ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الاولى

اسئلة دورات محلولة

تحليل رياضي ١

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تحليل رياضي 1	اسم الطالب:
كلية العلوم	سنة أولى رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2024-2025	الدرجة: 90

السؤال الأول: (45 درجة)

1) أثبت أن " كل متتالية متقاربة هي متتالية لكوشي".

2) أثبت وفق تعريف كوشي للتقارب أن $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-5}{2n+3}=\frac{3}{2}$.

3) أوجد نهاية **متتاليتين فقط** من المتتاليات الآتية:

$$1)\ u_n=\frac{a^n}{n}\ ;a>1 \qquad 2)\ v_n=\sqrt[n]{3n^4-3n^3+5}\ , \qquad 3)\ w_n=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+2+3+\cdots+n}$$

4) ادرس تقارب **ثلاثة فقط** من المتسلسلات الآتية:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^7}}$$

$$3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!!} \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

السؤال الثاني: (45 درجة)

1) أوجد $y'=\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

$$1)\ y=x^x+e^{ch(\sqrt{x})} \qquad 2)\ x=\sqrt{\sin t}\ ,\ y=2\cos^2(\frac{1}{2}t)$$

$$3)\ y^2\cot(x)+y=arctan(x)$$

2) أوجد النهايات الآتية:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{4}{3x}\right)^x \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-sinx}{x^3} \qquad 3)\ \lim_{x\to 1^-} arctan\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$$

3) بيّن أن التابع $f(x)=\sin(2x)$ مستمر بانتظام على المجال $[0,\pi]$.

4) أوجد قيمة x المعطاة بالشكل:

$$x=\arctan(-\sqrt{3})+arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

-------------------------------------انتهت الأسئلة-------------------------------------

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس | كلية العلوم | قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل رياضي 1 لطلاب السنة الأولى رياضيات

الدورة الفصلية الأولى - العام الدراسي 2024-2025م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (45 درجة)

1) أثبت أن " كل متتالية متقاربة هي متتالية لكوشي".

2) أثبت وفق تعريف كوشي للتقارب أن $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-5}{2n+3}=\frac{3}{2}$.

3) أوجد نهاية متتاليتين فقط من المتتاليات الآتية:

$$1)\ u_n=\frac{a^n}{n}\ ;a>1 \qquad 2)\ v_n=\sqrt[n]{3n^4-3n^3+5} \qquad 3)\ w_n=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+2+3+\cdots+n}$$

4) ادرس تقارب ثلاثة فقط من المتسلسلات الآتية:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^7}}$$

$$3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!!} \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

الحل:

1) (8 درجات للمبرهنة)

2) (7 درجات)

الحل: يجب تحقق الشرط

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ |u_n-\ell|<\varepsilon\quad\forall n>n_0$$

$$|u_n-\ell|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{3n-5}{2n+3}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{-19}{2(2n+3)}\right|=\frac{19}{2(2n+3)}<\varepsilon$$

جذور

$$\Rightarrow \frac{19}{2\varepsilon} < 2n+3 \Rightarrow n > \frac{1}{2}\left(\frac{19}{2\varepsilon} - 3\right)$$

أي وجد العدد الطبيعي $n_0 = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{19}{2\varepsilon} - 3\right)\right]$ يحقق شرط كوشي للتقارب ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-5}{2n+3} = \frac{3}{2}$

3) (6 درجات لكل متتالية)

✓ $u_n = \frac{a^n}{n}\ ; a > 1$

لدينا المتتالية $(s_n = n)$ متزايدة و $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ عندئذ يمكن تطبيق مبرهنة ستولز على المتتالية u_n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n-1}(a-1)}{1} = \infty$$

✓ $v_n = \sqrt[n]{3n^4 - 3n^3 + 5}$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4} \cdot \sqrt[n]{3 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^4 \sqrt[n]{3 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^4}} = 1 \times 1 = 1$$

✓ $w_n = \dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+2+3+\cdots+n}$

$$w_n = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}}{n\times\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n^2+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n^2+n} = \frac{1-0}{\infty} = 0$$

4) (6 درجات لكل متسلسلة)

✓ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

بالاعتماد على اختبار كوشي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \times \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

بالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متقاربة.

✓ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^7}}$

نأخذ متسلسلة القيمة المطلقة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{3}}}$$

$$\alpha = \frac{7}{3} > 1$$

بالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{3}}}$ متقاربة حسب ريمان ومنه المتسلسلة المتناوبة متقاربة لأن متسلسلة القيم المطلقة متقاربة.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$ ✓

لنأخذ $u_n = \frac{n!}{(2n-1)!!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\times\frac{(2n-1)!!}{(n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

بالتالي المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!!}$ متقاربة بالاعتماد على اختبار دلامبير.

$\sum_{n=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ✓

نقارن مع المتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3$ حسب متسلسلة ريمان

$$\lim_{n\to\infty}\frac{sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{sin^3\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3}\times\frac{1}{cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 1 < \infty$$

بالتالي المتسلسلتان من طبيعة واحدة ومنه المتسلسلة المطلوبة متقاربة.

السؤال الثاني: (45 درجة)

1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $y = x^x + e^{ch(\sqrt{x})}$ 2) $x = \sqrt{sint}$, $y = 2\cos^2(\frac{1}{2}t)$

3) $y^2\cot(x) + y = arctan(x)$

2) أوجد النهايات الآتية:

1) $\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{4}{3x}\right)^x$ 2) $\lim_{x\to0}\frac{x-sinx}{x^3}$ 3) $\lim_{x\to1^-} arctan\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$

3) بيّن أن التابع $f(x) = \sin(2x)$ مستمر بانتظام على المجال $[0,\pi]$.

4) أوجد قيمة x المعطاة بالشكل:

$$x = arctan(-\sqrt{3}) + arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

الحل:

1) 6 درجات لكل مشتق)

$y = x^x + e^{ch(\sqrt{x})}$ ✓

$$y' = \frac{dy}{dx} = (lnx+1)x^x + \frac{sh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}e^{ch(\sqrt{x})}$$

$x = \sqrt{sint}$, $y = 2\cos^2(\frac{1}{2}t)$ ✓

$$\frac{dx}{dt} = \frac{cost}{2\sqrt{sint}}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\cos\left(\frac{1}{2}t\right) = -sint$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2sint.2\sqrt{sint}}{cost} = -2tant.\sqrt{sint}$$

$y^2\cot(x) + y = arctan(x)$ ✓

$$2y\acute{y}\cot(x) - \frac{y^2}{sin^2x} + \acute{y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\acute{y}(2ycotx+1) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{y^2}{sin^2x}$$

$$\acute{y} = \frac{\frac{1}{x^2+1} + \frac{y^2}{sin^2x}}{2ycotx+1}$$

2) (6 درجات لكل نهاية)

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{4}{3x}\right)^x$ ✓

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{4}{3x}\right)^x = \ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^x = \ln\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{3x}\right)^{\frac{3x}{4}}\right]^{\frac{4}{3}} = \ln\left(e^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{4}{3}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-sinx}{x^3}$ ✓

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-sinx}{x^3} = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

نطبق أوبيتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-sinx}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{3x^2} = \frac{0}{0}$$

نطبق أوبيتال مرة ثانية

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-sinx}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{6}.\frac{sinx}{x} = \frac{1}{6}$$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \arctan\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$ ✓

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{3x+1}{x-1} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}\arctan\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

3) (5 درجات)

التابع $\sin(2x)$ معرف ومستمر على $\mathbb{R}$ فهو معرف ومستمر على المجال المغلق $[0,\pi]$، بالتالي حسب مبرهنة كانتور يكون التابع $\sin(2x)$ مستمر بانتظام على المجال $[0,\pi]$.

