كلية **العلوم**

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

اسئلة دورات محلولة

هندسة تحليلية

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
السنة الأولى رياضيات
الفصل الدراسي الأول 2024/2025

الاسم:
الدرجة: 90
المدة: ساعتان

السؤال الأول: **(25)** درجة

أوجد المعادلات الوسيطية لمستقيم مار من $M_0(4,3,1)$ و يوازي المتجه $\vec{v}(1,-1,2)$، ثم انتقل من الشكل الوسيطي إلى الشكل الديكارتي لهذا المستقيم.

السؤال الثاني: **(25)** درجة

اكتب معادلة المستوي المار من النقطة $M(3,5,-7)$ و الذي يقطع المحاور الإحداثية بقطع متساوية.

السؤال الثالث: **(20)** درجة

سطح معادلته الديكارتية:

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y-5=0$$

أوجد معادلة السطح بالإحداثيات الكروية.

السؤال الرابع: **(20)** درجة

أوجد قيمة الزاوية بين المستويين التاليين:

$$P_1(x,y,z)=x-\sqrt{2}\,y+z-2=0$$

$$P_2(x,y,z)=x+\sqrt{2}\,y-z+13=0$$

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح

د. سهى علي سلامه

جامعة طرطوس
كلية العـلـوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الرياضيات –السنة الأولى
الدورة الفصلية الثانية 2024 -2023

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (50 درجة):

1) أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي و الخارجي لزاوية المستويين :

$$P_1 = 2x + y - z - 1 = 0$$
$$P_2 = -x - y + z + 2 = 0$$

ثم أوجد الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية للمستوي P_2 .

2) أوجد معادلتي العمود المشترك للمستقيمين:

$$D_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+5}{3}$$
$$D_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+1}{3}$$

3) أوجد معادلة المستوي المار من النقطتين $A\left(-1,2,4\right)$ **و** $B\left(3,0,-2\right)$ **والموازي للمتجه** $\vec{v}\left(-2,1,-3\right)$.

السؤال الثاني (40 درجة):

ليكن لدينا المنحني المعطى بالشكل التالي:

$$C : \begin{cases} F\left(x,y,z\right) = x^2 - z + 3x + 1 = 0 \\ G\left(x,y,z\right) = x^2 - y - 1 = 0 \end{cases}$$

والمطلوب:

1)أوجد معادلتي المستقيم المماس و معادلة المستوي الناظم للمنحني C **في النقطة** $M\left(-1,0,2\right)$

2) أوجد المعادلات الوسيطية للمنحني C .

3) أوجد مسقط المنحني C **على المستوي** xoy .

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (50 درجة)

1) أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين :

$$P_1 = 2x + y - z - 1 = 0$$
$$P_2 = -x - y + z + 2 = 0$$

ثم أوجد الأجزاء المقطوعة من المحاور الاحداثية للمستوي P_2 .

2) أوجد معادلتي العمود المشترك للمستقيمين :

$$D_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+5}{3}$$
$$D_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+1}{3}$$

3) أوجد معادلة المستوي المار من النقطتين $A(-1,2,4)$ و $B(3,0,-2)$ والموازي للمتجه $\vec{v}(-2,1,-3)$

الحل: 1) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من المستوي المنصف

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{|\vec{\omega}_1|} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{|\vec{\omega}_2|}$$

5

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{2x+y-z-1}{\sqrt{4+1+1}} = \pm \frac{-x-y+z+2}{\sqrt{1+1+1}}$$

$$\frac{2x+y-z-1}{\sqrt{6}} = \pm \frac{-x-y+z+2}{\sqrt{3}}$$

$$2x+y-z-1 = \pm\sqrt{2}(-x-y+z+2)$$

$$\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2 = 2(-1)+1(-1)-(1) = -2-1-1 = -4 < 0$$

3

(−) يوافق المستوي المنصف الخارجي.

(+) يوافق المستوي المنصف الداخلي.

$$2x+y-z-1 = -\sqrt{2}(-x-y+z+2)$$

$$\boxed{(2-\sqrt{2})x + (1-\sqrt{2})y + (-1+\sqrt{2})z - 1 + 2\sqrt{2} = 0}$$

3 المستوي المنصف الخارجي

$$2x+y-z-1 = \sqrt{2}(-x-y+z+2)$$

$$\boxed{(2+\sqrt{2})x + (1+\sqrt{2})y + (-1-\sqrt{2})z - 1 - 2\sqrt{2} = 0}$$

3 المستوي المنصف الداخلي

لايجاد الأجزاء المقطوعة من المحاور الاحداثية لـ P_2:

$$P_2 = -x - y + z + 2 = 0$$

التقاطع مع المحور ox، $y=0, z=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

التقاطع مع المحور oy، $x=0, z=0 \Rightarrow \boxed{y=2}$

التقاطع مع المحور oz، $x=0, y=0 \Rightarrow \boxed{z=-2}$

إذاً الأجزاء المقطوعة هي على الترتيب $x=2$ ، $y=2$ ، $z=-2$ من المحاور ox, oy, oz على الترتيب

6

(2

$$D_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+5}{3}$$

$$D_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+1}{3}$$

متجه توجيه D_1 هو $\vec{v}_1(1,2,3)$

متجه توجيه D_2 هو $\vec{v}_2(3,4,3)$

لنوجد متجه العمود المشترك هو:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k} \quad , \vec{v}(-6, 6, -2)$$

3

لنكتب معادلتي D_1, D_2 بشكل تقاطع مستويين:

$$D_1 \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 3x - z - 2 = 0 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} 4x - 3y + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

2

لنوجد معادلة الحزمة (حزمة المستويات) المارة من D_1:

3

$$P_1 + \lambda P_2 = 0 \Rightarrow (2+3\lambda)x - y - \lambda z - 1 - 2\lambda = 0$$

ناظم الحزمة هو $\vec{w}_\lambda(2+3\lambda, -1, -\lambda)$

نختار من الحزمة المستوي الموازي لـ $\vec{v}(-6,6,-2) \Leftarrow \vec{w}_\lambda , \vec{v}$ متعامدان

$$\Rightarrow \vec{w}_\lambda \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -6(2+3\lambda) - 6 + 2\lambda = 0$$

$$-12 - 18\lambda - 6 + 2\lambda = 0 \Rightarrow -18 - 16\lambda = 0$$

$$\boxed{\lambda = \frac{-18}{16} = \frac{-9}{8}}$$

لنعوض قيمة λ في معادلة الحزمة:

$$\left(2 + 3\left(\frac{-9}{8}\right)\right)x - y + \frac{9}{8}z - 1 + \frac{18}{8} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{-11}{8}x - y + \frac{9}{8}z + \frac{10}{8} = 0}$$

$$\boxed{P'_1 = -11x - 8y + 9z + 10 = 0}$$

3

نوجد معادلة حزمة المستويات المارة بـ P_2 :

$$P_1+\lambda P_2=0 \Rightarrow (4+\lambda)x-3y-\lambda z+1=0$$ 3

ناظم الحزمة : $\vec{\omega}_\lambda\,(4+\lambda\,,\,-3\,,\,-\lambda)$

نختار من الحزمة المستوي الموازي لـ $\vec{v}(-6,6,-2) \Leftarrow \vec{v}\perp\vec{\omega}_\lambda$

$$\Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{\omega}_\lambda=0 \Rightarrow -6(4+\lambda)-18+2\lambda=0$$

$$-24-6\lambda-18+2\lambda=0 \Rightarrow -4\lambda=42 \Rightarrow \boxed{\lambda=-\frac{42}{4}=-\frac{21}{2}}$$

نعوض بمعادلة الحزمة :

$$\left(4+\left(\frac{-21}{2}\right)\right)x-3y+\frac{21}{2}z+1=0 \Rightarrow \boxed{\frac{-13}{2}x-3y+\frac{21}{2}z+1=0}$$

$$\boxed{P_2' = -13x-6y+21z+2=0}$$ 3

وبالتالي العمود المشترك على المستقيمين D_1, D_2 هو تقاطع المستويين P_1', P_2'

$$D:\begin{cases}-11x-8y+9z+10=0\\ -13x-6y+21z+2=0\end{cases}$$ 3

3) معادلة المستوي المار من النقطتين $A(-1,2,4)$ و $B(3,0,-2)$ والموازي للمتجه $\vec{v}(-2,1,-3)$

هو :

$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$ 5

حيث : ناظم المستوي : $\vec{\omega}(a,b,c)=\vec{v}\times\vec{AB}\,,\ \vec{AB}(4,-2,-6)$

و $M_0(x_0,y_0,z_0)$ هي إما A أو B ولتكن A :

$$\vec{\omega}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & -3\\ 4 & -2 & -6\end{vmatrix}=-12\vec{i}-24\vec{j}+0\vec{k}\ ,\ \vec{\omega}(-12,-24,0)$$ 3

$$-12(x+1)-24(y-2)+0(z-4)=0$$

$$\Rightarrow -12x-12-24y+48=0 \xRightarrow{\text{بالقسمة على } -12}$$

$$\boxed{x+2y-3=0}$$ 2

وهو المستوي المطلوب

وحتى لو عوض الطالب مكان M_0 بـ B تكون نفس النتيجة.

يمكن للطالب حلا بفرض $\vec{n}$ الناظم $\Leftarrow \vec{n}\perp\vec{AB}$ و $\vec{n}\perp\vec{v}$ نحل جملة معادلتين

فيكون توزيع العلامات هنا 3 ثم معادلة المستوي 5 وتعويض النقطة 2

السؤال الثاني (40 درجة)

لتكن لدينا المنحني المعطى بالشكل التالي:

$$C:\begin{cases} F(x,y,z) = x^2 - z + 3x + 1 = 0 \\ G(x,y,z) = x^2 - y - 1 = 0 \end{cases}$$

والمطلوب:

1) أوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم للمنحني C في النقطة $M(-1,0,2)$

2) أوجد المعادلات الوسيطية للمنحني C.

3) أوجد مسقط المنحني C على المستوي xoy.

الحل: 1) لنوجد المشتقات الجزئية لكل من F و G بالنسبة لـ x, y, z

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= 2x+3 \\ F'_y &= 0 \\ F'_z &= -1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[M_0(-1,0,2)]{\text{المشتقات في } M_0} \begin{cases} F'_{x_0} = -2+3 = 1 \\ F'_{y_0} = 0 \\ F'_{z_0} = -1 \end{cases} \qquad \vec{N}_1(1,0,-1)$$

3 3

$$\left.\begin{aligned} G'_x &= 2x \\ G'_y &= -1 \\ G'_z &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[M_0(-1,0,2)]{\text{المشتقات في}} \begin{cases} G'_x = -2 \\ G'_y = -1 \\ G'_z = 0 \end{cases} \qquad \vec{N}_2(-2,-1,0)$$

3 3

متجه توجيه المستقيم المماس للمنحني C هو:

$$\vec{T} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

3

معادلتي المستقيم المماس في M_0:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v} = \frac{z-z_0}{w}}$$

3

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2=-y \\ -y=2z-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+2=0 \\ y+2z-4=0 \end{cases}$$ وهي معادلتي المستقيم الحامل M_0 في

3

معادلة المستوي الناظمي في M_0 :

$$\boxed{u(x-x_0)+v(y-y_0)+w(z-z_0)=0}$$ 3

$$-(x+1)+2(y)-(z-2)=0$$

$$\boxed{-x+2y-z+1=0}$$ وهي معادلة المستوي الناظمي لـ C في M_0 3

2) لدينا C بالشكل الديكارتي :

$$C \begin{cases} F(x,y,z)=x^2-z+3x+1=0 & (1) \\ G(x,y,z)=x^2-y-1=0 & (2) \end{cases}$$

للتحويل إلى الشكل الديكارتي :

نفرض أحد المتحولات هو t وليكن $x=t$ 3 $\Leftarrow$ من المعادلة (1)

$$z=t^2+3t+1$$

$$y=t^2-1$$ ومن المعادلة (2)

$\Leftarrow$ المعادلات الوسيطية لـ C هي :

$$C \begin{cases} x=t \\ y=t^2-1 \\ z=t^2+3t+1 \end{cases}$$ 5

3) ايجاد مسقط C على المستوي xoy :

بما أن G تمثل العلاقة بين x و y فقط $\Leftarrow$

مسقط C على xoy هو :

$$\boxed{G(x,y,z)=x^2-y-1=0}$$ 5

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الرياضيات–السنة الأولى
الدورة الفصلية الأولى 2023 -2024

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (50 درجة):

1) ليكن لدينا المستويين المتقاطعين:

$$P_1 = x - y + z - 2 = 0$$
$$P_2 = y - 2z + 3 = 0$$

والمطلوب:

1-أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين P_1 , P_2 .

2-أوجد معادلتي المسقط القائم للفصل المشترك لـ P_1 , P_2 على المستوي:

$$P = 3x - 2y + 2z = 0$$

2) أوجد معادلة الكرة التي تمر من النقطتين $A\left(5,-2,1\right)$ و $B\left(1,0,-1\right)$ و يكون AB قطراً لها.

السؤال الثاني (40 درجة):

لدينا السطح المعطى بالعلاقة التالية:

$$F\left(x,y,z\right) = x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 6y + 8z + 1 = 0$$

المطلوب:

1) أوجد مركز تناظر هذا السطح.

2) أوجد معادلة المخروط الموجه والمخروط المقارب للسطح $F\left(x,y,z\right)$.

3) أوجد معادلة هذا السطح في الإحداثيات الإسطوانية.

4) أوجد معادلتي المستقيم الناظم ومعادلة المستوي المماس لهذا السطح في النقطة $M\left(2,-1,0\right)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (50 درجة)

1) ليكن لدينا المستويين المتقاطعين :

$$P_1 = x - y + z - 2 = 0$$
$$P_2 = y - 2z + 3 = 0$$

والمطلوب :

1) أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين P_1, P_2.

2) أوجد معادلتي المسقط القائم للفصل المشترك لـ P_1, P_2 على المستوي :

$$P = 3x - 2y + 2z = 0$$

2) أوجد معادلة الكرة التي تمر من النقطتين $A(5,-2,1)$ و $B(1,0,-1)$ ويكون AB قطراً لها.

الحل :

1) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من المستوي المنصف لزاوية المستويين.

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2.

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{|\vec{\omega}_1|} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{|\vec{\omega}_2|}$$ 5

$$\frac{x-y+z-2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{y-2z+3}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{x-y+z-2}{\sqrt{1+1+1}} = \pm \frac{y-2z+3}{\sqrt{1+1+4}}$$ 5

$$\sqrt{5}(x-y+z-2) = \pm\sqrt{3}(y-2z+3)$$

لنوجد $\vec{\omega}_1 . \vec{\omega}_2$:

$$\vec{\omega}_1 . \vec{\omega}_2 = 1(0) - 1(1) + 1(-2) = -3 < 0$$ 2

(−) توافق المستوي المنصف الخارجي. 2

(+) توافق المستوي المنصف الداخلي.

المستوي المنصف الخارجي : $\sqrt{5}(x-y+z-2) = -\sqrt{3}(y-2z+3)$

$$\boxed{\sqrt{5}\,x + (-\sqrt{5}+\sqrt{3})\,y + (\sqrt{5}-2\sqrt{3})\,z - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{3} = 0}$$ 3

وهي المستوي المنصف الخارجي.

المستوي المنصف الداخلي :

$$\sqrt{5}(x-y+z-2) = \sqrt{3}(y-2z+3)$$

$$\boxed{\sqrt{5}\,x + (-\sqrt{5}-\sqrt{3})\,y + (\sqrt{5}+2\sqrt{3})\,z - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{3} = 0}$$ 3

المستوي المنصف الداخلي.

(3

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{بتعويض } F} F(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 6y + 8z + 1 = 0$$

3

$$\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi + 2z^2 + 2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi - 2\rho\cos\varphi\, z - 6\rho\sin\varphi + 8z + 1 = 0$$

$$\boxed{\rho^2\cos 2\varphi + 2z^2 + \rho^2\sin 2\varphi - 2\rho\cos\varphi\, z - 6\rho\sin\varphi + 8z + 1 = 0}$$ 3

وهي معادلة السطح في الاحداثيات الاسطوانية.

(4) نوجد المشتقات الجزئية لـ F بالنسبة لـ x, y, z في $M_0(2,-1,0)$

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= 2x + 2y - 2z \\ F'_y &= -2y + 2x - 6 \\ F'_z &= 4z - 2x + 8 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{في } M_0} \begin{aligned} F'_{x_0} &= 2(2) - 2 - 2(0) = 4 - 2 = 2 \\ F'_{y_0} &= -2(-1) + 2(2) - 6 = 2 + 4 - 6 = 0 \\ F'_{z_0} &= 4(0) - 2(2) + 8 = -4 + 8 = 4 \end{aligned}$$

4

ناظم المستوي المماس $\vec{N}(2,0,4)$ في النقطة M_0

معادلة المستوي المماس في M_0

$$\boxed{F'_{x_0}(x - x_0) + F'_{y_0}(y - y_0) + F'_{z_0}(z - z_0) = 0}$$ 3

$$2(x-2) + 0(y+1) + 4(z-0) = 0$$

$$2x - 4 + 4z = 0 \Rightarrow \boxed{2x + 4z - 4 = 0}$$ 3

معادلة المستوي المماس في M_0

معادلتي المستقيم الناظم في M_0:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F'_{x_0}} = \frac{y - y_0}{F'_{y_0}} = \frac{z - z_0}{F'_{z_0}}}$$ 3

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{z-0}{4} \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} 4x - 2z - 8 = 0 \\ y = -1 \end{cases}}$$

وهي معادلتي المستقيم الناظم في M_0

3

الهندسة التحليلية لطلاب الرياضيات سنة أولى الدورة الفصلية 2022-2023

السؤال الأول (45 درجة)

1) أوجد معادلتي المستقيم الناظم ومعادلة المستوي المماس للسطح المعطى ديكارتياً:

$$f(x,y,z)=x^3-yx+z^2+zy+1=0$$

في النقطة $M(1,3,0)$

2) أوجد أقصر بعد بين المستقيمين:

$$D_1\begin{cases}3x+y+z-1=0\\ -x-y+z+2=0\end{cases}$$

$$D_2:\quad x=1-2\lambda\ ,\ y=3\lambda\ ,\ z=2-\lambda$$

الحل: نوجد المشتقات الجزئية لـ $f(x,y,z)$ بالنسبة لـ x ، y ، z :

$$\left.\begin{aligned}f'_x&=3x^2-y\\ f'_y&=-x+z\\ f'_z&=2z+y\end{aligned}\right\}\ \xrightarrow[\text{عند } M_0(1,-3,0)]{\text{المشتقات}}\ \left\{\begin{aligned}f'_{x_0}&=3(1)^2+3=6\\ f'_{y_0}&=-1+0=-1\\ f'_{z_0}&=2(0)-3=-3\end{aligned}\right.$$

3

$\vec{N}(6,-1,-3)$ 3

معادلة المستوي المماس في M_0 :

$$\boxed{F'_{x_0}(x-x_0)+F'_{y_0}(y-y_0)+F'_{z_0}(z-z_0)=0}$$ 3

$$6(x-1)-(y+3)-3(z-0)=0$$ 3

$$\boxed{6x-y-3z-9=0}$$ معادلة المستوي المماس في M_0

معادلتي المستقيم الناظم :

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_{x_0}}=\frac{y-y_0}{F'_{y_0}}=\frac{z-z_0}{F'_{z_0}}}$$ 3

$$\boxed{\frac{x-1}{6}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-0}{-3}}$$

أو
$$\begin{cases}6y+x+17=0\\ 3y-z+9=0\end{cases}$$ 3

وهي معادلتي المستقيم الناظم.

