ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثانية

اسئلة دوراة محلولة

بنى جبرية ٢

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة)

بمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثانية- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الأولى | اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (30 درجة) **1-** عرف العنصر القاسم الفعلي للصفر ثم بين أنه إذا كانت $(R,+,.)$ حلقة ما، وإذا كانت $C(R)=\{a\in R \mid ax=xa \quad \forall x\in R\}$. فإن $C(R)$ تكون حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,.)$.

2 -لتكن $(R,+,.)$ حلقة ذات عنصر وحدة 1، ولتكن Δ و Δ' عمليتين جبريتين معرفتين على R بالشكل:

$$x\Delta y=x+y+1 \qquad \& \qquad x\Delta' y=x+y+x.y$$

من أجل كل x و y من R. برهن أن الحلقتين $(R,+,.)$ و (R,Δ,Δ') ايزومورفيزميتان.

السؤال الثاني: (30 درجة) **1-** عرف المنطقة التكاملية، ثم برهن أنه إذا كان f هومومورفيزم لحلقة ما $(A,+,.)$ في حلقة ما $(B,T,*)$، فإن الصورة العكسية وفق f لأي مثالية B_1 من الحلقة $(B,T,*)$ هي مثالية من الحلقة $(A,+,.)$.

2- لتكن B_1 , B_2 مثاليتين من حلقة تبديلية $(A,+,.)$، برهن أن $B_1 : B_2$ مثالية من الحلقة $(A,+,.)$ تحوي B_1 .

السؤال الثالث: (30 درجة) **1-** عرف مميز حلقة، ثم برهن أنه إذا كانت $(R,+,.)$ حلقة واحدية عنصر الوحدة فيها 1. فإن:

$$char(R)=n>0 \Leftrightarrow n \text{ أصغر عدد صحيح موجب يحقق } n.1=0$$

2- لتكن $(A,+,.)$ منطقة تكاملية، وليكن $a\neq 0 , b\neq 0$ عنصرين من A . بين أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون a , b شركين في A هو أن يكون كل من العنصرين a , b قاسماً للآخر في A .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2025-2-9

A to Z

جامعة تشرين - كلية العلوم - قسم الرياضيات
السنة الرابعة - الدورة الفصلية الأولى
فصلية الخريف

السؤال الأول: [30]

1) العنصر a في الحلقة $(R,+,\cdot)$ يسمى ما يسمى بالمقسوم للصفر إذا كان $a\neq 0$ وإذا وجد عنصر $b\neq 0$ في الحلقة R بحيث:

$$a\cdot b = 0 \quad \text{أو} \quad b\cdot a = 0$$

3/ * أ) واضح أن $C(R)\subseteq R$ ، وكذلك $C(R)\neq\emptyset$ لأن $0\in C(R)$ من أجل كل x في R، وبالتالي $0=x0$

ب) $\forall a_1,a_2\in C(R) \Rightarrow a_1x = xa_1$ و $a_2x = xa_2$ $\forall x\in R$

$\Rightarrow (a_1-a_2)x = a_1x - a_2x = xa_1 - xa_2 = x(a_1-a_2)$

$\Rightarrow a_1-a_2\in C(R)$

ج) $\forall a_1,a_2\in C(R) \Rightarrow a_1x = xa_1$ & $a_2x = xa_2$ $\forall x\in R$

$\Rightarrow (a_1\cdot a_2)x = a_1(xa_2) = (a_1x)a_2 = (xa_1)a_2$

$= x(a_1\cdot a_2) \Rightarrow a_1\cdot a_2\in C(R)$

2) لنعرف التطبيق $f:(R,\Delta,\Delta)\longrightarrow(R,+,\cdot)$ بالشكل

$f(x) = x+1$ $\forall x\in R$

أ) $\forall x_1,x_2\in R \Rightarrow f(x_1\Delta x_2) = f(x_1+x_2+1) = (x_1+x_2+1)+1$

$= (x_1+1)+(x_2+1) = f(x_1)+f(x_2)$

ب) $\forall x_1,x_2\in R \Rightarrow f(x_1\Delta x_2) = f(x_1+x_2+x_1x_2)$

$= x_1+x_2+x_1x_2+1 = (x_1+1)(x_2+1) = f(x_1)\cdot f(x_2)$

ج) $\forall x_1,x_2\in R$; $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1+1 = x_2+1 \Rightarrow x_1=x_2$

وبالتالي f متباين

د) $\forall y\in R \Rightarrow \exists y-1\in R$; $f(y-1) = y-1+1 = y$ ، f غامر

من (أ)، (ب) و (د) نجد أن f أيزومورفيزم وهنه $(R,+,\cdot)$ و (R,Δ,Δ) أيزومورفيزمان

السؤال الثاني: [30]

1) المنطقة المتكاملية هي حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة لا تملك مواسم فعلية للصفر.

2) * أ) واضح أن $f^{-1}(B_1)\subseteq A$ و $f^{-1}(B_1)\neq\emptyset$ لأن $0'\in B_1$ وبالتالي $f^{-1}(0')\in f^{-1}(B_1)$ أي $0\in f^{-1}(B_1)$

ب) $\forall x_1,x_2\in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x_1)\in B_1$ و $f(x_2)\in B_2$

$\Rightarrow f(x_1)\,T\,(-f(x_2))\in B_1$

$\Rightarrow f(x_1)\,T\,f(-x_2)\in B_1$

$= f(x_1-x_2)\in B_1 \Rightarrow x_1-x_2\in f^{-1}(B_1)$

A to Z

ب)
$\forall a \in A, x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x) \in B_1 \Rightarrow f(a) \in B$

$\Rightarrow f(x) * f(a) \in B_1 \Rightarrow f(x,a) \in B_1 \Rightarrow x.a \in f^{-1}(B_1)$

$\Rightarrow f(a) * f(x) \in B_1 \Rightarrow f(a.x) \in B_1 \Rightarrow a.x \in f^{-1}(B_1)$

ما سبق نجد أن $f^{-1}(B_1)$ مثالية في الحلقة $(A,+,.)$.

2) نبين واضح أن $B_1 : B_2 \subseteq A$ لأنه إذا كان $B_1 : B_2 \neq \emptyset$ و $B_1 : B_2$ مثالية في A.

3) نبين:

$0 B_2 \subseteq \{0\} \subseteq B_1 \Rightarrow 0 \in B_1 : B_2 \Rightarrow B_1 : B_2 \neq \emptyset$

ب) إذا كان x, x' عنصرين ما من $B_1 : B_2$ ، نبين:

$x . B_2 \subseteq B_1$ و $x' B_2 \subseteq B_1 \Rightarrow x B_2 - x' B_2 \subseteq B_1$

$\Rightarrow (x - x') B_2 \subseteq B_1 \Rightarrow x_1 - x_2 \in B_1 : B_2$

4) ليكن y عنصر ما في $B_1 : B_2$ و a عنصر ما في A، نبين:

$y \in B_1 : B_2 \Rightarrow y \cdot B_2 \subseteq B_1 \Rightarrow a(y B_2) \subseteq a B_1 \subseteq B_1$

$\Rightarrow (ay) B_2 \subseteq B_1 \Rightarrow ay \in B_1 : B_2$

5) $\forall b_1 \in B_1 \Rightarrow b_1 \cdot B_2 \subseteq B_1 \rightarrow b_1 \in B_1 : B_2 \Rightarrow B_1 \subseteq B_1 : B_2$

في (1) و(ب) و(ج) و(د) نجد أن $B_1 : B_2$ مثالية في الحلقة A تحوي B_1.

السؤال الثالث:

1) نقول عن العدد الصحيح الموجب n أنه مميز الحلقة R، ونكتب $n = char(R)$ إذا تحقق:

3) إذا كان n أصغر عدد صحيح موجب تحقق العلاقة $na = 0$ لكل a في R.

