ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الاولى

اسئلة دوراة محلولة

تحليل رياضي ٢

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة)

بمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تحليل رياضي 2	اسم الطالب:
كلية العلوم	سنة أولى رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2024-2025م	الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (50 درجة)

1) أنجز **خمسة** فقط من التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int \frac{dx}{e^x + 1}, \quad I_2 = \int \frac{dx}{1 - cosx}, \quad I_3 = \int sh3x\, chx\, dx$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{9 - 16x^2}}\, dx, \quad I_5 = \int 2^x 3^{2x}\, dx, \quad I_6 = \int \frac{e^{arcsin(x)}}{2\sqrt{1 - x^2}} dx$$

2) ليكن لدينا التابعين $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ والمطلوب:

1. أوجد تابع أصلي للتابع $h(x) = 1 - f(x)$ ينعدم عند 1.
2. أوجد قيمة التكامل $I = \int_0^2 |1 - g(x)| dx$.
3. أوجد مساحة السطح المحصور بين الخطين البيانيين للتابعين f و g.
4. أوجد القيمة المتوسطة للتابع f في المجال $[0,9]$.
5. أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات:

$x = 4,\ x = 1,\ y = 0,\ y = f(x)$ حول المحور Ox.

6. أوجد قيمة التكامل الثنائي:

$$\iint_D \big(3y - 2f(x)\big) dxdy$$

حيث $D = \{(x,y);\quad 0 \le x \le 4\ \&\ 0 \le y \le 1\}$

السؤال الثاني: (40 درجة)

1) أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{x^2 + x + 5}{(1 + x)(x^2 + 4)} dx$$

2) احسب طول قوس المنحني المعطى بالإحداثيات القطبية $r = 2 + 2cos\theta$ حيث $0 \le \theta \le \pi$.

3) أنجز **ثلاثة** فقط من التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int \frac{sin^3 x}{cos^3 x} dx, \quad I_2 = \int \frac{x^5}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$

$$I_3 = \int x^3 ln(x)\, dx, \quad I_4 = \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx$$

انتهت الأسئلة

تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

Ato Z

جامعة طرطوس

كلية العلوم　　قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل رياضي 2 لطلاب السنة الأولى رياضيات

الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2024-2025م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (50 درجة)

1) **(15 درجة)**. أنجز خمسة فقط من التكاملات الآتية: **(3 درجات لكل تكامل)**

$$I_1 = \int \frac{dx}{e^x + 1}, \quad I_2 = \int \frac{dx}{1 - cosx}, \quad I_3 = \int sh3x\, chx\, dx$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{9 - 16x^2}}\, dx, \quad I_5 = \int 2^x 3^{2x}\, dx, \quad I_6 = \int \frac{e^{arcsin(x)}}{2\sqrt{1 - x^2}} dx$$

الحل:

- $I_1 = \int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\, dx = -\int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = -\ln(e^{-x}+1) + c = x - \ln(e^x + 1) + c.$
- $I_2 = \int \frac{dx}{1-cosx} = \int \frac{1+cosx}{1-cos^2x} dx = \int \frac{1+cosx}{sin^2x} dx = \int \left(\frac{1}{sin^2x} + \frac{cosx}{sin^2x}\right) dx = -cotx - \frac{1}{sinx} + c.$
- $I_3 = \int sh3x\, chx\, dx = \int \frac{1}{2}[sh4x + sh2x]\, dx = \frac{1}{2}\int (sh4x + sh2x)\, dx = \frac{1}{8} ch4x + \frac{1}{4} ch2x + c$
- $I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \frac{1}{4} arcsin\frac{4x}{3} + c$ أو $-\frac{1}{4} arccos\frac{4x}{3} + c.$
- $I_5 = \int 2^x 3^{2x}\, dx = \int 2^x 9^x\, dx = \int (18)^x\, dx = \frac{(18)^x}{\ln(18)} + c.$
- $I_6 = \int \frac{e^{arcsin(x)}}{2\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times e^{2arcsin(x)}\, dx = \frac{1}{2} e^{arcsin(x)} + c.$

2) **(35 درجة)** . ليكن لدينا التابعين $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ والمطلوب:

1. أوجد تابع أصلي للتابع $h(x) = 1 - f(x)$ ينعدم عند 1. **(5 درجات)**
2. أوجد قيمة التكامل $I = \int_0^2 |1 - g(x)| dx$. **(6 درجات)**
3. أوجد مساحة السطح المحصور بين الخطين البيانيين للتابعين f و g. **(6 درجات)**
4. أوجد القيمة المتوسطة للتابع f في المجال $[0,9]$. **(6 درجات)**
5. أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات:

$x = 4,\ x = 1,\ y = 0,\ y = f(x)$ حول المحور Ox. **(6 درجات)**

6. أوجد قيمة التكامل الثنائي: **(6 درجات)**

A to Z

$$\iint_D (3y - 2f(x))dxdy \text{ حيث } D = \{(x,y);\quad 0 \le x \le 4 \ \&\ 0 \le y \le 1\}$$

الحلّ:

.1

$$H(x) = \int_1^x h(x)dx = \int_1^x (1 - f(x))dx = \int_1^x (1 - \sqrt{x})dx = \left[x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^x = x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{3}$$

.2

$$I = \int_0^2 |1 - x^2|dx = \int_0^1 (1 - x^2)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx$$
$$= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = 2$$

3. فواصل نقاط التقاطع بين المنحنيين هي: $x = 0, x = 1$

$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

4. القيمة المتوسطة للتابع f على المجال $[a,b]$ هو المقدار

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \text{ ،}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{9}\int_0^9 \sqrt{x}dx = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = 2$$

.5

$$V_{Ox} = \pi \int_1^4 (f(x))^2 dx = \pi \int_1^4 xdx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \frac{15\pi}{2} \text{ (حجم المجسم)}$$

.6

$$\iint_D (3y - 2f(x))dxdy = \iint_D (3y - 2\sqrt{x})dxdy = \int_0^4 \left(\int_0^1 (3y - 2\sqrt{x})dy\right)dx$$
$$= \int_0^4 \left[\frac{3y^2}{2} - 2\sqrt{x}y\right]_0^1 dx = \int_0^4 \left(\frac{3}{2} - 2\sqrt{x}\right)dx = \left[\frac{3}{2}x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = -\frac{14}{3}$$

السؤال الثاني: (40 درجة)

1) **(7 درجات)**. أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{x^2 + x + 5}{(1+x)(x^2+4)}dx$$

الحلّ:

$$\frac{x^2 + x + 5}{(1+x)(x^2+4)} = \frac{A}{(1+x)} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

نلاحظ بأنّ $A = 1$ و $B = 0$ و $C = 1$

A to Z

$$I = \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x^2+4}\right) dx = \ln|1+x| + \frac{1}{2} arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

2) **(9 درجات)**. احسب طول قوس المنحني المعطى بالإحداثيات القطبية $r = 2 + 2cos\theta$ حيث $0 \le \theta \le \pi$.

الحلّ:

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \acute{r}^2} d\theta$$

$$r = 2 + 2cos\theta, \quad \acute{r} = -2sin\theta$$

$$r^2 + \acute{r}^2 = 8(1 + cos\theta)$$

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{8(1+cos\theta)} d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{8 \times 2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta = \int_0^{\pi} 4\left|cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta = 4\int_0^{\pi} cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= 8\left[sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 8\left(sin\frac{\pi}{2} - sin0\right) = 8$$

3) **(24 درجه)**. أنجز ثلاثة فقط من التكاملات الآتية:(**8 درجات لكل تكامل**)

$$I_1 = \int \frac{sin^5x}{cos^5x} dx \,, \quad I_2 = \int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$I_3 = \int x^3 ln(x)\, dx \,, \quad I_4 = \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx$$

الحلّ:

$$\boldsymbol{I_1 = \int \frac{sin^3x}{cos^3x} dx} \quad \checkmark$$

نفرض $tanx = t$ نجد $dt = \frac{1}{cos^2x} dx = (1 + tan^2x)dx$ بالتالي:

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$I_1 = \int \frac{sin^3x}{cos^3x} dx = \int \frac{t^3}{t^2+1} dt = \int \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right) dt$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} ln(t^2+1) + c = \frac{tan^2x}{2} - \frac{1}{2} ln(tan^2x + 1) + c$$

$$\boldsymbol{I_2 = \int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} dx} \quad \checkmark$$

$$I_2 = \int x^5 (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \quad \text{(ثنائي الحد التفاضلي)}$$