د...

4) (4 درجات)

$$y = arctan\left(-\sqrt{3}\right) \Rightarrow tan\, y = -\sqrt{3} \Rightarrow y = -\frac{\pi}{3} \quad ; \quad -\frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$x = arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow sin\, x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow arctan\left(-\sqrt{3}\right) + arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{12}$$

✓ بعض التمارين تحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تحليل رياضي 1	اسم الطالب:
كلية العلوم	سنة أولى رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2023-2024	الدرجة: 90

السؤال الأول: (35 درجة)

1) أثبت أن كل متتالية متقاربة محدودة.

2) أوجد نهاية متتاليتين فقط من المتتاليات الآتية:

$$1)\ u_n = \sqrt[n]{(n+1)!} \qquad 2)\ v_n = \sqrt[n]{3n^3 - 2n^2 + 1} \qquad 3)\ w_n = \frac{3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{n-1}}{2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1}}$$

3) ادرس تقارب ثلاثة فقط من السلاسل الآتية:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n+2} \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$$

السؤال الثاني: (55 درجة)

1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

$$1)\ y = e^{ch(\sqrt{x})} + \cos(x^2) \qquad 2)\ x = \sqrt{\cos t}\ ,\ y = 2\sin^2(t)$$

$$3)\ y^3 \tan(x) + y^2 = arcsin(x)$$

2) أوجد الحدود الثلاثة الأولى الغير معدومة من منشور ماك لوران للتابع $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

3) أوجد النهايات الآتية:

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} x\, ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad 2)\ \lim_{x\to 2^+} \arctan\frac{1}{2-x} \qquad 3)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x - \tan x}$$

4) ادرس نوع نقطة الانقطاع $x = 0$ للتابع $f(x)$ بحيث

$$f(x) = \frac{e^{\frac{-3}{x}} + e^{\frac{3}{x}}}{e^{\frac{-3}{x}} - e^{\frac{3}{x}}}$$

-------------------------انتهت الأسئلة-------------------------

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل رياضي 1 لطلاب السنة الأولى رياضيات

الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2023-2024م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (35 درجة)

1) أثبت أن كلّ متتالية متقاربة محدودة.

2) أوجد نهاية متتاليتين فقط من المتتاليات الآتية:

$$1)\ u_n = \sqrt[n]{(n+1)!} \qquad 2)\ v_n = \sqrt[n]{3n^3 - 2n^2 + 1} \qquad 3)\ w_n = \frac{3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{n-1}}{2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1}}$$

3) ادرس تقارب ثلاثة فقط من السلاسل الآتية:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n+2} \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$$

الحل:

1) (5 درجات للمبرهنة)

2) (6 درجات لكل متتالية يتم اختيارها)

$u_n = \sqrt[n]{(n+1)!}$ ✓

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

$v_n = \sqrt[n]{3n^3 - 2n^2 + 1}$ ✓

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} . \sqrt[n]{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}} = 1$$

بحيث $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} 3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3} = 3 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$

✓ $w_n=\frac{3+9+27+\cdots+3^{n-1}}{2+4+8+\cdots+2^{n-1}}$

$$w_n=\frac{3\times\left(\frac{1-3^{n-1}}{1-3}\right)}{2\times\left(\frac{1-2^{n-1}}{1-2}\right)}=\frac{3}{4}\left(\frac{1-3^{n-1}}{1-2^{n-1}}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{\frac{1}{3^{n-1}}-1}{\frac{1}{2^{n-1}}-1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} w_n=\infty$$

3) (6 درجات لكل متسلسلة يتم اختيارها)

✓ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$

بالاعتماد على اختبار الجذر النوني لكوشي

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{\frac{(n+1)}{-2}}\right]^{-2}=e^{-2}<1$$

بالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$ متقاربة.

✓ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$$

$$\alpha=\frac{2}{3}<1$$

بالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ متباعدة حسب ريمان.

✓ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{n+2}$

نقارنها مع المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{n+2}.\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{2+\frac{1}{n}}}{n+2}=\sqrt{2}$$

بالتالي المتسلسلتان من طبيعة واحدة ومنه المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{n+2}$ متباعدة.

✓ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$

نأخذ متسلسلة القيمة المطلقة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$

بالاعتماد على اختبار دالامبير

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{3}<1$$

بالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$ متقاربة حسب دالامبير بالتالي المتسلسلة المتناوبة متقاربة لأن متسلسلة القيم المطلقة متقاربة.

السؤال الثاني: (55 درجة)

1) أوجد $y'=\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

$$1)\ y=e^{ch(\sqrt{x})}+\cos(x^2)\qquad 2)\ x=\sqrt{\cos t}\ ,\ y=2\sin^2(t)$$

$$3)\ y^3\tan(x)+y^2=arcsin(x)$$

2) أوجد الحدود الثلاثة الأولى الغير معدومة من منشور ماك لوران للتابع $f(x)=\ln(1+e^{-x})$.

3) أوجد النهايات الآتية:

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}x\,ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\qquad 2)\ \lim_{x\to2^+}\arctan\frac{1}{2-x}\qquad 3)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x-\tan x}$$

4) ادرس نوع نقطة الانقطاع $x=0$ للتابع $f(x)$ بحيث

$$f(x)=\frac{e^{\frac{-3}{x}}+e^{\frac{3}{x}}}{e^{\frac{-3}{x}}-e^{\frac{3}{x}}}$$

الحل:

1) (6 درجات لكل مشتق)

$$\boldsymbol{y=e^{ch(\sqrt{x})}+\cos(x^2)}\quad\checkmark$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{sh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}e^{ch(\sqrt{x})}-2x.\sin(x^2)$$

$$\boldsymbol{x=\sqrt{\cos t}\ ,\ y=2\sin^2 t}\quad\checkmark$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-sint}{2\sqrt{\cos t}}$$

$$\frac{dy}{dt}=4sintcost$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-8cost\sqrt{\cos t}$$

$$\boldsymbol{y^3\tan(x)+y^2=arcsin(x)}\quad\checkmark$$

$$3y^2\acute{y}\tan(x)+\frac{y^3}{cos^2x}+2y\acute{y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\acute{y}(3y^2\tan(x)+2y)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{y^3}{cos^2x}$$

$$\acute{y}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{y^3}{cos^2x}}{3y^2\tan(x)+2y}$$

2) (10 درجات)

$$f(x) \approx f(0) + \frac{\acute{f}(0)}{1!}x + \frac{\acute{\acute{f}}(0)}{2!}x^2$$
$$f(0) = ln2$$
$$\acute{f}(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} \Longrightarrow \acute{f}(0) = -\frac{1}{2}$$
$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \Longrightarrow \acute{\acute{f}}(0) = \frac{1}{4}$$
$$f(x) \approx ln2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$$

3) (6 درجات لكل نهاية)