$\Rightarrow$) لنفرض أن $char(R) = n > 0$، وبالتالي فإن $na = 0$ من أجل كل a في $(R,+,.)$، ونبين الآن أنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث أن $0 < m < n$، وتحقق $m1 = 0$، ونبين:

$ma = m(1.a) = (m.1).a = 0.a = 0 \quad \forall a \in R$

وهذا تناقض مع كون $char(R) = n$، وبالتالي n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $n.1 = 0$.

$\Leftarrow$) لنفرض أن n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $n.1 = 0$.

من أجل كل عنصر a في $(R,+,.)$، فإن:

$na = n(1.a) = (n.1)a = 0.a = 0$

ومنه فإن $char(R) = n$.

حل

3/

لزوم الشرط: الفرض: a و b شريكان في A

المطلب: a يقسم b و b يقسم a في A

البرهان واضح من كون a, b شريكان في A.

كفاية الشرط: الفرض: a يقسم b و b يقسم a في A.

المطلب: a و b شريكان في A.

بما أن كلاً من العنصرين a و b قاسم للآخر في A، فإنه يمكن إيجاد عنصرين c_1 و c_2 في A بحيث يكون:

$a = b \cdot c_1$ و $b = a c_2$

$\Rightarrow a = a c_2 c_1 \Rightarrow a - a c_2 c_1 = 0 \Rightarrow a(1 - c_2 c_1) = 0$

$\Rightarrow 1 - c_2 c_1 = 0$ و $a \neq 0$ لأن A منطقة تكاملية!

$\Rightarrow c_2 c_1 = 1$

إذا العنصران c_1 و c_2 قاسمان للعنصر 1 في A، وبالتالي العلاقتان

$a = b c_1$ و $b = a c_2$

تبين لنا أن a و b شريكان في A.

A to Z

الجمهورية العربية السورية — امتحان بنى جبرية 2 — المدة ساعتان

جامعة طرطوس — لطلاب السنة الرابعة- رياضيات — الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم — الدورة التكميلية — اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (30 درجة) **1-** إذا كانت $(A,+,.)$ و $(B,T,*)$ حلقتين ما، ولنرمز لصفر الحلقة $(A,+,.)$ بـ 0 ولصفر الحلقة $(B,T,*)$ بـ $0'$ ، وليكن f هوموموفيزم للحلقة $(A,+,.)$ في الحلقة $(B,T,*)$. بين أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون f مونوموموفيزم هو أن يكون $Kerf=\{0\}$.

2- عرف العنصر الجامد، ثم برهن أنه إذا كانت $(A,+,.)$ منطقة تكاملية و a,b عنصرين من A بحيث أن $a^5=b^5$ & $a^7=b^7$ فإن $a=b$.

السؤال الثاني: (30 درجة)

1 -عرف المثالية الرئيسية، ثم برهن أنه إذا كانت B_1 ، B_2 مثاليتين من حلقة ما $(A,+,.)$ فإن B_1+B_2 مثالية من الحلقة $(A,+,.)$.

2- لتكن $(\mathbb{Z},+,.)$ حلقة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتين. برهن أن $(\mathbb{Z},+,.)$ حلقة مثاليات رئيسية.

السؤال الثالث: (30 درجة)

1 - عرف مميز حلقة، ثم برهن أنه إذا كانت $(R,+,.)$ منطقة تكاملية فإن جميع العناصر غير الصفرية فيها تملك نفس الرتبة الجمعية.

2- برهن أنه إذا كانت $(A,+,.)$ حلقة اقليدية، وكان $a\neq 0$ و $b\neq 0$ عنصرين من A ، عندئذ إذا كان a قاسماً لـ b في A وكان $\varphi(a)=\varphi(b)$ ، فإن a و b شريكان في A.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2024- 9-11

A to Z

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثانية- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (25 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة ذات عنصر وحدة 1، وليكن a عنصراً قابل للقلب فيها. بين أن a غير قاسم للصفر فيها.

2- لتكن $M_2(R)$ حلقة المصفوفات المربعة من الدرجة الثانية فوق حلقة ما R مع عمليتي جمع وضرب المصفوفات، ولتكن $H=\{\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \; ; \; x,y\in R\}$. برهن أن H حلقة جزئية من الحلقة $M_2(R)$.

السؤال الثاني: (30 درجة) **1-** عرف المثالية الأعظمية، ثم برهن أنه إذا كان f هومومورفزم لحلقة ما $(A,+,.)$ في حلقة ما $(B,T,*)$، فإن $(Kerf,+,.)$ مثالية من الحلقة $(A,+,.)$.

2- برهن أنه إذا كانت B_1 , B_2 مثاليتين من حلقة ما $(A,+,.)$ فإن $B_1.B_2$ مثالية من الحلقة $(A,+,.)$.

السؤال الثالث: (35 درجة) **1-** عرف الحقل، ثم برهن أن كل منطقة تكاملية منتهية هي حقل تبديلي.

2- برهن أنه إذا كانت $(R,+,.)$ منطقة تكاملية فإن مميزها إما صفر أو عدد أولي.

3- لتكن $(A,+,.)$ حلقة اقليدية، وليكن $a\neq 0$ عنصراً من A ، برهن أن الشرط اللازم الكافي لكي يكون a قابلاً للقلب في A هو أن يكون $\varphi(a)=\varphi(1)$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2024-7-21

د. علياء حكيم

مكتبة A to Z

في الحلقة R يكفي $ba=0$ أو $ab=0$ وبالتالي:

إذا كان $ab=0 \Rightarrow \exists a^{-1}\in R;\ a^{-1}ab=0 \Rightarrow 1\cdot b=0 \Rightarrow b=0$

هذا تناقض مع كون $b\neq 0$.

أما إذا كان $ba=0 \Rightarrow \exists a^{-1}\in R;\ ba a^{-1}=0 \Rightarrow b\cdot 1=0 \Rightarrow b=0$

هذا تناقض مع كون $b\neq 0$.

وبالتالي a ليس قاسم فعلي للصفر.

2) أ) واضح أن $\emptyset \neq H \subseteq M_2(R)$ لأن $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in H$

ب) $\forall x=\begin{bmatrix}x_1 & -y_1\\ y_1 & x_1\end{bmatrix}, y=\begin{bmatrix}x_2 & -y_2\\ y_2 & x_2\end{bmatrix}\in M_2(R) \Rightarrow$

$$x-y=\begin{bmatrix}x_1 & -y_1\\ y_1 & x_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_2 & -y_2\\ y_2 & x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-x_2 & -y_1+y_2\\ y_1-y_2 & x_1-x_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1-x_2 & -(y_1-y_2)\\ y_1-y_2 & x_1-x_2\end{bmatrix}\in H$$

$$\forall x=\begin{bmatrix}x_1 & -y_1\\ y_1 & x_1\end{bmatrix}, y=\begin{bmatrix}x_2 & -y_2\\ y_2 & x_2\end{bmatrix}\Rightarrow x\cdot y=\begin{bmatrix}x_1 & -y_1\\ y_1 & x_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2 & -y_2\\ y_2 & x_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1x_2-y_1y_2 & -x_1y_2-y_1x_2\\ y_1x_2+x_1y_2 & -y_1y_2+x_1x_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1x_2-y_1y_2 & -(x_1y_2+y_1x_2)\\ y_1x_2+x_1y_2 & x_1x_2-y_1y_2\end{bmatrix}\in H$$

من (أ) و(ب) و(هـ) نجد أن H حلقة جزئية من $M_2(R)$.

السؤال الثاني: [30]

1) المثالية الأعظمية: لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة تبديلية. نسمي كل مثالية β في الحلقة $(A,+,\cdot)$ مثالية أعظمية فيها إذا كانت $A\neq\beta$، وإذا لم يكن بالإمكان إيجاد مثالية A_1 في الحلقة $(A,+,\cdot)$ فوق β بحيث يكون $A_1\neq A$, $A_1\neq\beta$.