لدينا $m = 5$ و $n = 2$ و $k = -\frac{1}{2}$ ليس بعدد صحيح

لدينا $\frac{m+1}{n} = 3$ عدد صحيح، لذلك نجري التحويل

$$1 + x^2 = t^2$$

عندئذ

$$xdx = tdt$$

A to Z

نعوض في التكامل المعطى نجد:

$$I_2 = \int (t^2-1)^2\, t^{-1} t dt = \int (t^2-1)^2\, dt = \int (t^4 - 2t^2 + 1)\, dt$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3 + t + c = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^5}{5} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3 + \left(\sqrt{1+x^2}\right) + c$$

$$I_3 = \int x^3 ln(x)\, dx \quad \checkmark$$

نجري المكاملة بالتجزئة:

$$u = ln(x) \qquad dv = x^3 dx$$
$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^4}{4}$$
$$I_3 = \frac{x^4}{4} ln(x) - \int \frac{x^3}{4} dx$$
$$I_3 = \frac{x^4}{4} ln(x) - \frac{x^4}{16} + c$$

$$I_4 = \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx \quad \checkmark$$

نفرض $x = t^4$ بالتالي $dx = 4t^3 dt$

$$I_4 = \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt = 4\int \left(\frac{t^2}{t^2+1} + \frac{t}{t^2+1}\right) dt$$
$$= 4\int \left(\frac{t^2+1-1}{t^2+1} + \frac{t}{t^2+1}\right) dt = 4\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1} + \frac{t}{t^2+1}\right) dt$$
$$= 4t - 4arctant + 2\ln(t^2+1) + c = 4\sqrt[4]{x} - 4arctan\sqrt[4]{x} + 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + c$$

ملاحظة

- ✓ **بعض التكاملات تُحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تكامل معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التكامل.**

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

A to Z

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تحليل رياضي 2	اسم الطالب:
كلية العلوم	سنة أولى رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2023-2024م	الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (58 درجة)

1) أنجز **خمسة** فقط من التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}, \quad I_2 = \int \frac{dx}{x ln^3 x}, \quad I_3 = \int shx\, ch3x\, dx$$

$$I_4 = \int tan^2 x\, dx, \quad I_5 = \int 5^x 2^{2x}\, dx, \quad I_6 = \int \frac{e^{arctan(x)}}{2+2x^2} dx$$

2) ليكن لدينا التابعين $f(x) = -\sqrt{x}$ و $g(x) = -x^2$ والمطلوب:

1. أوجد تابع أصلي للتابع $h(x) = 1 - f(x)$ ينعدم عند 1.
2. أوجد قيمة التكامل $I = \int_0^2 |1 + g(x)| dx$.
3. أوجد مساحة السطح المحصور بين الخطين البيانيين للتابعين f و g.
4. أوجد القيمة المتوسطة للتابع f في المجال $[0,4]$.
5. أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات:
   $x = 4,\ x = 1,\ y = 0,\ y = -f(x)$ حول المحور Ox.
6. أوجد قيمة التكامل الثنائي:

$$\iint_D (y - 2f(x))dxdy \quad \text{حيث} \quad D = \{(x,y);\quad 0 \le x \le 4 \ \&\ 0 \le y \le 1\}$$

3) أنجز التكامل التالي

$$I = \int \frac{x^5 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^3 + x} dx$$

السؤال الثاني: (32 درجة)

1) احسب طول قوس المنحني المعطى بالإحداثيات القطبية $r = 1 + cos\theta$ حيث $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

2) أنجز **ثلاثة** فقط من التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int \frac{cosx}{4 + sin^2 x}\, dx, \quad I_2 = \int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$I_3 = \int 2x\, arcsin(x^2+1) dx, \quad I_4 = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

---انتهت الأسئلة---

تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

مكتبة A to Z

جامعة طرطوس

كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل رياضي 2 لطلاب السنة الأولى رياضيات

الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2023-2024م

الدرجة: تسعون

مكتبة A to Z

السؤال الأول: (58 درجة)

1) (15 درجة). أنجز **خمسة** فقط من التكاملات الآتية: **(3 درجات لكل تكامل)**

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}, \quad I_2 = \int \frac{dx}{x ln^3 x}, \quad I_3 = \int shx\, ch3x\, dx$$

$$I_4 = \int tan^2 x\, dx, \quad I_5 = \int 5^x 2^{2x}\, dx, \quad I_6 = \int \frac{e^{arctan(x)}}{2+2x^2} dx$$

الحلّ:

- $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3} arcsin \frac{3x}{2} + c$ أو $-\frac{1}{3} arccos \frac{3x}{2} + c.$
- $I_2 = \int \frac{dx}{x ln^3 x} = \int \frac{1}{x} ln^{-3} x dx = -\frac{1}{2ln^2 x} + c.$
- $I_3 = \int shx\, ch3x\, dx = \int \frac{1}{2}[sh4x + sh(-2x)]\, dx = \frac{1}{2}\int (sh4x - sh2x)\, dx = \frac{1}{8} ch4x - \frac{1}{4} ch2x + c$
- $I_4 = \int tan^2 x\, dx = \int \frac{sin^2 x}{cos^2 x}\, dx = \int \frac{1-cos^2 x}{cos^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{cos^2 x} - 1\right) dx = tanx - x + c.$
- $I_5 = \int 5^x 2^{2x}\, dx = \int 5^x 4^x\, dx = \int (20)^x\, dx = \frac{(20)^x}{ln(20)} + c.$
- $I_6 = \int \frac{e^{arctan(x)}}{2+2x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^{arctan(x)}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} e^{arctan(x)} + c.$

2) (34 درجة) . ليكن لدينا التابعين $f(x) = -\sqrt{x}$ و $g(x) = -x^2$ والمطلوب:

1. أوجد تابع أصلي للتابع $h(x) = 1 - f(x)$ ينعدم عند 1. **(4 درجات)**
2. أوجد قيمة التكامل $I = \int_0^2 |1 + g(x)| dx$. **(6 درجات)**
3. أوجد مساحة السطح المحصور بين الخطين البيانيين للتابعين f و g. **(6 درجات)**
4. أوجد القيمة المتوسطة للتابع f في المجال $[0,4]$. **(6 درجات)**
5. أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات:

$y = 0,\ y = -f(x),\ x = 1,\ x = 4$ حول المحور Ox. **(6 درجات)**

6. أوجد قيمة التكامل الثنائي: **(6 درجات)**

$$\iint_D (y-2f(x))dxdy \text{ حيث } D=\{(x,y);\quad 0\le x\le 4 \ \&\ 0\le y\le 1\}$$

الحلّ:

.1

$$H(x)=\int_1^x h(x)dx=\int_1^x (1-f(x))dx=\int_1^x (1+\sqrt{x})dx=\left[x+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^x=x+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{5}{3}$$

.2

$$I=\int_0^2 |f(x)|dx=\int_0^2 |1-x^2|dx=\int_0^1 (1-x^2)dx+\int_1^2 (x^2-1)dx$$
$$=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2=2$$

3. فواصل نقاط التقاطع بين المنحنيين هي: $x=0, x=1$

$$A=\int_0^1 (g(x)-f(x))dx=\int_0^1 (-x^2+\sqrt{x})dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

4. القيمة المتوسطة للتابع f على المجال $[a,b]$ هو المقدار

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{4}\int_0^4 -\sqrt{x}dx=\frac{1}{4}\left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=--\frac{4}{3}$$

.5

$$V_{Ox}(\text{حجم المجسم})=\pi\int_1^4 (-f(x))^2dx=\pi\int_1^4 xdx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4=\frac{15\pi}{2}$$

.6

$$\iint_D (y-2f(x))dxdy=\iint_D (y+2\sqrt{x})dxdy=\int_0^4\left(\int_0^1 (y+2\sqrt{x})dy\right)dx$$
$$=\int_0^4\left[\frac{y^2}{2}+2\sqrt{x}y\right]_0^1 dx=\int_0^4\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{38}{3}$$

3) (9 درجات). أنجز التكامل التالي

$$I=\int\frac{x^5+x^3+2x^2+1}{x^3+x}dx$$

الحلّ: باجراء القسمة الإقليدية نجد

$$x^5+x^3+2x^2+1=x^2(x^3+x)+(2x^2+1)$$
$$I=\int\frac{x^5+x^3+2x^2+1}{x^3+x}dx$$
$$=\int\left(x^2+\frac{2x^2+1}{x^3+x}\right)dx=\int\left(x^2+\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}\right)dx$$

A to Z مكتبة

$$\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

نلاحظ بأنّ $A = 1$ و $B = 1$ و $C = 0$

$$I = \int \left(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

السؤال الثاني: (32 درجة)

1) **(8 درجات)**. احسب طول قوس المنحني المعطى بالإحداثيات القطبية $r = 1 + cos\theta$ حيث $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

الحلّ:

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + \acute{r}^2}\, d\theta$$

$$r = 1 + cos\theta, \quad \acute{r} = -sin\theta$$

$$r^2 + \acute{r}^2 = 2(1 + cos\theta)$$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1+cos\theta)}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 \times 2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 4\left[sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(sin\frac{\pi}{4} - sin0\right) = 2\sqrt{2}$$

2) **(24 درجه)**. **أنجز ثلاثة** فقط من التكاملات الآتية:(**8 درجات لكل تكامل**)

$$I_1 = \int \frac{cosx}{4 + sin^2x}\, dx \quad , \quad I_2 = \int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$I_3 = \int 2x\, arcsin(x^2+1) dx \, , \quad I_4 = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

