow z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

A to Z

الجمهورية العربية السورية — امتحان جبر خطي 2 — المدة ساعتان

جامعة طرطوس — لطلاب السنة الأولى- رياضيات — الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم — الدورة الفصلية الأولى — اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (30 درجة) 1- ليكن f مؤثراً خطياً على الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ معرفاً وفق القاعدة:

$$f(x,y,z)=(x-y+2z,2x+y-4z,x-2y-z)$$

أ- أوجد مصفوفة الإنتقال T من الجملة $E=\{e_1=(0,0,1),e_2=(0,1,1),e_3=(1,1,1)\}$ إلى الجملة $D=\{d_1=(1,0,0),d_2=(0,1,0),d_3=(0,0,1)\}$.

ب- أوجد مصفوفة المؤثر الخطي f بالنسبة للجملة D بطريقين مختلفتين.

2- ليكن $f:V_1\to V_2$ تطبيق خطي فوق حقل K. برهن أن الصورة المباشرة وفق f لأي فضاء شعاعي جزئي W من الفضاء V_1 هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V_2.

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- هل يوجد محول خطي يحقق الشرط $f(3,3)=(-6,0)$, $f(1,2)=(1,2)$ ؟ إذا كان ذلك ممكناً أوجد قاعدة تعريف له، ثم احسب $f^{-1}(1,0)$.

2 - أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمؤثر الخطي المعرف بالشكل:

$$f(x,y,z)=(2x+3y,x+4y)$$

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ استخدم القاعدة $S=\{x_1=(1,2,1),x_2=(1,1,0),x_3=(2,0,0)\}$ وطريقة جرام _ شميدت لبناء قاعدة نظامية التعامد لـ $\mathbb{R}^3$.

2- أوجد شكل ثنائي الخطية على $\mathbb{R}^2$ والممثل للمصفوفة $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ بالنسبة للقاعدة $\{(2,1),(1,0)\}$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2021-2-11

A to Z

[35] السؤال الأول

$d_1 = (1,0,0) = 0(0,0,1) - 1(0,1,1) + 1(1,1,1)$

$d_2 = (0,1,0) = -1(0,0,1) + 1(0,1,1) + 0(1,1,1)$

$d_3 = (0,0,1) = 1(0,0,1) + 0(0,1,1) + 0(1,1,1)$

$$T_{E \to D} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$f(d_1) = f(1,0,0) = (1,2,1) = 1d_1 + 2d_2 + 1d_3$

$f(d_2) = f(0,1,0) = (-1,1,-2) = -d_1 + d_2 - 2d_3$

$f(d_3) = f(0,0,1) = (2,-4,-1) = 2d_1 - 4d_2 - d_3$

$$[f]_D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$f(e_1) = f(0,0,1) = (2,-4,-1) = +3(0,0,1) - 6(0,1,1) + 2(1,1,1)$

$f(e_2) = f(0,1,1) = (1,-3,-3) = 0(0,0,1) - 4(0,1,1) + 1(1,1,1)$

$f(e_3) = f(1,1,1) = (2,-1,-2) = -1(0,0,1) - 3(0,1,1) + 2(1,1,1)$

$$[f]_E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -6 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}_{E \to D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$e_1 = (0,0,1) = 0d_1 + 0d_2 + d_3$

$e_2 = (0,1,1) = 0d_1 + d_2 + d_3$

$e_3 = (1,1,1) = d_1 + d_2 + d_3$

$$[f]_D = T^{-1}_{E \to D} [f]_E T_{E \to D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -6 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & -3 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

A to Z

$0_{V_1} \in W$ لأن $f(W) \neq \emptyset$ ، $f(W) \subseteq V_2$ أي أن f ...

$f(0_{V_1}) = 0_{V_2} \in f(W)$ ... 3 ... (15)

$\forall y_1, y_2 \in f(W)$, $\alpha, \beta \in K \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in W$;

$f(x_1) = y_1$ & $f(x_2) = y_2$

$\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \overset{f \text{ خطي}}{=} f(\alpha x_1 + \beta x_2)$ ... 7

ولكن $\alpha x_1 + \beta x_2 \in W$ لأن W فضاء شعاعي ... (15)

$\alpha y_1 + \beta y_2 = f(\alpha x_1 + \beta x_2) \in f(W)$

وبالتالي من (P) و (1) نجد أن $f(W)$ فضاء شعاعي جزئي من V_2.