2) أ) واضح أن $\ker f\subseteq A$, $\ker f\neq\emptyset$ لأن $f(0)=0'$، وبالتالي $\ker f$

ب) $\forall x,y\in\ker f \Rightarrow f(x)=f(y)=0'$

$$\Rightarrow f(x-y)=f(x)\top f(-y)=f(x)\top(-f(y))$$

$$=0'\top 0'=0' \Rightarrow x-y\in\ker f$$

$\Rightarrow xa \in Ker f$

من (1) و(ب) و(ه) نجد أن $Ker f$ مثالية من الحلقة $(A,+,\cdot)$.

ج) 2) لتكن $B_1 B_2 \subseteq A$ و $B_1 \cdot B_2 \neq \emptyset$ لأن $0 \in B_1 \cdot B_2$

$$\forall x, x' \in B_1 \cdot B_2 \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \; ; \; x_i \in B_1 , y_i \in B_2 , n \in \mathbb{Z}^+ \quad (ب)$$

$$x' = \sum_{j=1}^{m} x'_j y'_j \; ; \; x'_j \in B_1, y'_j \in B_2, m \in \mathbb{Z}^+ \quad 6/$$

$$\Rightarrow x - x' = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{j=1}^{m} x'_j y'_j = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{j=1}^{m} \underbrace{(-x'_j)}_{\in B_1} y'_j \in B_1 B_2$$

$$\forall a \in A, x \in B_1 \cdot B_2 \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \; ; \; x_i \in B_1, y_i \in B_2, n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow ax = a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(a x_i)}_{\in B_1} y_i \in B_1 B_2$$

$$xa = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) a = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{(y_i a)}_{\in B_2} \in B_1 B_2 \quad 6/$$

من (1) و(ب) و(ه) نجد أن $B_1 \cdot B_2$ مثالية من الحلقة $(A,+,\cdot)$.

السؤال الثالث: [35]

1/ تعريف الحقل: كل حلقة $(K,+,\cdot)$ تسمى حقلاً إذا تحققت الشروط الآتية:

أ) يوجد في K عنصران على الأقل

ب) 1) يوجد في K عنصر محايد بالنسبة للعملية $(\cdot)$

ه) كل عنصر مختلف عن الصفر في K قابل للقلب بالنسبة للعملية $(\cdot)$ 3/

★ البرهان على أن المنطقة التكاملية المنتهية R حقل يكفي أن نبرهن أن كل عنصر مختلف عن الصفر فيها قابل للقلب فيها.

إذا كان n هو عدد عناصر R، فإن R يكتب بالشكل:

$$R = \{x_1, \dots, x_n \mid x_i \neq x_j \quad \forall \; 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

من أجل كل عنصر r من $R-\{0\}$ فإن المجموعة:

$$rR = \{rx_1, \dots, rx_n\} \quad 4/$$

التي عدد عناصرها n تحقق $rx_i \neq rx_j$ لكل $i \neq j$، أي أن عناصرها مختلفة مثنى مثنى، لأنه إذا فرضنا وجود $i \neq j$ بحيث $rx_i = rx_j$ فإن $rx_i - rx_j = 0$ ومنه $r(x_i - x_j) = 0$، وبما أن R منطقة تكاملية و $r \neq 0$ فإن $x_i - x_j = 0$ ومنه

مكتبة A to Z

إذا جميع العناصر غير الصفرية في R قابلة للقلب، و بالتالي $(R,+,.)$ حقل.

2) لنفرض أن $Char(R)=n>0$، و لنبرهن أن n أولي.

إذا كان n ليس عدد أولي فإن $n=r.s$ حيث $0<r,s<n$.

بما أن $Char(R)=n$ فإن:

$$n.1=0 \Rightarrow (r.s).1=0 \Rightarrow (r.1)(s.1)=0$$

1.5

$\Rightarrow$ $r.1=0$ أو $s.1=0$ (R منطقة تكامل)

و في كلتا الحالتين نحصل على تناقض مع كون $Char(R)=n$، و بالتالي فإن n عدد أولي.

3) لزوم الشرط: الفرض: a قابل للقلب في A

المطلب: $d(a)=d(1)$

4) بما أن $a=1.a$ و a عنصر قابل للقلب في A فإن 1 و a شريكان في A، و من ثم فإن: $d(a)=d(1)$

كفاية الشرط: الفرض: $d(a)=d(1)$

المطلب: a قابل للقلب في A

5) بما أن 1 ينتمي a في A (لأن $a=1.a$)، و بما أن $d(a)=d(1)$، فإن 1 و a شريكان في A، و من ثم فإنه يمكن إيجاد عنصر قابل للقلب c في A بحيث يكون: $1=a.c$

و هذا يبين لنا أن a قابل للقلب في A.

A to Z مكتبة

الجمهورية العربية السورية | امتحان بني جبرية 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثانية- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الأولى | اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (25 درجة) **1-** إذا كانت $(A,+,.)$ و $(B,T,*)$ حلقتين ما، ولنرمز لصفر الحلقة $(A,+,.)$ بـ 0 ولصفر الحلقة $(B,T,*)$ بـ $0'$ ، وليكن f هوموموروفيزم للحلقة $(A,+,.)$ في الحلقة $(B,T,*)$. بين أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون f مونوموروفيزم هو أن يكون $Kerf = \{0\}$.

2- لتكن $(A,+,.)$ حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة، ولتكن $(B,+,.)$ حلقة جزئية منها ذات عنصر وحدة $1'$. إذا فرضنا أن عنصر الوحدة في الحلقة $(A,+,.)$ لا ينتمي إلى الحلقة $(B,+,.)$ فبرهن أن $1'$ قاسم للصفر في الحلقة $(A,+,.)$.

السؤال الثاني: (35 درجة) **1-** عرف كلاً من المثالية الأولية والمثالية الرئيسية، ثم برهن أنه إذا كانت B_1 , B_2 مثاليتين من حلقة ما $(A,+,.)$ فإن $B_1 + B_2$ مثالية من الحلقة $(A,+,.)$.

2- لتكن A_1 , A_2 مثاليتين من حلقة ما $(A,+,.)$، ولنفرض أن $A_1 \subseteq A_2$. برهن أن:

$$A/A_1/A_2/A_1 \cong A/A_2$$

السؤال الثالث: (30 درجة) **1-** عرف مميز حلقة، ثم برهن أنه إذا كانت $(R,+,.)$ منطقة تكاملية فإن جميع العناصر غير الصفرية فيها تملك نفس الرتبة الجمعية .

2- لتكن $(A,+,.)$ حلقة اقليدية، وليكن $a \neq 0$ و $b \neq 0$ عنصرين من A ، ولنفرض أن b غير قابل للقلب في A . برهن أن $\varphi(a) < \varphi(a.b)$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2024-1-28

A to Z مكتبة

(15)

7/ $\forall x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0' \Rightarrow f(x) = f(0)$

$\Rightarrow x = 0$ (لأن f متباين) $\Rightarrow \ker f = \{0\}$

كفاية الشرط: الفرض: $\ker f = \{0\}$

المطلب: f مونومورفزم

8/ $\forall x_1, x_2 \in A \; ; \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \top (-f(x_2)) = 0'$

$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0' \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f = \{0\}$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

وعليه f متباين وبما أن f هومومورفزم، فإن f مونومورفزم

12/ بما أن عنصر الوحدة في A لا ينتمي إلى B، فإن $1'$ لا يمكن أن يكون عنصر الوحدة في A، ومن ثم فإنه يوجد في A عنصرين مختلفين a, b بحيث:

(16)

$1'.a = b \Rightarrow 1'(1'.a) = 1'.b$

$\Rightarrow (1'.1').a = 1'.b \Rightarrow 1'.a = 1'.b$

$\Rightarrow 1'a - 1b = 0 \Rightarrow 1'(a-b) = 0$

وهذا مع ملاحظة أن $a-b \in A$ (لأن a, b مختلفين) يبين لنا أن $1'$ قاسم للصفر في الحلقة A.

السؤال الثاني: [35]

1/ المثالية الأولية: لتكن $(A,+,.)$ حلقة تبديلية. نسمي كل مثالية B في الحلقة $(A,+,.)$ مثالية أولية إذا تحقق الشرط الآتي:

3/ إذا كان x و y عنصرين في A بحيث إن $x.y \in B$، فإن إحدى العنصرين x أو y ينتمي إلى B.