الحلّ:

$$I_1 = \int \frac{cosx}{4+sin^2x}\, dx \quad \checkmark$$

نفرض $t = sinx$ بالتالي $dt = cosx\, dx$ عندئذ

$$I_1 = \int \frac{cosx}{4 + sin^2x}\, dx = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} arctan\left(\frac{t}{2}\right) + c$$

بالتالي

$$I_1 = \frac{1}{2} arctan\left(\frac{sinx}{2}\right) + c$$

مكتبة A to Z

$$I_2 = \int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \checkmark$$

$$I_2 = \int x^5 (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \quad \text{(ثنائي الحد التفاضلي)}$$

لدينا $m = 5$ و $n = 2$ و $k = -\frac{1}{2}$ ليس بعدد صحيح

لدينا $\frac{m+1}{n} = 3$ عدد صحيح، لذلك نجري التحويل

$$1 + x^2 = t^2$$

عندئذ

$$xdx = tdt$$

نعوض في التكامل المعطى نجد:

$$I_2 = \int (t^2-1)^2 t^{-1} t dt = \int (t^2-1)^2 dt = \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3 + t + c = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^5}{5} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3 + \left(\sqrt{1+x^2}\right) + c$$

$$I_3 = \int 2x \, arcsin(x^2+1) dx \quad \checkmark$$

لإيجاد التكامل نفرض $t = x^2 + 1$ بالتالي $dt = 2xdx$

$$\int arcsin(t) dt$$

نجري المكاملة بالتجزئة:

$$u = arcsin(t) \qquad dv = dt$$

$$du = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad v = t$$

$$I_3 = t\, arcsin(t) - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$I_3 = t\, arcsin(t) + \sqrt{1-t^2} + c$$

$$I_3 = (x^2+1)\, arcsin(x^2+1) + \sqrt{1-(x^2+1)^2} + c$$

$$I_3 = (x^2+1)\, arcsin(x^2+1) + \sqrt{-x^4 - 2x^2} + c$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \quad \checkmark$$

نفرض $x = t^2$ بالتالي $dx = 2tdt$

$$I_4 = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t}{t+1} dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 2t - 2\ln(t+1) + c = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + c$$

----------ملاحظة----------

✓ **بعض التكاملات تُحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تكامل معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التكامل.**

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

A to Z مكتبة

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تحليل رياضي 2	اسم الطالب:
كلية العلوم	سنة أولى رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2023-2024م	الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (58 درجة)

1) أنجز **خمسة فقط** من التكاملات الآتية:

$$I_1=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}},\quad I_2=\int \frac{dx}{2+e^{-x}},\quad I_3=\int shx\ sh3x\ dx$$

$$I_4=\int 2^x 3^{2x}\,dx,\quad I_5=\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}},\quad I_6=\int \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2+x}\,dx$$

2) ليكن لدينا التابع $f(x)=1-x^2$ المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

1. أوجد مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع f والمحور Ox والمستقيمين $x=-4, x=-2$.
2. أوجد $J=\int_0^2 |f(x)|dx$.
3. أوجد القيمة الوسطى للتابع f في المجال $[-1,1]$.
4. أوجد قيمة التكامل الثنائي:

$$\iint_D \big(y-2f(x)\big)dxdy \quad \text{حيث } \{\ D=\{(x,y);\quad 0\le x\le 2\ \&\ 0\le y\le 1\}$$

3) احسب المساحة المحددة بمنحني القطع الناقص والمعطى بالشكل الوسيطي:

$$\begin{cases} x=2cost \\ y=sint \end{cases};0\le t\le 2\pi$$

4) احسب طول قوس المنحني المعطى بالإحداثيات القطبية $r=2(1+cos\varphi)$ حيث $0\le\varphi\le\pi$.

5) ليكن لدينا التابع $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}$ المعرف على المجال $]0,\infty[$ والمطلوب: أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات:

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x},\ y=0,\ x=1,\ x=4 \text{ حول المحور } Ox.$$

السؤال الثاني: (32 درجة)

أنجز **أربعة فقط** من التكاملات الآتية:

$$I_1=\int \frac{sin^3x}{cos^3x}dx,\quad I_2=\int x\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$I_3=\int \frac{2dx}{(1+x)(x^2+1)},\quad I_4=\int \frac{dx}{x^2-x-2},\quad I_5=\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$$

انتهت الأسئلة

تمنياتنا بالتوفيق والنجاح

طرطوس: الأربعاء 2024/1/31م

مدرسا المقرر: د. أحمد عيسى & د. بشرى دراج

مكتبة A to Z

جامعة طرطوس

كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل رياضي 2 لطلاب السنة الأولى رياضيات

الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2023-2024م

الدرجة: تسعون

مكتبة A to Z

السؤال الأول: (58 درجة)

1) (15 درجة). أنجز **خمسة فقط** من التكاملات الآتية: **(3 درجات لكل تكامل يتم اختياره)**

$$I_1=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}, \quad I_2=\int \frac{dx}{2+e^{-x}}, \quad I_3=\int shx\ sh3x\ dx$$

$$I_4=\int 2^x 3^{2x}\ dx, \quad I_5=\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}, \quad I_6=\int \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2+x}\ dx$$

الحلّ:

- $I_1=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)+c.$
- $I_2=\int \frac{dx}{2+e^{-x}}=\frac{1}{2}\ln(2e^x+1)+c.$
- $I_3=\int shx\ sh3x\ dx=\int \frac{1}{2}[ch4x-ch(-2x)]\ dx=\frac{1}{2}\int(ch4x-ch2x)\ dx=\frac{1}{8}sh4x-\frac{1}{4}sh2x+c$
- $I_4=\int 2^x 3^{2x}\ dx=\int 18^x\ dx=\frac{18^x}{\ln(18)}+c.$
- $I_5=\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}=\frac{1}{4}arcsin\frac{4x}{3}+c$ أو $-\frac{1}{4}arccos\frac{4x}{3}+c.$
- $I_6=\int \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2+x}\ dx=\frac{1}{2}\int(2x+1)e^{x^2+x}\ dx=\frac{1}{2}e^{x^2+x}+c.$

2) (22 درجة) . ليكن لدينا التابع $f(x)=1-x^2$ المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

1. أوجد مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع f والمحور Ox والمستقيمين $x=-4, x=-2$. **(3 درجات).**
2. أوجد $J=\int_0^2|f(x)|dx$. **(5 درجات)**
3. أوجد القيمة الوسطى للتابع f في المجال $[-1,1]$. **(7 درجات)**
4. أوجد قيمة التكامل الثنائي: **(7 درجات)**

$\iint_D (y-2f(x))dxdy$ حيث $D=\{(x,y);\quad 0\le x\le 2 \ \&\ 0\le y\le 1\}$

الحلّ:

.1

$$S=\int_{-4}^{-2}|f(x)|dx=\int_{-4}^{-2}(x^2-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-4}^{-2}=\frac{50}{3}$$

.2

$$J=\int_0^2|f(x)|dx=\int_0^2|1-x^2|dx=\int_0^1(1-x^2)dx+\int_1^2(x^2-1)dx$$
$$=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2=2$$

مكتبة A to Z

.3

القيمة الوسطى للتابع f على المجال $[a,b]$ هو المقدار

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 1-x^2dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1=\frac{2}{3}$$

.4

$$\iint_D (y-2f(x))dxdy=\iint_D (y-2+2x^2)dxdy=\int_0^2\left(\int_0^1(y-2+2x^2)dy\right)dx$$
$$=\int_0^2\left[\frac{y^2}{2}-2y+2x^2y\right]_0^1dx=\int_0^2\left(-\frac{3}{2}+2x^2\right)dx=\frac{7}{3}$$

3) (6 درجات) . احسب المساحة المحددة بمنحني القطع الناقص والمعطى بالشكل الوسيطي:

$$\begin{cases}x=2cost\\ y=sint\end{cases};0\le t\le 2\pi$$

الحلّ: المنحني متناظر بالنسبة للمحورين الاحداثيين Ox,Oy

$$\acute{x}(t)=-2sint<0\ ;0\le t\le\frac{\pi}{2}$$

$$\left(\text{المساحة المطلوبة}\right)\ \boldsymbol{A=4A_1};\ A_1=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}|y(t)|\acute{x}(t)\,dt$$

$$\boldsymbol{A_1}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}|y(t)|\acute{x}(t)dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}|sint|(-2sint)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2sin^2tdt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2t)dt=\left[t-\frac{1}{2}sin2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow A=4A_1=2\pi$$

4) **(8 درجات)**. احسب طول قوس المنحني المعطى بالإحداثيات القطبية $r = 2(1 + cos\varphi)$ حيث $0 \le \varphi \le \pi$.