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\, ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} x\, ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \infty \times 0 (\text{عدم تعيين})$$

نطبق أوبيتال

$$\lim_{x\to+\infty} x\, ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2$$

✓ $\lim\limits_{x\to2^+} \arctan\frac{1}{2-x}$

$$\lim_{x\to2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to2^+} \arctan\frac{1}{2-x} = -\frac{\pi}{2}$$

✓ $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x - x}{x - \tan x}$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x - x}{x - \tan x} = \frac{0}{0}\ (\text{عدم تعيين})$$

نطبق أوبيتال

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x - x}{x - \tan x} = \lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{1 - \frac{1}{cos^2 x}} = \frac{0}{0}$$

نطبق أوبيتال مرة ثانية

$$\Longrightarrow \lim_{x\to0} \frac{\sin x - x}{x - \tan x} = \lim_{x\to0} \frac{-\sin x}{-\frac{2sinxcosx}{cos^4 x}} = \frac{1}{2}$$

4) (9 درجات)

$$f(x) = \frac{e^{\frac{-3}{x}} + e^{\frac{3}{x}}}{e^{\frac{-3}{x}} - e^{\frac{3}{x}}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{-3}{x}} + e^{\frac{3}{x}}}{e^{\frac{-3}{x}} - e^{\frac{3}{x}}} = \frac{\infty}{-\infty} \text{ (عدم تعيين)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{-3}{x}} + e^{\frac{3}{x}}}{e^{\frac{-3}{x}} - e^{\frac{3}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{3}{x}}\left(e^{\frac{-6}{x}} + 1\right)}{e^{\frac{3}{x}}\left(e^{\frac{-6}{x}} - 1\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{-6}{x}} + 1}{e^{\frac{-6}{x}} - 1} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{-3}{x}} + e^{\frac{3}{x}}}{e^{\frac{-3}{x}} - e^{\frac{3}{x}}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (عدم تعيين)}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{-3}{x}} + e^{\frac{3}{x}}}{e^{\frac{-3}{x}} - e^{\frac{3}{x}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{3}{x}}\left(1 + e^{\frac{6}{x}}\right)}{e^{-\frac{3}{x}}\left(1 - e^{\frac{6}{x}}\right)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1 + e^{\frac{6}{x}}}{1 - e^{\frac{6}{x}}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

بالتالي $x = 0$ نقطة انقطاع من النوع الأول بقفزة طولها (: $\left|\lim_{x\to 0^+} f(x) - \lim_{x\to 0^-} f(x)\right| = 2$ = (

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تحليل رياضي 1	اسم الطالب:
كلية العلوم	سنة أولى رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2023-2024	الدرجة: 90

السؤال الأول: (40 درجة)

1) أثبت أن "كل متتالية متقاربة هي متتالية لكوشي".

2) أوجد نهاية **متتاليتين فقط** من المتتاليات الآتية:

$$1)\ u_n = \sqrt[n]{(n+1)!} \qquad 2)\ v_n = \sqrt[n]{3n^4 - 3n^3 + 5} \qquad 3)\ w_n = \frac{4^{n-1} - 5}{2^{2n} - 7}$$

3) ادرس تقارب **ثلاثة فقط** من السلاسل الآتية:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{2n+1}} \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^5}}$$

السؤال الثاني: (50 درجة)

1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

$$1)\ y = x^x + e^{ch(\sqrt{x})} \qquad 2)\ x = \arcsin t \ ,\ y = 2\arccos(\frac{1}{2}t)$$

$$3)\ y^2 \operatorname{arccot}(x) + y = th(x)$$

2) أوجد النهايات الآتية:

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \qquad 2)\ \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \qquad 3)\ \lim_{x\to 2^-} \arctan\frac{1}{2-x}$$

3) ليكن لدينا التابع $f(x) = \sin(2x)$، والمطلوب:

1. أوجد الحدود الأربعة الأولى الغير معدومة من منشور تايلور للتابع $f(x)$ بجوار $x = \frac{\pi}{6}$.
2. بيّن أن التابع $f(x)$ مستمر بانتظام على المجال $[0, \pi]$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

طرطوس 2024/2/26 — مدرس المقرر: د. بشرى دراج

سلم تصحيح مقرر تحليل رياضي 1

السؤال الأول: (40 درجة)

1) المبرهنة (10 درجات)

2)

1) $U_n = \sqrt[n]{(n+1)!} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} n+1 = \infty$

2) $\vartheta_n = \sqrt[n]{3n^4 - 3n^3 + 5} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \vartheta_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4} \cdot \sqrt[n]{3 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^4}} = 1\times 1$ حيث

$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^4 = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1 \Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty} 3 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^4} = 3$

3) $w_n = \frac{4^{n-1} - 5}{2^{2n} - 7} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n\left[\frac{1}{4} - \frac{5}{4^n}\right]}{4^n\left[1 - \frac{7}{4^n}\right]} = \frac{1}{4}$

(6 درجات لكل متتالية مختارة)

3)

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2} \Rightarrow$ حسب اختبار كوشي $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} < 1 \Rightarrow$ السلسلة متقاربة

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow$ نقارن السلسلة المطلوبة مع السلسلة المتباعدة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n} \Leftarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1 < \infty \Rightarrow$ السلسلتان من طبيعة واحدة فالسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$ متباعدة

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{2n+1}} \Rightarrow$ حسب اختبار دالامبير $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{9} = \infty > 1 \Leftarrow$ السلسلة متباعدة.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^5}}$ ندرس سلسلة القيمة المطلقة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ فنجد حسب سلسلة ريمان عندئذٍ $\alpha = \frac{5}{3} > 1$ فالسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ متقاربة وبالتالي السلسلة المطلوبة متقاربة.

(6 درجات لكل سلسلة مختارة).

السؤال الثاني (50 درجة)

1

① $y = x^x + e^{ch(\sqrt{x})} \Rightarrow y' = (\ln x + 1)x^x + \frac{sh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \cdot e^{ch(\sqrt{x})}$

② $x = \arcsin t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$y = 2\arccos(\frac{1}{2}t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}t^2}}$

(6 درجات لكل مشتق)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{-\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}t^2}}$

③ $y^2 \operatorname{arccot}(x) + y = th\,x$

$\Rightarrow 2yy' \operatorname{arccot} x - \frac{y^2}{1+x^2} + y' = \frac{1}{ch^2 x}$

$\Rightarrow y' = \frac{\frac{y^2}{1+x^2} + \frac{1}{ch^2 x}}{2y \operatorname{arccot} x + 1}$

2

① $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \overset{\text{حسب لوبيتال}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2\cos x} = \frac{-1}{2}$

(7 درجات)

② $\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = e^0 = 1$

أو نوجد $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ حسب لوبيتال.

(7 درجات)

③ $\lim_{x \to 2^-} \arctan \frac{1}{2-x} = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$ (4 درجات)

3

(6 درجات)

لدينا $\sin 2x$ مستمر على $\mathbb{R}$ فهو مستمر على $[0, \pi]$.