المثالية الرئيسية: لتكن $(A,+,.)$ حلقة تبديلية ما. إذا كان a عنصراً ما من A، فإن Aa مثالية في الحلقة $(A,+,.)$ نسميها مثالية رئيسية من الحلقة $(A,+,.)$ مولدة بالعنصر a.

3/ ✱ لإثبات واقع أن $B_1 + B_2 \subseteq A$ (لأن $B_1 \neq \emptyset$ و $B_2 \neq \emptyset$)

$\forall x, y \in B_1 + B_2 \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + x_2 \; ; \; x_1 \in B_1, x_2 \in B_2 \\ y = y_1 + y_2 \; ; \; y_1 \in B_1, y_2 \in B_2 \end{cases}$

5/ $\Rightarrow x - y = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)$

$= (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \in B_1 + B_2$

$\in B_1 \quad \in B_2$

A to Z مكتبة

$$xa = (x_1 + x_2)a = \underset{\in B_1}{x_1 a} + \underset{\in B_2}{x_2 a} \in B_1 + B_2$$

من (أ) و(ب) و(د) نجد أن $B_1 + B_2$ مثالي في الحلقة $(A_1, +, \cdot)$.

2) إذا عرفنا التطبيق $f: A/A_1 \longrightarrow A/A_2$ بالشكل

$$f(x + A_1) = x + A_2$$

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow f((x_1 + A_1) + (x_2 + A_1)) = f((x_1 + x_2) + A_1)$$

$$= (x_1 + x_2) + A_2 = (x_1 + A_2) + (x_2 + A_2)$$

$$= f(x_1 + A_1) + f(x_2 + A_2)$$

ب)

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow f((x_1 + A_1)(x_2 + A_1)) = f(x_1 \cdot x_2 + A_1)$$

$$x_1 \cdot x_2 + A_2 = (x_1 + A_2)(x_2 + A_2)$$

$$= f(x_1 + A_1) \cdot f(x_2 + A_2)$$

ج) f غامر لأنه

$$\forall x + A_2 \in A_2/A_1 \Rightarrow \exists x + A_1 \in A/A_1 ; f(x + A_1) = x + A_2$$

د)

$$\forall x + A_1 \in \ker f \Rightarrow f(x + A_1) = A_2 \Rightarrow x + A_2 = A_2$$

$$\Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow x + A_1 \in A_2/A_1$$

$$\Rightarrow \ker f \subseteq A_2/A_1 \quad \dots (1)$$

3) ومن جهة ثانية فإن:

$$\forall x + A_1 \in A_2/A_1 \Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow x + A_2 = A_2$$

$$\Rightarrow f(x + A_1) = A_2 \Rightarrow x + A_1 \in \ker f$$

$$\Rightarrow A_2/A_1 \subseteq \ker f \quad \dots (2)$$

من (1) و(2) نجد أن $\ker f = A_2/A_1$

من (أ) و(ب) و(جـ) و(د) نجد أن f إيمومورفيزم الحلقة A/A_1 في الحلقة A/A_2 ، ونواته A_2/A_1 . وفقه

$$(A/A_1 / A_2/A_1, +, \cdot) \cong (A/A_2, +, \cdot)$$

السؤال الثالث [30]

1) مميز حلقة : نقول عن العدد الصحيح الموجب n ، إن وجد ، إنه مميز الحلقة R ، ونكتب $\text{char}(R) = n$ ، إذا كان n أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $na = 0$ لكل a من R

مكتبة A to Z

$nb=0 \Rightarrow a|nb| = 0 \Rightarrow (na)b=0$ 8/

$\Rightarrow na=0$ ($b\neq 0$ و R حلقة تكاملية)

حتى تكون n هي رتبة a يجب أن نتحقق أيضاً أن n أصغر عدد صحيح يحقق العلاقة $na=0$. لنفرض أنه يوجد عدد صحيح موجب $m<n$ ويحقق $ma=0$ وفقه:

$ma=0 \Rightarrow b|ma|=0 \Rightarrow (mb)a=0$ 7/

$\Rightarrow mb=0$ ($a\neq 0$ و R حلقة تكاملية)

وهذا تناقض مع كون $o(b)=n$. إذا n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $na=0$ وفقه $o(a)=n$ لكل a في R

L4 بما أن a يقسم $a.b$ في A، فإن:

$\varphi(a) \leq \varphi(a.b)$

وإن $\varphi(a)\neq\varphi(a.b)$ فإن هذا لأنه إذا كان $\varphi(a)=\varphi(a.b)$

6/ مع ملاحظة أن a يقسم $a.b$ في A، يبين لنا أن a و $a.b$ شريكان في A، وبالتالي يوجد عنصر قابل للقلب c في A بحيث يكون:

$ab=a.c \Rightarrow b=c$ (A حلقة تكاملية)

وهذا تناقض لكون b غير قابل للقلب في A. 6

بما أن:

$\varphi(a) \leq \varphi(a.b)$ و $\varphi(a)\neq\varphi(b)$

فإن $\varphi(a) < \varphi(a.b)$

مكتبة A to Z

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الرابعة- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة التكميلية | اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (30 درجة) **1-** ليكن $f:(A,+,.)\to(B,T,*)$ هوموموروفيزم حلقات، وليكن 1 عنصر الوحدة في الحلقة $(A,+,.)$، ولنرمز لصفري الحلقتين $(A,+,.)$ و $(B,T,*)$ بـ 0 و $0'$ على الترتيب. بين أن:

أ- $\forall a\in A \quad f(-a)=-f(a)$.

ب- $f(1)$ عنصر الوحدة في الحلقة $(f(A),T,*)$.

2- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ذات عنصر وحدة 1، ولتكن Δ و Δ' عمليتين جبريتين معرفتين على R بالشكل:

$$x\Delta y=x+y+1 \quad \& \quad x\Delta' y=x+y+x.y$$

من أجل كل x و y من R. برهن أن الحلقتين $(R,+,.)$ و (R,Δ,Δ') ايزوموروفيزميتان.

السؤال الثاني: (30 درجة)

1- عرف المثالية الأعظمية والمنطقة التكاملية، ثم برهن أنه إذا كان f هوموموروفيزم لحلقة ما $(A,+,.)$ في حلقة ما $(B,T,*)$، فإن الصورة العكسية وفق f لأية مثالية في الحلقة $(A,+,.)$ هي مثالية في الحلقة $(B,T,*)$.

2- لتكن $(\mathbb{Z},+,.)$ حلقة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتين. برهن أن $(\mathbb{Z},+,.)$ حلقة مثاليات رئيسية.

السؤال الثالث: (30 درجة)

1- ليكن $(K,+,.)$ حقلاً ما، ولتكن $\{(F_i,+,.)\}_{i\in I}$ أسرة غير خالية من الحقول الجزئية من الحقل $(K,+,.)$. أثبت أن $(\bigcap_{i\in I}F_i,+,.)$ حقل جزئي من الحقل $(K,+,.)$.

2- برهن أنه إذا كانت $(A,+,.)$ منطقة تكاملية، وكان $a\neq 0, b\neq 0$ عنصرين من A ، فإن الشرط اللازم والكافي لكي يكون a , b شركين في A هو أن يكون كل من العنصرين a , b قاسماً للآخر في A .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2023-9-13

د. علياء حكيم

A to Z

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثانية- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (25 درجة) 1- لتكن A , B حلقتين جزئيتين من حلقة تبديلية ما $(R,+,.)$. برهن أن $A.B$ حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,.)$.

2- ليكن $f:(A,+,.)\to(B,T,*)$ هوموموروفيزم حلقات، وليكن 1 عنصر الوحدة في الحلقة $(A,+,.)$، ولنرمز لصفري الحلقتين $(A,+,.)$ و $(B,T,*)$ بـ 0 و $0'$ على الترتيب. بين أن:

أ- $f(0)=0'$.

ب- $f(a^{-1})$ مقلوب العنصر $f(a)$ في الحلقة $(f(A),T,*)$ بالنسبة للعملية $*$.