الحلّ:

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \acute{r}^2}\, d\varphi$$

$$r = 2(1 + cos\varphi\ ),\ \ \acute{r} = -2sin\varphi$$

$$r^2 + \acute{r}^2 = 8(1 + cos\varphi)$$

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{8(1 + cos\varphi)}\, d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{8 \times 2cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\, d\varphi = \int_0^{\pi} 4\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = 4\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

$$= 8\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 8\left[sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 8\left(sin\frac{\pi}{2} - sin0\right) = 8$$

5) **(7 درجات)**. ليكن لدينا التابع $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ المعرف على المجال $]0, \infty[$ والمطلوب:

أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات:

$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x},\ \ y = 0,\ \ x = 1,\ \ x = 4$ حول المحور $0x$.

الحلّ:

$$V_{Ox} = \pi\int_1^4 (f(x))^2 dx = \pi\int_1^4 \left(x + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + 4\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{49}{4}\pi$$ (حجم المجسم)

السؤال الثاني: (32 درجة)

أنجز **أربعة فقط** من التكاملات الآتية: **(8 درجات لكل تكامل يتم اختياره)**

$$I_1 = \int \frac{sin^3x}{cos^3x} dx\ ,\quad I_2 = \int x\left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$I_3 = \int \frac{2dx}{(1+x)(x^2+1)}\ ,\ I_4 = \int \frac{dx}{x^2 - x - 2}\ ,\quad I_5 = \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx$$

الحلّ:

$$\boldsymbol{I_1 = \int \frac{sin^3x}{cos^3x} dx}\ \checkmark$$

نفرض $tanx = t$ نجد $dt = \frac{1}{cos^2x}dx = (1 + tan^2x)dx$ بالتالي:

$$dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$I_1 = \int \frac{sin^3x}{cos^3x} dx = \int \frac{t^3}{t^2+1} dt = \int (t - \frac{t}{t^2+1}) dt$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}ln(t^2+1) + c = \frac{tan^2x}{2} - \frac{1}{2}ln(tan^2x + 1) + c$$

$$\boldsymbol{I_2 = \int x\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx}\ \checkmark$$

$$I_2 = \int x\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx \quad \text{(ثنائي الحد التفاضلي)}$$

لدينا $m=1$ و $n=\frac{2}{3}$ و $k=-\frac{1}{2}$ ليس بعدد صحيح

لدينا $\frac{m+1}{n}=3$ عدد صحيح، لذلك نجري التحويل

$$1+x^{\frac{2}{3}}=t^2$$

عندئذ

$$x=(t^2-1)^{\frac{3}{2}}$$
$$dx=3t(t^2-1)^{\frac{1}{2}}dt$$

نعوض في التكامل المعطى نجد:

$$I_2 = 3\int (t^2-1)^2\,dt = 3\int (t^4-2t^2+1)\,dt$$

$$=\frac{3t^5}{5}-2t^3+3t+c=\frac{3\left(\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}\right)^5}{5}-2\left(\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}\right)^3+3\left(\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}\right)+c$$

$$\boldsymbol{I_4 = \int \frac{2dx}{(1+x)(x^2+1)}}\ \checkmark$$

لإيجاد التكامل $\int \frac{2dx}{(1+x)(x^2+1)}dx$ نبحث عن الثوابت A,B,C

$$\frac{2}{(1+x)(x^2+1)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

نلاحظ بأنّ $A=1$ و $B=-1$ و $C=1$

$$I_5=\int \frac{2}{(1+x)(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{1+x}-\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\ln(|1+x|)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+arc\,tanx+c$$

$$\boldsymbol{I_5 = \int \frac{dx}{x^2-x-2}}\ \checkmark$$

$$I_5=\int\frac{dx}{x^2-x-2}=\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}$$

نبحث عن الثوابت A و B بحيث:

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-2)}$$
$$A=-\frac{1}{3}\quad,\quad B=\frac{1}{3}$$

$$I_5=\int\frac{dx}{x^2-x-2}=\int\left(\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-2)}\right)dx=-\frac{1}{3}\ln(|x+1|)+\frac{1}{3}\ln(|x-2|)+c$$

مكتبة A to Z

$$I_5 = \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx \quad \checkmark$$

نفرض $x = t^4$ بالتالي $dx = 4t^3dt$

$$I_6 = \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}\,dt = 4\int \left(\frac{t^2}{t^2+1} + \frac{t}{t^2+1}\right)dt$$

$$= 4\int \left(\frac{t^2+1-1}{t^2+1} + \frac{t}{t^2+1}\right)dt = 4\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1} + \frac{t}{t^2+1}\right)dt$$

$$= 4t - 4arctant + 2\ln(t^2+1) + c = 4\sqrt[4]{x} - 4arctan\sqrt[4]{x} + 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + c$$

ملاحظة

- ✓ بعض التكاملات تُحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تكامل معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التكامل.

مكتبة A to Z

مدرسا المقرر: د. أحمد عيسى & د. بشرى دراج

معة طرطوس	امتحان مقرر تحليل رياضي 2	اسم الطالب:
كلية العلوم	سنة أولى رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2022–2023م	الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (55 درجة)

1) أنجز **خمسة فقط** من التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad I_2 = \int \frac{dx}{1+e^{-x}}, \quad I_3 = \int chx\, ch3x\, dx$$

$$I_4 = \int (x^2+5)^7 . 2x\, dx, \quad I_5 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}, \quad I_6 = \int x^2 e^{x^3+3}\, dx$$

2) ليكن لدينا التابع $f(x) = 4 - x^2$ المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

1. أوجد $J = \int_1^3 |f(x)| dx$.
2. أوجد القيمة الوسطى للتابع f في المجال $[-2,2]$.
3. أوجد قيمة التكامل الثنائي:

$$\iint_D (f(x) - y) dxdy \text{ حيث } \{ \quad D = \{(x,y); \quad 0 \le x \le 1 \ \& \ 0 \le y \le 2 \}$$

3) احسب المساحة المحددة بمنحني القطع الناقص والمعطى بالشكل الوسيطي:

$$\begin{cases} x = 4cost \\ y = 2sint \end{cases} ; 0 \le t \le 2\pi$$

4) ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$ المعرف على المجال $[0, \infty[$ والمطلوب:

1. احسب طول قوس منحني التابع f من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة $(1, \frac{2}{3})$.
2. أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات:

$$f(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x}, \ y = 0, \ x = 1, \ x = 2$$ حول المحور Ox.

السؤال الثاني: (35 درجة)

أنجز **خمسة فقط** من التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int \frac{sin^5 x}{cos^5 x} dx, \quad I_2 = \int x\left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dx, \quad I_3 = \int 2x.arctanx\, dx$$

$$I_4 = \int \frac{2dx}{(1-x)(x^2+1)}, \quad I_5 = \int \frac{dx}{-x^2+x+2}, \quad I_6 = \int \frac{1+3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$$

---انتهت الأسئلة---

مدرسا المقرر: د. أحمد عيسى & د. بشرى دراج

جامعة طرطوس

كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل رياضي 2 لطلاب السنة الأولى رياضيات

الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2022-2023م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (55 درجة)

1) (15 درجة). أنجز خمسة فقط من التكاملات الآتية: **(3 درجات لكل تكامل يتم اختياره)**

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad I_2 = \int \frac{dx}{1+e^{-x}}, \quad I_3 = \int chx\, ch3x\, dx$$

$$I_4 = \int (x^2+5)^7 . 2x\, dx, \quad I_5 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}, \quad I_6 = \int x^2 e^{x^3+3}\, dx$$

الحل:

- $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + c.$
- $I_2 = \int \frac{dx}{1+e^{-x}} = \ln(e^x+1) + c.$
- $I_3 = \int chx\, ch3x\, dx = \int \frac{1}{2}[ch4x + ch(-2x)]\, dx = \frac{1}{2}\int (ch4x + ch2x)\, dx = \frac{1}{8}sh4x + \frac{1}{4}sh2x + c$
- $I_4 = \int (x^2+5)^7 . 2x\, dx = \frac{(x^2+5)^8}{8} + c.$
- $I_5 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}arcsin\frac{3x}{2} + c$ أو $-\frac{1}{3}arccos\frac{3x}{2} + c.$
- $I_6 = \int x^2 e^{x^3+3}\, dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3+3}\, dx = \frac{1}{3}e^{x^3+3} + c.$

2) (20 درجة) . ليكن لدينا التابع $f(x) = 4 - x^2$ المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

1. أوجد $J = \int_1^3 |f(x)|dx$ **(6 درجات).**
2. أوجد القيمة الوسطى للتابع f في المجال $[-2,2]$**.(6 درجات)**
3. أوجد قيمة التكامل الثنائي:**(8 درجات)**

$$\iint_D (f(x)-y)dxdy \quad \text{حيث } \{ \quad D = \{(x,y); \quad 0 \le x \le 1 \ \& \ 0 \le y \le 2 \}$$

الحل:

1.