$\Leftarrow$ حسب مبرهنة كانتور عبارة $f(x)$ مستمر على مجال مغلق فهو مستمر بانتظام على هذا المجال

(8 درجات)

$f(x) = \sin(2x)$

$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f'(x) = 2\cos(2x) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{6}) = 1$

$f''(x) = -4\sin(2x) \Rightarrow f''(\frac{\pi}{6}) = -2\sqrt{3}$

$f'''(x) = -8\cos(2x) \Rightarrow f'''(\frac{\pi}{6}) = -4$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + (x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{6})^2 - \frac{2}{3}(x - \frac{\pi}{6})^3$

مدرس المقرر

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر تحليل رياضي 1
سنة أولى رياضيات
الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2022-2023

اسم الطالب:
المدة: ساعتان
الدرجة: 90

السؤال الأول: (35 درجة)

1) أثبت أن كل متتالية لكوشي في $\mathbb{R}$ هي متتالية متقاربة.

2) أوجد نهاية **متتاليتين فقط** من المتتاليات الآتية:

1) $u_n = -3n - \cos 4n$ 2) $v_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n + 3^n}$ 3) $w_n = \dfrac{n^2}{1 + 2 + 3 + \cdots + 2n}$

3) ادرس تقارب **ثلاثة فقط** من السلاسل الآتية:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n-1}}$

السؤال الثاني: (55 درجة)

1) أوجد $y' = \dfrac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $y = x^x\, sh^{-1}(\sqrt{2x-1}) + \tan(x^2)$ 2) $x = \sqrt{\sin t}$, $y = 2\cos^2(\frac{1}{2}t)$

3) $y^2\cot(x) + y = arctan(x)$

2) أوجد الحدود الثلاثة الأولى الغير معدومة من منشور ماك لوران للتابع $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

3) ابحث عن وجود قيم موضوعية قصوى للتابع $f(x) = x^5 - \frac{20}{3}x^3$ مبيناً نوعها.

4) أوجد النهايات الآتية:

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3x)}{4\sqrt{x}}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \ln\left(1 + \frac{4}{3x}\right)^x$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(2-2x)}{x^3 - 1}$

5) ادرس نوع نقطة الانقطاع للتابع $f(x)$ عند $x = 0$

$$f(x) = \frac{e^{\frac{-2}{x}} + e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{-2}{x}} - e^{\frac{2}{x}}}$$

----------انتهت الأسئلة----------

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل رياضي 1 لطلاب السنة الأولى رياضيات

الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2022-2023م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (35 درجة)

1) أثبت أن كلّ متتالية لكوشي في $\mathbb{R}$ هي متتالية متقاربة.

2) أوجد نهاية **متتاليتين فقط** من المتتاليات الآتية:

1) $u_n = -3n - \cos 4n$ 2) $v_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n + 3^n}$ 3) $w_n = \dfrac{n^2}{1+2+3+\cdots+2n}$

3) ادرس تقارب **ثلاثة فقط** من السلاسل الآتية:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n-1}}$

الحلّ:

1) **(5 درجات للمبرهنة)**

2) **(6 درجات لكل متتالية)**

✓ $u_n = -3n - \cos 4n$

$$1 \geq \cos 4n \geq -1$$
$$-3n + 1 \geq -3n - \cos 4n \geq -3n - 1$$
$$-3n + 1 \geq u_n \geq -3n - 1$$
$$\lim_{n\to\infty} -3n + 1 = -\infty \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} -3n - 1 = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$$

✓ $v_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n + 3^n}$

$$\sqrt[n]{5^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 5^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3.5^n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n} = 5 \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3.5^n} = 5 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = 5$$

✓ $w_n = \dfrac{n^2}{1+2+3+\cdots+2n}$

$$w_n = \frac{n^2}{1+2+3+\cdots+2n} = \frac{n^2}{2n \times \left(\frac{2n+1}{2}\right)} = \frac{n^2}{2n^2+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+n} = \frac{1}{2}$$

3) (6 درجات لكل سلسلة)

✓ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

بالاعتماد على اختبار كوشي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \times \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

بالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ متقاربة.

✓ $\sum_{n=1}^{\infty} cos\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{n+1}{n^2}\right) = \cos(0) = 1 \neq 0$$

بالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} cos\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ متباعدة بالاعتماد على الاختبار الصفري.

✓ $\sum_{n=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\, tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

نقارن مع السلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3$ حسب سلسلة ريمان

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{sin^3\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3} \times \frac{1}{cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 1 < \infty$$

بالتالي السلسلتان من طبيعة واحدة ومنه السلسلة المطلوبة متقاربة.

✓ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n-1}}$

ندرس سلسلة القيمة المطلقة

نأخذ $u_n = \frac{1}{e^{n-1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{e^n}}{\frac{1}{e^{n-1}}} = \frac{1}{e} < 1$$

بالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n-1}}$ متقاربة حسب دالامبير بالتالي السلسلة المتناوبة متقاربة لأن سلسلة القيم المطلقة متقاربة.

<u>السؤال الثاني: (55 درجة)</u>

1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكلّ مما يأتي:

$$1)\ y = x^x\, sh^{-1}\left(\sqrt{2x-1}\right) + \tan(x^2) \qquad 2)\ x = \sqrt{\text{sin}t}\ ,\ y = 2\cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)$$

$$3)\ y^2\cot(x) + y = arctan(x)$$

2) أوجد الحدود الثلاثة الأولى الغير معدومة من منشور ماك لوران للتابع $f(x) = \ln(1+e^x)$.

3) ابحث عن وجود قيم موضوعية قصوى للتابع $f(x) = x^5 - \frac{20}{3}x^3$ مبيّناً نوعها.

4) أوجد النهايات الآتية:

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x)}{4\sqrt{x}} \qquad 2)\ \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{4}{3x}\right)^x \qquad 3)\ \lim_{x\to1}\frac{\sin(2-2x)}{x^3-1}$$

5) ادرس نوع نقطة الانقطاع للتابع $f(x)$ عند $x = 0$

$$f(x) = \frac{e^{\frac{-2}{x}} + e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{-2}{x}} - e^{\frac{2}{x}}}$$

الحلّ:

1) (5 درجات لكلّ مشتق)

$$\boldsymbol{y = x^x\, sh^{-1}\left(\sqrt{2x-1}\right) + \tan(x^2)}\ ✓$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = (lnx+1)x^x\, sh^{-1}\left(\sqrt{2x-1}\right) + \frac{x^x}{\sqrt{2x-1}\sqrt{2x}} + \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$$

$$\boldsymbol{x = \sqrt{\text{sin}t}\ ,\ y = 2\cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)}\ ✓$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{cost}{2\sqrt{\text{sin}t}}$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\,sin\left(\frac{1}{2}t\right)cos\left(\frac{1}{2}t\right) = -sint$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2sint.2\sqrt{\text{sin}t}}{cost} = -2tant.\sqrt{\text{sin}t}$$

$$\boldsymbol{y^2\,cot(x) + y = arctan(x)}\ ✓$$

$$2y\acute{y}\cot(x) - \frac{y^2}{sin^2x} + \acute{y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\acute{y}(2ycotx+1) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{y^2}{sin^2x}$$

$$\acute{y} = \frac{\frac{1}{x^2+1} + \frac{y^2}{sin^2x}}{2ycotx+1}$$

2) (8 درجات)

$$f(x) \approx f(0) + \frac{\acute{f}(0)}{1!}x + \frac{\acute{\acute{f}}(0)}{2!}x^2$$

$$f(0) = \ln(1+e^0) = \ln 2$$

$$\acute{f}(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow \acute{f}(0) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x.e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{4}$$
$$f(x) \approx \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$$

3) (8 درجات)

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^2$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^2(x^2-4) = 0$$
$$x = 0, \qquad x = 2, \qquad x = -2$$

نوجد $f''(x)$:

$$f''(x) = 20x^3 - 40x$$

نلاحظ بأن:

$.f''(0) = 0$

$f''(-2) = -80 < 0$ بالتالي $f(-2) = \frac{64}{3}$ قيمة كبرى موضعياً.