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- عرف الحلقة البسيطة، ثم بين أنه إذا كانت B_1 , B_2 مثاليتين من حلقة تبديلية $(A,+,.)$، فإن $B_1:B_2$ مثالية من الحلقة $(A,+,.)$ تحوي B_1 .

2- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، ولتكن A مثالية منها ، ولتكن $H=\{x\in R\mid xa=0 \quad \forall a\in A\}$. برهن أن H مثالية من الحلقة $(R,+,.)$.

السؤال الثالث: (35 درجة) 1- ليكن $(K,+,.)$ حقلاً تبديلياً ما، ولتكن F مجموعة جزئية من K . إذا كانت $(F,+,.)$ منطقة تكاملية ، وإذا كانت $F'=\{a.b^{-1}\mid a,b\in F \ \ \& \ \ b\neq 0\}$ ، برهن أن $(F',+,.)$ حقل جزئي من الحقل $(K,+,.)$.

2- برهن أنه إذا كانت $(R,+,.)$ منطقة تكاملية فإن مميزها إما صفر أو عدد أولي.

3- عرف العنصر غير القابل للتحليل في حلقة تبديلية، ثم بين أنه إذا كانت $(A,+,.)$ حلقة اقليدية، وكان $a\neq 0$ و $b\neq 0$ عنصرين من A ، عندئذ إذا كان a قاسماً لـ b في A وكان $\varphi(a)=\varphi(b)$ ، فإن a و b شريكان في A .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2023-7-30

A to Z

السؤال الأول: [25]

1/ آ) واضح أن $A.B \subseteq R$ لأن $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$ فإن $A.B \neq \emptyset$ 3/

ب)
$$\forall x, y \in A.B \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ , \ y = \sum_{j=1}^{n} a'_j b'_j$$
$$\Rightarrow x - y = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{j=1}^{n} a'_j b'_j = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{j=1}^{n} (-a'_j) b'_j \quad 6/$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{j=1}^{n} (-a'_j) b'_j \in A.B$$
$\in A \quad \in B$

ج)
$$\forall x, y \in A.B \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ , \ y = \sum_{j=1}^{m} a'_j b'_j$$
$$\Rightarrow x.y = x \sum_{j=1}^{m} a'_j b'_j = \sum_{j=1}^{m} x(a'_j b'_j) \quad 6/$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right) a'_j b'_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)(a'_j b'_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (a_i a'_j).(b_i b'_j) \in A.B$$
$\in A \quad \in B$

بنزلة R تبديلية

من (آ) و(ب) و(ج) نجد أن $(A.B, +, .)$ زمرة جزئية من R.

2/ آ) لدينا:
$$f(0) = f(0+0) = f(0) \top f(0)$$
$$\Rightarrow f(0) \top 0' = f(0) \top f(0) \Rightarrow f(0) = 0' \quad 4/$$

ب) لدينا:
$$a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1 \Rightarrow f(a.a^{-1}) = f(a^{-1}.a) = f(1)$$
$$\Rightarrow f(a) * f(a^{-1}) = f(a^{-1}) * f(a) = f(1) \quad 6/$$

وهنا مع ملاحظة أن $f(\bar{a}) \in f(A)$ يبين لنا أن $f(a^{-1})$ مقلوب $f(a)$ في الحلقة $f(A)$ بالنسبة للعملية $(*)$.

السؤال الثاني: [30]

1/ كل حلقة لا تحوي أي مثالية غير بنزلة 3/ تسمى حلقة بسيطة.

آ) واضح أن $B_1 : B_2 \subseteq A$ لأن $B_1 : B_2 \neq \emptyset$ و 0 العنصر 3/
المحايد لـ $(A, +, .)$ فإن:
$$0 B_2 = \{0\} \subseteq B_1 \Rightarrow a \in B_1 : B_2 \Rightarrow B_1 : B_2 \neq \emptyset$$

ب)
$$\forall x, x' \in B_1 : B_2 \Rightarrow x.B_2 \subseteq B_1 \ \& \ x'.B_2 \subseteq B_1 \quad 5/$$

$\Rightarrow x B_2 - x' B_2 \subseteq B_1 \Rightarrow (x-x') B_2 \subseteq B_1$

$\Rightarrow x - x' \in B_1 : B_2$

$\forall y \in B_1 : B_2 , a \in A \Rightarrow y \cdot B_2 \subseteq B_1 \Rightarrow a(yB_2) \subseteq aB_2 \subseteq B_1$ (5/ د)

(B_1 مثالية)

$\Rightarrow (ay) B_2 \subseteq B_1 \Rightarrow ay \in B_1 : B_2$

$\forall b_1 \in B_1 \Rightarrow b_1 B_2 \subseteq B_1 \Rightarrow b_1 \in B_1 : B_2 \Rightarrow B_1 \subseteq B_1 : B_2$ (3/ ج)

من (أ) و(ب) و(ص) و(د) نجد أن $B_1 : B_2$ مثالية في الحلقة A حيث B_1

(11) 2) واضح أن $H \subseteq R$ و $H \neq \emptyset$ لأنه $0 \cdot a = 0 \ \forall a \in A$ ومنه $0 \in H$

$\forall x, y \in H , a \in A \Rightarrow xa = 0$ و $ya = 0$ (3/ ب)

$\Rightarrow (x-y)a = xa - ya = 0 - 0 = 0$ (4/

$\Rightarrow (x-y) \in H$

$\forall x \in H , a \in A , r \in R \Rightarrow xa = 0$ (ص

$\Rightarrow \begin{cases} (rx)a = r(xa) = r(0) = 0 \Rightarrow rx \in H \\ (xr)a = x(ra) = 0 \Rightarrow xr \in H \end{cases}$ (4/ $x \in H$, $ra \in A$ مثالية)

من (أ) و(ب) و(ص) نجد أن H مثالية في R.

السؤال الثالث: [35]

أ) واضح أن $F' \subseteq K$ ، إن F' تحوي عنصرين على الأقل وذلك

لأن $0, 1 \in F'$ (3/ ب)

$\forall x, y \in F' \Rightarrow \begin{cases} x = ab^{-1} ; & a, b \in F \text{ و } b \neq 0 \\ y = a_1 b_1^{-1} ; & a_1, b_1 \in F \text{ و } b_1 \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x - y = ab^{-1} - a_1 b_1^{-1} = a(b_1 b_1^{-1}) b^{-1} - a_1 (b \cdot b^{-1}) b_1^{-1}$

$= (ab_1)(bb_1)^{-1} - (a_1 b)(b_1 b)^{-1}$

$= (ab_1 - a_1 b)(bb_1)^{-1}$ (5/ منطقة تكاملية)

ولكن $bb_1 \neq 0$, $b, b_1 \in F$ ، ومنه $ab_1 - a_1 b$ ،

$(ab_1 - a_1 b)(bb_1)^{-1} \in F' \Rightarrow x - y \in F'$

A to Z

$\forall x,y \in F' \setminus \{0\} \Rightarrow \begin{cases} x = ab^{-1} ; a,b \in F \setminus \{0\} \\ y = a_1 b_1^{-1} ; a_1, b_1 \in F \setminus \{0\}, a_1 \neq 0, b_1 \neq 0 \end{cases}$ (⇐

$\Rightarrow xy^{-1} = (ab^{-1})(a_1 b_1^{-1})^{-1} = (ab^{-1})(b_1 a_1^{-1})$ 5

$= (ab_1)(a_1 b)^{-1}$

ولكن

$ab_1, a_1 b_1 \in F \setminus \{0\}$ (لمنطقة تكاملية)

$\Rightarrow (ab_1)(a_1 b_1)^{-1} \in F' \Rightarrow xy^{-1} \in F'$

من (أ) و(ب) و(ج) نجد أن $(F', +, .)$ حقل جزئي في الحقل $(K, +, .)$.

2) لنفرض أن $Char(R) = n > 0$، ولنبرهن أن n أولي.

إذا كان n ليس عدد أولي فإن $n = r.s$ حيث $0 < r, s < n$.