CamScanner

$$J=\int_1^3|f(x)|dx=\int_1^2|f(x)|dx+\int_2^3|f(x)|dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3-f(x)dx$$
$$=\int_1^2(4-x^2)dx+\int_2^3(x^2-4)dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3=4$$

.2

القيمة الوسطى للتابع f على المجال $[a,b]$ هو المقدار $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^2 4-x^2dx=\frac{1}{4}\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2=\frac{8}{3}$$

.3

$$\iint_D(f(x)-y)dxdy=\iint_D(4-x^2-y)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^2(4-x^2-y)dy\right)dx$$
$$=\int_0^1\left[4y-x^2y-\frac{y^2}{2}\right]_0^2dx=\int_0^1(6-2x^2)dx=\frac{16}{3}$$

3) (8 درجات) . احسب المساحة المحددة بمنحني القطع الناقص والمعطى بالشكل الوسيطي:

$$\begin{cases}x=4cost\\y=2sint\end{cases};0\le t\le 2\pi$$

الحل: المنحني متناظر بالنسبة للمحورين الاحداثيين Ox,Oy

$$\boldsymbol{A=4A_1};\ \boldsymbol{A_1}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}|y(t)|\dot{x}(t)\,dt\ \left(\text{المساحة المطلوبة}\right)$$

$$\boldsymbol{A_1}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}|y(t)|\dot{x}(t)dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}|2sint|(-4sint)dt=\boldsymbol{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^2tdt=\boldsymbol{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2t)dt$$
$$=\boldsymbol{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2t)dt=4\left[t-\frac{1}{2}sin2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi$$
$$\Rightarrow A=4A_1=8\pi$$

4) (12 درجة) . ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ المعرف على المجال $[0,\infty[$ والمطلوب:

1. احسب طول قوس منحني التابع f من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة $(1,\frac{2}{3})$. **(6 درجات)**
2. أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات:

$f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x},\ y=0,\ x=1,\ x=2$ حول المحور Ox. **(6 درجات)**

- **الحل:**

$$\acute{f}(x)=\sqrt{x}$$
$$\left(\text{طول القوس}\right)l=\int_0^1\sqrt{1+\left(\acute{f}(x)\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\left[\left(\sqrt{(1+x)^3}\right)\right]_0^1=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$
$$\left(\text{حجم المجسم}\right)V_{Ox}=\pi\int_1^2(f(x))^2dx=\pi\int_1^2\frac{4}{9}x^3dx=\frac{4\pi}{9}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2=\frac{15\pi}{9}=\frac{5\pi}{3}$$

السؤال الثاني: (35 درجة)

أنجز **خمسة فقط** من التكاملات الآتية: **(7 درجات لكل تكامل يتم اختياره)**

$$I_1 = \int \frac{sin^5x}{cos^5x}dx \ , \quad I_2 = \int x\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dx \ , \quad I_3 = \int 2x.arctanx\,dx$$

$$I_4 = \int \frac{2dx}{(1-x)(x^2+1)} \ , \ I_5 = \int \frac{dx}{-x^2+x+2} \ , \quad I_6 = \int \frac{1+3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$$

الحل:

$$\boldsymbol{I_1 = \int \frac{sin^5x}{cos^5x}dx} \ \checkmark$$

نفرض $tanx = t$ نجد $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$I_1 = \int \frac{sin^5x}{cos^5x}dx = \int \frac{t^5}{t^2+1}dt = \int (t^3 - t + \frac{t}{t^2+1})dt$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}ln(t^2+1) + c = \frac{tan^4x}{4} - \frac{tan^2x}{2} + \frac{1}{2}ln(tan^2x+1) + c$$

$$\boldsymbol{I_2 = \int x\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dx} \ \checkmark$$

$$I_2 = \int x\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx \quad \text{(ثنائي الحد التفاضلي)}$$

لدينا $m = 1$ و $n = \frac{2}{3}$ و $k = -\frac{1}{2}$ ليس بعدد صحيح

لدينا $\frac{m+1}{n} = 3$ عدد صحيح، لذلك نجري التحويل

$$1 + x^{\frac{2}{3}} = t^2$$

عندئذ

$$x = (t^2-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$dx = 3t(t^2-1)^{\frac{1}{2}}dt$$

نعوض في التكامل المعطى نجد:

$$I_2 = 3\int (t^2-1)^2\,dt = 3\int (t^4 - 2t^2 + 1)\,dt$$

$$= \frac{3t^5}{5} - 2t^3 + 3t + c = \frac{3\left(\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}\right)^5}{5} - 2\left(\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}\right)^3 + 3\left(\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}\right) + c$$

$$\boldsymbol{I_3 = \int 2x.arctanx\,dx} \ \checkmark$$

نجري المكاملة بالتجزئة:

$$u = arctanx \qquad dv = 2xdx$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad v = x^2$$

$$I_3 = x^2\,arctanx - \int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$I_3 = x^2\ arctanx - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$$

$$I_3 = x^2\ arctanx - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$I_3 = x^2\ arctanx - x + arctanx + c = -x + (x^2+1).arctanx + c$$

$$\boldsymbol{I_4 = \int \frac{2dx}{(1-x)(x^2+1)}}\ \checkmark$$

لإيجاد التكامل $\int \frac{2dx}{(1-x)(x^2+1)}dx$ نبحث عن الثوابت A, B, C

$$\frac{2}{(1-x)(x^2+1)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

نلاحظ بأنّ $A = 1$ و $B = 1$ و $C = 1$

$$I_5 = \int \frac{2}{(1-x)(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{x+1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= -\ln(|1-x|) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + arc\ tanx + c$$

$$\boldsymbol{I_5 = \int \frac{dx}{-x^2+x+2}}\ \checkmark$$

$$I_5 = \int \frac{dx}{-x^2+x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)(2-x)}$$

نبحث عن الثوابت A و B بحيث:

$$\frac{1}{(x+1)(2-x)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(2-x)}$$

$$A = \frac{1}{3} \quad , \quad B = \frac{1}{3}$$

$$I_5 = \int \frac{dx}{-x^2+x+2} = \int \left(\frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(2-x)}\right)dx = \frac{1}{3}\ln(|x+1|) - \frac{1}{3}\ln(|2-x|) + c$$

$$\boldsymbol{I_6 = \int \frac{1+3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}dx}\ \checkmark$$

نفرض $x = t^4$ بالتالي $dx = 4t^3dt$

$$I_6 = \int \frac{1+3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}dx = \int \frac{1+3t^4t^2}{t}4t^3dt = 4\int (t^2+3t^8)\,dt$$

$$= \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{3}t^9 + c = \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x}\right)^3 + \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x}\right)^9 + c$$

ملاحظة

✓ **بعض التكاملات تُحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تكامل معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التكامل.**

مدرسا المقرر: د. أحمد عيسى & د. بشرى دراج

CamScanner

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر تحليل رياضي 2
سنة أولى رياضيات
الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2022–2023م

اسم الطالب:
المدة: ساعتان
الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (60 درجة)

1) أنجز أربعة فقط من التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx \quad , \quad I_2 = \int 5^{2x}dx \quad , \quad I_3 = \int \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+4)^5}$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} \quad , \quad I_5 = \int sin2x\, cosx\, dx$$

2) أوجد قيمة اثنين فقط من التكاملات المعتلة الآتية:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \sqrt{x^5}\, e^{-x}\, dx \quad , \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(1+x)} \quad , \quad I_3 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x}}$$

3) أنجز خمسة فقط من التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int \frac{dx}{chx + shx + 1} \quad , \quad I_2 = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx \quad , \quad I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}} \quad , \quad I_5 = \int \frac{2dx}{(x+1)(x^2+1)} \quad , \quad I_6 = \int \frac{x^5}{x^2+1}dx$$

السؤال الثاني: (30 درجة)

أنجز ما يلي:

1) احسب طول قوس المنحني المعطى بالإحداثيات القطبية $r = 1 + cos\varphi$ حيث $0 \le \varphi \le \pi$.