$f''(2) = 80 > 0$ بالتالي $f(2) = -\frac{64}{3}$ قيمة صغرى موضعياً.

لتحديد نوع $x = 0$ نوجد المشتق الثالث $f'''(x) = 60x^2 - 40$ ومنه $f'''(0) = -40 \neq 0$

وبما أن مرتبة المشتق عدد فردي $n = 3 \Leftarrow$ ليس للتابع قيمة قصوى عند $x = 0$.

4) (5 درجات لكل نهاية)

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(3x)}{4\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3x)}{4\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

نطبق أوبيتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3x)}{4\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{3x}}{4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

✓ $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{4}{3x}\right)^x$

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{4}{3x}\right)^x = \ln \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^x = \ln \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{3x}\right)^{\frac{3x}{4}}\right]^{\frac{4}{3}} = \ln e^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$$

✓ $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sin(2-2x)}{x^3-1}$

$$\lim_{x\to1} \frac{\sin(2-2x)}{x^3-1} = \lim_{x\to1} \frac{\sin(2-2x)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to1} \frac{-2\sin(2-2x)}{-2(x-1)} \times \frac{1}{x^2+x+1}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to1} \frac{\sin(2-2x)}{x^3-1} = -2 \times \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

طريقة ثانية

$$\lim_{x\to1} \frac{\sin(2-2x)}{x^3-1} = \lim_{x\to1} \frac{-2\cos(2-2x)}{3x^2} = -\frac{2}{3}$$

5) (8 درجات)

$$f(x)=\frac{e^{\frac{-2}{x}}+e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{-2}{x}}-e^{\frac{2}{x}}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{-2}{x}}+e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{-2}{x}}-e^{\frac{2}{x}}}=\frac{\infty}{-\infty}\ (\text{عدم تعيين})$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{-2}{x}}+e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{-2}{x}}-e^{\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{2}{x}}\left(e^{\frac{-4}{x}}+1\right)}{e^{\frac{2}{x}}\left(e^{\frac{-4}{x}}-1\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{-4}{x}}+1}{e^{\frac{-4}{x}}-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{-2}{x}}+e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{-2}{x}}-e^{\frac{2}{x}}}=\frac{\infty}{\infty}\ (\text{عدم تعيين})$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{-2}{x}}+e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{-2}{x}}-e^{\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-\frac{2}{x}}\left(1+e^{\frac{4}{x}}\right)}{e^{-\frac{2}{x}}\left(1-e^{\frac{4}{x}}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+e^{\frac{4}{x}}}{1-e^{\frac{4}{x}}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

بالتالي $x=0$ نقطة انقطاع من النوع الأول بقفزة طولها ℓ : $\ell=\lim_{x\to 0^-} f(x)-\lim_{x\to 0^+} f(x)=1-(-1)=2$

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر تحليل رياضي 1
سنة أولى رياضيات
الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2021-2022

اسم الطالب:
المدة: ساعتان
الدرجة: 90

السؤال الأول: (45 د)

1) أثبت صحة **إحدى** المبرهنتين التاليتين:

- المتتالية المتقاربة محدودة.
- من أي متتالية عددية محدودة يمكن إيجاد متتالية جزئية متقاربة.

2) أوجد نهاية كل من المتتاليات الآتية:

1) $u_n = 2n + \cos n$ 2) $v_n = \dfrac{7^n - 9^n}{9^n + 7^n}$ 3) $w_n = \dfrac{a^n}{n}\ ; a > 1$

3) ادرس تقارب **ثلاثة فقط** من السلاسل الآتية:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{4}{n}\right)^n$ 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^n}{(n+1)!}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2-1}}{\sqrt{n}\ 6^{n^2}}$ 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n^3}}$

السؤال الثاني: (45 د)

1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكلّ مما يأتي:

1) $y = 4^x\, sh^{-1}(\sqrt{2x-1})$ 2) $x = \dfrac{\sin t}{t^2+4}\ ,\ y = 2\cos^3(\frac{1}{2}t)$

2) أوجد الحدود الثلاثة الأولى من منشور تايلور للتابع $f(x) = (x-1)\ln(2+x)$ بجوار $x = -1$.

3) أوجد النهايات الآتية:

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{4\sqrt{x}}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(2-2x)}{x^2-x}$

4) أوجد قيمة الثابت A لكي يكون التابع $f(x)$ مستمر عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & ;\quad x \neq 0 \\ A & ;\quad x = 0 \end{cases}$$

--------------------انتهت الأسئلة--------------------

طرطوس في 2022/6/28

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل رياضي 1

السؤال الأول:

1) 12 درجة للمبرهنة.

2) 5 درجات لكل نتيجة

① $u_n = 2n + \cos n$

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \Longrightarrow 2n-1 \leq 2n+\cos n \leq 2n+1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} 2n-1 = \infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} 2n+1 = \infty\end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} u_n = \infty$$ حسب الإحاطة

② $$v_n = \frac{7^n - 9^n}{9^n + 7^n} = \frac{9^n\left(\left(\frac{7}{9}\right)^n - 1\right)}{9^n\left(1+\left(\frac{7}{9}\right)^n\right)} = \frac{\left(\frac{7}{9}\right)^n - 1}{1+\left(\frac{7}{9}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{7}{9}\right)^n - 1}{1+\left(\frac{7}{9}\right)^n} = \frac{0-1}{1+0} = -1$$

حيث $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n = 0 \Leftarrow -1 < q = \frac{7}{9} < 1$

③ لدينا (n) متتالية متزايدة و $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ نطبق ستولز

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^n - a^{n-1}}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n-1}(a-1)}{1} = \infty$$

3] 6 درجات لكل سلسلة.

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{4}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{4}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right)^4 = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right)^4\right)$$

$$= \ln e^4 = 4 \neq 0 \Longrightarrow$$ السلسلة متباعدة لأن حدها العام لا يسعى إلى الصفر

② $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^n}{(n+1)!}$

ندرس السلسلة القيمة المطلقة $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{(n+1)!}$ حسب دالامبير

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}}{(n+2)!}\times\frac{(n+1)!}{e^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e}{n+2} = 0$$

$\Leftarrow$ السلسلة القيمة المطلقة متقاربة $\Leftarrow$ السلسلة $\sum\frac{(-1)^n e^n}{(n+1)!}$ متقاربة

③ حسب اختبار كوشي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n^2-1}}{\sqrt{n}\; 6^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\cancel{2^{n^2}} \times \frac{1}{2}}{\sqrt{n} \times 3^{n^2} \times \cancel{2^{n^2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} (3^{n^2})^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}{(n)^{\frac{2}{n}}\; 3^{n}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$$ السلسلة متقاربة

④ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\; n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}$$

هي سلسلة لريمان متقاربة لأن $\alpha = \frac{7}{2} > 1$.