2) $D_1 \begin{cases} 3x+y+z-1=0 \\ -x-y+z+2=0 \end{cases}$ نحول D_2 إلى تقاطع مستويين

$D_2 : x=1-2\lambda \quad , y=3\lambda \quad , z=2-\lambda \quad , \vec{v}_2(-2,3,-1)$

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1} \Rightarrow D_2 : \begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ 3z+y-6=0 \end{cases}$$

لنوجد حزمة المستويات المارة من D_1:

$$P_1+\lambda P_2 = 3x+y+z-1+\lambda(-x-y+z+2)=0$$

$$(3-\lambda)x+(1-\lambda)y+(1+\lambda)z-1+2\lambda=0$$

$$\vec{w}_\lambda(3-\lambda \, , 1-\lambda \, , 1+\lambda)$$

نختار من هذه الحزمة مستوي موازي لـ D_2 أي أن: $\vec{w}_\lambda$ و $\vec{v}_2$ متعامدان

$$\vec{w}_\lambda \perp \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{w}_\lambda \cdot \vec{v}_2 = 0$$

$$-2(3-\lambda)+3(1-\lambda)-1(1+\lambda)=0$$

$$-6+2\lambda+3-3\lambda-1-\lambda=0$$

$$-2\lambda-4=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-4}{2}=\boxed{-2=\lambda}$$

نعوض في معادلة الحزمة:

$$(3+2)x+(1+2)y+(1-2)z-1-4=0$$

$$P : \boxed{5x+3y-z-5=0}$$

نختار من المستقيم D_2 نقطة ولتكن $M_0(1,0,2)$

(أو نفرض $x=0$, $y=\frac{3}{2}$, $z=\frac{3}{2}$, $M_0(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$)

ويكون بعد هذه النقطة M_0 عن المستوي P هو:

$$d=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|5(1)+3(0)-2-5|}{\sqrt{25+9+1}}=\frac{|-2|}{\sqrt{35}}=\frac{2}{\sqrt{35}}=\frac{2\sqrt{35}}{35}$$ وحدة طول

وهو أقصر بعد بين المستقيمين P_1 , D_2

السؤال الثاني (45 درجة):

لدينا السطح المعطى بالعلاقة التالية: $F(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2 - 5xy + x - 1 = 0$

المطلوب: عين زاوية الدوران حول المحور oz حتى ينعدم الحد المستطيلي. ثم أوجد معادلة هذا السطح في الاحداثيات الجديدة. ما نوع الجسم الذي يمثله السطح الجديد. أوجد معادلة السطح $F(x,y,z)$ في الاحداثيات الاسطوانية.

2) عين معادلات المساقط القائمة على المستويات الاحداثية للمستقيم:

$$D: \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

الحل: 1) الدوران حول oz:

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta$$
$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$
$$z = Z$$

3

- $3(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 + 3(X\sin\theta + Y\cos\theta)^2 + Z^2 - 5(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta)$
  $+ (X\cos\theta - Y\sin\theta) - 1 = 0$
- $3(X^2\cos^2\theta - 2XY\cos\theta\sin\theta + Y^2\sin^2\theta) + 3(X^2\sin^2\theta + 2XY\sin\theta\cos\theta + Y^2\cos^2\theta)$
  $+ Z^2 - 5(X^2\cos\theta\sin\theta + XY\cos^2\theta - XY\sin^2\theta - Y^2\sin\theta\cos\theta) + X\cos\theta - Y\sin\theta$
  $- 1 = 0$
- $(3\cos^2\theta + 3\sin^2\theta - 5\cos\theta\sin\theta)X^2 + (3\sin^2\theta + 3\cos^2\theta - 5\sin\theta\cos\theta)Y^2 + Z^2$
  $- 5XY\cos^2\theta + 5XY\sin^2\theta + X\cos\theta - Y\sin\theta - 1 = 0$ 3
- $(3 - 5\cos\theta\sin\theta)X^2 + (3 - 5\cos\theta\sin\theta)Y^2 + Z^2 + 5(\sin^2\theta - \cos^2\theta)XY + X\cos\theta +$
  $- Y\sin\theta - 1 = 0$

حتى ينعدم الحد المستطيلي أي أن:

$$\sin^2\theta - \cos^2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$ 3

معادلة السطح في الاحداثيات الجديدة:

نعوض $\theta = \frac{\pi}{4}$ في المعادلة الأخيرة:

$$\left(3 - \frac{5}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)X^2 + \left(3 - \frac{5}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)Y^2 + Z^2 + X\cos\frac{\pi}{4} - Y\sin\frac{\pi}{4} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + Z^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y - 1 = 0$$

بالضرب بـ 2:

$$\boxed{X^2 + Y^2 + 2Z^2 + \sqrt{2}X - \sqrt{2}Y - 2 = 0}$$ 3

معادلة السطح في الاحداثيات الجديدة

$$X^2+Y^2+2Z^2+\sqrt{2}X-\sqrt{2}Y-2=0$$ 3

$$X^2+\sqrt{2}X+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+Y^2-\sqrt{2}Y+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2Z^2-2=0$$

$$\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2Z^2=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+2$$

$$\boxed{\frac{\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{3}+\frac{\left(Y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{3}+\frac{Z^2}{\frac{3}{2}}=1}$$ 3

معادلة مجسم قطع ناقص مركزه $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ وأنصاف أقطاره : $\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{\frac{3}{2}}$

• معادلة السطح في الاحداثيات الاسطوانية :

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$$ 3

نعوض في معادلة السطح

$$F(x,y,z)=3x^2+3y^2+z^2-5xy+x-1=0$$

$$3\rho^2\cos^2\varphi+3\rho^2\sin^2\varphi+z^2-5(\rho\cos\varphi)(\rho\sin\varphi)+\rho\cos\varphi-1=0$$

$$3\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+z^2-5\rho^2\cos\varphi\sin\varphi+\rho\cos\varphi-1=0$$

$$\boxed{3\rho^2+z^2-\frac{5}{2}\rho^2\sin2\varphi+\rho\cos\varphi-1=0}$$ 3

معادلة السطح في الاحداثيات الاسطوانية .

$$D:\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

لنوجد حزمة المستويات المارة بـ D :

$$P_1+\lambda P_2=0 \Rightarrow (1+\lambda)x+(2-\lambda)y+(-1+2\lambda)z-2-\lambda=0$$ 3

$$\vec{\omega}_\lambda(1+\lambda;\ 2-\lambda,\ -1+2\lambda)$$

المسقط على المستوى xoy :

لنأخذ من هذه الحزمة مستوياً عمودياً على المستوي xoy أي على $\boxed{z=0}$ الذي ناظمه $\vec{N}_1(0,0,1)$. فإن الجداء الداخلي لـ $\vec{N}_1$ و $\vec{\omega}_\lambda$ يساوي الصفر :

$$\vec{\omega}_\lambda\cdot\vec{N}_1=0 \Longrightarrow -1+2\lambda=0 \Longrightarrow \boxed{\lambda=\frac{1}{2}} \quad 3$$

نعوض قيمة λ بمعادلة الحزمة :

$$P_1' : \left(1+\frac{1}{2}\right)x+\left(2-\frac{1}{2}\right)y+\left(-1+2\left(\frac{1}{2}\right)\right)z-2-\frac{1}{2}=0 \quad 3$$

$$P_1' : \frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y-\frac{5}{2}=0 \Longrightarrow \boxed{P_1' : 3x+3y-5=0}$$

المسقط على xoy : $D_1 : \begin{cases} 3x+3y-5=0 \\ z=0 \end{cases}$

• المسقط على المستو yoz :

لنأخذ من هذه الحزمة مستوياً عمودياً على yoz أي على $\boxed{x=0}$ الذي ناظمه $\vec{N}_2(1,0,0)$

$$\vec{\omega}_\lambda\cdot\vec{N}_2=0 \Longrightarrow 1+\lambda=0 \Longrightarrow \boxed{\lambda=-1} \quad 3$$

نعوض قيمة λ في معادلة الحزمة :

$$P_2' : (1-1)x+(2+1)y+(-1-2)z-2+1=0$$

$$P_2' : 3y-3z-1=0$$

المسقط على yoz : $D_2 : \begin{cases} 3y-3z-1=0 \\ x=0 \end{cases} \quad 3$

• المسقط على المستو xoz :

لنأخذ من هذه الحزمة مستوياً عمودياً على xoz أي على $\boxed{y=0}$ الذي ناظمه $\vec{N}_3(0,1,0)$

$$\vec{\omega}_\lambda\cdot\vec{N}_3=0 \Longrightarrow 2-\lambda=0 \Longrightarrow \boxed{\lambda=2} \quad 3$$

نعوض قيمة λ في معادلة الحزمة :

$$(1+2)x+(2-2)y+(-1+4)z-2-2=0$$

$$P_3' : 3x+3z-4=0$$

المسقط على xoz : $D_3 : \begin{cases} 3x+3z-4=0 \\ y=0 \end{cases} \quad 3$

جامعة طرطوس
كلية العــلــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الرياضيات –السنة الأولى
الدورة الفصلية الأولى 2023- 2022

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (45 درجة):

1) أوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم للمنحن المعطى ديكارتياً:

$$f(x,y,z) = x^3 - yx + z^2 + 1 = 0$$

$$g(x,y,z) = xy^2 - 2z + 1 = 0$$

في النقطة $M(1,-3,0)$

2) أوجد معادلتي المستقيم القاطع للمستقيمين:

$$D_1 \begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0 \\ -x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$D_2 : \quad x = 1 + 2\lambda \quad , y = -2\lambda \quad , \quad z = 2 - \lambda$$

الموازي للمتجه $\vec{v}(-2,1,-3)$

السؤال الثاني (45 درجة):

1) لدينا السطح المعطى بالعلاقة التالية:

$$F(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 4x + 3y + 4z - 9 = 0$$

المطلوب:

ما نوع المجسم الذي يمثله هذا السطح؟ ثم أوجد معادلة هذا السطح في الإحداثيات الكروية.

ثم أوجد الإنسحاب المناسب لجملة الإحداثيات بحيث تحذف الحدود الخطية من المعادلة السابقة ثم أوجد معادلة هذا السطح في الاحداثيات الجديدة.

2) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي و الخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 = x + 2y - z - 2 = 0$$

$$P_2 = x - y - z - 1 = 0$$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (45 درجة)

1) أوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم لمنحني المعطى ديكارتياً:

$$f(x,y,z) = x^3 - yx + z^2 + 1 = 0$$
$$g(x,y,z) = xy^2 - 2z + 1 = 0$$

في النقطة $M(1,-3,0)$

2) أوجد معادلتا المستقيم القاطع للمستقيمين

$$D_1 : \begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0 \\ -x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$D_2 : \quad x = 1 + 2\lambda \ , \ y = -2\lambda \ , \ z = 2 - \lambda$$

الموازي $\vec{v}(-2,1,-3)$

الحل: 1) نوجد المشتقات الجزئية لكل من f و g بالنسبة لـ x, y, z :

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 - y \\ f'_y &= -x \\ f'_z &= 2z \end{aligned}\right\} \ 3 \ \xrightarrow{M(1,-3,0)} \begin{cases} f'_{x_0} = 6 \\ f'_{y_0} = -1 \\ f'_{z_0} = 0 \end{cases} \qquad \vec{N}_1(6,-1,0) \quad 1$$

$$\left.\begin{aligned} g'_x &= y^2 \\ g'_y &= 2xy \\ g'_z &= -2 \end{aligned}\right\} \ 3 \ \xrightarrow{M(1,-3,0)} \begin{cases} g'_{x_0} = 9 \\ g'_{y_0} = -6 \\ g'_{z_0} = -2 \end{cases} \qquad \vec{N}_2(9,-6,-2) \quad 1$$

$$\vec{T} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 0 \\ 9 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 12\vec{j} - 27\vec{k}$$

معادلة المستوي الناظم في M_0 : 3

$$\boxed{u(x-x_0) + v(y-y_0) + w(z-z_0) = 0}$$

$$2(x-1) + 12(y+3) - 27(z-0) = 0 \Rightarrow \boxed{2x + 12y - 27z + 34 = 0}$$ 3 المستوي الناظم في M_0

$$\boxed{\frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v} = \frac{z-z_0}{w}}$$ 3 معادلتي المستقيم المماس في M_0

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{12} = \frac{z}{-27} \Rightarrow \begin{cases} 6x - y - 9 = 0 \\ -27x - 2z + 27 = 0 \end{cases}$$ 3 معادلتي المستقيم المماس في M_0

2) نوجد حزمة المستويات المارة بـ P_1 :

$$P_1+\lambda P_2=0 \Longrightarrow (2-\lambda)x-(1+\lambda)y+(-1+\lambda)z-1+2\lambda=0$$

$$\vec{N}_\lambda(2-\lambda\ ,\ -(1+\lambda)\ ,\ -1+\lambda)$$

نختار من هذه الحزمة المستوي الموازي لـ $\vec{v}(-2,1,-3)$

$$\Longrightarrow \vec{v}\cdot\vec{N}_\lambda=0 \Longrightarrow -2(2-\lambda)-(1+\lambda)-3(-1+\lambda)=0$$

$$-4+2\lambda-1-\lambda+3-3\lambda=0$$

$$-2-2\lambda=0 \Longrightarrow \boxed{\lambda=-1}$$

نعوض في معادلة الحزمة :

$$(2+1)x-(1-1)y+(-1-1)z-1-2=0$$

$$\boxed{3x-2z-3=0} \quad (1)$$

نكتب معادلتي المستقيم D_2 كتقاطع مستويين :

$$x=1+2\lambda\ ,\quad y=-2\lambda\ ,\quad z=2-\lambda$$

$$\underset{(1)}{\frac{x-1}{2}}=\underset{(2)}{\frac{y}{-2}}=\underset{(3)}{\frac{z-2}{-1}} \Longrightarrow \begin{matrix}(1),(2)\\(2),(3)\end{matrix}\begin{cases}-x+1=y\\ y=2z-2(2)\end{cases} \Longrightarrow D_2\begin{cases}y+x-1=0\\ y-2z+4=0\end{cases}$$

معادلة حزمة المستويات المارة بـ D_2 :

$$P_3+\lambda P_4=0 \Longrightarrow y+x-1+\lambda(y-2z+4)=0$$

$$x+(1+\lambda)y-2\lambda z+4\lambda-1=0$$

$$\vec{N}_\lambda(1\ ,\ 1+\lambda\ ,\ -2\lambda)$$

نختار من هذه الحزمة المستوي الموازي للمتجه $\vec{v}(-2,1,-3)$:

$$\Longrightarrow \vec{v}\cdot\vec{N}_\lambda=0 \Longrightarrow -2+1+\lambda+6\lambda=0$$

$$-1+7\lambda=0 \Longrightarrow \boxed{\lambda=\frac{1}{7}}$$

نعوض في معادلة الحزمة :

$$x+\frac{8}{7}y-\frac{2}{7}z-\frac{3}{7}=0$$

$$\boxed{7x+8y-2z-3=0} \quad (2)$$

(1) و (2) تمثلان معادلتا المستقيم القاطع للمستقيمين D_1 و D_2 .

السؤال الثاني (45 درجة)

1) لدينا السطح المعطى بالعلاقة التالية :

$$F(x,y,z) = 2x^2+2y^2-4z^2-4x+3y+4z-9=0$$

المطلوب : ما نوع المجسم الذي يمثله هذا السطح ؟ ثم أوجد معادلة هذا السطح في الاحداثيات الكروية .

ثم أوجد الانسحاب المناسب لجملة الاحداثيات بحيث تحذف الحدود الخطية في المعادلة السابقة ثم أوجد معادلة هذا السطح في الاحداثيات الجديدة .

2) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين :

$$P_1 = x+2y-z-2=0$$
$$P_2 = x-y-z-1=0$$

الحل :

1) نوع المجسم :

$$2x^2+2y^2-4z^2-4x+3y+4z-9=0$$

$$2(x^2-2x+1-1)+2\left(y^2+\frac{3}{2}y+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\right)-4\left(z^2-z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=9$$

$$2(x+1)^2+2\left(y+\frac{3}{4}\right)^2-4\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=9+2+\frac{9}{8}-1$$

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{89}{16}}+\frac{\left(y+\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{89}{16}}-\frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{89}{32}}=1$$

3

مجسم قطع زائد ذو طية واحدة مركزه $(-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$ وأنصاف أقطاره : $\frac{\sqrt{89}}{4}, \frac{\sqrt{89}}{4}, \frac{\sqrt{89}}{4\sqrt{2}}$

3

معادلة السطح في الاحداثيات الكروية :

بالانتقال من الاحداثيات الديكارتية إلى الكروية :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

3

نعوض في معادلة السطح :

$$2r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+2r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi-4r^2\cos^2\theta-4r\sin\theta\cos\varphi+3r\sin\theta\sin\varphi+4r\cos\theta-9=0$$

$$\boxed{2r^2\sin^2\theta-4r^2\cos^2\theta-r\sin\theta\cos\varphi+4r\cos\theta-9=0}$$

13

وهي معادلة السطح في الاحداثيات الكروية .

معادلة الانسحاب :

$$x = x_0 + X$$
$$y = y_0 + Y$$
$$z = z_0 + Z$$

3

نعوض في معادلة السطح :

$$2(x_0+X)^2 + 2(y_0+Y)^2 - 4(z_0+Z)^2 - 4(x_0+X) + 3(y_0+Y) + 4(z_0+Z) - 9 = 0$$

$$2(x_0^2+2x_0X+X^2) + 2(y_0^2+2y_0Y+Y^2) - 4(z_0^2+2z_0Z+Z^2) - 4x_0 - 4X + 3y_0 + 3Y$$
$$+ 4z_0 + 4Z - 9 = 0$$

$$2X^2 + 2Y^2 - 4Z^2 + (4x_0-4)X + (4y_0+3)Y + (-8z_0+4)Z + (2x_0^2+2y_0^2-4z_0^2$$
$$-4x_0+3y_0+4z_0-9) = 0$$

3

حيث تحذف الحدود الخطية ⇐

$$4x_0 - 4 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$$
$$4y_0 + 3 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{-3}{4}$$
$$-8z_0 + 4 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{1}{2}$$

3 $\left(1, \frac{-3}{4}, \frac{1}{2}\right)$

معادلة السطح في الاحداثيات الجديدة :

$$2X^2 + 2Y^2 - 4Z^2 - \frac{89}{8} = 0.$$

3

2) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من المستوي المنصف لزاوية المستويين :

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2

$$\frac{|P_2(x,y,z)|}{|\vec{\omega}_2|} = \frac{|P_1(x,y,z)|}{|\vec{\omega}_1|}$$

5

$$\frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{x-y-z-1}{\sqrt{1+1+1}} = \pm \frac{x+2y-z-2}{\sqrt{1+4+1}}$$

5

$$\frac{x-y-z-1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{x+2y-z-2}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}(x-y-z-1) = \pm(x+2y-z-2)$$

لنوجد $\vec{w_1}\cdot\vec{w_2}$

$$\vec{w_1}\cdot\vec{w_2} = 1.1 + 2(-1) - (-1) = 1-2+1 = 0$$ 3

أي أن الزاوية بين المستويين هي قائمة وبالتالي لا يوجد فرق بين معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي. 3

$$\sqrt{2}(x-y-z-1) = x+2y-z-2$$ 5

$$\boxed{(\sqrt{2}-1)x-(\sqrt{2}+2)y-(\sqrt{2}-1)z-\sqrt{2}+2=0}$$

وهي معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الرياضيات—السنة الأولى
الدورة الفصلية الثانية 2022- 2021

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (45 درجة):

1) أوجد معادلتي المستقيم المار من النقطة $M(0,2,1)$ و الموازي للمستقيم المار بالنقطتين : $A(3,0,0)$, $B(0,0,3)$.

2) أوجد معادلة المستوي المماس للكرة:

$$S(x,y,z):\quad (x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$$

في النقطة $M_0(-1,0,3)$.

3) ليكن لدينا المنحن المعطى وسيطياً:

$$C:\begin{cases} x=t^2\,e^t \\ y=3e^{t+2} \\ z=e^{t^3+1} \end{cases}$$

والمطلوب:

أوجد معادلتي المستقيم المماس و معادلة المستوي الناظم للمنحن C في النقطة الموافقة $t=1$

السؤال الثاني (45 درجة):

1) لدينا السطح المعطى بالعلاقة التالية:

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-4z^2-4x+3y+4z-9=0$$

المطلوب:

ما نوع المجسم الذي يمثله هذا السطح؟ ثم أوجد معادلة هذا السطح في الإحداثيات الاسطوانية.