السؤال الثاني: ... 1

$\alpha(1,2) + \beta(3,3) = (0,0)$ ؟ $v_1 = (1,2), v_2 = (3,3)$

$\Rightarrow (\alpha + 3\beta, 2\alpha + 3\beta) = (0,0)$

$\Rightarrow \begin{matrix} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{matrix}$ ؟ $\overset{\times -1}{\Rightarrow}$ $\begin{matrix} \alpha + 3\beta = 0 \\ -\alpha = 0 \end{matrix}$ ؟ $\Rightarrow \alpha = \beta = 0$ ... 5

$\{v_1, v_2\}$ مستقلة خطياً

بما أن $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ ... عدد متجهات المجموعة $\{v_1, v_2\}$

وعليه فإن $\{v_1, v_2\}$ مستقلة خطياً وتشكل قاعدة لـ $\mathbb{R}^2$.

وبالتالي يوجد تطبيق خطي وحيد يحقق العلاقة.

$(x, y) = \alpha(1,2) + \beta(3,3)$

$\Rightarrow (x, y) = (\alpha + 3\beta, 2\alpha + 3\beta) \Rightarrow \begin{matrix} \alpha + 3\beta = x \\ 2\alpha + 3\beta = y \end{matrix}$ ؟ $\overset{-L_1 + L_2}{}$

$\Rightarrow \alpha = -x + y \Rightarrow 3\beta = x - \alpha = x + x - y$

$\beta = \dfrac{2x - y}{3}$

$\Rightarrow f(x, y) = (-x + y) f(1,2) + \left(\dfrac{2x - y}{3}\right) f(3,3)$ ... 7

$= (-x + y)(1,2) + (2x - y)(-6, 0)$

$= (-x + y, -2x + 2y) + (-6x + 3y, 0)$

$$f^{-1}(1,0)=(x,y) \Rightarrow (1,0)=f(x,y)$$

$$\Rightarrow (1,0)=(-5x+3y,\ 2x+2y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5x+3y=1 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow x=y$$

$$\Rightarrow -5x+3x=1 \Rightarrow -2x=1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}=y$$

$$\Rightarrow f^{-1}(1,0)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(4-\lambda)-3=0 \Rightarrow \lambda^2-6\lambda+8-3=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2-6\lambda+5=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-5)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1 \quad \& \quad \lambda_2=5$$

من أجل $\lambda_1=1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow x+3y=0$$

نفرض $y=\alpha \Leftarrow x=-3\alpha$

$$E_{\lambda_1}=\left\{\begin{bmatrix} -3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

أساس E_{λ_1}

من أجل $\lambda_2=5$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow x-y=0 \Rightarrow$$

$$x=\alpha,\ y=\alpha$$

$$E_{\lambda_2}=\left\{\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R}\right\} \Rightarrow E_{\lambda_2} \text{ أساسه } \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

السؤال الثالث: [25]

$$y_1=x_1 \Leftarrow z_1=\frac{y_1}{\|y_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

A to Z

$$y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1$$

$$= (1,1,0) - \left\langle (1,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= (1,1,0) - \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= (1,1,0) - \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \|y_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{y_2}{\|y_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y_3 = x_3 - \langle x_3, z_1 \rangle z_1 - \langle x_3, z_2 \rangle z_2$$

$$= (2,0,0) - \left\langle (2,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$- \left\langle (2,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (2,0,0) - \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) - \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (2,0,0) - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) - (1, 0, -1)$$

$$= \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\|y_3\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow z_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$(x_1, x_2) = x_2(2,1) + (x_1 - 2x_2)(1,0)$$

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_1 - 2y_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3x_2 + 2x_1 - 4x_2 & -x_2 + x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 - 2y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 & x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_1 - 2y_2 \end{Bmatrix}$$

$$= 2x_1y_2 - x_2y_2 + x_1y_1 - 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + 6x_2y_2$$

A to Z