السؤال الثاني :

1] 5 درجات نحسب y' :

① $$y = 4^x\, sh^{-1}(\sqrt{2x-1})$$

$$\frac{dy}{dx} = (\ln 4)\, 4^x \left(sh^{-1}(\sqrt{2x-1})\right) + \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1+1}} \times 4^x$$

② $$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t\,(t^2+4) - 2t\sin t}{(t^2+4)^2} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 2 \times \frac{1}{2} \times -3\sin\left(\frac{1}{2}t\right) \cdot \cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{-3\sin\left(\frac{1}{2}t\right) \cdot \cos^2\left(\frac{1}{2}t\right) (t^2+4)^2}{(t^2+4)\cos t - 2t\sin t}$$

2] 9 درجات

$$f(x) \approx f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2$$

$$f(-1) = -2\ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \ln(2+x) + \frac{x-1}{2+x} \Rightarrow f'(-1) = 0 + \frac{-2}{1} = -2$$

$$f''(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{3}{(2+x)^2} \Rightarrow f''(-1) = 1 + 3 = 4$$

13] 6 درجات 2 لكل سؤال

① $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{4\sqrt{x}} \overset{\text{حسب لوبيتال}}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{4\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$

② $\lim_{x\to\infty} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^{\infty}$ عدم تعيين

$$\lim_{x\to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos 3x} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{x^2} \overset{\text{حسب لوبيتال}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\sin 3x}{2x\cos 3x}$$

$$\overset{\text{حسب لوبيتال}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-9\cos 3x}{2\cos 3x - 6x\sin 3x} = \frac{-9(1)}{2(1)-0} = \frac{-9}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{9}{2}}$$

③ $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin(2-2x)}{x^2-x} \overset{\text{حسب لوبيتال}}{=} \lim_{x\to 1} \dfrac{-2\cos(2-2x)}{2x-1} = -2$

$\boxed{4}$ تكون f مستمر عند $x=0$ إذا تحقق الشرط 8 درجات

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$\Leftarrow$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{+\sin x}{1} = 0$$

$\Leftarrow$ قيمة A لتكون f مستمر عند $x=0$ هي $\boxed{A=0}$

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر تحليل رياضي 1
الدورة الفصلية الأولى – سنة أولى رياضيات
العام الدراسي 2021–2022

اسم الطالب:
المدة: ساعتان
الدرجة: 90

السؤال الأول: (45 د)

1) أثبت صحة **إحدى** المبرهنتين التاليتين:

- كلّ متتالية لكوشي هي متتالية محدودة.
- من أي متتالية عددية محدودة يمكن إيجاد متتالية جزئية متقاربة.

2) أوجد نهاية كل من المتتاليات الآتية:

$$1)\ u_n = \frac{n + \sin n}{n^2 + 1} \qquad 2)\ v_n = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - \cdots - \frac{1}{3^n} \qquad 3)\ w_n = \frac{a^n}{n}\ ; a > 1$$

3) ادرس تقارب **ثلاثة فقط** من السلاسل الآتية:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n \qquad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2-1}}{\sqrt{n}\ 6^{n^2}} \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\sqrt{n}}$$

السؤال الثاني: (45 د)

1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكلّ مما يأتي:

$$1)\ y = arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) + 2^x ch4x \qquad 2)\ x = 2\, cos\sqrt{t}\,, \quad y = \frac{3sin^2 t}{t}$$

2) أوجد الحدود الثلاثة الأولى من منشور تايلور للتابع $f(x) = \ln(\sqrt{2 + x})$ بجوار $x = -1$.

3) أوجد النهايات الآتية:

$$1)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2 + 2x} \qquad 2)\ \lim_{x \to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} \qquad 3)\ \lim_{x \to 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sqrt{x + 1}}$$

4) أوجد قيمة الثابتين a, b المختلفين عن الصفر لكي يكون التابع

$$f(x) = \begin{cases} |x| + \dfrac{\sin^3 ax}{x^3} & ; \quad x < 0 \\ 8 & ; \quad x = 0 \\ \sqrt{x} + b & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

مستمر عند $x = 0$.

---------------------------------انتهت الأسئلة---------------------------------

طرطوس في 2022/2/26

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

السؤال الأول:

المبرهنة: (٩ درجات)

6 درجات لكل فقرة:

① $U_n = \dfrac{n+\sin n}{n^2+1} \Rightarrow$

$-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow n-1 \leq n+\sin n \leq n+1 \Rightarrow \dfrac{n-1}{n^2+1} \leq \dfrac{n+\sin n}{n^2+1} \leq \dfrac{n+1}{n^2+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n^2+1} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة.

② $V_n = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3^2} - \cdots - \dfrac{1}{3^n} = -\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}\right) = -\left(\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right)$

$= -\left(\dfrac{1}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\dfrac{1}{2}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$

$W_n = \dfrac{a^n}{n}$, المتتالية $(V_n = n)$ متزايدة و $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ لذلك نستخدم ستولز

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n-1}(a-1)}{1} = \infty(a-1) = \infty$$

---

6 درجات

① $\sum \ln\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3 = \lim_{n\to\infty} \ln e^3 = 3 \neq 0$$

السلسلة متباعدة حسب الاختبار الصفري.

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n}{n!}$ حسب دالامبير

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{e^n} = 0 < 1 \Rightarrow$$

السلسلة متقاربة

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n^2-1}}{\sqrt{n}\, 6^{n^2}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\frac{1}{2}\, 2^{n^2}}{\sqrt{n}\, 6^{n^2}} = \sum \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2^{n^2}}{\sqrt{n} \cdot 6^{n^2}}$

حسب الجذر النوني.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}}} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^n$$

$= 1 \times 1 \times 0 = 0 < 1 \Rightarrow$ متقارب

حسب الجذر النوني

1) $u_n = \sum \frac{(-1)^n}{n^2\sqrt{n}} = \sum \frac{(-1)^n}{n^2 \cdot n^{\frac{1}{2}}}$ نأخذ سلسلة القيمة المطلقة نجد

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^{\frac{5}{2}}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$

وهي متقاربة حسب ريمان لأن $\alpha = \frac{5}{2} > 1 \Leftarrow$ سلسلة القيمة المطلقة متقاربة $\Leftarrow$ السلسلة المطلوبة متقاربة

السؤال الثاني:

[1] 6 درجة

1) $y = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + 2^x \cdot ch4x$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \times \frac{1 \times \sqrt{1+x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \times x}{} + (\ln 2) \times 2^x \times ch4x$$

$$+ 4 \times 2^x \, sh4x$$

2) $\frac{dx}{dt} = -2\frac{1}{2\sqrt{t}} \sin\sqrt{t}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(6\cos t \cdot \sin t)(t) - 3\sin^2 t}{t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{6t \cdot \cos t \cdot \sin t - 3\sin^2 t}{t^2}}{-\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \sin\sqrt{t}}$$

---

[2] 8 درجات

$f(x) = \ln\sqrt{2+x}$ بجوار $x = -1$

$$f(x) \approx f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3$$

$f(-1) = \ln\sqrt{1} = 0$

$f'(x) = \frac{1}{2x+4} \Rightarrow f'(-1) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{-2}{(2x+4)^2} \Rightarrow f''(-1) = \frac{-1}{2}$