ثم أوجد الإنسحاب المناسب لجملة الإحداثيات بحيث تحذف الحدود الخطية من المعادلة السابقة.

2) عين معادلات المساقط القائمة على المستويات الإحداثية للمستقيم:

$$D:\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ 3x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (45 درجة)

1) أوجد معادلتي المستقيم المار من النقطة $M(0,2,1)$ والموازي للمستقيم المار من النقطتين $A(3,0,0)$ و $B(0,0,3)$.

2) أوجد معادلة المستوي المماس للكرة:

$$S(x,y,z) = (x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2 = 24$$

في النقطة $M_0(-1,3,0)$.

3) لدينا المنحني المعين بالمعادلات:

$$C: \quad x = t^2 e^t \quad , \quad y = 3e^{t+2} \quad , \quad z = e^{t^3+1}$$

a) أوجد معادلتي المستقيم المماس لهذا المنحني في النقطة الموافقة $t=1$ ،

b) أوجد معادلة المستوي الناظم لهذا المنحني في النقطة الموافقة $t=1$.

الحل:

1) معادلتي المستقيم المار من النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ والموازي لمتجه $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$ هي:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}}$$ 3

$$D: \quad \frac{x-0}{\alpha} = \frac{y-2}{\beta} = \frac{z-1}{\gamma}$$

متجه توجيه المستقيم $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$ هو نفس المتجه 3 $\overrightarrow{AB}(-3,0,3)$ وبالتالي:

$$D \begin{cases} \frac{x-0}{-3} = \frac{z-1}{3} \\ y-2=0 \end{cases} \Rightarrow D \begin{cases} x+3z-1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$$ 3

2) معادلة المستوي المار من النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ والعامد للمتجه $\vec{w}(a,b,c)$ هي:

$$\boxed{P \equiv a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$ 3

بما أن $M(-1,3,0)$ نقطة التماس $\Leftarrow$ $M_0 \in$ للمستوي المطلوب $\Leftarrow$

$$P \equiv \boxed{a(x+1)+b(y-3)+c(z-0)=0}$$ 3

وناظم المستوي هو نفس المتجه $\overrightarrow{CM_0}$ حيث C هي مركز الكرة

من معادلة الكرة تكون مركزها 3 $C(3,1,-2)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{24}$

وبالتالي ناظم المستوي $\vec{\omega}(a,b,c)$ هو $\vec{CM_0}(-4,2,2)$ 3 نعوض في معادلة ال

$$-4(x+1)+2(y-3)+2z=0 \Rightarrow \boxed{-4x+2y+2z-10=0}$$

أو بالاختصار على (-2) وهو المستوي المطلوب 3

$$\boxed{2x-y-z+5=0}$$

(3

$$x=t^2e^t \quad , \quad y=3e^{t+2} \quad , \quad z=e^{t^3+1}$$

a) لنوجد احداثيات نقطة التماس الموافقة لـ $t=1$

$$x_0=(1)^2e^1=e \quad , \quad y_0=3e^{1+2}=3e^3 \quad , \quad z_0=e^{1^3+1}=e^2 \Rightarrow M_0(e,3e^3,e^2)$$ 3

لنوجد المشتقات الجزئية :

$$\left.\begin{array}{l} x'_t=2te^t+t^2e^t \\ y'_t=3e^{t+2} \\ z'_t=3t^2e^{t^3+1} \end{array}\right\} \xrightarrow{t=1} \left\{\begin{array}{l} x'_0=3e \\ y'_0=3e^3 \\ z'_0=3e^2 \end{array}\right.$$ 3 3

معادلة المستقيم المماس في $M_0(e,3e^3,e^2)$:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x'_0}=\frac{y-y_0}{y'_0}=\frac{z-z_0}{z'_0}}$$ 3

$$\frac{x-e}{\cancel{3e}}=\frac{y-3e^3}{\cancel{3}e^{3}}=\frac{z-e^2}{\cancel{3}e^2} \Rightarrow D\left\{\begin{array}{l} e^2x-e^3-y+3e^3=0 \Rightarrow e^2x-y+2e^3=0 \\ y-3e^3-ez+e^3=0 \Rightarrow y-ez-2e^3=0 \end{array}\right.$$ 3

وهو المستقيم المماس في M_0

b) معادلة المستوي الناظم في نقطة التماس M_0

$$\boxed{x'_0(x-x_0)+y'_0(y-y_0)+z'_0(z-z_0)=0}$$ 3

لدينا $\vec{N}(x'_0,y'_0,z'_0)=(3e,3e^3,3e^2)$, $M_0(e,3e^3,e^2)$

$$3e(x-e)+3e^3(y-3e^3)+3e^2(z-e^2)=0$$

$$\Rightarrow (x-e)+e^2(y-3e^3)+e(z-e^2)=0$$ 3

$$\boxed{x+e^2y+ez-(e+3e^5+e^3)=0}$$ وهي معادلة المستوي الناظم في M_0

* في الطلب الثاني إذا الطالب كتب

$$S: x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z-10=0$$ 3

$$\left.\begin{array}{l} S'_x=2x-6 \\ S'_y=2y-2 \\ S'_z=2z+4 \end{array}\right\} \xrightarrow{M_0(-1,3,0)} \left.\begin{array}{l} S'_{x_0}=-2-6=-8 \\ S'_{y_0}=6-2=4 \\ S'_{z_0}=0+4=4 \end{array}\right\}$$ 3 3

$$S'_{x_0}(x-x_0)+S'_{y_0}(y-y_0)+S'_{z_0}(z-z_0)=0$$ 3

$$-8(x+1)+4(y-3)+4(z-0)=0$$

$$-8x+4y+4z-20=0$$

$$-2x+y+z-5=0$$ 3

$$2x-y-z+5=0$$

السؤال الثاني (45 درجة)

1) لدينا السطح المعطى بالعلاقة التالية :

$$F(x,y,z) = x^2+y^2-4z^2-4x+3y+4z-9=0$$

ما نوع الجسم الذي يمثله هذا السطح ثم أوجد معادلة هذا السطح بالإحداثيات الاسطوانية
أوجد الانسحاب المناسب لجملة الإحداثيات بحيث تحذف الحدود الخطية في المعادلة السابقة

2) عين معادلات المساقط القائمة على المستويات الإحداثية للمستقيم :

$$D\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ 3x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

الحل : 1)

$$x^2+y^2-4z^2-4x+3y+4z-9=0$$

$$(x^2-4x+4-4)+(y^2+3y+\tfrac{9}{4}-\tfrac{9}{4})-4(z^2-z+\tfrac14-\tfrac14)-9=0 \quad 3$$

$$(x-2)^2+(y+\tfrac32)^2-4(z-\tfrac12)^2-4-\tfrac94+1-9=0$$

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{\frac{57}{4}}+\frac{(y+\frac32)^2}{\frac{57}{4}}-\frac{(z-\frac12)^2}{\frac{57}{16}}=1} \quad 3$$

معادلة مجسم قطع زائد ذو فرع واحد (طية واحدة) مركزه $(2,-\frac32,\frac12)$ وأنصاف
أقطاره $\frac{\sqrt{57}}{4}, \frac{\sqrt{57}}{2}, \frac{\sqrt{57}}{2}$. 3

معادلة هذا السطح بالإحداثيات الاسطوانية :

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \; 3 \; \xRightarrow{\text{نعوض في المعادلة}} (\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2-4z^2-4(\rho\cos\varphi)+3(\rho\sin\varphi)+4z-9=0$$

$$\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)-4z^2-4\rho\cos\varphi+3\rho\sin\varphi+4z-9=0$$

$$\boxed{\rho^2-4z^2-4\rho\cos\varphi+3\rho\sin\varphi+4z-9=0} \quad 3$$

إيجاد الانسحاب :

$$x=x_0+X \;,\; y=y_0+Y \;,\; z=z_0+Z \quad 3$$

نعوض :

$$(x_0+X)^2+(y_0+Y)^2-4(z_0+Z)^2-4(x_0+X)+3(y_0+Y)+4(z_0+Z)-9=0$$

$$x_0^2+2x_0X+X^2+y_0^2+2y_0Y+Y^2-4z_0^2-4Z^2-8z_0Z-4x_0-4X+3y_0+3Y+4z_0+4Z-9=0 \quad 3$$

$$X^2+Y^2-4Z^2+(2x_0-4)X+(2y_0+3)Y+(-8z_0+4)Z+(x_0^2+y_0^2-4z_0^2-4x_0+3y_0+4z_0-9)=0$$

نحذف الحدود الخطية :

$$\left.\begin{aligned} 2x_0-4=0 &\Rightarrow x_0=2 \\ 2y_0+3=0 &\Rightarrow y_0=\tfrac{-3}{2} \\ -8z_0+4=0 &\Rightarrow z_0=\tfrac12 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{نعوض}} \begin{cases} x=2+X \\ y=-\frac32+Y \\ z=\frac12+Z \end{cases} \quad 3$$

2)

$$D:\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ 3x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

الحل: لنوجد حزمة المستويات المارة في D :

3

$$P_1+\lambda P_2=(1+3\lambda)x+(2-\lambda)y+(-1+2\lambda)z-(2+\lambda)=0 \Rightarrow \vec{\omega}_\lambda(1+3\lambda,\ 2-\lambda,\ -1+2\lambda)$$

لنأخذ من هذه الحزمة مستوياً عمودياً على المستوي xOy أي $\boxed{z=0}$

$\Leftarrow$ يكون الجداء السلمي لـ ناظم المستوي xOy $\vec{N}_1(0,0,1)$ مع ناظم الحزمة يساوي الصفر

$$\vec{\omega}_\lambda\cdot\vec{N}_1=0 \Rightarrow -1+2\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{1}{2}}$$ 3

نعوض قيمة λ بمعادلة الحزمة:

$$P_1=\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}y-\frac{5}{2}=0 \Rightarrow \boxed{5x+3y-5=0}$$

معادلتي المسقط القائم على المستوي xOy هو المستقيم:

$$D_1\begin{cases} 5x+3y-5=0 \\ z=0 \end{cases}$$ 3

وبنفس الطريقة نوجد المسقط على xOz :

معادلة المستوي xOz هي $\boxed{y=0}$ $\Leftarrow$ ناظمه $\vec{N}_2(0,1,0)$ $\Leftarrow$

$$\vec{\omega}_\lambda\cdot\vec{N}_2=0 \Rightarrow 2-\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=2}$$ 3

نعوض في معادلة الحزمة

$$\boxed{7x+3z-4=0}$$

معادلة المسقط القائم لـ D على المستوي xOz هو:

$$D_2\begin{cases} 7x+3z-4=0 \\ y=0 \end{cases}$$ 3

- المسقط على yOz أي $\boxed{x=0}$ ناظمه $\vec{N}_3(1,0,0)$

$$\vec{\omega}_\lambda\cdot\vec{N}_3=0 \Rightarrow 1+3\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=-\frac{1}{3}}$$ 3

نعوض في معادلة الحزمة:

$$\frac{7}{3}y-\frac{5}{3}z-\frac{5}{3}=0 \Rightarrow \boxed{7y-5z-5=0}$$

وبالتالي معادلات المسقط القائم لـ D على المستوي yOz هي

$$D_3\begin{cases} 7y-5z-5=0 \\ x=0 \end{cases}$$ 3

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب االرياضيات–السنة الأولى
الدورة الفصلية الأولى 2022- 2021

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (45 درجة):

1)أوجد معادلة المستوي المار من النقاط : $A\left(3,1,0\right)$, $B\left(0,3,1\right)$, $C\left(1,0,3\right)$ **ثم أوجد معادلة المستوي المار من النقطة** $D\left(1,2,-1\right)$ **والموازي للمستوي السابق ثم احسب البعد بين المستويين.**

2) اكتب المعادلتين التناظريتين للمستقيم العمودي على المستوي: $P_1 = x + y - 3z + 1 = 0$

والمار من النقطة $M\left(-1,0,3\right)$.

3) أوجد معادلة الكرة التي مركزها $A\left(1,1,-3\right)$ **و المماسة للمستوي:**

$$P_2 = 2x + 2y - z - 1 = 0$$

السؤال الثاني (45 درجة):

1) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي و الخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 = 2x + y - 5z + 2 = 0$$
$$P_2 = 3x + 4z + 7 = 0$$

2) أوجد معادلتي المستويين المماسين للسطح:

$$S\left(x,y,z\right) = 2x^2 - 6y^2 + 3z^2 - 5$$

اللذين يمران بالمستقيم:

$$D : \begin{cases} x + 9y - 3z = 0 \\ 3x - 3y + 6z - 5 = 0 \end{cases}$$

ثم أوجد نقطتي التماس.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (45 درجة)

1- أوجد معادلة المستوي المار من النقاط $A(3,1,0)$ و $B(0,3,1)$, $C(1,0,3)$

ثم أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $D(1,2,-1)$ والموازي للمستوي السابق

ثم احسب البعد بين المستويين.

2- أوجد المعادلتين التناظريتين للمستقيم العمودي على المستوي $P_1 = x+y-3z+1=0$

والمار بالنقطة $M(-1,0,3)$

3- أوجد معادلة الكرة التي مركزها $A(1,1,-3)$ والمماسة للمستوي $P: 2x+2y-z-1=0$

الحل:

1) معادلة المستوي المار من النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ والعامد لـ $\vec{w}(a,b,c)$:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$ 5

لتكن M_0 هي A (أو B أو C)

$$\boxed{a(x-3)+b(y-1)+c(z-0)=0}$$ 3

ناظم المستوي $\vec{w} = \vec{AB} \times \vec{AC}$

$\vec{AB}(-3,+2,1)$

$\vec{AC}(-2,-1,3) \Rightarrow \vec{w} = \vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (6+1)\vec{i} + (-2+9)\vec{j} + (3+4)\vec{k}$

$\vec{w} = 7\vec{i}+7\vec{j}+7\vec{k}$

معادلة المستوي المار بهذه النقاط الثلاثة:

$$7(x-3)+7(y-1)+7z=0 \Rightarrow \boxed{P_1 = x+y+z-4=0}$$ 3

معادلة المستوي المار من النقطة $D(1,2,-1)$ والموازي لـ P_1

$$1(x-1)+(y-2)+(z+1)=0 \Rightarrow \boxed{P_2 = x+y+z-2=0}$$ 3

لحساب البعد بين المستويين P_1 و P_2 :

إما عن طريق المعادلة الناظمية:

المعادلة الناظمية لـ P_1 :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z-\frac{4}{\sqrt{3}}=0$$

بعد مبدأ الاحداثيات عن هذا المستوي هو: 3

$$h_1 = +\frac{4}{\sqrt{3}}$$

المعادلة الناظمية للمستوي P_2 :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z-\frac{2}{\sqrt{3}}=0$$

$\Leftarrow$ بعد مبدأ الاحداثيات عن P_2 هو: 3

$$h_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

إن مبدأ الاحداثيات تقع في نفس الجهة بالنسبة للمستويين P_1, P_2 :

البعد بين المستويين P_1, P_2 هو: $d = h_1 - h_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftarrow$ 3

(أو إذا الطالب أوجد البعد بطريقة أخرى (بعد نقطة من أحد المستويين عن الآخر)

لنوجد نقطة ما من المستوي الأول P_1 :

نفرض $x=0$, $y=0$ فيكون $z=4$ النقطة $P_1 \ni M(0,0,4)$ 3

لنوجد بعد M عن P_2 :

$$\delta_M(P_2) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|0+0+4-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$ 3 3

2) المعادلتين التناظريتين لمستقيم يمر من نقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ و يوازي متجه $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$$ 5

لدينا M هي $M(-1,0,3)$ و $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$ هو متجه الناظم للمستوي أي أن $\vec{v}(1,1,-3)$ 3

وبالتالي المعادلتين التناظريتين هما:

$$\boxed{\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-3}}$$ 3

3) معادلة الكرة التي مركزها $M_0(a,b,c)$ ونصف قطرها R هي:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$ 5

المركز هو $A(1,1,-3)$

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=R^2$$

نعلم أن الكرة والمستوي المعطى $P_2: 2x+2y-z-1=0$ متماسان، بالتالي نصف قطر الكرة R هو البعد بين المركز $A(1,1,-3)$ والمستوي أي أن

$$R=\delta_A(P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2(1)+2(1)-(-3)-1|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|6|}{3} = 2$$ 3

المعادلة المختزلة $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=(2)^2$ 3

والمعادلة العامة (الديكارتية)

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-2x-2y+6z+7=0}$$

السؤال الثاني (45 درجة)

1) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاويتا المستويين :

$$P_1 = 2x + y - 5z + 2 = 0$$
$$P_2 = 3x + 4z + 7 = 0$$

2) أوجد معادلتي المستويين المماسين للسطح :

$$S : 2x^2 - 6y^2 + 3z^2 - 5 = 0$$

اللذين يمران بالمستقيم :

$$D : \begin{cases} x + 9y - 3z = 0 \\ 3x - 3y + 6z - 5 = 0 \end{cases}$$

ثم أوجد نقطتي التماس .