وبما أن $Char(R) = n$، فإن:

$n.1 = 0 \Rightarrow (r.s).1 = 0 \Rightarrow (r.1)(s.1) = 0$ 8

$\Rightarrow r.1 = 0$ أو $s.1 = 0$ منطقة تكاملية R

وفي كلا الحالتين نحصل على تناقض مع كون $Char(R) = n$، وبالتالي فإن n عدد أولي.

3) لتكن $(A, +, .)$ حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة. إذا كان $a \neq 0$ عنصراً من A، فإننا نقول إن a غير قابل للتحليل في A إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1) a غير قابل للقلب في A

2) كل قاسم لـ a في A هو قاسم خاص له.

★) بما أن $(A, +, .)$ حلقة إقليدية فإنه من أجل العنصرين a, b يوجد عنصران q, r من A بحيث يكون:

$a = bq + r$

و r إما أن يكون صفراً أو $d(r) < d(b)$

فإن $r = 0$، لأنه إذا كان $r \neq 0$ فإن:

$d(r) < d(b) = d(a)$

من جهة ثانية فإنه بما أن a يقسم b في A، فإنه يمكن إيجاد عنصر c من A بحيث يكون:

$b = a.c$

A to Z

وبالتالي فإن:

$$a = bq + r \Rightarrow r = a - b.q = a - acq = a(1-cq)$$

وعليه فإن a يقسم r في A، ومن ثم فإن $\varphi(a) \leq \varphi(r)$ وهذا تناقض.

بما أن:

$$a = bq + r \quad \& \quad r = 0 \Rightarrow a = bq$$

وبالتالي b يقسم a في A، وبما أن a يقسم b في A فرضاً، فإن a, b شريكان في A.

A to Z

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثانية- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الأولى | اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (30 درجة) **1-** عرف العنصر القاسم الفعلي للصفر من حلقة ما وأعطي مثالاً عنه، ثم برهن إذا كانت $(A,+,.)$ و $(B,T,*)$ حلقتين ما بحيث أن كلاهما ذات عنصر وحدة، وإذا رمزنا لصفري الحلقتين $(A,+,.)$ و $(B,T,*)$ بـ 0 و $0'$ على الترتيب، وإذا كانت Δ و Δ' عمليتين جبريتين معرفتين على $A\times B$ بالشكل:

$$(x,y)\Delta(x',y')=(x+x',yTy')$$

$$(x,y)\Delta'(x',y')=(x.x',y*y') \quad \forall (x,y),(x',y')\in A\times B$$

فإن $(A\times\{0'\},\Delta,\Delta')$ حلقة جزئية من الحلقة $(A\times B,\Delta,\Delta')$ وذات عنصر وحدة.

2- برهن أنه إذا كانت $(A,+,.)$ منطقة تكاملية و a,b عنصرين من A بحيث إن $a^3=b^3$ & $a^5=b^5$ فإن $a=b$.

السؤال الثاني: (25 درجة) **1-** لتكن $B,A_1,A_2,\ldots,A_n$ مثاليات من حلقة تبديلية ما $(A,+,.)$. بين أن:

$$(\bigcap_{i=1}^{n}A_i):B=\bigcap_{i=1}^{n}(A_i:B)$$

2- لتكن A_1 , A_2 مثاليتين من حلقة ما $(A,+,.)$، ولنفرض أن $A_1\subseteq A_2$. برهن أن:

$$A/A_1/A_2/A_1\cong A/A_2$$

السؤال الثالث: (35 درجة) **1-** عرف الحقل، ثم برهن أنه إذا كان $(K,+,.)$ حقلاً ما، وكانت $\{(F_i,+,.)\}_{i\in I}$ أسرة غير خالية من الحقول الجزئية من الحقل $(K,+,.)$. فإن $(\bigcap_{i\in I}F_i,+,.)$ حقل جزئي من الحقل $(K,+,.)$.

2- لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية عنصر الوحدة فيها 1. برهن أن:

$$char(R)=n>0 \Leftrightarrow n \text{ أصغر عدد صحيح موجب يحقق } n.1=0$$

3- لتكن $(A,+,.)$ حلقة اقليدية، وليكن $a\neq 0$ عنصراً من A ، برهن أن الشرط اللازم الكافي لكي يكون a قابلاً للقلب في A هو أن يكون $\varphi(a)=\varphi(1)$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2023-1-22

بنجيرية (2) سنة رياضيات
فصل أول

السؤال الأول: [30]

1) القاسم الفعلي للصفر: العنصر a من الحلقة $(R,+,.)$ يسمى قاسماً فعلياً للصفر إذا وجد عنصر b يختلف عن الصفر من تلك الحلقة بحيث:

$$a.b=0 \quad \text{أو} \quad b.a=0$$ 3/

إذا كان a يختلف عن الصفر وقاسم الصفر فإننا نسميه قاسماً فعلياً للصفر

* أ) واضح أن $A\times\{0'\}\subseteq A\times B$ و $A\times\{0'\}\neq\emptyset$ لأن $A\neq\emptyset$ لأن A حلقة 3/

لـ $\forall a_1,a_2\in A \Rightarrow (a_1,0')\Delta(-(a_2,0'))=(a_1,0')\Delta(-a_2,0')$

$$=(a_1-a_2,0'\top 0')=(a_1-a_2,0')\in A\times\{0'\}$$ 4/

ب) $\forall a_1,a_2\in A \Rightarrow (a_1,0')\Delta'(a_2,0')=(a_1.a_2,0'\star 0')$

$$=(a_1.a_2,0')\in A\times\{0'\}$$ 4/

من (أ) و(ب) و(ج) نجد أن $(A\times\{0'\},\Delta,\Delta')$ حلقة جزئية من $(A\times B,\Delta,\Delta')$

د) إذا رمزنا بـ 1 لعنصر الوحدة في الحلقة A، فإن $(1,0')$ هو عنصر الوحدة في $A\times\{0'\}$ لأنه من جهة أولى $(1,0')\in A\times\{0'\}$، ومن جهة ثانية: 4/

$$\forall a\in A \Rightarrow (a,0')\Delta'(1,0')=(a.1,0'\star 0')=(a,0')$$

$$(1,0')\Delta'(a,0')=(1.a,0'\star 0')=(a,0')$$

وهذا يبين لنا أن $(1,0')$ عنصر الوحدة في الحلقة $(A\times\{0'\},\Delta,\Delta')$

2) أ) إذا كان $a=0$، فإن:

$$a=0\Rightarrow a^5=0\Rightarrow b^5=0\Rightarrow b=0$$ 2/

(لأن A منطقة تكاملية)

$$\Rightarrow a=b$$

ب) إذا كان $a\neq 0$، وبما أن:

$$a^5=b^5\Rightarrow a^3.a^2=b^3.b^2\Rightarrow a^3.a^2=a^3.b^2\Rightarrow a^3(a^2-b^2)=0$$

وبما أن $(A,+,.)$ منطقة تكاملية، و $a\neq 0$، فإن $a^3\neq 0$ 3/ وبالتالي:

$$a^2-b^2=0\Rightarrow a^2=b^2\Rightarrow (a^2)^2=(b^2)^2\Rightarrow a^4=b^4\ldots(1)$$

بما أن

$$a^5=b^5\Rightarrow a^4.a=b^4.a\Rightarrow a^4.a=a^4.b \quad (\text{من } (1))$$

$$\Rightarrow a^4(a-b)=0$$

وبما أن $(A,+,.)$ منطقة تكاملية، و $a\neq 0$ فإن $a^4\neq 0$، وعليه: 5/

$$a-b=0\Rightarrow a=b$$

السؤال الثاني: [25]

$\forall x \in (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) : B \Rightarrow x.B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow x.B \in A_i \; ; \; i=1,\dots,n$

$\Rightarrow x \in A_i : B \; ; \; i=1,\dots,n \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B)$

$\Rightarrow (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) : B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B) \quad \dots (1)$ 5

ومن جهة ثانية فإن:

$\forall x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B) \Rightarrow x \subseteq A_i : B \; ; \; i=1,\dots,n$