2) ليكن لدينا التابع $f(x) = \sqrt{x}$ المعرف على المجال $[0, \infty[$ والمطلوب:

1. أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات $f(x) = \sqrt{x}$, $\Delta: y = x$, $x = 1$, $x = 4$.
2. أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات: $f(x) = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ حول المحور Ox.
3. أوجد مساحة السطح الدوراني المتولد نتيجة تدوير المنحني التالي: $f(x) = \sqrt{x}\,; 1 \le x \le 2$ حول المحور Ox.
4. أوجد قيمة التكامل الثنائي:

$$\iint_D (x+2y)dxdy \quad \text{حيث} \quad \{ D = \{(x,y);\quad 0 \le x \le 1 \;\&\; 0 \le y \le \sqrt{x} \quad \}$$

انتهت الأسئلة

طرطوس: الأربعاء 2023/1/25م

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

جامعة طرطوس

كلية العلوم　　قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل رياضي 2 لطلاب السنة الأولى رياضيات

الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2022-2023م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (60 درجة)

1) (16 درجة) أنجز **أربعة فقط** من التكاملات الآتية: **4 درجات لكل تكامل يتم اختياره**

$$I_1 = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx \quad , \quad I_2 = \int 5^{2x}dx \quad , \quad I_3 = \int \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+4)^5}$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} \quad , \quad I_5 = \int sin2x\, cosx\, dx$$

الحلّ:

- $I_1 = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = -\int -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx = -e^{\frac{1}{x}} + c\,.$
- $I_2 = \int 5^{2x}dx = \int (25)^x dx = \frac{(25)^x}{ln25} + c.$
- $I_3 = \int \frac{(x+1)}{(x^2+2x+4)^5}dx = \frac{1}{2}\int (2x+2)(x^2+2x+4)^{-5}dx = \frac{-1}{8(x^2+2x+4)^4} + c.$
- $I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = argsh\frac{x}{2} + c$ أو $\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right) + c.$
- $I_5 = \int sin2x\, cosx\, dx = \frac{1}{2}\int (sinx + sin3x)\,dx = -\frac{1}{2}cosx - \frac{1}{6}cos3x + c.$

2) (14 درجات) أوجد قيمة **اثنين فقط** من التكاملات المعتلة الآتية: **7 درجات لكل تكامل يتم اختياره**

$$I_1 = \int_0^{\infty} \sqrt{x^5}\, e^{-x}\,dx \quad , \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(1+x)} \quad , \quad I_3 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x}}$$

الحلّ:

- $I_1 = \int_0^{\infty} \sqrt{x^5}\, e^{-x}\,dx$

$$I_1 = \int_0^{\infty} \sqrt{x^5}\, e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} x^{\frac{5}{2}} e^{-x}\,dx$$

تكامل أولر من النوع الثاني (الدالة غاما)

لدينا

$$p-1=\frac{5}{2}\Rightarrow p=\frac{7}{2}$$

$$I_1=\int_0^{\infty}\sqrt{x^5}\,e^{-x}\,dx=\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)$$

$$=\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$$

- $I_2=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x}(1+x)}$

$$I_2=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x}(1+x)}=\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{-1}{4}}}{(1+x)}dx$$

تكامل أولر من النوع الأول (الدالة بيتا)

لدينا

$$p-1=\tfrac{-1}{4}\Rightarrow p=\tfrac{3}{4}$$

$$p+q=1\Rightarrow q=\frac{1}{4}$$

$$I_2=\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)}=\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\pi$$

- $I_3=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3\sqrt{x}}$,

$$I_3=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3\sqrt{x}}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\frac{7}{2}}}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}x^{-\frac{7}{2}}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-2}{5b\sqrt{b^3}}+\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}$$

3) (30 درجة) أنجز **خمسة فقط** من التكاملات الآتية: **(6 درجات لكل تكامل يتم اختياره)**

$$I_1=\int\frac{dx}{chx+shx+1}\ ,\quad I_2=\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx\ ,\quad I_3=\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

$$I_4=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}}\ ,\quad I_5=\int\frac{2dx}{(x+1)(x^2+1)}\ ,\quad I_6=\int\frac{x^5}{x^2+1}dx$$

الحل:

- $I_1=\int\frac{dx}{chx+shx+1}$

نفرض $th\frac{x}{2}=t$ عندئذ

$$shx=\frac{2t}{1-t^2}\ ,\ chx=\frac{1+t^2}{1-t^2}\ ,\quad dx=\frac{2dt}{1-t^2}$$

نعوض في التكامل المعطى نجد:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + c = \ln\left|th\frac{x}{2} + 1\right| + c$$

- $I_2 = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

$$I_2 = \int x^{\frac{-2}{3}}\left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{(ثنائي الحد التفاضلي)}$$

لدينا $m = \frac{-2}{3}$ و $n = \frac{1}{3}$ و $k = \frac{1}{2}$ ليس بعدد صحيح

لدينا $\frac{m+1}{n} = 1$ عدد صحيح، لذلك نجري التحويل

$$1 + x^{\frac{1}{3}} = t^2$$

عندئذ

$$\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}dx = 2tdt$$

نعوض في التكامل المعطى نجد:

$$I_2 = \int 6t^2\, dt = 2t^3 + c = 2\left(\sqrt{1 + x^{\frac{1}{3}}}\right)^3 + c$$

ملاحظة: يمكن للطالب أن يفرض $x = t^3$ أو $x = t^6$.

- $I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

نستخدم الدستور التدريجي لحلّ هذا النمط من التكاملات $I_m = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$:

$$I_m = I_{n+1} = \frac{1}{2a^2n}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right)$$

لدينا $m = 3$ و $a^2 = 1$

$$I_3 = I_{2+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{(x^2+1)^2} + 3I_2\right)$$
$$I_2 = I_{1+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{(x^2+1)^1} + I_1\right)$$
$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = arc\, tanx + c_1$$

بالتعويض بشكل تراجعي نجد:

$$I_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}arctanx + \frac{1}{2}c_1$$
$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}arc\, tanx + \frac{3}{8}c_1$$
$$= \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}arc\, tanx + c$$

- $I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}}$

نحلّ باستخدام تحويلات أولر $a = 1 > 0$. نجري التحويل $\sqrt{x^2-x-2} = t + x\sqrt{a} = t + x$

نربع الطرفين نجد: $x^2 - x - 2 = t^2 + 2tx + x^2$ بالتالي:

$$x = \frac{-2-t^2}{2t+1}$$

$$dx = \frac{-2(t^2+t-2)}{(2t+1)^2}dt$$

$$t + x = \frac{t^2+t-2}{2t+1}$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}} = \int \frac{-2\,dt}{2t+1} = -\ln(|2t+1|) + c = -\ln\left(\left|2\left(\sqrt{x^2-x-2}-x\right)+1\right|\right) + c$$

ملاحظة: يمكن للطالب أن يفرض

$$\sqrt{x^2-x-2} = t - x\sqrt{a} = t - x \quad \checkmark$$

$$\sqrt{x^2-x-2} = t(x-2) \quad \checkmark$$

$$\sqrt{x^2-x-2} = t(x+1) \quad \checkmark$$

وهذا يؤدي إلى تغيير x و dx.

وتوجد طرق آخرى بالإعتماد على قوانين خاصة.

- $I_5 = \int \frac{2dx}{(x+1)(x^2+1)}dx$

لإيجاد التكامل $\int \frac{2dx}{(x+1)(x^2+1)}dx$ نبحث عن الثوابت A, B, C

$$\frac{2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

نلاحظ بأنّ $A = 1$ و $B = -1$ و $C = 1$

➢ $I_5 = \int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$$= \ln(|x+1|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + arc\,tanx + c$$

- $I_6 = \int \frac{x^5}{x^2+1}dx$

نجري القسمة الإقليدية نجد:

$$x^5 = (x^3 - x)(x^2+1) + x$$

بالتالي:

$$\frac{x^5}{x^2+1} = x^3 - x + \frac{x}{x^2+1}$$

$$I_6 = \int (x^3-x)dx + \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

السؤال الثاني: (30 درجة) أنجز ما يلي:

1) (10 درجات) احسب طول قوس المنحني المعطى بالإحداثيات القطبية $r = 1 + cos\varphi$ حيث $0 \le \varphi \le \pi$.

الحلّ:

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \acute{r}^2}d\varphi$$

$$r = 1 + cos\varphi\ ,$$

$$\acute{r} = -sin\varphi$$

$$r^2 + \acute{r}^2 = 2 + 2cos\varphi$$

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+cos\varphi)}d\varphi=\int_0^{\pi}\sqrt{2\times 2cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}d\varphi=\int_0^{\pi}2\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|d\varphi=2\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$$
$$=4\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=4\left[sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\pi}=4\left(sin\frac{\pi}{2}-sin0\right)=4$$

2) **(20 درجة)** لدينا التابع $f(x)=\sqrt{x}$ المعرف على المجال $[0,\infty[$ والمطلوب:

1. أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات $f(x)=\sqrt{x}$, $\Delta: y=x$, $x=1$, $x=4$. **(5 درجات)**
2. أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات: $f(x)=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ حول المحور Ox. **(5 درجات)**
3. أوجد مساحة السطح الدوراني المتولد نتيجة تدوير المنحني التالي: $f(x)=\sqrt{x}\,;1\le x\le 2$ حول المحور Ox . **(4 درجات)**
4. أوجد قيمة التكامل الثنائي:**(6 درجات)**

$$\iint_D(x+2y)dxdy \text{ حيث } D=\{(x,y);\quad 0\le x\le 1\ \&\ 0\le y\le\sqrt{x}\ \}$$

الحلّ:

1.
$$A=\int_1^4(y_\Delta-\sqrt{x})dx=\int_1^4(x-\sqrt{x})dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4=\frac{17}{6}$$

2.
$$V_{Ox}=\pi\int_1^2\left(f(x)\right)^2dx=\pi\int_1^2xdx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{3\pi}{2}$$

3.
$$P=2\pi\int_1^2|f(x)|\sqrt{1+\left(\acute{f}(x)\right)^2}dx=2\pi\int_1^2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx=\pi\int_1^2\sqrt{4x+1}dx=\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}\sqrt{(4x+1)^3}\right]_1^2$$
$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{3}\sqrt{(9)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(5)^3}\right)=\frac{\pi}{6}(27-5\sqrt{5})$$