الحل :

1) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من المستوي المنصف وبالتالي

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \quad 5$$

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{2x+y-5z+2}{\sqrt{4+1+25}} = \pm \frac{3x+4z+7}{\sqrt{9+16}}$$

$$\frac{2x+y-5z+2}{\sqrt{30}} = \pm \frac{3x+4z+7}{\sqrt{25}}$$

$$\frac{2x+y-5z+2}{\sqrt{6}} = \pm \frac{3x+4z+7}{\sqrt{5}} \quad 3$$

$$\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2 = (2,1,-5)\cdot(3,0,4) = 6+0-20 = -14 < 0 \quad 3$$

(−) توافق المستوي المنصف الخارجي 3

(+) توافق المستوي المنصف الداخلي

$$\sqrt{5}(2x+y-5z+2) = -\sqrt{6}(3x+4z+7)$$

$$\boxed{(2\sqrt{5}+3\sqrt{6})x + \sqrt{5}\,y + (-5\sqrt{5}+4\sqrt{6})z + 2\sqrt{5} + 7\sqrt{6} = 0} \quad 3$$

المستوي المنصف الخارجي

$$\sqrt{5}\,(2x+y-5z+2) = +\sqrt{6}\,(3x+4z+7)$$

المستوي المنصف الداخلي

$$\boxed{(2\sqrt{5}-3\sqrt{6})x+\sqrt{5}\,y+(-5\sqrt{5}-4\sqrt{6})z+2\sqrt{5}-7\sqrt{6}=0}$$ 3

2) معادلة المستوي المماس للسطح S في نقطة التماس $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$P(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0$$ 3

ناظم المستوي $\vec{N}(P,q,r)$ حيث :

$$P=S'_{x_0}=4x_0 \quad , \quad q=S'_{y_0}=-12y_0 \quad , \quad r=S'_{z_0}=6z_0$$

- معادلة المستوي المماس للسطح S هي :

$$\boxed{4x_0(x-x_0)-12y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0} \quad (1)$$ 3

- لدينا المستوي المماس يمر بالمستقيم D وبالتالي ناظم المستوي $\vec{N}$ و متجه توجيه المستقيم $\vec{v}$ يكونان متعامدين :

متجه توجيه المستقيم D هو :

$$\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 9 & -3\\ 3 & -3 & 6\end{vmatrix}=45\vec{i}-15\vec{j}-30\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{N}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow 45(4x_0)-15(-12y_0)-30(6z_0)=0$$

$$180x_0+180y_0-180z_0=0 \Rightarrow \boxed{x_0+y_0-z_0=0} \quad (2)$$ 3

- نقطة التماس $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ∈ للسطح S ⟸ تحقق معادلته (3) $\boxed{2x_0^2-6y_0^2+3z_0^2-5=0}$ 3

- لنأخذ نقطة من المستقيم :

نفرض $z=0$ ⟸ بالتعويض في المستقيم D

$$\begin{cases} (a) & \cancel{x+9y=0} \\ (b) & 3x-3y-5=0 \end{cases}$$

من (a) ⟸ $x=-9y$ نعوض في (b) ⟸ $3(-9y)-3y-5=0$

$$-30y=5 \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{6}} \Rightarrow x=-9\times\frac{-1}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{6},0\right)$$

M نقطة من D ⟸ M ∈ للمستوي المماس وبالتالي تحقق المعادلة (1) :

$$4x_0\left(\frac{3}{2}-x_0\right)-12y_0\left(-\frac{1}{6}-y_0\right)+6z_0(0-z_0)=0$$

$$6x_0-4x_0^2+2y_0+12y_0^2-6z_0^2=0$$

بالاختصار :

$$\boxed{-2x_0^2+6y_0^2-3z_0^2+3x_0+y_0=0} \quad (4)$$ 3

بالحل المشترك لـ (2) و (3) و (4) : 2

من (2) $\boxed{z_0 = x_0 + y_0}$ (5)

من (3) و (4) بالجمع :

$3x_0 + y_0 - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{y_0 = 5 - 3x_0}$ (6)

نعوض (5) و (6) في (3) :

$2x_0^2 - 6(5-3x_0)^2 + 3(x_0+5-3x_0)^2 - 5 = 0$

$2x_0^2 - 6(25 - 30x_0 + 9x_0^2) + 3(5-2x_0)^2 - 5 = 0$

$2x_0^2 - 150 + 180x_0 - 54x_0^2 + 3(25 - 20x_0 + 4x_0^2) - 5 = 0$

$2x_0^2 - 150 + 180x_0 - 54x_0^2 + 75 - 60x_0 + 12x_0^2 - 5 = 0$

$2x_0^2 - 54x_0^2 + 12x_0^2 + 180x_0 - 60x_0 - 150 + 75 - 5 = 0$

$-40x_0^2 + 120x_0 - 80 = 0 \Rightarrow \boxed{x_0^2 - 3x_0 + 2 = 0}$

$x_0 = 2 \ , \ x_0 = 1$

$x_0 = 2 \Rightarrow y = 5 - 3x_0 = -1 \ , \ z = x + y = 1 \ , \ M_{01}(2, -1, 1)$ نقطة التماس الأولى 2

$x_0 = 1 \Rightarrow y = 5 - 3x_0 = 2 \ , \ z = x + y = 3 \ , \ M_{02}(1, 2, 3)$ نقطة التماس الثانية 2

بالتعويض في (1) : من أجل $M_{01}(2, -1, 1) \Leftarrow$

$4x_0(x - x_0) - 12y_0(y - y_0) + 6z_0(z - z_0) = 0$

$8(x-2) + 12(y+1) + 6(z-1) = 0$

$8x - 16 + 12y + 12 + 6z - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{8x + 12y + 6z - 10 = 0}$

أو $\boxed{2x + 6y + 3z - 5 = 0}$ المستوي المماس الأول . 2

من أجل $M_{02}(1, 2, 3) \Leftarrow$

$4(x-1) - 24(y-2) + 18(z-3) = 0$

$4x - 4 - 24y + 48 + 18z - 54 = 0$

$\boxed{4x - 24y + 18z - 10 = 0}$ أو $\boxed{2x - 12y + 9z - 5 = 0}$ المستوي المماس الثاني 2

إذا الطالب وضع حزمة المستويات المارة بالمستقيم يأخذ 3 درجات

وإذا وضع : نختار من هذه الحزمة المستوي الذي ناظمه هو ناظم السطح

عند نقطة التماس يأخذ 3 درجات .

جامعة طرطوس
كلية العلـوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الرياضيات ـ السنة الأولى
الدورة الفصلية الثانية 2021- 2020

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (65 درجة):

1) أوجد معادلة المستوي المار بخط تقاطع المستويين :

$$P_1 = 2x + 3y + 4z - 5 = 0$$
$$P_2 = x + y + z - 1 = 0$$

و الموازي للمستو: $P_3 = 2x + y - z = 0$

2) أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من النقطة $M\,(1,-1,2)$ والموازي للمستويين:

$$P_1 = 3x + 12y - 3z - 5 = 0$$
$$P_2 = 3x - 4y + 9z + 7 = 0$$

3) احسب أقصر بعد بين المستقيمين:

$$D_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{-2} = z$$
$$D_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{2}$$

السؤال الثاني (25 درجة):

أوجد المحل الهندسي لمجموعة النقاط المتساوية البعد عن المستويين:

$$P_1 = x - y + z - 5 = 0$$
$$P_2 = 2x + 3y - z + 1 = 0$$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (65 درجة)

1) أوجد معادلة المستوي المار بخط تقاطع المستويين

$$P_1 = 2x+3y+4z-5=0$$
$$P_2 = x+y+z-1=0$$

والموازي للمستوي: $P_3 = 2x+y-z=0$

2) أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من النقطة $M(1,-1,2)$ والموازي للمستويين

$$P_1 = 3x+12y-3z-5=0$$
$$P_2 = 3x-4y+9z+7=0$$

3) احسب أقصر بعد بين المستقيمين:

$$D_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+3}{-2} = z$$
$$D_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{2}$$

الحل: 1) إن المستوي المطلوب ينتمي إلى حزمة المستويات المارة من P_1 و P_2
إذا الطالب كتب معادلة المستوي يأخذ (6) درجات

$$P = P_1+\lambda P_2 = (2x+3y+4z-5)+\lambda(x+y+z-1)=0 \quad (6)$$
$$=(2+\lambda)x+(3+\lambda)y+(4+\lambda)z-(5+\lambda)=0$$

ناظم الحزمة: $\vec{\omega}_\lambda(2+\lambda \,,\, 3+\lambda \,,\, 4+\lambda)$ (3)

نختار من هذه الحزمة المستوي الموازي للمستوي P_3 ⇐ $\vec{\omega}_\lambda \parallel \vec{v}_3(2,1,-1)$

$$\underset{(1)}{\frac{2+\lambda}{2}} = \underset{(2)}{\frac{3+\lambda}{1}} = \underset{(3)}{\frac{4+\lambda}{-1}} \quad (6)$$

من (1) و(2): $2+\lambda = 6+2\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda=-4}$ (3)

نعوض في التناسب:

$$\frac{-2}{2} \overset{?}{=} \frac{-1}{1} \overset{?}{=} \frac{0}{-1}$$

التناسب غير محقق إذن $\lambda=-4$ غير محققة. (3)

من (2) و(3): $3+\lambda=-(4+\lambda) \Rightarrow 2\lambda=-7 \Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{-7}{2}}$ (3)

نعوض:

$$\frac{2-\frac{7}{2}}{2} \overset{?}{=} \frac{3-\frac{7}{2}}{1} = \frac{4-\frac{7}{2}}{-1}$$

$$\frac{-3}{4} \overset{?}{=} \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$$

التناسب غير محقق معاً. (3)

أي أنه لا يمكن تحديد قيمة λ ⇐ لا يوجد من حزمة المستويات مستوٍ يوازي المستوي P_3. (2)

إذا أخذ الطالب النسبة (1) و(3) ⇐ $\lambda=\frac{-10}{3}$ ⇐ $\frac{-2}{3} \overset{?}{=} \frac{-1}{3} \overset{?}{=} -\frac{4}{2}$ التناسب غير محقق
يأخذ (3) على قيمة λ و (3) على أن التناسب غير محقق

2) المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ والموازي لـ $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$

6

لدينا $M(x_0,y_0,z_0)$ هي $M(1,-1,2)$ و متجه توجيه هذا المستقيم ناظمي المستويين $N_2(3,-4,9)$, $N_1(3,12,-3)$; $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)=\vec{N_1}\times\vec{N_2}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 12 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \end{vmatrix} = 96\vec{i} - 36\vec{j} - 48\vec{k}$$

3

المعادلات الوسيطية المطلوبة :

$$\begin{cases} x = 1 + 96\lambda \\ y = -1 - 36\lambda \\ z = 2 - 48\lambda \end{cases}$$

3

3) لحساب أقصر بعد بين المستقيمين نكتب المستقيمين بالشكل (تقاطع مستويين) التالي

$$D_1 : \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

2

$$D_2 : \begin{cases} 3x + 2y + 3 = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

2

متجه توجيه المستقيم D_1 هو $\vec{v}_1(-1,-2,1)$

متجه توجيه المستقيم D_2 هو $\vec{v}_2(2,-3,2)$

لنوجد $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$$

لنوجد معادلة حزمة المستويات المارة بـ D_1

$$P = P_1 + \lambda P_2 = 2x + (-1+\lambda)y + 2\lambda z - 7 + 3\lambda = 0$$

6

$$\vec{\omega}_\lambda(2, -1+\lambda, 2\lambda)$$

نختار من هذه الحزمة المستوي الموازي لـ $\vec{v}$ $\Leftarrow$

$$\vec{\omega}_\lambda \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 2(-1) + 4(-1+\lambda) + 7(2\lambda) = 0$$

$$-2 - 4 + 4\lambda + 14\lambda = 0 \Rightarrow 18\lambda = 6 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{3}}$$

3

نعوض في قيمة λ بمعادلة الحزمة :

$$\boxed{2x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 6 = 0} \Rightarrow \text{أو} \ \boxed{6x - 2y + 2z - 18 = 0} \ \text{أو} \ \boxed{P: 3x - y + z - 9 = 0}$$

3

نختار من المستقيم D_2 نقطة :

نفرض $y=0 \Leftarrow z=0 \Leftarrow x=-1$ $\quad$ 3 $\quad M(-1,0,0)$

نحسب بعد هذه النقطة M عن المستوي P و $\boxed{P: 3x-y+z-9=0}$ ، $M(-1,0,0)$

$$d=\frac{|ax+by+cz+d|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-3-0+0-9|}{\sqrt{(3)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\frac{|-12|}{\sqrt{11}}=\frac{12}{\sqrt{11}}$$ 2 وحدة طول

وهو أقصر بعد بين المستقيمين P_1 و P_2 .

السؤال الثاني (25 درجة)

أوجد المحل الهندسي لمجموعة النقاط المتساوية البعد عن المستويين :

$$P_1 = x-y+z-5=0$$
$$P_2 = 2x+3y-z+1=0$$

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من هذه المجموعة فيكون

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2

$$\Rightarrow \quad \frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \quad 5$$

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_2^2}}=\pm\frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{x-y+z-5}{\sqrt{1+1+1}}=\pm\frac{2x+3y-z+1}{\sqrt{4+9+1}} \quad 5$$

$$\sqrt{14}\,(x-y+z-5)=\pm\sqrt{3}\,(2x+3y-z+1)$$

المستويين متقاطعين غير متوازيين وهذه المجموعة هي المستويين المنصف الداخلي والخارجي

لنأخذ الجداء الداخلي لناظمي المستويين P_1 و P_2

$$\vec{\omega}_1\cdot\vec{\omega}_2=(1,-1,1)(2,3,-1)=2-3-1=-2<0 \quad 3$$

(-) توافق المستوي المنصف الخارجي. 3

(+) توافق المستوي المنصف الداخلي. 3

(-) المستوي المنصف الخارجي :

$$\sqrt{14}\,(x-y+z-5)=-\sqrt{3}\,(2x+3y-z+1) \quad 3$$

$$\sqrt{14}\,x-\sqrt{14}\,y+\sqrt{14}\,z-5\sqrt{14}=-2\sqrt{3}\,x-3\sqrt{3}\,y+\sqrt{3}\,z+\sqrt{3}$$

$$\boxed{(\sqrt{14}+2\sqrt{3})x+(-\sqrt{14}+3\sqrt{3})y+(\sqrt{14}-\sqrt{3})z-5\sqrt{14}-\sqrt{3}=0}$$

+ المستوى المنصف الداخلي :

$$\sqrt{14}\,(x-y+z-5)=\sqrt{3}\,(2x+3y-z+1)$$

$$\sqrt{14}\,x-\sqrt{14}\,y+\sqrt{14}\,z-5\sqrt{14}=2\sqrt{3}\,x+3\sqrt{3}\,y-\sqrt{3}\,z+\sqrt{3}$$

$$\boxed{(\sqrt{14}-2\sqrt{3})\,x+(-\sqrt{14}-3\sqrt{3})\,y+(\sqrt{14}+\sqrt{3})\,z-5\sqrt{14}-\sqrt{3}=0}$$

3

جامعة طرطوس
كلية العلـوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الرياضيات – السنة الأولى
الدورة الفصلية الأولى 2020 -2021

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (35 درجة):

لدينا النقطتان B, A بحيث أن النقطة A معينة بالإحداثيات الاسطوانية :
$\left(\rho = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{3},\ z = 1\right)$ وأن النقطة B معينة بالإحداثيات الكروية:
$\left(r = 2,\ \varphi = 0,\ \theta = \frac{\pi}{2}\right)$ و المطلوب:

1) أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطة M التي تقسم القطعة المستقيمة AB بنسبة $r = 3$.

2) احسب الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{oA}$ و $\overrightarrow{oB}$.

3) إذا كان $\vec{u}(-1,3,0)$ متجه من الفضاء $oxyz$ أوجد مسقط $\overrightarrow{AB}$ على $\vec{u}$.

4) احسب حجم متوازي السطوح المنشأ على المتجهات $\overrightarrow{oA}, \overrightarrow{oB}, \vec{u}$ المنطلقة من نقطة واحدة.

السؤال الثاني (30 درجة):

أوجد معادلة المستوي الذي يحوي المستقيمين:

$$D_1 :\ x = 2\lambda + 1 \qquad y = -3\lambda \qquad z = 2\lambda - 3$$

$$D_2 :\ \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{2}$$

ثم احسب أقصر بعد بين هذين المستقيمين.

السؤال الثالث (25 درجة):

ليكن لدينا المنحن المعين بالمعادلتين:

$$F(x,y,z) = x^2 - y + 2x + 1 = 0$$

$$G(x,y,z) = x^2 - z - 1 = 0$$

أوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم لهذا المنحن في النقطة $M(0,1,-1)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (35 درجة)

ليكن لدينا النقطتين A المعينة بالاحداثيات الاسطوانية $(\rho=2, \varphi=\frac{\pi}{3}, z=1)$ و النقطة B المعينة بالاحداثيات الكروية $(r=2, \varphi=0, \theta=\frac{\pi}{2})$ والمطلوب:

1) أوجد الاحداثيات المكارتية للنقطة M التي تقسم القطعة المستقيمة AB بنسبة $r=3$

2) احسب الزاوية بين $\vec{OA}, \vec{OB}$

3) إذا كان $\vec{u}(-1,3,0)$ متجه من الفضاء oxyz أوجد مسقط $\vec{AB}$ على $\vec{u}$

4) احسب حجم متوازي السطوح المنشأ على $\vec{OA}, \vec{OB}$ و $\vec{u}$ المنطلقة من نقطة واحدة.

الحل:

(1

$$\left.\begin{aligned} x_A &= \rho\cos\varphi = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2.\frac{1}{2} = 1 \\ y_A &= \rho\sin\varphi = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ z_A &= z = 1 \end{aligned}\right\} A(1, \sqrt{3}, 1)$$

6

$$\left.\begin{aligned} x_B &= r\cos\varphi\sin\theta = 2\cos 0 \sin\frac{\pi}{2} = 2.1.1 = 2 \\ y_B &= r\sin\varphi\sin\theta = 2\sin 0\sin\frac{\pi}{2} = 2.0.1 = 0 \\ z_B &= r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{2} = 2.0 \end{aligned}\right\} B(2,0,0)$$

6

احداثيات النقطة M التي تقسم القطعة AB بنسبة $r=3$

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + r x_B}{1+r} = \frac{1+3(2)}{1+3} = \frac{7}{4} \\ y_M &= \frac{y_A + r y_B}{1+r} = \frac{\sqrt{3}+3(0)}{1+3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ z_M &= \frac{z_A + r z_B}{1+r} = \frac{1+3(0)}{1+3} = \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} M\left(\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

6

2) احسب الزاوية بين $\vec{OA}, \vec{OB}$

$$\cos(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{|\vec{OA}|.|\vec{OB}|} = \frac{x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B}{\sqrt{x_A^2+y_A^2+z_A^2}\sqrt{x_B^2+y_B^2+z_B^2}} = \frac{1(2)+\sqrt{3}(0)+1(0)}{\sqrt{1+3+1}\sqrt{4+0+0}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4}\sqrt{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

6

3) إذا كان $\vec{u}(-1,3,0)$ أوجد مسقط $\vec{AB}$ على $\vec{u}$

نوجد $\vec{AB}$ ثم نوجد متجه واحدته (جيوب تمام التوجيه له)

$$\vec{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A) \Rightarrow \vec{AB}(2-1, 0-\sqrt{3}, 0-1), \vec{AB}(1, -\sqrt{3}, -1)$$

ليكن $\vec{v}$ متجه واحدة $\vec{AB} \Leftarrow$

$$\vec{v} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \; ; \; |\vec{AB}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{1+3+1} = \sqrt{5}$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k} \;, \; \vec{v}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

3

مسقط $\vec{u}$ على $\vec{AB}$ هو :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1,3,0)\left(\frac{1}{\sqrt5},\frac{-\sqrt3}{\sqrt5},\frac{-1}{\sqrt5}\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{-1}{\sqrt5}-\frac{3\sqrt3}{\sqrt5}+0=\frac{-1-3\sqrt3}{\sqrt5}$$

3

4) حساب حجم متوازي الأضلاع المنشأ على هذه المتجهات الثلاث :

$$V=\left|(\vec{OA},\vec{OB},\vec{u})\right| = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = |0+0+6| = |6| = 6$$ وحدة مكعبة

5

السؤال الثاني (30 درجة) :

أوجد معادلة المستوي الذي يحوي المستقيمين :

$D_1 :\quad x=2\lambda+1 \quad , \quad y=-3\lambda \quad , \quad z=2\lambda-3$

$D_2 :\quad \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-1}{2}$

ثم احسب أقصر بعد بين هذين المستقيمين .

الحل :

المستقيمين متوازيين لأن $\vec{v}_1(2,-3,2)$ و $\vec{v}_2(2,-3,2)$ متساويان .