$\Rightarrow x.B \subseteq A_i \; ; \; i=1,\dots,n \Rightarrow x.B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i : B$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B) \subseteq (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) : B \quad \dots (2)$ 5

من (1) و (2) نجد أن

$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) : B = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B)$

2) لنعرف التطبيق $f : A/A_1 \longrightarrow A/A_2$ بالشكل:

$f(x+A_1) = x+A_2$

أ) $\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow f((x_1+A_1)+(x_2+A_1)) = f((x_1+x_2)+A_1)$

$= (x_1+x_2)+A_2 = (x_1+A_2)+(x_2+A_2)$ 3

$= f(x_1)+f(x_2)$

ب) $\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow f((x_1+A_1).(x_2+A_1)) = f(x_1.x_2+A_1)$

$= x_1.x_2+A_2 = (x_1+A_2)(x_2+A_2) = f(x_1).f(x_2)$ 3

ج) f غامر لأنه:

$\forall x+A_2 \in A/A_2 \Rightarrow \exists x+A_1 \in A/A_1 \; ; \; f(x_1+A_1) = x+A_2$ 3

د) $\forall x+A_1 \in \ker f \Rightarrow f(x+A_1) = A_2 \Rightarrow x+A_2 = A_2$

$\Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow x+A_1 \in A_2/A_1 \Rightarrow \ker \subseteq A_2/A_1 \quad \dots (1)$

ومن جهة ثانية فإن: 3

$\forall x+A_1 \in A_2/A_1 \Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow x+A_2 = A_2 \Rightarrow f(x+A_1) = A_2$

$\Rightarrow x+A_1 \in \ker f \Rightarrow A_1/A_2 \subseteq \ker f \quad \dots (2)$ 3

من (1) و (2) نجد أن $\ker f = A_2/A_1$

من (1) (أ) و (هـ) و (د) نجد أن f تشويه حزمي الحلقة A/A_1 في الحلقة A/A_2 ونواته A_2/A_1. حسب:

$(A/A_1 / A_2/A_1, +, .) \cong (A/A_2, +, .)$

السؤال الثالث [35]

1/ كل حلقة $(K,+,\cdot)$ تسمى حقلاً إذا كانت $(K-\{0\},\cdot)$ زمرة

2/ نواضح أن $\bigcap_{i\in I} F_i \subseteq K$ ، وبما أن $(F_i,+,\cdot)$ أسرة حقول جزئية

من الحقل $(K,+,\cdot)$ فإن:

$$0,1 \in F_i \quad \forall i\in I \Rightarrow 0,1 \in \bigcap_{i\in I} F_i$$

3/ وهذا يبين لنا أنه يوجد في $\bigcap_{i\in I} F_i$ عنصران على الأقل.

$$\forall x,y \in \bigcap_{i\in I} F_i \Rightarrow x,y\in F_i \quad \forall i\in I \Rightarrow x-y\in F_i \quad \forall i\in I$$
$$\Rightarrow x-y \in \bigcap_{i\in I} F_i$$

5/

$$\forall x,y \in \bigcap_{i\in I} F_i \ ; \ y\neq 0 \Rightarrow x,y\in F_i \quad \forall i\in I \ ; \ y\neq 0$$
$$\Rightarrow x\cdot y^{-1}\in F_i \quad \forall i\in I \Rightarrow x\cdot y^{-1} \in \bigcap_{i\in I} F_i$$

5/ من (1) و(2) نجد أن $\left(\bigcap_{i\in I} F_i,+,\cdot\right)$ حقل جزئي من الحقل $(K,+,\cdot)$

2/ $\Leftarrow$) لنفرض أن $char(R)=n>0$ ، وبالتالي فإن $na=0$ من أجل كل a من $(R,+,\cdot)$ ، وفيه $n\cdot 1=0$. لنفرض أنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث أن $0<m<n$ وكيفما $m\cdot 1=0$ ، وفيه

$$ma=m(1\cdot a)=(m\cdot 1)a=0\cdot a=0 \quad \forall a\in R$$

6/ وهذا تناقض مع كون $char(R)=n$ ، وبالتالي n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $n\cdot 1=0$.

$\Rightarrow$) لنفرض أن n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $n\cdot 1=0$. من أجل كل عنصر a من $(R,+,\cdot)$ ، فإن:

$$na=n(1\cdot a)=(n\cdot 1)a=0\cdot a=0$$

4/ وفيه فإن $char(R)=n$

3/ لزوم الشرط b: الفرض: a قابل للعكس في A

المطلب: $\varphi(a)=\varphi(1)$

5/ بما أن $a=1.a$ ، و a عنصر قابل للعكس في A فإن 1 و a شريكان في A، ومن ثم فإن $\varphi(a)=\varphi(1)$

كفاية الشرط b: الفرض: $\varphi(a)=\varphi(1)$

المطلب: a قابل للعكس في A

5/ بما أن 1 يقسم a في A (لأن $a=1.a$) وبما أن $\varphi(a)=\varphi(1)$ ، فإن $a,1$ شريكان في A، ومن ثم فإنه يمكن إيجاد عنصر قابل للعكس c في A بحيث يكون $a.c=1$ ، وهذا يبين أن a قابل للعكس في A.

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثانية- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (30 درجة) 1- عرف العنصر بقوة معدومة من حلقة ما وأعطي مثالاً عنه، ثم برهن أنه إذا كانت $(R,+,.)$ حلقة ذات عنصر وحدة 1، وكان a عنصراً قابل للقلب فيها فإن a غير قاسم للصفر فيها.

2- لتكن (T) و $(*)$ عمليتين جبريتين ثنائيتين معرفتين على $\mathbb{Z}^3$ بالشكل:

$$(a,b,c)T(a',b',c') = (a+a', b+b', c+c')$$

$$(a,b,c)*(a',b',c') = (a.a', ba'+cb', c.c')$$

وذلك من أجل أي $(a,b,c),(a',b',c')$ من $\mathbb{Z}^3$. إن $(\mathbb{Z}^3,T,*)$ حلقة ذات عنصر وحدة. إذا كانت $H=\{(a,0,a)|a\in\mathbb{Z}\}$. برهن أن $(H,T,*)$ حلقة جزئية من الحلقة $(\mathbb{Z}^3,T,*)$.

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- عرف المثالية الأعظمية، ثم برهن أنه إذا كان f هوموموروفيزم لحلقة ما $(A,+,.)$ في حلقة ما $(B,T,*)$، فإن الصورة العكسية وفق f لأي مثالية B_1 من الحلقة $(B,T,*)$ هي مثالية من الحلقة $(A,+,.)$.

2- لتكن B_1,B_2,B_3 ثلاث مثاليات من حلقة ما $(A,+,.)$. بين أن:

$$B_1:(B_2.B_3) = (B_1:B_2):B_3$$

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- برهن أن كل منطقة تكاملية منتهية هي حقل تبديلي.

2- برهن أنه إذا كانت $(R,+,.)$ منطقة تكاملية فإن جميع العناصر غير الصفرية فيها تملك نفس الرتبة الجمعية .

3- لتكن $(A,+,.)$ حلقة اقليدية، وليكن $a\neq 0$ و $b\neq 0$ عنصرين من A ، ولنفرض أن b غير قابل للقلب في A. برهن أن $\varphi(a)<\varphi(a.b)$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2022-7-24

د. علياء حكيم

السؤال الأول: [30]

1) العنصر a من الحلقة $(R,+,.)$ يسمى عنصر بقوة معدومة إذا وجد عدد طبيعي n بحيث $a^n = 0$. (1ن)

مثال: في $(\mathbb{Z}_8, \oplus, \odot)$ لدينا $\bar{2}^3 = \bar{2}\odot\bar{2}\odot\bar{2} = \bar{8} = \bar{0}$، وبالتالي $\bar{2}$ عنصر بقوة معدومة

بما أن a قابل للقلب، فإن a يختلف عن الصفر. لنفرض جدلاً أن a قاسم للصفر، وبالتالي يوجد عنصر $b \neq 0$ من الحلقة R بحيث $ab = 0$ أو $ba = 0$ (1ن)

إذا كان $a.b = 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in R$; $a^{-1}ab = 0 \Rightarrow 1.b = 0 \Rightarrow b = 0$

وهذا تناقض مع كون $b \neq 0$

أما إذا كان $ba = 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in R$; $baa^{-1} = 0 \Rightarrow b.1 = 0 \Rightarrow b = 0$ (a قابل للقلب)

وهذا تناقض مع كون $b \neq 0$. وبالتالي a ليس قاسم قطعي للصفر.