4.
$$\iint_D(x+2y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{x}}(x+2y)dy=\int_0^1[xy+y^2]_0^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1\left(x\sqrt{x}+x\right)dx=\frac{9}{10}$$

---ملاحظة---

✓ **بعض التكاملات تحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تكامل معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التكامل.**

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تحليل رياضي 2	اسم الطالب:
كلية العلوم	سنة أولى رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	العام الدراسي 2021-2022	الدرجة: 90

السؤال الأول: (70 درجة)

1) أنجز التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx \ , \quad I_2 = \int \frac{dx}{25-9x^2} \ , \quad I_3 = \int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+2x+4)^6}$$

2) أنجز **أربعة فقط** من التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int \frac{sin^3x}{cos^4x}dx \ , \quad I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+4)^3} \ , \quad I_3 = \int \frac{\sqrt{x}}{(1+2x^3)^2}\,dx$$

$$I_4 = \int \frac{x\,dx}{\left(\sqrt{7x-10-x^2}\right)^3} \ , \quad I_5 = \int \frac{3x^2}{8-x^3}dx$$

3) ادرس تقارب **اثنين فقط** من التكاملات المعتلة الآتية:

$$I_1 = \int_e^5 \frac{lnx}{(x-e)^3}\,dx \ , \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{1+x^2} \ , \quad I_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{2+sinx}{x^2}dx$$

4) أوجد قيمة **اثنين فقط** من التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int_{-2}^\infty (x+2)^5\,e^{-(x+2)}\,dx \ , \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,(1+x)} \ , \quad I_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\,ln^2(\frac{1}{x})}\,dx$$

السؤال الثاني: (20 درجة)

أنجز ما يلي:

1) أوجد المساحة المحصورة بالقطع المكافئ $y = -x^2 - 2x - 2$ والمحور ox والمستقيمين $x = -1$ و $x = 0$.

2) احسب طول المنحني المعطى بالإحداثيات القطبية $r = 1 + cos\theta$ حيث $0 \le \theta \le \pi$

3) احسب الحجم الناتج عن دوران منحنٍ يمثل نصف قوس الدائرة $x^2+y^2 = 16$ حول المحور ox .

---انتهت الأسئلة---

طرطوس في 2022/1/25

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

السؤال الأول:

1) طريقة التكامل بالتجزئ

$$I_1 = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{25-9x^2} = \frac{1}{15}\operatorname{arcth}\frac{3x}{5} + C$$

$$I_3 = \int \frac{(x+1)}{(x^2+2x+4)^6}\,dx = \int \frac{1}{2}(2x+2)(x^2+2x+4)^{-6}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5(x^2+2x+4)^5} + C$$

---

2) طريقة التكامل بالتجزئ

$$I_1 = \int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x}\,dx \Longrightarrow \text{نفرض } \cos x = t$$

$$-\sin x\,dx = dt \Longleftarrow$$

$$* \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Longrightarrow \sin^2 x = 1-\cos^2 x \Longrightarrow \sin^2 x = 1-t^2$$

$$I_1 = \int \frac{(1-t^2)(-dt)}{t^4} = \int \frac{t^2}{t^4} - \frac{1}{t^4}\,dt = -\frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + C$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+4)^3} \quad ; \quad n+1 = 3 \Rightarrow n = 2$$

$$= \frac{1}{2a^2n}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right]$$

$$= \frac{1}{2(4)(2)}\left[\frac{x}{(x^2+4)^2} + 3I_2\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{x}{(x^2+4)^2} + 3\cdot\frac{1}{2(4)(1)}\left(\frac{x}{x^2+4} + (2(1)-1)I_1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{x^2+4} + \int \frac{dx}{x^2+4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{16\times 8}\cdot\frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{16*8}\times\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$$

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{(1+2x^3)^2}\,dx$$

نفرض $x = t^\beta$ حيث $\beta = 2$ المقام المشترك لـ $\frac{1}{2}$ و 3 ⇐ عددين صحيحين $k = -2$ <

$$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$$

$$\Rightarrow I = \int t(1+2t^6)^{-2}\,2t\,dt$$

$$= \int \frac{2t^2}{(1+2t^6)^2}\,dt = \int \frac{2t^2}{(1+(\sqrt{2}t^3)^2)^2}\,dt$$

نفرض $\sqrt{2}\,t^3 = m \Leftarrow \sqrt{2}\times 3t^2\,dt = dm$

$$I = \int \frac{2t^2}{(1+m^2)^2} \times \frac{dm}{\sqrt{2}\times 3t^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\int \frac{dm}{(m^2+1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2(1)^2(1)}\left(\frac{m}{m^2+1} + \int \frac{dm}{m^2+1}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{m^2+1} + \arctan m\right] + C$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}t^3}{2t^6+1} + \frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\sqrt{2}\,t^3 + C$$

$$I = \int \frac{x}{(\sqrt{7x-10-x^2})^3}$$

$-x^2+7x-10$ مميزه $\Delta = 9 \neq 0 \Leftarrow$ $x_1 = 2$ ، $x_2 = 5$

$\Rightarrow -x^2+7x-10 = -(x-2)(x-5)$

لدينا $a = -1 < 0$ ، عندئذ نفرض $c = -1 < 0$

$\sqrt{7x-10-x^2} = t(x-2)$

$5-x) = t^2(x-2) \Rightarrow x = \frac{2t^2+5}{t^2+1} \Rightarrow dx = \frac{-6t\,dt}{(1+t^2)^2}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\frac{5+2t^2}{1+t^2} \times \frac{-6t}{(1+t^2)^2}}{t^3\left(\frac{5+2t^2}{1+t^2}-2\right)^3}\,dt = \int \frac{-(5+2t^2)6t \times (1+t^2)^3\,dt}{(1+t^2)^3 \times 3^3 t^3}$$

$$= \frac{-6}{27}\int \frac{5+2t^2}{t^2}\,dt = \frac{-6}{27}\left(\frac{-5}{t} + 2t\right) + C$$

حيث $t = \frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$

$$I = \int \frac{3x^2}{8-x^3}\,dx = -\ln|8-x^3| + C$$

---

3) 7 دقائق لكل تكامل

$$I_1 = \int_0^5 \frac{\ln x}{(x-e)^3}\,dx$$

$\ln x > 1 \Leftarrow e < x < 5$

$$\frac{\ln x}{(x-e)^3} > \frac{1}{(x-e)^3}$$

$\int_e^5 \frac{dx}{(x-e)^3}$ متباعد بأن $\alpha = 3 > 1 \Leftarrow$ حسب اختبار المقارنة نستنتج أن I_1 متباعد.

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$$

نلاحظ أن $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ قابل للمكاملة على $[0,\infty)$

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

و $g(x) = \cos x$ محدود

$\Leftarrow$ التكامل I متقارب حسب اختبار آبل

$I_3 = \int_{\frac{1}{2}}^{} \frac{2+\sin x}{x^2}\,dx$

$\lambda - 2 > 1$ حيث $f(x) = \frac{2+\sin x}{x^2} > 0$

$0 < 1 \le 2+\sin x \le 3 < \infty \Rightarrow$ التكامل I متقارب

$I_1 = \int_{-2}^{\infty} (x+2)^5 e^{-(x+2)}\,dx$

$x+2 = y \Rightarrow dx = dy$ [4]

$5 = p-1 \Rightarrow p = 6$ دالة جاما من الرتبة 7

$= \int_0^{\infty} y^5 e^{-y}\,dy = \Gamma(6) = 5! = 120$

$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+x)} = \int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{(1+x)}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}-1}}{(1+x)^{\frac{1}{3}+\frac{3}{3}}}\,dx$

$= \beta\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(1)} = \Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(1-\frac{1}{3})$

$= \frac{\pi}{\sin\frac{1}{3}\times\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

$I_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2(\frac{1}{x})}\,dx$

$\ln(\frac{1}{x}) = t \Rightarrow \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x}}\,dx = dt$

$I_3 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2(\frac{1}{x})} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}^{\ln 2} \frac{-dt}{t^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{1}{t}\right]_{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}^{\ln 2}$

$= \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow$ I متقارب

السؤال الثاني:

① $f(x) = -(x^2+2x+2)$

$= -((x+1)^2+1) < 0$ $(\forall x)$

$A = \int_{-1}^{0} -f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x+1)^2+1\,dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3} + x\right]_{-1}^{0} = \frac{4}{3}$

(2) $r' = -\sin\theta \Leftarrow r = 1+\cos\theta$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \quad (\geq 7)$$

$$= \int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 4$$

$y^2 = 16 - x^2$ (≥ 6)

$$V = \pi \int_{-4}^{4} f^2(x)\, dx = \pi \int_{-4}^{4} R^2 - x^2\, dx$$

$$= \pi\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4} = \frac{4 \times 64}{3}\pi$$