معادلة المستوي المار بالنقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ والمعامد لـ $\vec{N}(a,b,c)$ هي :

$$\boxed{P = a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)}$$

6

لنأخذ $M_0(x_0,y_0,z_0)$ هي $M_1(+1,0,-3)$ من المستقيم D_1

$$\Rightarrow \boxed{P=a(x-1)+by+c(z+3)=0} \quad (1)$$

3

وهي معادلة المستوي المطلوب لنوجد a, b, c

لدينا $M_2(2,-1,1)$ نقطة من D_2 وهي تنتمي إلى P $\Leftarrow$

M_2 تحقق معادلة P :

$$a(2-1)+b(-1)+c(1+3)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{a-b+4c=0} \quad (2)$$

ولدينا $\vec{v}_1 \perp \vec{N} \Leftarrow \vec{v}_1\cdot\vec{N}=0$ و $\vec{v}_1(2,-3,2)$ ، $\vec{N}(a,b,c)$

$$\boxed{2a-3b+2c=0} \quad (4)$$

3

من (2) لدينا : $\boxed{a = b - 4c}$ (5)

نعوض (5) في (4) :

$$2a - 3b + 2c = 0 \Rightarrow 2(b-4c) - 3b + 2c = 0$$
$$2b - 8c - 3b + 2c = 0$$
$$-b - 6c = 0 \Rightarrow \boxed{b = -6c} \quad (6)$$

نعوض (6) في (5)

$$a = b - 4c = -6c - 4c = -10c$$
$$\boxed{a = -10c} \quad (7)$$

3

نعوض كل من (6) و (7) في (1) :

$$P: \quad -10c(x-1) - 6cy + c(z+3) = 0$$

$c \neq 0$ نقسم على c :

$$-10(x-1) - 6y + (z+3) = 0$$
$$-10x - 6y + z + 13 = 0 \quad \text{أو} \quad \boxed{10x + 6y - z - 13 = 0}$$

3

وهي معادلة المستوي المطلوب ،

لحساب أقصر بعد بين المستقيمين نلاحظ أن المستقيمين متوازيان فأقصر بعد بينهما (D_1, D_2) هو البعد بين نقطة من أحدهما والمستقيم الآخر ،
لتكن $M_1(1,0,-3)$ نقطة من D_1 و
$M_2(2,-1,1)$ نقطة من D_2
فيكون أقصر بعد هو البعد بين M_1 و D_2 (أو M_2 و D_1)

6

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{v}_2|}{|\vec{v}_2|} \quad ; \quad \overrightarrow{M_2M_1}(1,-1,4) \quad , \quad \vec{v}_2(2,-3,2)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$$

3

$$|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{v}_2| = \sqrt{100 + 36 + 1} = \sqrt{137}$$
$$|\vec{v}_2| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$$

$d = \frac{\sqrt{137}}{\sqrt{17}}$ وحدة طول ، وهو أقصر بعد بين D_1 و D_2 **3**

• إذا الطالب أوجد حزمة المستويات لـ D_1 (أو D_2) فسيجد مباشرة أنه تحقق من أجل أي قيمة لـ λ فيأخذ الطالب العلامة (عند إيجاد أقصر بعد)

معادلة الحزمة يأخذ **2** درجات $P = P_1 + \lambda P_2$

تحويل معادلتي المستقيم إلى تقاطع مستويين يأخذ **4** درجات

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{2}$$

2 $P_2 \begin{cases} -3x - 2y + 4 = 0 \\ 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

2 $D_1 \begin{cases} -3x - 2y + 3 = 0 \\ 2y + 3z + 9 = 0 \end{cases}$

في إيجاد أقصر بعد بين هذين المستقيمين :

إذا الطالب أوجد $M_1(1, 0, -3)$ و $M_2(2, -1, 1)$

$D_1 \ni$ $D_2 \ni$ **3**

بما أن المستقيمين متوازيان فإن أقصر بعد هو البعد بينهما $\overrightarrow{M_1M_2}(1,-1,4)$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

6 $$M_1M_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} = \sqrt{1^2+1^2+(4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$ **3**

• إذا الطالب أوجد ناظم المستوي

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$$ **6**

السؤال الثالث (25 درجة):

لتكن لدينا المنحني المعين بالمعادلتين:

$$F(x,y,z) = x^2 - y + 2x + 1 = 0$$

$$G(x,y,z) = x^2 - z - 1 = 0$$

أوجد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم لهذا المنحني في النقطة $M_0(0,1,-1)$

الحل: نوجد المشتقات الجزئية للدالتين F, G بالنسبة لـ x, y, z

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= 2x+2 \\ F'_y &= -1 \\ F'_z &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{M_0} \left.\begin{aligned} F'_{x_0} &= 2 \\ F'_{y_0} &= -1 \\ F'_{z_0} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2,-1,0) \qquad 4$$

نوجد المشتقات الجزئية لـ G:

$$\left.\begin{aligned} G'_x &= 2x \\ G'_y &= 0 \\ G'_z &= -1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{M_0} \left.\begin{aligned} G'_{x_0} &= 0 \\ G'_{y_0} &= 0 \\ G'_{z_0} &= -1 \end{aligned}\right\} \quad (0,0,-1) \qquad 4$$

وبالتالي ناظم المستوي الناظم في M_0:

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \underset{u}{\vec{i}} + \underset{v}{2\vec{j}} + \underset{w}{0\vec{k}} \quad , \quad \vec{T}(1,2,0) \qquad 2$$

معادلة المستوي الناظم في M_0:

$$\boxed{u(x-x_0) + v(y-y_0) + w(z-z_0) = 0} \qquad 5$$

$$1(x-0) + 2(y-1) + 0(z+1) = 0$$

$$\boxed{x + 2y - 2 = 0} \quad \text{المستوي الناظم} \qquad 2$$

معادلتي المستقيم المماس في M_0

$$\boxed{\frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v} = \frac{z-z_0}{w}} \qquad 5$$

$$\left.\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{0}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} z &= -1 \\ 2x - y + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{معادلتي المستقيم المماس في } M_0 \qquad 3$$

جامعة طرطوس
كلية العلــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الرياضيات – السنة الأولى
الدورة الفصلية االثانية 2020 -2019

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (60 درجة):

1) أوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك للمستويين:

$$D\begin{cases} 2x - y + 2z - 12 = 0 \\ 2x - 4y - z + 6 = 0 \end{cases}$$

2) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 = 2x + z - 5 = 0$$
$$P_2 = -3x + 5y - 4z + 1 = 0$$

3) عين وضع المستوي : $P = x + y + z - 4 = 0$

بالنسبة للكرة : $S(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

ثم أوجد نظيرة النقطة $A(1,2,-2)$ **بالنسبة للمستو** P .

السؤال الثاني (30 درجة):

1) أوجد الزاوية التي يجب أن تدورها الجملة حول المحور oz **كي يختفي الحد المستطيلي في المعادلة :**

$$G: \quad x^2 + 3xy - x + y = 0$$

~~**2) أوجد معادلة السطح** G **في الاحداثيات القطبية.**~~

3) ما نوع السطح الممثل بالعلاقة :

$$F: \quad x^2 + 3y^2 = 9z^2$$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (60 درجة) : (25-20-15)

1) أوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك للمستويين :

$$D\begin{cases} 2x-y+2z-12=0 \\ 2x-4y-z+6=0 \end{cases}$$

الحل: المعادلات الوسيطية للمستقيم :

$$D\begin{cases} x=x_0+\lambda\alpha \\ y=y_0+\lambda\beta \\ z=z_0+\lambda\gamma \end{cases}$$ 5

لنوجد (α,β,γ) $\vec{w}$ متجه توجيه D

$$\vec{w}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix}=(1+8)\vec{i}+(4+2)\vec{j}+(-8+2)\vec{k}$$ 3

3

حيث $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ هما على الترتيب ناظمي المستويين .

$$\vec{w}=\underset{\alpha}{9}\vec{i}+\underset{\beta}{6}\vec{j}\underset{\gamma}{-6}\vec{k}$$

لنوجد نقطة ما من هذا المستقيم : نفرض $x=0$ $\Leftarrow$

$$-y+2z-12=0 \Rightarrow \boxed{y=2z-12}$$

$$-4y-z+6=0$$

$$\Rightarrow -4(2z-12)-z+6=0$$

$$-8z+48-z+6=0 \Rightarrow -9z+54=0 \Rightarrow z=\frac{-54}{-9}=6 \ , \boxed{z=6}$$

$$\Rightarrow y=12-12=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$$

النقطة الكيفية $M_0(x_0,y_0,z_0)=(0,0,6)$ 3

نعوض في المعادلات الوسيطية :

$$D\begin{cases} x=9\lambda \\ y=6\lambda \\ z=6-6\lambda \end{cases}$$ 1

2) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين :

$$P_1=2x+z-5=0$$

$$P_2=-3x+5y-4z+1=0$$

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من هذا المستوي المنصف $\Leftarrow$

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{|\vec{w}_1|}=\frac{|P_2(x,y,z)|}{|\vec{w}_2|}$$ 5

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{2x+z-5}{\sqrt{4+1}} = \pm \frac{-3x+5y-4z+1}{\sqrt{9+25+16}}$$

$$\sqrt{10}\,(2x+z-5) = \pm(-3x+5y-4z+1)$$

لنوجد الجداء السلمي لناظمي المستويين :

$$\vec{w_1}\cdot\vec{w_2} = 2(-3)+0(5)+1(-4) = -6-4 = -10 < 0 \quad 3$$

3 (+) يوافق المستوي المنصف الداخلي .

3 (−) نوافق المستوي المنصف الخارجي .

$$\Rightarrow 2\sqrt{10}\,x+\sqrt{10}\,z-5\sqrt{10} = -3x+5y-4z+1$$ (+) توافق المستوي المنصف الداخلي

$$\boxed{(3+2\sqrt{10})x-5y+(+4+\sqrt{10})z+(-1-5\sqrt{10}) = 0}$$ 3 المستوي المنصف الداخلي

(−) توافق المستوي المنصف الخارجي :

$$2\sqrt{10}\,x+\sqrt{10}\,z-5\sqrt{10} = +3x-5y+4z-1$$

$$\boxed{(-3+2\sqrt{10})x+5y+(-4+\sqrt{10})z+(+1-5\sqrt{10}) = 0}$$ 3 المستوي المنصف الخارجي

3) عين وضع المستوي $P = x+y+z-4=0$

بالنسبة للكرة $S(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4x+6y+4=0$

<u>الحل :</u> لنعين مركز الكرة ونصف قطرها :

$$x_0=\frac{-4}{-2}=2 \;,\; y_0=\frac{6}{-2}=-3 \;,\; z_0=0 \qquad ,\; C(2,-3,0) \quad 2$$

$$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{(2)^2+(-3)^2+0-4}=\sqrt{9}=3 \quad 2$$

لنعين بعد مركز الكرة $C(2,-3,0)$ عن المستوي P :

$$\delta=\frac{|a_1a+b_1b+c_1c+d_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\frac{|2-3+0-4|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|-5|}{\sqrt3}=\frac{5}{\sqrt3} \quad (<3) \quad 3$$

لنأخذ العلاقة :

$$R^2(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(a_1a+b_1b+c_1c+d_1)^2 = 9\cdot3-25$$
$$= 27-25 = 2 > 0 \quad 3$$

3 المستوي يقطع الكرة .

إذا الطالب لم يكتب القانون الأخير يأخذ 3 مضافة إلى المرحلة التي قبلها إذا وضع $R=3 > \frac{5}{\sqrt3}=\delta$ فالمستوي يقطع الكرة

• لنوجد نظيرة النقطة $A(1,2,-2)$ بالنسبة للمستوي P :

لتكن $B(x_0,y_0,z_0)$ هي نظيرة A بالنسبة للمستوي P ولنوجد B :

وبالتالي فإن $\vec{AB}$ // ناظم المستوي P ⇐

$$\frac{x_0-1}{1}=\frac{y_0-2}{1}=\frac{z_0+2}{1} \qquad \vec{w}(1,1,1) \text{ ناظم } P$$

نكتب المعادلات السابقة بشكل وسيطي :

$$* \begin{cases} x_0 = 1+\lambda \\ y_0 = 2+\lambda \\ z_0 = -2+\lambda \end{cases} \quad 3$$

إن منتصف AB هو النقطة : $M : \left(\frac{x_0+1}{2}, \frac{y_0+2}{2}, \frac{z_0-2}{2}\right)$

إن M تحقق معادلة المستوى P :

$$\frac{x_0+1}{2}+\frac{y_0+2}{2}+\frac{z_0-2}{2}-4=0$$

$$x_0+y_0+z_0+1+2-2-8=0 \Longrightarrow x_0+y_0+z_0-7=0 \quad 3$$

نعوض x_0 ، y_0 ، z_0 بما يساويها في (*) :

$$1+\lambda+2+\lambda-2+\lambda-7=0 \Longrightarrow 3\lambda-6=0 \Longrightarrow \boxed{\lambda=\frac{6}{3}=2} \quad 3$$

وبالتالي :

$$x_0=1+2=3 \quad , \quad y_0=2+2=4 \quad , \quad z_0=-2+2=0$$

وبالتالي نظيرة A هي $\boxed{B(3,4,0)}$ 3

السؤال الثاني (30 درجة) :

1) أوجد الزاوية التي يجب أن تدورها الجملة حول المحور oz كي يختفي الحد المستطيلي من المعادلة :

$$G : x^2+3xy-x+y=0$$

الحل :

$$\begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y &= X\sin\theta + Y\cos\theta \\ z &= Z \end{aligned} \quad 6$$

نعوض في المعادلة G :

$$(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2+3(X\cos\theta-Y\sin\theta)(X\sin\theta+Y\cos\theta)-(X\cos\theta-Y\sin\theta)+(X\sin\theta+Y\cos\theta)=0$$

$$X^2\cos^2\theta-2XY\cos\theta\sin\theta+Y^2\sin^2\theta+3X^2\cos\theta\sin\theta-3XY\sin^2\theta+3XY\cos^2\theta$$

$$-3Y^2\sin\theta\cos\theta-X\cos\theta+Y\sin\theta+X\sin\theta+Y\cos\theta=0$$

$$(\cos^2\theta+3\cos\theta\sin\theta)X^2+(\sin^2\theta-3\sin\theta\cos\theta)Y^2+(-2\cos\theta\sin\theta-3\sin^2\theta+3\cos^2\theta)XY+(\sin\theta-\cos\theta)X+(\sin\theta+\cos\theta)Y=0 \quad 6$$

حتى ينعدم الحد المستطيلي أي :

$$-2\cos\theta\sin\theta-3\sin^2\theta+3\cos^2\theta=0 \quad 3$$

$$-\sin 2\theta+3\cos 2\theta=0 \Longrightarrow \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=3 \Longrightarrow tg\,2\theta=3 \Longrightarrow 2\theta=arctg\,3$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3}$$ 3

2) أوجد معادلة السطح G في الاحداثيات القطبية :

الحل:

$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$ 6

$$G: \quad \rho^2\cos^2\varphi + 3\rho^2\cos\varphi\sin\varphi - \rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi = 0$$ 2

3) ما نوع السطح الممثل بالعلاقة :

$$F: \quad x^2 + 3y^2 = 9z^2$$

الحل:

$$\boxed{\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} - \frac{z^2}{\frac{1}{9}} = 0}$$ 2

وهي معادلة مخروط من الدرجة الثانية . 2

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الرياضيات – السنة الأولى
الدورة الفصلية الأولى 2020 -2019

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (60 درجة):

1) أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم:

$$D: \quad \frac{x}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-4}{-7}$$

على المستوي: $P = x + y + 3z = 0$

2) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 = 2x + 2y + z - 6 = 0$$
$$P_2 = x + y - z + 1 = 0$$

3) أوجد معادلة كرة نصف قطرها $R = 3$ **وتمس المستوي:**

$$P = x + 2y + 2z + 3 = 0$$

في النقطة $A(1,1,-3)$.

السؤال الثاني (30 درجة):

لدينا السطح المعين بالمعادلة:

$$F(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y + 2z - 4 = 0$$

1) أوجد معادلة المستوي المماس و معادلتي المستقيم الناظم للسطح F **في النقطة** $M_0(1,2,3)$

2) ما نوع السطح F **المعين بالمعادلة السابقة.**

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

جامعة طرطوس
كلية العلــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الرياضيات – السنة الأولى
الدورة الفصلية الأولى 2019 -2020

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (60 درجة):

1) أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم:

$$D: \quad \frac{x}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-4}{-7}$$

على المستوي: $P = x + y + 3z = 0$

2) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 = 2x + 2y + z - 6 = 0$$
$$P_2 = x + y - z + 1 = 0$$

3) أوجد معادلة كرة نصف قطرها $R = 3$ **وتمس المستوي:**

$$P = x + 2y + 2z + 3 = 0$$

في النقطة $A(1,1,-3)$.

السؤال الثاني (30 درجة):

لدينا السطح المعين بالمعادلة:

$$F(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y + 2z - 4 = 0$$

1) أوجد معادلة المستوي المماس و معادلتي المستقيم الناظم للسطح F **في النقطة** $M_0(1,2,3)$

2) ما نوع السطح F **المعين بالمعادلة السابقة.**

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (60 درجة) (20-25-15)

1) أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم :

$$D: \frac{x}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-4}{-7}$$

(15 درجة)

على المستوي : $P = x+y+3z=0$

الحل: نحول معادلة المستقيم إلى معادلتي مستويين (تقاطع مستويين):

$$D\begin{cases} -5x-3y+15=0 \\ -7x-3z+12=0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad D\begin{cases} -5x-3y+15=0 \\ -7y+5z+15=0 \end{cases}$$

لنوجد معادلة حزمة المستويات المارة من D :

$$P = P_1+\lambda P_2 = (-5-7\lambda)x-3y-3\lambda z+(15+12\lambda)=0$$ 3

أو $= -5x-(3+7\lambda)y+5\lambda z+(15+\lambda(15))=0$

ناظم الحزمة : $\vec{N}_\lambda = (-5-7\lambda)\vec{i}-3\vec{j}-3\lambda\vec{k}$

نختار من معادلة الحزمة المستوي المتعامد مع المستوي P أي أن ناظم الحزمة و ناظم المستوي P $\vec{\omega}(1,1,3)$ متعامدان ⇐

$$\vec{N}_\lambda\cdot\vec{\omega}=0 \Rightarrow (-5-7\lambda)\cdot 1-3\cdot 1+(-3\lambda)\cdot 3=0$$ 3

$$-5-7\lambda-3-9\lambda=0 \Rightarrow -16\lambda=8 \Rightarrow \boxed{\lambda=-\frac{8}{16}=-\frac{1}{2}}$$

أو $-5-(3+7\lambda)+15\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1$

نعوض قيمة λ في معادلة الحزمة : 3

$$\left(-5-7\left(-\frac{1}{2}\right)\right)x-3y+\frac{3}{2}z+\left(15-\frac{12}{2}\right)=0$$

$$\boxed{-\frac{3}{2}x-3y+\frac{3}{2}z+9=0} \quad \text{أو} \quad -3x-6y+3z+18=0$$

$$-5x-10y+5z+30=0 \quad \text{أو} \quad \text{أو} \quad \boxed{x+2y-z-6=0}$$ 3

وبالتالي معادلتي المستقيم المطلوب (المسقط القائم) هي :

$$\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x+2y-z-6=0 \end{cases}$$ 3

2) أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين :

$$\begin{cases} P_1 = 2x+2y+z-6=0 \\ P_2 = x+y-z+1=0 \end{cases}$$

(25 درجة)

الحل:

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من هذا المستوي المنصف ⇐

بعد M عن P_1 = بعد M عن P_2

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{|\vec{\omega}_1|} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{|\vec{\omega}_2|}$$ 5

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{2x+2y+z-6}{\sqrt{4+4+1}_{=3}} = \pm \frac{x+y-z+1}{\sqrt{1+1+1}_{=\sqrt{3}}}$$ 5

$$\sqrt{3}(2x+2y+z-6) = \pm 3(x+y-z+1)$$

نقسم على $\sqrt{3}$:

$$2x+2y+z-6 = \pm\sqrt{3}(x+y-z+1)$$

لنوجد الجداء السلمي لناظمي المستويين :

$$\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2 = (2,2,1)\cdot(1,1,-1) = 2+2-1 = 3 > 0$$ 5

(−) توافق المنصف الداخلي . 2

(+) توافق المنصف الخارجي . 2

$$\Rightarrow \quad 2x+2y+z-6 = -\sqrt{3}(x+y-z+1)$$

$$\boxed{(2+\sqrt{3})x + (2+\sqrt{3})y + (1-\sqrt{3})z + (-6+\sqrt{3}) = 0}$$ 3 المستوي المنصف الداخلي

(+) توافق المنصف الخارجي :

$$2x+2y+z-6 = \sqrt{3}x + \sqrt{3}y - \sqrt{3}z + \sqrt{3}$$

$$\boxed{(2-\sqrt{3})x + (2-\sqrt{3})y + (1+\sqrt{3})z + (-6-\sqrt{3}) = 0}$$ 3 المستوي المنصف الخارجي

3) أوجد معادلة كرة نصف قطرها $R=3$ وتمس المستوي (20 درجة)

$$P = x+2y+2z+3 = 0$$

في النقطة $A(1,1,-3)$.