$f'''(x) = \frac{8}{(2x+4)^3} \Rightarrow f'''(-1) = 1$

$$\Longrightarrow f(x) \approx 0 + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 + \frac{1}{6}(x+1)^3$$

4) يكون f مستمر عند الصفر إذا كان

(7 درجات)

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim -x + a^3\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^3 = 0 + a^3$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} + b$$

$$\Longrightarrow a^3 = 8 \Longrightarrow \boxed{a = 2}$$

$$\boxed{b = 8}$$

3) 6 درجات لكل نهاية

i) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2 + x} = \frac{\infty}{\infty}$$ عدم تعيين

$\overset{\text{لوبيتال}}{\Longrightarrow}$ $$\lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{2x + 1} = \frac{1 + 0}{\infty + 1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

2) $$\lim_{x \to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty$$

$$\lim_{x \to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \cos 3x}$$

$$= e^{\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos 3x}{x^2}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-3 \sin 3x}{\cos 3x}}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-9 \cos 3x \cdot \cos 3x - (-3 \sin 3x)(-3 \sin 3x)}{(\cos 3x)^2}}{2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-9}{2 \cos^2 3x} = -\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{9}{2}}$$

$$* \lim_{x \to 0} \frac{1+\sin x - \cos x}{1 - \sqrt{x+1}} = \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$\lim_{x \to 0} \frac{1+\sin x - \cos x}{1 - \sqrt{x+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{+\cos x + \sin x}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تحليل رياضي 1	اسم الطالب:
كلية العلوم	الدورة الفصلية الثانية – سنة أولى رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	العام الدراسي 2020-2021	الدرجة: 90

السؤال الأول: (45 د)

1) أثبت أن " كل متتالية متقاربة هي متتالية لكوشي".

2) أوجد نهاية **ثلاثة فقط** من المتتاليات الآتية:

$$1)\ u_n = \frac{n\sin n}{n^2+1} \qquad 2)\ v_n == \frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$$

$$3)\ w_n = \sqrt[n]{2n^3-3n^2+5} \qquad 4)\ s_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}$$

3) ادرس تقارب **ثلاثة فقط** من السلاسل الآتية:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n} \qquad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{n!}$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\sqrt{n}}$$

السؤال الثاني: (45 د)

1) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

$$1)\ y = arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+\ 2^x chx \qquad 2)\ y^2+ysinx=1 \qquad 3)\ x=2\cos^2 t\ ,\quad y=3\sin^2 t$$

2) أوجد الحدود الثلاثة الأولى من منشور تايلور للتابع $f(x)=(x-1)\ln(2+x)$ بجوار $x=-1$.

3) أوجد كل من النهايتين التاليتين:

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x^2+2x} \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$$

4) أوجد قيمة الثابت A لكي يكون التابع

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2} & ;\quad x\neq 1\\ A & ;\quad x=1\end{cases}$$

مستمر عند $x=1$.

------------------------------------انتهت الأسئلة------------------------------------

طرطوس في 2021/8/11

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

سلم تصحيح مقرر تحليل رياضي /1/ - رياضيات

السؤال الأول:

1] البرهان: نفرض أن (U_n) متقاربة من العدد ℓ — 9 درجات

$$\forall \varepsilon' > 0 \ \exists n_0(\varepsilon') \in \mathbb{N} : |u_n - \ell| < \varepsilon' \quad \forall n > n_0$$

لنفرض $\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon'$ ولتكن $n > m > n_0$ عندئذ

$$|u_n - u_m| = |u_n - \ell + \ell - u_m| \leq |u_n - \ell| + |\ell - u_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Leftarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |u_n - u_m| < \varepsilon \quad \forall n > m > n_0 \Leftarrow$ المتتالية هي متتالية كوشي

2] 6 درجات لكل نهاية

① $-1 \leq \sin n \leq 1 \Longrightarrow \frac{-n}{n^2+1} \leq \frac{n \sin n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \sin n}{n^2+1} = 0$ بالإحاطة

② n متزايدة وتسعى إلى $+\infty \Leftarrow$ نطبق ستولز

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}) - (\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n-1})}{n - (n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

③ $u_n = \sqrt[n]{n^3} \cdot \sqrt[n]{2 - \frac{3}{n} + \frac{15}{n^3}} = (\sqrt[n]{n})^3 \cdot \sqrt[n]{2 - \frac{3}{n} + \frac{15}{n^3}} = 1^3 \cdot 1 = 1$

لأن $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 - \frac{3}{n} + \frac{15}{n^3}} = 1$

④ $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} = 1 \times \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}(1 - (\frac{1}{3})^{n+1})$

$\Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2}(1 - 0) = \frac{3}{2}$

3] 6 درجات لكل متسلسلة

① $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ متسلسلة متباعدة لأنها لا تحقق الشرط اللازم للتقارب

② $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{e^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0 < 1 \Longrightarrow$ متقاربة حسب دالامبير

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$

$\Leftarrow$ المتسلسلة متقاربة حسب اختبار الجذر النوني (كوشي)

④ $\sum \frac{(-1)^n}{n^2\sqrt{n}} \Rightarrow$ $\sum \frac{1}{n^2\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ متقاربة حسب ريمان لأن $\alpha = \frac{5}{2} > 1$

السلسلة المتناوبة متقاربة لأن سلسلة القيمة المطلقة متقاربة. $\Leftarrow$

السؤال الثاني:

1) 6 درجات لكل مشتق

① $y' = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} + \ln 2 \cdot 2^x \operatorname{ch} x + 2^x \operatorname{sh} x$

② $2yy' + y'\sin x + y\cos x = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{-y\cos x}{2y + \sin x}$

③ $\dfrac{dx}{dt} = -4\sin t \cdot \cos t \;,\; \dfrac{dy}{dt} = 6\cos t \cdot \sin t \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{2}$

2) 9 درجات:

$f(x) \approx f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x+1) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x+1)^2$

$f(x_0) = -2\ln(1) = 0$

$f'(x) = \ln(2+x) + \dfrac{x-1}{x+2} \Rightarrow f'(x_0) = -2$

$f''(x) = \dfrac{1}{2+x} + \dfrac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow f''(x_0) = 4$

$\Rightarrow f(x) \approx 0 - 2(x+1) + \dfrac{4}{2!}(x+1)^2 = -2(x+1) + 2(x+1)^2$

3) 6 درجات لكل نهاية:

① $\lim \dfrac{x + \ln x}{x^2 + 2x} = \underset{\text{عدم تعيين}}{\dfrac{\infty}{\infty}} \xRightarrow{\text{حسب أوبيتال}} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\ln x}{x^2+2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{2x+2} = 0$

② $\lim \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}} \overset{\text{حسب أوبيتال}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}}{-\frac{1}{\sqrt{x+1}}} = +1$

4) 6 درجات:

يكون f مستمر إذا كان عند $x = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$A = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^3 - 3x + 2}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} \times \dfrac{1}{x-2}$

$= 1 \times (-1) = (-1)$

أو حسب أوبيتال لوجدنا النتيجة.