جامعة طرطوس | امتحان مقرر تحليل رياضي 2 | اسم الطالب:
كلية العلوم | الفصل الثاني – سنة أولى رياضيات | المدة: ساعتان
قسم الرياضيات | العام الدراسي 2020-2021 | الدرجة: 90

السؤال الأول: (70 درجة)

1) أنجز **ثلاثة فقط** من التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int sinx\, cos^5x\, dx\ ,\quad I_2 = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx\ ,\quad I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}\ ,\quad I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$$

2) أنجز **أربعة فقط** من التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int ch^3x\, dx\ ,\quad I_2 = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx\ ,\quad I_3 = \int \frac{dx}{cosx+2sinx+3}\ ,$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{(x^2+4)^3}\ ,\quad I_5 = \int \frac{x}{(2-x)(x-4)}dx$$

3) ادرس تقارب **اثنين فقط** من التكاملات المعتلة الآتية:

$$I_1 = \int_e^5 \frac{lnx}{(x-e)^3}\, dx\ ,\quad I_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^2}\, dx\ ,\quad I_3 = \int_1^\infty \frac{dx}{x\, e^x}$$

4) أوجد قيمة **اثنين فقط** من التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int_{-2}^\infty (x+2)^5\, e^{-(x+2)}\, dx\ ,\quad I_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(1+x)}\ ,\quad I_3 = \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1-x}\, dx$$

السؤال الثاني: (20 درجة)

أنجز **اثنين فقط** مما يلي:

1) أوجد المساحة المحدودة بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمحور ox من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة $(2,4)$، ثم احسب المنطقة المحصورة بين المستقيم $\Delta: y = x + 2$ و $y = x^2$.
2) احسب طول المنحني المعطى بالإحداثيات القطبية $r = 1 + cos\theta$ حيث $0 \le \theta \le \pi$
3) احسب مساحة السطح الناتج عن دوران منحنٍ يمثل ربع قوس دائرة $x^2+y^2 = R^2$ نصف قطرها R حول المحور ox، ثم احسب الحجم الناتج عن هذا الدوران.

---انتهت الأسئلة---

طرطوس في 2021/7/26

مدرس المقرر: د. بشرى كراج

A to Z

سلم تصحيح فرض كليل رقم 2 دورة 2020-2021

تمرين الأول:

$$I_1 = \int \sin x \cdot \cos^5 x \, dx = -\int -\sin x \cdot \cos^5 x \, dx = -\frac{1}{6}\cos^6 x + C$$

$$I_2 = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -\int -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \text{arc sh}\frac{x}{3} + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+9}\right| + C$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{5}} + C = -\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{\sqrt{5}}$$

تمرين الثاني:

$$I_1 = \int ch^3 x \, dx$$

$$= \int ch x \cdot ch^2 x \, dx$$

$$= \int ch x (1 + sh^2 x) \, dx$$

$$= \int (1+t^2)\, dt = t + \frac{t^3}{3} + C = sh x + \frac{sh^3 x}{3} + C$$

$f(x) = -f(x)$ إذن $-chx$ و chx دالتان فرديتان.

بوضع $sh x = t \Leftarrow ch x \cdot dx = dt$

$$I_2 = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = \int x^{-\frac{2}{3}} (1 + x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= 3\int \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} (1 + x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= 3 \times \frac{2}{3} (1 + x^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= 2 (1 + x^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} + C$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$$

بوضع $\tan\frac{x}{2} = t \Leftarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ، $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ، $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\Rightarrow I_3 = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} = \int \frac{2dt}{2t^2+4t+4} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1}$$

$$= \arctan(t+1) + C = \arctan\left(\tan\frac{x}{2} + 1\right) + C$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{(x^2+4)^3}$$

$$= \frac{1}{2a^2 n}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1) I_n\right]$$

و $n+1 = 3 \Longrightarrow n = 2$

A to Z

$$I_4 = \frac{1}{2(4)(2)}\left[\frac{x}{(x^2+4)^2} + 3I_2\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{x}{(x^2+4)^2} + 3\cdot\frac{1}{2(4)(1)}\left(\frac{x}{x^2+4} + (2(1)-1)I_1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{x^2+4} + \int\frac{dx}{x^2+4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{3}{128}\cdot\frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{256}\arctan\frac{x}{2} + C$$

$$I_5 = \int \frac{x}{(2-x)(x-4)}\,dx$$

$$\frac{x}{(2-x)(x-4)} = \frac{A}{(2-x)} + \frac{B}{x-4}$$

بالمطابقة نجد أن $A=-1$ و $B=-2$ $\Leftarrow$

$$x = A(x-4) + B(2-x)$$

$$I_5 = \int\frac{-dx}{2-x} + \int\frac{-2dx}{x-4}$$

$$= \ln|2-x| - 2\ln|x-4| + C$$

[3] 5 وعلامات تكامل:

$$I_1 = \int_e^5 \frac{\ln x}{(x-e)^3}\,dx$$

$e < x < 5 \Leftarrow \ln x > 1$

$$\frac{\ln x}{(x-e)^3} > \frac{1}{(x-e)^3}$$

$\int_e^5 \frac{dx}{(x-e)^3}$ متباعدة $\Leftarrow \alpha = 3 > 1$ و $c = e$ لأن التكامل

$\int_e^5 \frac{\ln x}{(x-e)^3}\,dx$ متباعد.

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^2}\,dx$$

$f(x) = e^{-x}$ و $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ نأخذ

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\int_0^b e^{-x}dx\right] = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) = 1$$

متقارب $\Rightarrow$ التكامل

ولدينا $1+x^2$ متزايدة وموجبة على $[0,\infty[$ ومقلوبه $\frac{1}{1+x^2}$ متناقصة و $\left|\frac{1}{1+x^2}\right| \le 1$

إذن g محدود وعندئذ $\int f\cdot g\,dx$ متقارب

$$I_3 = \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

نأخذ $f(x) = e^{-x}\cdot x^{-1}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2}$ على $[1,\infty[$ وهي توابع موجبة

$$A = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$$

وبما أن $\int\frac{dx}{x^2}$ متقارب لأن $\alpha = 2 > 1$

A to Z

$$I_1=\int_{-2}^{\infty}(x+2)^5\,e^{-(x+2)}\,dx$$

نحسب التكامل بطريقة دوال غاما

نفرض $x+2=t \Leftarrow dx=dt$

$5=p-1 \Rightarrow p=6$

$x\to -2 \Rightarrow t\to 0$

$$I_1=\int_0^{\infty} t^5 e^{-t}\,dt$$

$$=\Gamma(6)=5!=120$$

$$I_2=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x}(1+x)}=\int_0^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{4}}}{(1+x)}\,dx$$

نحسب التكامل بيتا

$$p-1=-\frac{1}{4}\Rightarrow p=\frac{3}{4},\quad p+q=1\Rightarrow q=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow I_2=\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}-1}}{(1+x)^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}}\,dx=\beta\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{1}{4})}$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(1-\frac{3}{4})}{\Gamma(1)}=\frac{\frac{\pi}{\sin\frac{3}{4}\pi}}{1}=\pi\sqrt{2}$$

$$I_3=\int_0^1\sqrt{x}\sqrt{1-x}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

نحسب التكامل بيتا

$$p-1=\frac{1}{2}\Rightarrow p=\frac{3}{2},\quad q-1=\frac{1}{2}\Rightarrow q=\frac{3}{2}$$

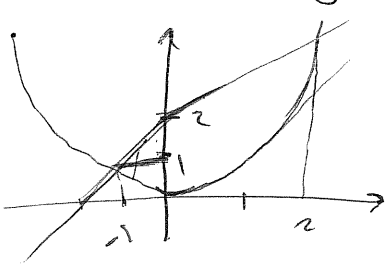
$$\Rightarrow I_3=\beta\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{3}{2})}=\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\pi}{8}$$

السؤال الثاني 5 درجات

1) $S=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{8}{3}$

حساب المنطقة المحصورة بين $y=x^2$ و $\Delta: y=x+2$ ونوجد نقاط التقاطع بينهما



$$x^2=x+2$$

$$x^2-x-2=0\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=2$$

5 درجات

$$S=\int_{-1}^{2}(y_D-f(x))\,dx=\int_{-1}^{2}x+2-x^2\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

A to Z

مثال 2: طول القلب

$r = 1+\cos\theta \Rightarrow r' = -\sin\theta$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1}}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta$$

$$2(1+\cos\theta) = 4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow L = \int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= 4\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 4$$

ملاحظة: $\cos\frac{\theta}{2}$ موجبة على الفترة $[0, \pi]$

مثال 3: حجم الكرة

$$y^2 = R^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad y' = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$S = 2\pi \int_0^{R} y\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^{R} \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^{R} \sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\, dx = 2\pi\int_0^{R} R\, dx$$

$$= 2\pi\left[Rx\right]_0^{R} = 2\pi R^2$$

$$V = \pi\int_0^{R} y^2\, dx = \pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{R}$$

$$= \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}R^3$$

A to Z

مكتبة A to Z