__الحل:__ لنوجد مركز الكرة وليكن $C(x_0,y_0,z_0)$:

لنوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم العمودي على المستوي P والمار من $A(1,1,-3)$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_A + 1\lambda \\ y &= y_A + 2\lambda \\ z &= z_A + 2\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 1+\lambda \\ y &= 1+2\lambda \\ z &= -3+2\lambda \end{aligned}$$ 3

هذا المستقيم يمر من $C(x_0,y_0,z_0)$ وبالتالي فهي تحقق معادلاته :

$$\star \begin{cases} x_0 = 1+\lambda \\ y_0 = 1+2\lambda \\ z_0 = -3+2\lambda \end{cases}$$ 2

البعد بين C و A هو نصف القطر R

$$(x_0-1)^2+(y_0-1)^2+(z_0+3)^2=9$$ 2

نعوض x و y و z بمساواتها من *:

$$(1+\lambda-1)^2+(1+2\lambda-1)^2+(-3+2\lambda+3)^2=9$$

$$\lambda^2+4\lambda^2+4\lambda^2=9 \Rightarrow 9\lambda^2=9 \Rightarrow \lambda^2=1 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=-1\end{cases}$$

نعوض قيم λ في *:

$$\lambda=1 \Rightarrow C_1(2,3,-1)$$ 2

$$\lambda=-1 \Rightarrow C_2(0,-1,-5)$$ 2

معادلة الكرة:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$ 5

من أجل $\lambda=1$ أي C_1:

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$$

$$x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+4+9+1=9 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+5=0}$$ 2

من أجل $\lambda=-1$ أي C_2:

$$(x-0)^2+(y+1)^2+(z+5)^2=9$$

$$x^2+y^2+z^2+2y+10z+1+25-9=0 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2+2y+10z+17=0}$$ 2

السؤال الثاني (30 درجة)

لدينا السطح المعين بالمعادلة:

$$F(x,y,z)=2x^2+2y^2+z^2-4x+4y+2z-4=0$$

1) أوجد معادلة المستوي المماس ومعادلتي المستقيم الناظم للسطح F في النقطة $M_0(1,2,3)$

2) ما نوع السطح F المعين بالمعادلة السابقة.

الحل: 1) لنوجد المشتقات الجزئية لـ F:

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= 4x-4\\ F'_y &= 4y+4\\ F'_z &= 2z+2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[M_0(1,2,3)]{\text{عند } M_0} \begin{cases} F'_{x_0} = 4-4=0\\ F'_{y_0} = 4(2)+4=12\\ F'_{z_0} = 2(3)+2=8 \end{cases}$$ 6

معادلة المستوي المماس :

$$\boxed{F'_{x_0}(x-x_0)+F'_{y_0}(y-y_0)+F'_{z_0}(z-z_0)=0}$$ 5

$$0(x-1)+12(y-2)+8(z-3)=0$$

$$\boxed{12y+8z-48=0}$$ 2

معادلتي المستقيم الناظم :

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_{x_0}}=\frac{y-y_0}{F'_{y_0}}=\frac{z-z_0}{F'_{z_0}}}$$ 5

$$\begin{cases} x=1 \\ \dfrac{y-2}{12}=\dfrac{z-3}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ 8y-12z+20=0 \end{cases}$$ 2

2)

$$2x^2+2y^2+z^2-4x+4y+2z-4=0$$

$$2(x^2-2x+1-1)+2(y^2+2y+1-1)+(z^2+2z+1-1)-4=0$$ 5

$$2(x-1)^2+2(y+1)^2+(z+1)^2\underbrace{-2-2-1-4}_{=-9}=0$$

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{\frac{9}{2}}+\frac{(y+1)^2}{\frac{9}{2}}+\frac{(z+1)^2}{9}=1}$$ 5

معادلة مجسم قطع ناقص مركزه $(1,-1,-1)$ وانصاف أقطاره 3, $\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\frac{3}{\sqrt{2}}$

جامعة طرطوس
كلية العــلــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الرياضيات–السنة الأولى
الدورة الفصلية الثالثة 2018 -2019

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (35 درجة):

1) أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم:

$$D\begin{cases} x+2y+2z-1=0 \\ 2x-y-z+2=0 \end{cases}$$

على المستوي: $P = 3x+2y+z=0$

2) أوجد الزاوية بين المستقيم D **و المستوي** P **.**

3) أوجد بعد النقطة $M_0(1,0,0)$ **عن المستقيم** D**.**

السؤال الثاني (20 درجة):

أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 = 2x+y+2z+1=0$$
$$P_2 = 4y+3z+1=0$$

السؤال الثالث (35 درجة):

لدينا السطح المعين بالمعادلة:

$$F(x,y,z) = x^2+3y^2+2z=0$$

1) وليكن لدينا معادلة المستوي المماس لهذا السطح في نقطة التماس $M_0(x_0,y_0,z_0)$ **هي:**

$$P = 4x-6y+2z+14=0$$

والمطلوب: أوجد احداثيات نقطة التماس $M_0(x_0,y_0,z_0)$ **.**

2) أوجد معادلتي المستقيم الناظم للسطح F **عند نقطة التماس** $M_0(x_0,y_0,z_0)$ **المحسوبة في الطلب السابق.**

3) أوجد معادلة السطح F **في الاحداثيات الاسطوانية.**

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (35 درجة)

1) أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم :

$$D\begin{cases} x+2y+2z-1=0 \\ 2x-y-z+2=0 \end{cases}$$

على المستوي : $P = 3x+2y+z=0$

2) أوجد الزاوية بين المستقيم D والمستوي P .

3) أوجد بعد النقطة $M(1,0,0)$ عن المستقيم D .

الحل : 1) ايجاد معادلتي المسقط :

لنوجد حزمة المستويات المارة في D : $P_1+\lambda P_2$

$$(1+2\lambda)x+(2-\lambda)y+(2-\lambda)z+(-1+2\lambda)=0 \quad 3$$

ناظم الحزمة : $\vec{N}_\lambda(1+2\lambda, 2-\lambda, 2-\lambda)$

نختار من هذه الحزمة المستوي المتعامد مع المستوي P :

$\vec{N}(3,2,1)$ الذي ناظمه $P=3x+2y+z=0$

أي $\vec{N}\cdot\vec{N}_\lambda=0 \Rightarrow 3.(1+2\lambda)+2.(2-\lambda)+1.(2-\lambda)=0$ 3

$$3+6\lambda+4-2\lambda+2-\lambda=0$$

$$3\lambda+9=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=-3} \quad 3$$

نعوض في معادلة الحزمة

$$(1-6)x+(2+3)y+(2+3)z+(-1-6)=0$$

$$\boxed{-5x+5y+5z-7=0} \quad 3$$

معادلة المستقيم المطلوب :

$$D_1\begin{cases} -5x+5y+5z-7=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases} \quad 3$$

2) ايجاد الزاوية بين D و P :

متجه توجيه المستقيم D :

$\vec{v}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$; $\vec{N}_1(1,2,2)$, $\vec{N}_2(2,-1,-1)$

$$\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0\vec{i}+5\vec{j}-5\vec{k} \quad , \vec{v}(0,5,-5) \quad 3$$

$\vec{w}=\vec{N}(3,2,1)$:

$$3 \quad \sin\theta=\frac{|\vec{w}\cdot\vec{v}|}{|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{|0\times3+5\times2-5\times1|}{\sqrt{0^2+5^2+(-5)^2}\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{50}\sqrt{14}}=\frac{5}{5\sqrt{2}\sqrt{14}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{28}}=\frac{1}{2\sqrt{7}} \quad 2$$

3) ايجاد بعد النقطة $M(1,0,0)$ عن المستقيم D .

بعد نقطة M_0 عن المستقيم D الذي متجه توجيهه $\vec{v}$ هو

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$ 3

حيث M_1 هي نقطة من المستقيم D لنحددها:

نختار مثلاً $y=0$ نعوض في معادلتي المستقيم:

$$x + 2z - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1 - 2z}$$

$$2x - z + 2 = 0$$ نعوض في المعادلة الثانية:

$$2(1-2z) - z + 2 = 0$$

$$2 - 4z - z + 2 = 0 \Rightarrow 4 - 5z = 0 \Rightarrow \boxed{z = \frac{4}{5}}$$

$$\Rightarrow x = 1 - 2\cdot\frac{4}{5} = 1 - \frac{8}{5} = \frac{-3}{5}, \quad \boxed{x = -\frac{3}{5}}, \quad y = 0$$

$$M_0(1,0,0), \quad M_1\left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$ 3

$$\overrightarrow{M_1M_0} = \left(1 + \frac{3}{5}, 0-0, 0-\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{8}{5}, 0, \frac{-4}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{8}{5} & 0 & \frac{-4}{5} \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}$$ 3

$$|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(4)^2+(8)^2+(8)^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(0)^2+(5)^2+(-5)^2} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

وبالتالي بعد النقطة $M_0(1,0,0)$ عن المستقيم D :

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{12}{5\sqrt{2}} = \frac{6}{5}\sqrt{2}$$ وحدة طول 3

السؤال الثاني (20 درجة)

أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي والخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 = 2x + y + 2z + 1 = 0$$
$$P_2 = 4y + 3z + 1 = 0$$

الحل:

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من المستوي المنصف وبالتالي فهي متساوية البعد عن المستوي P_1 وعن المستوي P_2 أي أن:

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$ 4

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{2x+y+2z+1}{\sqrt{4+1+4}} = \pm \frac{4y+3z+1}{\sqrt{16+9}}$$

$$\frac{2x+y+2z+1}{3} = \pm \frac{4y+3z+1}{5}$$ 4

لنأخذ الجداء الداخلي لناظم المستوي الأول $\vec{\omega}_1(2,1,2)$ وناظم المستوي الثاني $\vec{\omega}_2(0,4,3)$

$$\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 2(0) + 1(4) + 2(3) = 0 + 4 + 6 = 10 > 0$$ 4

$\Leftarrow$ (−) توافق معادلة المستوي المنصف الداخلي:

$$5(2x+y+2z+1) = -3(4y+3z+1)$$
$$10x+5y+10z+5 = -12y-9z-3$$
$$\boxed{10x+17y+19z+8=0}$$ المستوي المنصف الداخلي 4

(+) توافق المستوي المنصف الخارجي:

$$5(2x+y+2z+1) = +3(4y+3z+1)$$
$$10x+5y+10z+5 = 12y+9z+3$$
$$\boxed{10x-7y+z+2=0}$$ المستوي المنصف الخارجي 4

السؤال الثالث (35 درجة):

لدينا السطح المعين بالمعادلة:

$$F(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z = 0$$

1) وليكن لدينا معادلة المستوي المماس لهذا السطح في نقطة التماس $M_0(x_0,y_0,z_0)$ هي

$$P = 4x - 6y + 2z + 14 = 0$$

والمطلوب: أوجد احداثيات نقطة التماس $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

2) أوجد معادلتي المستقيم الناظم للسطح F عند نقطة التماس $M_0(x_0,y_0,z_0)$ المحسوبة في الطلب السابق.

3) أوجد معادلة السطح F في الاحداثيات الاسطوانية.

الحل: 1) معادلة المستوي المماس في النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$F'_{x_0}(x-x_0) + F'_{y_0}(y-y_0) + F'_{z_0}(z-z_0) = 0 \quad 6$$

لنوجد المشتقات الجزئية لـ F:

$$3 \quad \left.\begin{aligned} F'_x &= 2x \\ F'_y &= 6y \\ F'_z &= 2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{M_0 \text{ في}} \left\{\begin{aligned} F'_{x_0} &= 2x_0 \\ F'_{y_0} &= 6y_0 \\ F'_{z_0} &= 2 \end{aligned}\right.$$

نعوض في معادلة المستوي المماس:

$$2x_0(x-x_0) + 6y_0(y-y_0) + 2(z-z_0) = 0$$

$$2x_0x - 2x_0^2 + 6y_0y - 6y_0^2 + 2z - 2z_0 = 0$$

$$2x_0x + 6y_0y + 2z - 2x_0^2 - 6y_0^2 - 2z_0 = 0 \quad 3$$

هذا المستوي منطبق على المستوي $P = 4x - 6y + 2z + 14 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_0 = 4 \Rightarrow \boxed{x_0 = 2} \\ 6y_0 = -6 \Rightarrow \boxed{y_0 = -1} \\ -2x_0^2 - 6y_0^2 - 2z_0 = 14 \Rightarrow -2(2)^2 - 6(-1)^2 - 2z_0 = 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -8 - 6 - 2z_0 = 14 \Rightarrow -2z_0 = 28$$

$$\boxed{z_0 = -14}$$

وبالتالي نقطة التماس $M_0(x_0,y_0,z_0) = (2,-1,-14)$ 3

2) إن معادلتي المستقيم الناظم للسطح F في النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$\frac{x-x_0}{F'_{x_0}} = \frac{y-y_0}{F'_{y_0}} = \frac{z-z_0}{F'_{z_0}} \quad 6$$

$$\boxed{\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+14}{2}} \quad 3$$

حيث:

$F'_{x_0} = 4$, $F'_{y_0} = -6$, $F'_{z_0} = 2$ 2

3) ايجاد معادلة السطح F في الاحداثيات الاسطوانية:

$x = \rho \cos\varphi$

$y = \rho \sin\varphi$

$z = z$

6

نعوض في معادلة السطح F :

$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z = 0$

$\boxed{F(\rho, \varphi, z) = \rho^2 \cos^2\varphi + 3\rho^2 \sin^2\varphi + 2z = 0}$ 3

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الرياضيات–السنة الأولى
الدورة الأولى 2018- 2019

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (20 درجة):

أوجد الزاوية التي يجب أن تدورها الجملة حول oy لتنعدم الحدود المستطيلة في المعادلة التالية بعد الدوران. وأوجد معادلة هذا السطح في الاحداثيات الجديدة.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$$

ثم أوجد معادلة السطح المعين بالمعادلة السابقة في الاحداثيات الكروية.

السؤال الثاني (25 درجة)

1) أوجد معادلتي العمود المشترك للمستقيمين:

$$D_1 \begin{cases} 2x - 3y - 2 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \quad , \quad D_2 : \ x = y + 4 = \frac{z}{2}$$

2) أوجد البعد بين المستويين التاليين باستخدام المعادلة الناظمية:

$$P_1 = 2x - y - 2z + 7 = 0$$
$$P_2 = 2x - y - 2z + 5 = 0$$

السؤال الثالث (20 درجة):

أوجد معادلة المستوي المار بالمستقيم:

$$D \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y - 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

ويصنع زاوية 60 درجة مع المستوي:

$$P = x + y + 2z + 1 = 0$$

السؤال الرابع (25 درجة):

لدينا المنحني المعين بالمعادلات:

$$x = te^{t+1} \quad , \quad y = 2e^{t+1} \quad , \quad z = e^{t^3+1}$$

1)أوجد معادلة المستقيم المماس لهذا المنحني في النقطة $t = -1$.

2)أوجد معادلة المستوي الناظم لهذا المنحني عند نقطة تقاطعه مع المستوي yoz .

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (20 درجة)

أوجد الزاوية التي يجب أن تدورها الجملة حول oy لتنعدم الحدود المستطيلة في المعادلة التالية بعد الدوران ثم أوجد معادلة هذا السطح في الإحداثيات الجديدة.

$$x^2+y^2-2x+4y-5=0$$

أوجد معادلة السطح المعين بالمعادلة السابقة في الاحداثيات الكروية.

الحل :

$$x = X\cos\theta + Z\sin\theta$$
$$y = Y$$
$$z = -X\sin\theta + Z\sin\theta$$

6

$$(X\cos\theta+Z\sin\theta)^2+Y^2-2(X\cos\theta+Z\sin\theta)+4Y-5=0$$

$$X^2\cos^2\theta+Z^2\sin^2\theta+2XZ\cos\theta\sin\theta+Y^2-2X\cos\theta-2Z\sin\theta+4Y-5=0$$

$$X^2\cos^2\theta+Y^2+Z^2\sin^2\theta+2XZ\cos\theta\sin\theta-2X\cos\theta-2Z\sin\theta+4Y-5=0 \quad (*)$$

حتى تنعدم الحدود المستطيلة :

$$2\cos\theta\sin\theta=0 \Rightarrow \sin 2\theta=0 \Rightarrow 2\theta=\pi K \Rightarrow$$
$$\theta=0\,,\ \theta=\frac{\pi}{2}$$

4

نعوض $\theta=\frac{\pi}{2}$ للحصول على معادلة السطح في الاحداثيات الجديدة .

نعوض في $(*)$

$$X^2\cos^2\tfrac{\pi}{2}+Y^2+Z^2\sin^2\tfrac{\pi}{2}+2XZ\cos\tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\pi}{2}-2X\cos\tfrac{\pi}{2}-2Z\sin\tfrac{\pi}{2}+4Y-5=0$$

$$\boxed{Y^2+Z^2-2Z+4Y-5=0}$$

2

لنوجد معادلة السطح في الاحداثيات الكروية :

$$x=r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z=r\cos\theta$$

6

$$x^2+y^2-2x+4y-5=0$$

$$r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi-2r\sin\theta\cos\varphi+4r\sin\theta\sin\varphi-5=0$$

$$r^2\sin^2\theta+2r\sin\theta(-\cos\varphi+2\sin\varphi)-5=0$$

2

السؤال الثاني (25 درجة)

1) أوجد معادلتي العمود المشترك للمستقيمين:

$$D_1\begin{cases}2x-3y-2=0\\ y-2z=0\end{cases} \quad , \quad D_2\{\ x=y+4=\frac{z}{2}$$

2) أوجد البعد بين المستويين التاليين باستخدام المعادلة الناظمية:

$P_1 = 2x-y-2z+7=0$

$P_2 = 2x-y-2z+5=0$

الحل: لنوجد متجه توجيه D_1:

$\vec{N}_1(2,-3,0)$ ناظم المستوي الأول

$\vec{N}_2(0,1,-2)$ ناظم المستوي الثاني

$$\xrightarrow{\text{متجه توجيه } D_1} \vec{v}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-3&0\\0&1&-2\end{vmatrix}=6\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$$ 2

ومتجه توجيه D_2 هو $(1,1,2)$

لنوجد $\vec{v}$:

$$\vec{v}=\vec{v}_1\times\vec{v}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\6&4&2\\1&1&2\end{vmatrix}=6\vec{i}-10\vec{j}+2\vec{k}$$ 2

• لنوجد حزمة المستويات المارة بالمستقيم D_1 والموازي لـ $\vec{v}$

$$2x+(-3+\lambda)y-2\lambda z-2=0$$ 3

$\vec{N}_\lambda(2,-3+\lambda,-2\lambda)$ ناظم الحزمة

$\Leftarrow \vec{v}\perp\vec{N}_\lambda$

$2(6)+(-3+\lambda)(-10)-2\lambda(2)=0$

$12+30-10\lambda-4\lambda=0$

$42-14\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\frac{42}{14}=\frac{21}{7}=3$, $\boxed{\lambda=3}$

نعوض في معادلة الحزمة:

$P_1 = 2x+(-3+3)y-6z-2=0$

$\boxed{P_1 = 2x-6z-2=0}$ أو $\boxed{P_1 = x-3z-1=0}$ 2

• لنوجد معادلة حزمة المستويات المارة بـ D_2

$$D_2\{\ x=y+4=\frac{z}{2} \xRightarrow{\text{نكتب}} D_2\begin{cases}x-y-4=0\\2x-z=0\end{cases}$$

$(1+2\lambda)x-y-\lambda z-4=0$ $\quad \vec{N}_\lambda(1+2\lambda,-1,-\lambda)$ 3

نختار من هذه الحزمة المستوي الموازي لـ $\vec{v}$ $\Leftarrow$

$(1+2\lambda)(6)-1(-10)-\lambda(2)=0$ $\quad \Leftarrow \vec{v}\perp\vec{M}_\lambda$

$6+12\lambda+10-2\lambda=0 \Rightarrow 16+10\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-16}{10}=\frac{-8}{5}$, $\boxed{\lambda=\frac{-8}{5}}$

نعوض في معادلة الحزمة بـ $\lambda=\frac{-8}{5}$

$1+2(\frac{-8}{5})x-y+\frac{8}{5}z-4=0 \Rightarrow \frac{-16}{5}x-y+\frac{8}{5}z-3=0$

$\Rightarrow P_2\ \boxed{16x+5y-8z+15=0}$ 2

وبالتالي فإن معادلتي العمود المشترك على P_1 و P_2 هما :

$$\begin{cases} P_1 = x - 3z - 1 = 0 \\ P_2 = 16x + 7y + 8z + 21 = 0 \end{cases}$$