$\Leftarrow \boxed{A = -1}$

جامعة طرطوس	**امتحان مقرر تحليل رياضي 1**	**اسم الطالب:**
كلية العلوم	**الفصل الأول – سنة أولى رياضيات**	**المدة: ساعتان**
قسم الرياضيات	**العام الدراسي 2020–2021**	**الدرجة: 90**

السؤال الأول: (25 درجة)

1) أثبت أن " المتتالية المتقاربة محدودة " ثم أعطي مثال يبين أن العكس ليس صحيح بالضرورة.

2) احسب نهاية كل من المتتاليات الآتية:

$$1)\ u_n = \frac{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}, \qquad 2)\ v_n = \left(\frac{n}{n+3}\right)^n, \qquad 3)\ w_n = \frac{4^n + 7^n}{4^n - 7^n}$$

السؤال الثاني: (20 درجة)

ادرس تقارب السلاسل الآتية:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{5}{2}\right)^n} \qquad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+4}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!} \qquad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^3}}$$

السؤال الثالث: (15 د)

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في كل من الحالات الآتية:

$$1)\ y = arcsin(x^2+1)\ln(chx) \qquad 2)\ x = \frac{\sin t}{t^2+4},\ y = 2\cos(\frac{1}{2}t)$$

$$3)\ xy^2 + ylnx = 0$$

السؤال الرابع: (10 د)

بين نوع نقطة الانقطاع للتابع f الآتي عند $x = 0$:

$$f(x) = \frac{1 - 2^{\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

السؤال الخامس: (10 د)

أوجد النهايتين التاليتين

$$1) \lim_{x\to 0} x^{\sin x}, \qquad 2) \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{e^x + e^{-x} - 2}$$

السؤال السادس: (10 د)

أوجد الحدود الأربعة الأولى من منشور ماك لوران للتابع

$$f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$$

---------------------------------- **انتهت الأسئلة** ----------------------------------

طرطوس في 2021/2/15

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

سلم تصحيح مادة تحليل رياضي 1 / سنة أولى رياضيات

السؤال الأول: [1] (25 د) لتكن لدينا (u_n) متتالية عددية متقاربة من عدد ℓ أي $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ولنبرهن أنها محدودة

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0(\varepsilon)\in \mathbb{N} \ : \ |u_n-\ell|<\varepsilon \quad \forall n>n_0$$ (8 د)

ومنه $|u_n| = |u_n-\ell+\ell| \leqslant |u_n-\ell|+|\ell| \leqslant \varepsilon+|\ell|$

فإذا أخذنا $k=\max\{\varepsilon+|\ell|, |u_1|, \dots, |u_{n_0}|\}$

عندئذ تتحقق المتراجحة $|u_n|\leqslant k$ من أجل $n\in \mathbb{N}$ وبالتالي المتتالية محدودة.

* المتتالية $u_n=(-1)^n$ محدودة ولكن متباعدة. (2 د)

[2] ① $u_n = \dfrac{\sqrt2+\sqrt[3]3+\dots+\sqrt[n]n}{n}$: (n) متزايدة وتسعى إلى $+\infty$ وبالتالي حسب شتولز: (5 د)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt2+\sqrt[3]3+\dots+\sqrt[n]n)-(\sqrt2+\sqrt[3]3+\dots+\sqrt[n-1]{n-1})}{n-(n-1)} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

② $v_n = \left(\dfrac{n}{n+3}\right)^n$

$$v_n = \left(\frac{n}{n+3}\right)^n = \left(\frac{n}{n(1+\frac3n)}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac3n)^n} = \frac{1}{\left[(1+\frac{1}{\frac n3})^{\frac n3}\right]^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e^3}$$ (5 د)

③ $$w_n = \frac{4^n+7^n}{4^n-7^n} = \frac{7^n((\frac47)^n+1)}{7^n((\frac47)^n-1)} = \frac{(\frac47)^n+1}{(\frac47)^n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 \quad , \quad \left(\frac47\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ (5 د)

السؤال الثاني: (20 د)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\left(\tfrac34\right)^n+\left(\tfrac52\right)^n} \ : \ \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\tfrac34\right)^n+\left(\tfrac52\right)^n} = \lim \sqrt[n]{\left(\tfrac52\right)^n\left[\left(\tfrac34\times\tfrac25\right)^n+1\right]} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\tfrac52\right)^n}\cdot\sqrt[n]{\left(\tfrac{3}{10}\right)^n+1} = \frac52\times1 = \frac52 \neq 0$$ (5 د)

السلسلة متباعدة لأن نهاية الحد العام لا يساوي الصفر.

ندرس $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+4}$ سلسلة القيم المطلقة $\sum\dfrac{1}{3n+4}$ بالمقارنة مع السلسلة المثالية

$\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac1n$ $\quad \lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3n+4}}{\frac1n} = \dfrac13 \Rightarrow$ السلسلتان من طبيعة واحدة أي سلسلة القيم المطلقة متباعدة لذلك ندرس حسب ليبنز فيما إذا كانت متقاربة شرطاً أم لا؟ (5 د)

$$f(n)=\frac{1}{3n+4} \Rightarrow f'(n) = \frac{-3}{(3n+4)^2}<0$$

أي متتالية الحد العام متناقصة

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{3n+4} = 0 \Leftarrow$ حسب ليبنز السلسلة متقاربة شرطاً.

حسب دالامبير: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)2^n}{n!}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(n+1)2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+2)}{(n+1)^2} = 0<1$$

$\Leftarrow$ السلسلة متقاربة. (5 د)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \Rightarrow$$ 5د صورها ن السلسلة متقاربة $(\frac{5}{2} > 1)$

السؤال الثاني: 15د

① $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}} \ln(ch) + \frac{shx}{chx} \cdot \arcsin(x^2+1)$ 5د

② $\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t\,(t^2+4) - 2t \cdot \sin t}{(t^2+4)^2}$, $\frac{dy}{dt} = -\sin\frac{1}{2}t \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{-\sin\frac{1}{2}t\,(t^2+4)^2}{(t^2+4)\cos t - 2t \cdot \sin t}$ 5د

③ $y^2 + 2xy \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}\ln x + \frac{y}{x} = 0$ 5د $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y^2 - \frac{y}{x}}{2xy + \ln x}$

السؤال الثالث 10د

$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x \cdot \ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \sin x \cdot \ln x}$

$\lim_{x\to 0} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}$ 5د $= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} e^{\sin x \cdot \ln x} = e^0 = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{e^x + e^{-x} - 2} \overset{\text{هوبيتال}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}} \overset{\text{هوبيتال}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}$ 5د

السؤال الرابع: 10د

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1 - 2^{-\infty}}{1 - 2^{-\infty}} = 1$ 4د

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}}(2^{-\frac{1}{x}} - 1)}{2^{\frac{1}{x}}(2^{-\frac{1}{x}} + 1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2^{-\frac{1}{x}} - 1}{2^{-\frac{1}{x}} + 1} = -1$ 4د

$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ 2د $\Leftarrow$ التابع f غير مستمر والنقطة $x=0$ هي نقطة انقطاع من النوع الأول بقفزة طولها 2 .

f مستمر إذا كان

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

السؤال السادس: 10د
ارسم حدود من منشور ماكلورن:

$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$

$f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f'(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$ 5د

$f''(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow f''(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f'''(x) = +\sin(x + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow f'''(0) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3$ 5د