2) لإيجاد البعد بين المستويين :

إن المستويين P_1 و P_2 متوازيان لأن :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

لنوجد البعد باستخدام المعادلة الناظمية :

المعادلة الناظمية للأولى :

نأخذ طويلة الناظم للمستوي P_1

$$|\vec{N_1}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$$

نقسم طرفي المعادلة الأولى P_1 على $|\vec{N_1}| = 3$

المعادلة الناظمية لـ P_1 :

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{7}{3} = 0$$ 3

وبالتالي بعد المبدأ (مبدأ الإحداثيات) عن المستوي P_1 هو :

$$\boxed{h_1 = -\frac{7}{3}}$$ 1

المعادلة الناظمية لـ P_2 :

$$|\vec{N_2}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{5}{3} = 0$$ 3

بعد مبدأ الإحداثيات عن المستوي P_2 :

$$\boxed{h_2 = -\frac{5}{3}}$$ 1

نلاحظ أن مبدأ الإحداثيات يقع بجهة واحدة بالنسبة للمستويين :

وبالتالي فإن البعد بين المستويين هو :

$$d = h_1 - h_2 = \frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$$ وحدة طول 3

السؤال الثالث (20 درجة)

أوجد معادلة المستوي المار بالمستقيم :

$$D\begin{cases} x-y-1=0 \\ y-2z-8=0 \end{cases}$$

ويصنع زاوية 60 درجة مع المستوي : $P = x+y+2z+1=0$

الحل :

لنوجد معادلة حزمة المستويات المارة بالمستقيم D :

$$D=\begin{cases} P_1 = x-y-1=0 \\ P_2 = y-2z-8=0 \end{cases}$$

$$P_1+\lambda P_2 = x+(-1+\lambda)y-2\lambda z-(1+8\lambda)=0$$ 3

ناظم الحزمة $\vec{N}_\lambda(1\ ,\ -1+\lambda\ ,-2\lambda)$

ولدينا ناظم المستوي $\vec{N}(1,1,2)$

$$\cos(\vec{N}_\lambda,\vec{N}) = \frac{\vec{N}_\lambda\cdot\vec{N}}{|\vec{N}_\lambda|\cdot|\vec{N}|} = \frac{1+1(-1+\lambda)+2(-2\lambda)}{\sqrt{1+(-1+\lambda)^2+(-2\lambda)^2}\sqrt{1+1+4}}$$ 3

$$\cos 60 = \frac{1}{2} = \frac{1-1+\lambda-4\lambda}{\sqrt{1+1-2\lambda+\lambda^2+4\lambda^2}\sqrt{6}} = \frac{-3\lambda}{\sqrt{2-2\lambda+5\lambda^2}\sqrt{6}}$$ 3

$$\frac{1}{2} = \frac{-3\lambda}{\sqrt{6}\sqrt{2-2\lambda+5\lambda^2}} \xRightarrow{\text{بالتربيع}} \frac{1}{4} = \frac{9\lambda^2}{6(2-2\lambda+5\lambda^2)}$$

$$\Rightarrow 36\lambda^2 = 6(2-2\lambda+5\lambda^2)$$ 3

$$36\lambda^2-30\lambda^2+12\lambda-12=0$$

$$6\lambda^2+12\lambda-12=0 \Longrightarrow \boxed{\lambda^2+2\lambda-2=0} \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = -1\mp\sqrt{3}}$$ 2

من أجل $\lambda=-1+\sqrt{3}$ ⟸ نعوض في معادلة الحزمة :

$$x+(-1-1+\sqrt{3})y-2(-1+\sqrt{3})z-(1+8(-1+\sqrt{3}))=0$$

$$\boxed{x+(-2+\sqrt{3})y+(2-2\sqrt{3})z-(-7+8\sqrt{3})=0}$$ 3

من أجل $\lambda=-1-\sqrt{3}$ ⟸

$$x+(-1-1-\sqrt{3})y-2(-1-\sqrt{3})z-(1+8(-1-\sqrt{3}))=0$$

$$\boxed{x+(-2-\sqrt{3})y+(2+2\sqrt{3})z-(-7-8\sqrt{3})=0}$$ 3

السؤال الرابع (25 درجة)

لدينا المنحني المعين بالمعادلات :

$$x = t\,e^{t+1} \quad , \quad y = 2\,e^{t+1} \quad , \quad z = e^{t^3+1}$$

1) أوجد معادلة المستقيم المماس لهذا المنحني في النقطة $t=-1$

2) أوجد معادلة المستوي الناظم لهذا المنحني عند نقطة تقاطعه مع المستوي yoz.

الحل :

1) لنوجد احداثيات النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ الموافقة لـ $t=-1$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= (-1)\,e^{-1+1} = -1 \\ y_0 &= 2\,e^{-1+1} = 2 \\ z_0 &= e^{(-1)^3+1} = 1 \end{aligned}\right\} M_0(-1,2,1) \quad 3$$

لنوجد المشتقات الجزئية :

$$\left.\begin{aligned} x'_t &= e^{t+1} + t\,e^{t+1} \\ y'_t &= 2\,e^{t+1} \\ z'_t &= 3t^2\,e^{t^3+1} \end{aligned}\right\} 3 \xrightarrow{t=-1} \left\{\begin{aligned} x'_0 &= 1-1=0 \\ y'_t &= 2 \\ z'_0 &= 3 \end{aligned}\right.$$

معادلة المستقيم المماس في $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x'_0} = \frac{y-y_0}{y'_0} = \frac{z-z_0}{z'_0}} \quad 5$$

$$\frac{x+1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x=-1 \\ 3y-2z-4=0 \end{cases}} \quad 3$$

2) لنوجد نقطة تقاطع هذا المنحني مع المستوي $yoz \Leftarrow x=0 \Leftarrow$

$$t\,e^{t+1}=0 \Longrightarrow t=0 \Longrightarrow y=2e \ , \ z=e \quad 3$$

نقطة التقاطع $(0,2e,e)$

معادلة المستوي الناظم في $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$\boxed{x'_0(x-x_0)+y'_0(y-y_0)+z'_0(z-z_0)=0} \quad 5$$

لدينا :

$$\left.\begin{aligned} x'_t &= e^{t+1} + t\,e^{t+1} \\ y'_t &= 2\,e^{t+1} \\ z'_t &= 3t^2\,e^{t^3+1} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{t=0} \left\{\begin{aligned} x'_0 &= e \\ y'_0 &= 2e \\ z'_0 &= 0 \end{aligned}\right.$$

معادلة المستوي الناظم في $(e,2e,0)$

$$e(x-0)+2e(y-2e)+0(z-e)=0 \quad 3$$

$$\boxed{ex+2ey+4e^2=0}$$

جامعة طرطوس
كلية العلــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة التحليلية
لطلاب الرياضيات–السنة الأولى
الدورة الاستثنائية 2015- 2016

المدة: ساعتين
الدرجة : 75

السؤال الأول (15 درجة):

لدينا السطح المعطى بالمعادلة: $4xy + 4xz - 4y - 4z - 1 = 0$

أوجد معادلة هذا السطح بعد اجراء انسحاب مناسب يحذف الحدود الخطية من المعادلة.

السؤال الثاني (20 درجة):

أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي و الخارجي للزاوية بين المستويين:

$$P_1 \equiv -x + 3y - 2z + 3 = 0$$
$$P_2 \equiv 2x - y + 3z - 7 = 0$$

السؤال الثالث (25 درجة):

اوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم:

$$D\begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ 3x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

على المستوي: $3x + 2y + z = 0$

السؤال الرابع (15 درجة):

أوجد معادلة المستوي المار من النقطتين $A(1,2,0)$, $B(3,0,-1)$ **و العمودي على المستوي :**

$$x + y - z - 5 = 0$$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول: (15 درجة)

لدينا السطح المعطى بالمعادلة: $4xy+4xz-4y-4z-1=0$

أوجد معادلة هذا السطح بعد إجراء انسحاب مناسب يحذف الحدود الخطية في المعادلة

الحل: لتعيين هذا الانسحاب:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0+X \\ y &= y_0+Y \\ z &= z_0+Z \end{aligned}\right\} \quad 6$$

نعوض في المعادلة:

$$4(x_0+X)(y_0+Y)+4(x_0+X)(z_0+Z)-4(y_0+Y)-4(z_0+Z)-1=0 \quad 3$$

$$4x_0y_0+4x_0Y+4y_0X+4XY+4x_0z_0+4x_0Z+4z_0X+4XZ-4y_0-4Y-4z_0-4Z-1=0$$

$$4XY+4XZ+4(y_0+z_0)X+4(x_0-1)Y+4(x_0-1)Z+4x_0y_0+4x_0z_0-4z_0-4y_0-1=0$$

نحذف الحدود الخطية

$$y_0+z_0=0 \Rightarrow y_0=-z_0$$

$$x_0-1=0 \Rightarrow x_0=1 \quad 3 \quad (1, a, -a)$$

نعوض بـ x_0 و y_0 و z_0:

$$4XY+4XZ+4a-4a+4a-4a-1=0$$

$$\Rightarrow \boxed{4XY+4XZ-1=0} \quad 3$$

السؤال الثاني (20 درجة)

أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي للزاوية بين المستويين:

$$P_1 = -x+3y-2z+3=0$$

$$P_2 = 2x-y+3z-7=0$$

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما من هذا المستوي المنصف ⇐

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{|\vec{w}_1|} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{|\vec{w}_2|} \quad 5$$

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{-x+3y-2z+3}{\sqrt{1+9+4}} = \pm \frac{2x-y+3z-7}{\sqrt{4+1+9}}$$

$$\Rightarrow -x+3y-2z+3 = \pm(2x-y+3z-7) \quad 3$$

نوجد الجداء السلمي لناظمي المستويين:

$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = -1(2)+3(-1)-2(3) = -2-3-6 = -11 < 0$ 3

(+) توافق المنصف الداخلي 3

(−) توافق المنصف الخارجي

$\Rightarrow -x+3y-2z+3 = 2x-y+3z-7$

$\boxed{3x-4y+5z-10=0}$ 3 المستوي المنصف الداخلي

$\Rightarrow -x+3y-2z+3 = -2x+y-3z+7$

$\boxed{x+2y+z-4=0}$ 3 المستوي المنصف الخارجي

السؤال الثالث (25 درجة)

أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم $D\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ 3x-y+2z-1=0 \end{cases}$

على المستوي $3x+2y+z=0$

الحل: لنوجد معادلة حزمة المستويات المارة من D

$P = P_1 + \lambda P_2$ 7

$(1+3\lambda)x + (2-\lambda)y + (-1+2\lambda)z - (2+\lambda) = 0$ 3

$\vec{w}(\lambda) = (1+3\lambda, 2-\lambda, -1+2\lambda)$

نختار من معادلة الحزمة المستوي المتعامد مع المستوي $3x+2y+z=0$

الذي ناظمه $\vec{w}(3,2,1)$ وبالتالي فإن $\vec{w}(\lambda)\cdot\vec{w}=0$ 3

$\vec{w}(\lambda)\cdot\vec{w} = 3(1+3\lambda)+2(2-\lambda)+(-1+2\lambda)=0$ 3

$= 3+9\lambda+4-2\lambda-1+2\lambda=0$

$9\lambda+6=0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{2}{3}}$ 3

نعوض قيمة λ في معادلة الحزمة:

$(1-2)x + (2+\frac{2}{3})y + (-1-\frac{4}{3})z - (2-\frac{2}{3}) = 0$ 3

$-x + \frac{8}{3}y - \frac{7}{3}z - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{3x-8y+7z+4=0}$

وبالتالي معادلتي المستقيم المطلوب (المسقط القائم) هي:

$$\begin{cases} 3x-8y+7z+4=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases}$$ 3

السؤال الرابع (15 درجة)

أوجد معادلة المستوي المار من النقطتين $A(1,2,0)$ و $B(3,0,-1)$ والعمودي على المستوي $x+y-z-5=0$

الحل: معادلة المستوي المار من نقطة معلومة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ والعمودي على $\vec{\omega}(a,b,c)$ هو:

$$P \equiv a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad 3$$

$B \in P \Leftarrow$ تحقق معادلة:

$$a(x-3)+b(y-0)+c(z+1)=0$$

$$\boxed{P \equiv a(x-3)+by+c(z+1)=0} \quad (1) \quad 3$$

$A \in P \Leftarrow$ تحقق معادلة:

$$a(1-3)+2b+c=0 \Rightarrow \boxed{2a-2b=c} \quad (2)$$

لدينا المستوي P عمودي على المستوي $x+y-z-5=0 \Leftarrow$ ناظميهما متعامدان

$$a\cdot 1+b\cdot 1+c(-1)=0 \Rightarrow \boxed{a+b=c} \quad (3) \quad 3$$

من (2) و (3) $\Leftarrow$

$$a+b=2a-2b \Rightarrow -a=-3b \Rightarrow \boxed{a=3b}$$

$$\xRightarrow{\text{من } (3)} c=3b+b=4b \;,\; \boxed{c=4b}$$

نعوض في (1)

$$3b(x-3)+by+4b(z+1)=0 \quad 3$$

نقسم على $b\neq 0$:

$$3(x-3)+y+4(z+1)=0$$

$$\boxed{3x+y+4z-5=0} \quad 3$$

وهي معادلة المستوي المطلوب

- طريقة أخرى: معادلة المستوي

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad 3$$

$A \in P \Leftarrow$

$$\boxed{a(x-1)+b(y-2)+cz=0} \quad (1) \quad 3$$

لنوجد ناظم المستوي المطلوب $\vec{\omega}(a,b,c)$ حيث $\overrightarrow{AB}(2,-2,-1)$ $\quad 3$

$$\vec{\omega}(a,b,c)=\overrightarrow{AB}\times\vec{N} \quad ; \quad \vec{N}(1,1,-1) \text{ ناظم المستوي المعطى}$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k} \quad 3$$

نعوض في (1):

$$3(x-1)+1(y-2)+4z=0$$

$$\boxed{3x+y+4z-5=0} \quad 3$$

جامعة طرطوس	امتحان مقرر الهندسة التحليلية	
كلية العلـــوم	لطلاب الرياضيات–السنة الأولى	المدة: ساعتين
قسم الرياضيات	الدورة الأولى 2015- 2016	الدرجة : 75

السؤال الأول (15 درجة):

1)أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $M(2,-1,0)$ و المعامد للمستقيم المار من النقطتين $M_2(-2,2,1),\ M_1(1,0,-2)$

2) أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المحدد بالفصل المشترك للمستويين:

$$P_1 \equiv 2x + y - z + 1 = 0$$
$$P_2 \equiv -x + y + z - 5 = 0$$

السؤال الثاني (20 درجة)

أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي و الخارجي للزاوية بين المستويين ;

$$P_1 \equiv -x + 3y - 2z + 3 = 0$$
$$P_2 \equiv 2x - y + 3z - 7 = 0$$

السؤال الثالث (25 درجة):

أوجد معادلات المستقيمات التي تقطع المستقيم:

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y+6}{2} = \frac{z+7}{1}$$

و تصنع معه زاوية 60 درجة وتقع في المستوي:

$$P \equiv x + y + 2z + 1 = 0$$

السؤال الرابع (15 درجة):

عين نوع السطح و مركزه و أنصاف أقطار محاوره و المعرف بالمعادلة:

$$2x^2 - 2y^2 + 4z^2 - 8x - 6y + 12z - 10 = 0$$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (15 درجة)

1) أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $M(2,-1,0)$ والمعامد للمستقيم المار من النقطتين $M_1(1,0,-2)$ و $M_2(-2,2,1)$

2) أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المحدد بالفصل المشترك للمستويين:

$$P_1 = 2x + y - z + 1 = 0$$
$$P_2 = -x + y + z - 5 = 0$$

الحل: 1) معادلة المستوي المار في النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ والمعامد لـ $\vec{\omega}(a,b,c)$:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0 \quad 3$$

المستوي يمر من $M(2,-1,0) \Leftarrow$

$$a(x-2) + b(y+1) + cz = 0$$

المستوي معامد للمستقيم المار من النقطتين M_1, M_2 أي أن ناظم المستوي له نفس منحى $\overrightarrow{M_1M_2} \Leftarrow$

$$\vec{\omega}(a,b,c) = \overrightarrow{M_1M_2} = (-2-1, 2-0, 1+2) = (-3, 2, 3) \quad 2$$

معادلة المستوي المطلوب:

$$-3(x-2) + 2(y+1) + 3z = 0$$
$$-3x + 2y + 3z + 6 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{3x - 2y - 3z - 8 = 0} \quad 2$$

2) المعادلات الوسيطية للمستقيم:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$

• لنوجد متجه توجيه المستقيم $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$

$$\vec{v} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \quad , \quad \vec{v}(2,-1,3) \quad 3$$

• لنوجد نقطة ما من المستقيم نأخذ مثلاً $x=0 \Leftarrow$

$$\left.\begin{matrix} y - z + 1 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2y - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 2} \quad , \quad 2 - z + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{z = 3}$$

النقطة: $(0, 2, 3)$

المعادلات الوسيطية:

$$\boxed{\begin{matrix} x = 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{matrix}} \quad 2$$

السؤال الثاني (20 درجة)

أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي للزاوية بين المستويين:

$$P_1 \equiv -x+3y-2z+3=0$$

$$P_2 \equiv 2x-y+3z-7=0$$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة ما في هذا المستوي المنصف $\Leftarrow$

$$\frac{|P_1(x,y,z)|}{|\vec{w}_1|} = \frac{|P_2(x,y,z)|}{|\vec{w}_2|} \quad (5)$$

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\frac{-x+3y-2z+3}{\sqrt{1+9+4}} = \pm \frac{2x-y+3z-7}{\sqrt{1+9+4}}$$

$$-x+3y-2z+3 = \pm(2x-y+3z-7)$$

نوجد الجداء السلمي للناظمين:

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = -1(2)+3(-1)-2(3) = -2-3-6 = -11<0 \quad (3)$$

$(+)$ توافق المنصف الداخلي (3)

$(-)$ توافق المنصف الخارجي (3)

$$\Rightarrow -x+3y-2z+3 = 2x-y+3z-7$$

$\boxed{3x-4y+5z-10=0}$ (3) المستوي المنصف الداخلي

$$\Rightarrow -x+3y-2z+3 = -2x+y-3z+7$$

$\boxed{x+2y+z-4=0}$ (3) المستوي المنصف الخارجي

السؤال الثالث (25 درجة)

أوجد معادلات المستقيمات التي تقطع $\frac{x+5}{2}=\frac{y+6}{2}=\frac{z+7}{1}$ وتصنع معه زاوية 60 درجة وتقع في المستوي $x+y+2z+1=0$

الحل: نكتب المستقيم كتقاطع مستويين:

$$D=\begin{cases} x-y-1=0 \\ y-2z-8=0 \end{cases}$$ 4

إذا الطالب كتب أحد المستويات هو: $x-2z-9=0$

لنوجد معادلة حزمة المستويات المارة من المستقيم D:

$$P=P_1+\lambda P_2 = x-y-1+\lambda(y-2z-8)=0$$ 4

$$= x+(-1+\lambda)y-2\lambda z-(1+8\lambda)=0$$

ناظم الحزمة $\vec{\omega}_\lambda(1\,,\,-1+\lambda\,,\,-2\lambda)$

نختار من هذه الحزمة المستوي الذي يصنع زاوية 60° مع المستوي المعطى الذي ناظمه $\vec{\omega}(1,1,2)$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{\omega}_\lambda\cdot\vec{\omega}}{|\vec{\omega}_\lambda|\cdot|\vec{\omega}|} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1\cdot 1+1(-1+\lambda)+2(-2\lambda)}{\sqrt{1+(-1+\lambda)^2+4\lambda^2}\sqrt{1+1+4}}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1-1+\lambda-4\lambda}{\sqrt{6}\sqrt{1-2\lambda+\lambda^2+4\lambda^2+1}}=\frac{-3\lambda}{\sqrt{6}\sqrt{5\lambda^2-2\lambda+2}}$$ 4

$$\Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{9\lambda^2}{6(5\lambda^2-2\lambda+2)} \Rightarrow 30\lambda^2-12\lambda+12=36\lambda^2$$

$$\Rightarrow 6\lambda^2+12\lambda-12=0 \Rightarrow \boxed{\lambda^2+2\lambda-2=0}$$ 1

$$\Delta=4+8=12 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\mp 2\sqrt{3} \quad , \quad \lambda_{1,2}=\frac{-2\mp 2\sqrt{3}}{2}=-1\mp\sqrt{3}$$ 4

• من أجل $\lambda_1=-1+\sqrt{3}$ نعوض في معادلات الحزمة:

معادلة مستوي (1)

$$x+(-2+\sqrt{3})y+(2-2\sqrt{3})z-(-7+8\sqrt{3})=0$$

وبالتالي معادلة المستقيم الأول

$$D_1\begin{cases} x+(-2+\sqrt{3})y+(2-2\sqrt{3})z+(7-8\sqrt{3})=0 \\ x+y+2z+1=0 \end{cases}$$ 4

• من أجل $\lambda_2=-1-\sqrt{3}$ نعوض في معادلات الحزمة:

معادلة مستوي (2)

$$x+(-2-\sqrt{3})y+(2+2\sqrt{3})z+(7+8\sqrt{3})=0$$

معادلة المستقيم الثاني

$$D_2\begin{cases} x+(-2-\sqrt{3})y+(2+2\sqrt{3})z+(7+8\sqrt{3})=0 \\ x+y+2z+1=0 \end{cases}$$ 4

السؤال الرابع (5 درجات)

عين نوع السطح ومركزه وأنصاف أقطار محاوره والمعرف بالمعادلة :

$$2x^2-2y^2+4z^2-8x-6y+12z-10=0$$

الحل : بالاتمام إلى مربع كامل :

$$2(x^2-4x+4-4)-2\left(y^2+3y+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+4\left(z^2+3z+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)-10=0$$

5

$$2(x-2)^2-2\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+4\left(z+\frac{3}{2}\right)^2-8+\frac{9}{2}-9-10=0$$

$$2(x-2)^2-2\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+4\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{45}{2}$$

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{\frac{45}{4}}-\frac{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{45}{4}}+\frac{\left(z+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{45}{8}}=1}$$

5

معادلة مجسم قطع زائد ذو فرع واحد (طية واحدة)

مركزه $\left(2,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ وأنصاف أقطاره $\sqrt{\frac{45}{4}},\sqrt{\frac{45}{4}},\sqrt{\frac{45}{8}}$

5

امتحان مقرر الهندسة تحليلية

كلية العلـوم الثانية	لطلاب الرياضيات–السنة الأولى	المدة: ساعتين
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٤-٢٠١٥	الدرجة : ٧٥

السؤال الأول (١٥ درجة):

احسب بعد كل من النقطتين $A\left(3,1,-1\right)$ و $B\left(2,1,4\right)$ عن المستوي:

$$P \equiv 4x - y + 8z - 9 = 0$$

ثم عين موقع كل منهما بالنسبة لهذا المستوي.

السؤال الثاني (١٥ درجة):

أوجد معادلة المستوي الذي يمر بخط تقاطع المستويين:

$$P_1 \equiv 2x + 3y + 4z - 5 = 0$$
$$P_2 \equiv x + y + z - 1 = 0$$

ويمر من النقطة $M\left(2,1,3\right)$

السؤال الثالث (٢٥ درجة):

أوجد معادلتي العمود المشترك للمستقيمين:

$$D_1 \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases} , \quad D_2 \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

أوجد معادلة المستوي الناظم و معادلتي المستقيم المماس للمنحني المعين بالمعادلات:

$$x = 3\cos 2t \quad , y = 2\sin 2t \quad , z = 2t + 1$$

عند النقطة الموافقة لـ $t = 0$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (5 درجات)

احسب بعد كل من النقطتين $A(3,1,-1)$ و $B(2,1,4)$ عن المستوي:

$$P \equiv 4x - y + 8z - 9 = 0$$

ثم عين موقع كل منهما بالنسبة لهذا المستوي

3

الحل:

$$\delta_A = \frac{|P(x_0,y_0,z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|4(3)-1+8(-1)-9|}{\sqrt{16+1+64}} = \frac{|12-1-8-9|}{\sqrt{81}} = \frac{|-6|}{9} = \frac{6}{9}$$ 5

وهو بعد A عن P .

$$\delta_B = \frac{|4(2)-1+8(4)-9|}{\sqrt{16+1+64}} = \frac{|8-1+32-9|}{\sqrt{81}} = \frac{|30|}{9} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$$ 5

نلاحظ أن البعد الجبري لكل منهما عن المستوي بإشارتين مختلفتين وبالتالي A و B تقعان في جهتين مختلفتين بالنسبة لـ P . 2

السؤال الثاني (5 درجات)

أوجد معادلة المستوي الذي يمر بتقاطع المستويين:

$$P_1 \equiv 2x+3y+4z-5=0$$
$$P_2 \equiv x+y+z-1=0$$

ويمر من النقطة $M_0(2,1,3)$

الحل:

$$P = P_1 + \lambda P_2$$ 5
$$= 2x+3y+4z-5+\lambda x+\lambda y+\lambda z-\lambda=0$$
$$=(2+\lambda)x+(3+\lambda)y+(4+\lambda)z-(5+\lambda)=0$$

نختار من هذه الحزمة المستوي المار من النقطة $M(2,1,3)$ ← النقطة تحقق معادلة الحزمة

$$\Rightarrow 2(2+\lambda)+1(3+\lambda)+3(4+\lambda)-(5+\lambda)=0$$
$$2\lambda+\lambda+3\lambda-\lambda+4+3+12-5=0$$
$$5\lambda+14=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=-\frac{14}{5}}$$ 5

نعوض في معادلة الحزمة:

$$\left(2-\frac{14}{5}\right)x+\left(3-\frac{14}{5}\right)y+\left(4-\frac{14}{5}\right)z-\left(5-\frac{14}{5}\right)=0$$
$$-\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}y+\frac{6}{5}z-\frac{11}{5}=0 \Rightarrow \boxed{-4x+y+6z-11=0}$$ 5

إذا الطالب وضع $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ يأخذ 5 علامات

السؤال الثالث (25 درجة)

أوجد معادلتي العمود المشترك للمستقيمين :

$$D_1 = \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x+z-4=0 \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-2z-2=0 \end{cases}$$

الحل : لنوجد منحى المستقيم D_1 :

$$\vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \quad 3$$

$$\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \quad 3$$

وبالتالي منحى المستقيم المطلوب هو :

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k} \quad 2$$

نأخذ حزمة المستويات المارة من D_1 والموازية لـ $\vec{v}$:

$$(2+\lambda)x + y + \lambda z - (1+4\lambda) = 0 \quad 2$$

نختار من هذه الحزمة المستوي الموازي لـ $\vec{v}$ $\Leftarrow$ الجداء السلمي لـ $\vec{v}$ مع ناظم الحزمة معدوماً :

$$(2+\lambda)(1) + 1(-3) + \lambda(7) = 0 \Rightarrow 2+\lambda-3+7\lambda = 0 \Rightarrow 8\lambda = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{8}} \quad 2$$

نعوض في معادلة الحزمة :

$$\left(2+\frac{1}{8}\right)x + y + \frac{1}{8}z - \left(1+\frac{4}{8}\right) = 0$$

$$\frac{17x}{8} + y + \frac{1}{8}z - \frac{12}{8} = 0 \Rightarrow \boxed{P_1 = 17x + 8y + z - 12 = 0} \ (1) \quad 3$$

لنوجد معادلة حزمة المستويات المارة من D_2 :

$$(1+\lambda)x - y + (1-2\lambda)z - 2\lambda = 0 \quad 2$$

نختار من هذه الحزمة معادلة المستوي الموازي لـ $\vec{v}$ $\Leftarrow$ الجداء السلمي لـ $\vec{v}$ مع ناظم هذه الحزمة معدوماً :

$$(1+\lambda)(1) + 3 + (1-2\lambda)(7) = 0 \Rightarrow 1+\lambda+3+7-14\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -13\lambda = -10 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{11}{13}} \quad 2$$

نعوض في معادلة الحزمة :

$$\left(1+\frac{11}{13}\right)x - y + \left(1-\frac{22}{13}\right)z - \frac{22}{13} = 0 \Rightarrow \frac{24}{13}x - y - \frac{9}{13}z - \frac{22}{13} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{P_2 = 24x - 13y - 9z - 22 = 0} \ (2) \quad 3$$

(1) و (2) تمثلان معادلات المستقيم المطلوب، وهو العمود المشترك على P_1, P_2 2

إذا الطالب وضع معادلة المستوي يأخذ 2 علامة فقط

السؤال الرابع (20 درجة)

أوجد معادلة المستوي الناظم ومعادلتي المستقيم المماس للمنحني المعين بالمعادلات الوسيطية:

$$x = 3\cos 2t \quad , \quad y = 2\sin 2t \quad , \quad z = 2t+1$$

عند النقطة الموافقة لـ $t=0$.

الحل:

$t=0 \Longrightarrow M_0(3,0,1)$ 3

$$\left.\begin{array}{l} x'_t = -6\sin 2t \\ y'_t = 4\cos 2t \\ z'_t = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{من أجل } t=0} \left\{\begin{array}{l} x'_{t=0} = x'_0 = 0 \\ y'_0 = 4 \\ z'_0 = 2 \end{array}\right.$$

3 3 $\vec{v}(0,4,2)$

معادلتي المستقيم المماس

$$\frac{x-x_0}{x'_0} = \frac{y-y_0}{y'_0} = \frac{z-z_0}{z'_0}$$ 3

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y-0}{4} = \frac{z-1}{2} \qquad \left\{\begin{array}{l} x-3=0 \\ \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow 2y-4z+4=0 \end{array}\right.$$ 3

أما معادلة المستوي الناظم:

$$\boxed{x'_0(x-x_0) + y'_0(y-y_0) + z'_0(z-z_0) = 0}$$ 3

$$0(x-3) + 4(y-0) + 2(z-1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{4y + 2z - 2 = 0}$$ 2

كلية العلــوم الثانية
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الهندسة تحليلية
لطلاب الرياضيات–السنة الأولى
الدورة الفصلية الأولى ٢٠١٤- ٢٠١٥

المدة: ساعتين
الدرجة : ٧٥

السؤال الأول (١٥ درجة):

بين أن المستويين التاليين متوازيين ثم احسب البعد بينهما:

$$P_1 \equiv 2x - 3y + 6z - 4 = 0$$

$$P_2 \equiv -x + \frac{3}{2}y - 3z + 5 = 0$$

السؤال الثاني (١٥ درجة):

أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي و الخارجي لزاوية بين المستويين:

$$P_1 \equiv 2x + 2y - z + 1 = 0$$

$$P_2 \equiv -x - 2y + 2z + 3 = 0$$

السؤال الثالث (١٥ درجة):

أوجد معادلات المستقيمات التي تقطع المستقيم: $\frac{x+5}{2} = \frac{y+6}{2} = \frac{z+7}{1}$

و تصنع معه زاوية 60 **درجة وتقع في المستوي:** $x + y + 2z + 1 = 0$

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

أوجد معادلة المستوي المماس و معادلتي المستقيم الناظم للسطح المعطى ديكارتياً:

$$F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 12xz + 16 = 0$$

في النقطة $M_0(2,1,-1)$

السؤال الخامس (١٠ درجات):

ما نوع السطح المعرف بالمعادلة:

$$x^2 + 16y^2 + z^2 - 4x + 32y - 5 = 0$$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

امتحان الهندسة التحليلية لطلاب السنة الأولى رياضيات الفصل الأول 2014-2015

السؤال الأول (١٥ درجة)

بين أن المستويين التاليين متوازيين ثم احسب البعد بينهما:

$P_1 \equiv 2x-3y+6z-4=0$

$P_2 \equiv -x+\frac{3}{2}y-3z+5=0$

الحل: المستويين P_1 و P_2 متوازيين لأن

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}, \quad \frac{2}{-1}=\frac{-3}{\frac{3}{2}}=\frac{6}{-3}=-2$$ 5

لإيجاد البعد بينهما: إذا الطالب أوجد الجداء الخارجي لـ $\vec{w_1}$ و $\vec{w_2}$ يساوي الصفر يأخذ 5 د/

طريقة أولى: نوجد المعادلة الناظمية لكلا المستويين:

المعادلة الناظمية الأولى: $|\vec{w_1}|=\sqrt{4+9+36}=7$

$$\boxed{\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y+\frac{6}{7}z-\frac{4}{7}=0}$$ 3

وبالتالي بعد مبدأ الإحداثيات عن P_1 هو $d_1=\frac{4}{7}$ لو الطالب وضع فقط d_1 يأخذ 3

المعادلة الناظمية الثانية (للمستوي الثاني):

$$2x-3y+6z-10=0, \quad |\vec{w_2}|=\sqrt{4+9+36}=7$$

$$\boxed{\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y+\frac{6}{7}z-\frac{10}{7}=0}$$ 3

وبالتالي بعد مبدأ الإحداثيات عن P_2 هو $d_2=\frac{10}{7}$ لو الطالب وضع d_2 يأخذ 3

نلاحظ أن d_1 و d_2 من نفس الإشارة وبالتالي فإن مبدأ الإحداثيات يقع من جهة واحدة من المستويين

وبالتالي البعد بين المستويين هو طرح البعدين:

$$\boxed{d=\frac{10}{7}-\frac{4}{7}=\frac{6}{7}}$$

طريقة ثانية:

نأخذ نقطة من المستوي الأول نفرض $y=z=0 \Leftarrow x=2$ النقطة $M_0(2,0,0)$ 3

ثم نحسب بعد النقطة M_0 عن المستوي P_2

$$S=\frac{|P_2(M_0)|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}=\frac{|2\times 2+0+0-10|}{7}=\frac{|-6|}{7}=\frac{6}{7}$$ 4

3

السؤال الثاني (٥ درجات)

أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية بين المستويين

$P_1 = 2x+2y-z+1=0$

$P_2 = -x-2y+2z+3=0$

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة كيفية من المستوي المنصف وبالتالي يكون

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

5

$$\frac{2x+2y-z+1}{\sqrt{4+4+1}} = \pm\frac{-x-2y+2z+3}{\sqrt{1+4+4}} \Rightarrow 2x+2y-z+1=\pm(-x-2y+2z+3)$$

نأخذ الجداء السلمي للناظمين:

$$\vec{w}_1\cdot\vec{w}_2 = 2(-1)+2(-2)-(2) = -2-4-2 = -8<0$$

وبالتالي (+) توافق المنصف الداخلي:

$2x+2y-z+1 = -x-2y+2z+3$ المستوي المنصف الداخلي

$$\Rightarrow \boxed{3x+4y-3z-2=0}$$

والإشارة (-) توافق المنصف الخارجي

$2x+2y-z+1 = +x+2y-2z-3$ المستوي المنصف الخارجي

$$\Rightarrow \boxed{x+z+4=0}$$

السؤال الثالث: (٥ درجات) أوجد معادلات المستويات التي تقطع المستقيم $\frac{x+5}{2}=\frac{y+6}{2}=\frac{z+7}{1}$ وتصنع معه زاوية 60 درجة وتقطع في المستوي $x+y+2z+1=0$

الحل: معادلتي المستقيم

$$D=\begin{cases} x-y-1=0 \\ y-2z-8=0 \end{cases}$$

معادلة حزمة المستويات المارة بالمستقيم D هي $P_1+\lambda P_2=0$

$$P_1+\lambda P_2 = x-y-1+\lambda y-2\lambda z-8\lambda = \boxed{x+(-1+\lambda)y-2\lambda z-(1+8\lambda)=0}$$ 2

ناظم هذه الحزمة هو $\vec{N}_\lambda(1,-1+\lambda,-2\lambda)$

نختار من هذه الحزمة المستوي الذي يصنع زاوية 60° مع المستوي المعطى أي أن $\vec{N}_\lambda$ و $\vec{N}(1,1,2)$ يصنعان زاوية 60°

2 $$\cos\theta = \frac{\vec{N}_\lambda\cdot\vec{N}}{|\vec{N}_\lambda|\cdot|\vec{N}|} \Rightarrow \cos 60 = \frac12 = \frac{1+(-1+\lambda)-4\lambda}{\sqrt{1+(-1+\lambda)^2+4\lambda^2}\sqrt{1+1+4}} = \frac{-3\lambda}{\sqrt6\sqrt{1+(1-2\lambda+\lambda^2)+4\lambda^2}}$$

$$\frac12 = \frac{-3\lambda}{\sqrt6\sqrt{2-2\lambda+5\lambda^2}} \xRightarrow{\text{بالتربيع}} 6(2-2\lambda+5\lambda^2)=36\lambda^2 \Rightarrow 6\lambda^2+12\lambda-12=0$$

$$\Delta=4+8=12 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\pm2\sqrt3 \,,\quad \lambda_{1,2}=\frac{-2\mp\sqrt{\Delta}}{2}\,,\quad \boxed{\lambda_{1,2}=-1\mp\sqrt3}$$ 2

نعوض $\lambda_1=-1+\sqrt3$ في معادلات الحزمة $\Leftarrow$

D_1 المستقيم الأول
$$\begin{cases} x+(-2+\sqrt3)y-2(-1+\sqrt3)z-(-7+8\sqrt3)=0 \\ x+y+2z+1=0 \quad \text{المستوي المعطى} \end{cases}$$ 2

نعوض $\lambda_2=-1-\sqrt3$ في معادلات الحزمة $\Leftarrow$

المستقيم الثاني D_2
$$\begin{cases} x-(2+\sqrt3)y+2(1+\sqrt3)z+(7+8\sqrt3)=0 \\ x+y+2z+1=0 \quad \text{المستوي المعطى} \end{cases}$$ 2

السؤال الرابع (٢٠ درجة)

أوجد معادلة المستوي المماس ومعادلة المستقيم الناظم عند النقطة $(2,1,-1)$ للسطح :

$$F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 12xz + 16 = 0$$

الحل :

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= 2x + 12z \\ F'_y &= 4y \\ F'_z &= 12z + 12x \end{aligned}\right\}\ 3$$

$$\begin{aligned} F'_{x_0} &= 2(2) + 12(-1) = -8 \\ F'_{y_0} &= 4(1) = 4 \\ F'_{z_0} &= 12(-1) + 12(2) = 12 \end{aligned}\quad 1$$

معادلة المستوي المماس

$$\boxed{F'_{x_0}(x - x_0) + F'_{y_0}(y - y_0) + F'_{z_0}(z - z_0) = 0}\quad 5$$

$$-8(x-2) + 4(y-1) + 12(z+1) = 0$$

$$-8x + 16 + 4y - 4 + 12z + 12 = 0 \Rightarrow -8x + 4y + 12z + 24 = 0$$

$$\boxed{2x - y - 3z - 6 = 0}\quad 3$$

وهي معادلة المستوي المماس

- معادلة المستقيم الناظم :

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F'_{x_0}} = \frac{y - y_0}{F'_{y_0}} = \frac{z - z_0}{F'_{z_0}}}$$

$$\boxed{\frac{x-2}{-8} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{12}}$$

وهي معادلة المستقيم الناظم

السؤال الخامس : (١٠ درجات)

نوع السطح الذي يعرف بالمعادلة :

$$x^2 + 16y^2 + z^2 - 4x + 32y - 5 = 0$$

الحل :

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + 16(y^2 + 2y + 1 - 1) + z^2 - 5 = 0$$

$$(x-2)^2 + 16(y+1)^2 + z^2 - 4 - 16 - 5 = 0\quad 5$$

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{\frac{25}{16}} + \frac{z^2}{25} = 1}$$

5 مجسم قطع ناقص مركزه $(2,-1,0)$