2) أ) واضح أن $H \subseteq \mathbb{Z}^3$ لأن $(0,0,0) \in H$ (3/) $\Rightarrow H \neq \emptyset$

ب) $\forall (a,0,a),(b,0,b) \in H \Rightarrow (a,0,a)\,T\,(-1(b,0,b)) =$

$(a,0,a)\,T\,(-b,0,-b) = (a-b,0,a-b) \in H$ (6/)

ج) $\forall (a,0,a),(b,0,b) \in H \Rightarrow (a,0,a) * (b,0,b) =$

$(ab, 0+0, ab) = (ab,0,ab) \in H$ (6/)

من (أ) و(ب) و(ج) نجد أن $(H,T,*)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}^3,T,*)$

السؤال الثاني: [30]

1) لتكن $(A,+,.)$ حلقة تبديلية. نسمي كل مثالية B من الحلقة $(A,+,.)$ مثالية أعظمية منها إذا كانت $B \neq A$، وإذا لم يكن بالإمكان إيجاد مثالية A_1 من الحلقة $(A,+,.)$ تحوي B بحيث يكون $A_1 \neq A$ و $A_1 \neq B$ (3)

2) أ) واضح أن $f^{-1}(B_1) \subseteq A$ (3/) $\neq \emptyset$ وذلك لأن $0' \in B_1$ لـ $f(0_*) = 0'$

$\Leftarrow 0 \in f^{-1}(B_1)$

$\forall x_1, x_2 \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x_1), f(x_2) \in B_1 \Rightarrow f(x_1)\,T\,f(-x_2) \in B_1$

$\Rightarrow f(x_1 - x_2) \in B_1 \Rightarrow x_1 - x_2 \in f^{-1}(B_1)$

(6)

$\forall a \in A, x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x) \in B_1$ و $f(a) \in B$

$\Rightarrow f(x) * f(a) \in B_1 \Rightarrow f(x \cdot a) \in B_1 \Rightarrow x \cdot a \in f^{-1}(B_1)$ (أ)

$f(a) * f(x) \in B_1 \Rightarrow f(a \cdot x) \in B_1 \Rightarrow a \cdot x \in f^{-1}(B_1)$ (ب) 6/

من (أ) و (ب) نجد أن $f^{-1}(B_1)$ مثالية في الحلقة $(A, +, \cdot)$.

لدينا:

$\forall x \in B_1 : (B_2 \cdot B_3) \Rightarrow x \cdot (B_2 \cdot B_3) \subseteq B_1 \Rightarrow x(B_3 \cdot B_2) \subseteq B_1$

$\Rightarrow (xB_3) \cdot B_2 \subseteq B_1 \Rightarrow xB_3 \subseteq B_1 : B_2 \Rightarrow x \in (B_1 : B_2) : B_3$

$\Rightarrow B_1 : (B_2 \cdot B_3) \subseteq (B_1 : B_2) : B_3 \quad \ldots (1)$ 6/

ومن جهة أخرى:

$\forall x \in (B_1 : B_2) : B_3 \Rightarrow xB_3 \subseteq B_1 : B_2 \Rightarrow x(B_3 \cdot B_2) \subseteq B_1$

$\Rightarrow x(B_2 \cdot B_3) \subseteq B_1 \Rightarrow x \in B_1 : (B_2 \cdot B_3)$

$\Rightarrow (B_1 : B_2) : B_3 \subseteq B_1 : (B_2 \cdot B_3) \quad \ldots (2)$ 6/

من (1) و (2) نجد أن:

$$B_1 : (B_2 \cdot B_3) = (B_1 : B_2) : B_3$$

السؤال الثاني: (30)

1) للبرهان على أن الحلقة التكاملية المنتهية R حقل يكفي أن نبين أن لكل عنصر مختلف عن الصفر منها مقلوب فيها.

(15) إذا كان n عدد عناصر R فإن R يكتب بالشكل:

$$R = \{x_1, x_2, \ldots, x_n \mid x_i \neq x_j \ \forall\ 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

من أجل كل عنصر r من $R - \{0\}$، فإن المجموعة:

$$rR = \{rx_1, rx_2, \ldots, rx_n\}$$ 5/

التي عدد عناصرها n تحقق $rx_i \neq rx_j$ لكل $i \neq j$، أي أن عناصرها مختلفة مثنى مثنى، لأنه إذا فرضنا وجود $i \neq j$ بحيث $rx_i = rx_j$ فإنه $rx_i - rx_j = 0 \in r(x_i - x_j) = 0$، وبما أن r عنصر تكاملية و $r \neq 0$ فإن $x_i - x_j = 0 \Leftarrow x_i = x_j$، وهذا تناقض مع شكل عناصر R، وبالتالي فإن rR هي نفس الحلقة R التي أحد عناصرها هو عنصر الوحدة 1 وبالتالي يوجد دليل k بحيث $rx_k = 1$ حيث $1 \leq k \leq n$، وهذا r قابل للقلب، إذا جميع العناصر غير الصفرية في R قابلة للقلب وبالتالي R حقل

2) لنفرض وجود عنصر $b \neq 0$ من $(R,+,\cdot)$ بحيث منتهية ولتكن n وبالتالي فإن $o(b)=n$، ولنبرهن أن لجميع العناصر غير الصفرية a في R نفس الرتبة n، لدينا:

$$nb=0 \Rightarrow a(nb)=a\cdot 0=0 \Rightarrow (na)\cdot b=0$$

$$\Rightarrow na=0 \quad \text{(لأن } R \text{ منطقة تكاملية و } b\neq 0\text{)}$$

حتى تكون n هي رتبة a يجب أن يتحقق أيضاً أن n أصغر عدد صحيح يحقق العلاقة $na=0$. لنفرض وجود عدد صحيح موجب m بحيث $m<n$ وكذلك $ma=0$، ونجد:

$$ma=0 \Rightarrow b(ma)=0 \Rightarrow b\cdot a=0 \Rightarrow (mb)a=0$$

$$\Rightarrow mb=0 \quad \text{(لأن } R \text{ منطقة تكاملية و } a\neq 0\text{)}$$

وهذا تناقض مع كون $o(b)=n$. إذاً n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $na=0$، ونجد أن $o(a)=n$ لكل a في R، وإذا كانت R منتهية فإن كل العناصر تكون لها نفس الرتبة.

3) بما أن a يقسم $a.b$ في A، فإن:

$$\varphi(a) \leq \varphi(a.b)$$

لأنه إذا كان $\varphi(a)=\varphi(a.b)$، فإن هذا يعني $\varphi(a) \neq \varphi(a.b)$، بالإضافة إلى ملاحظة أن a يقسم $a.b$ في A، يبين لنا أن a و $a.b$ شريكان في A، وبالتالي يوجد عنصر قابل للقلب c في A، بحيث يكون:

$$a.b=a.c \Rightarrow b=c \quad \text{(لأن } A \text{ منطقة تكاملية)}$$

وهذا تناقض لكون b غير قابل للقلب في A. بما أن:

$$\varphi(a) \leq \varphi(a.b) \quad \text{و} \quad \varphi(a) \neq \varphi(a,b)$$

فإن:

$$\varphi(a) < \varphi(a.b)$$

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان بنى جبرية 2
لطلاب السنة الثانية- رياضيات
الدورة الفصلية الأولى

المدة ساعتان
الدرجة العظمى: 90 درجة
اسم الطالب:.....

السؤال الأول: (35 درجة) **1**- في الحلقة $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ برهن أنه:

$$a \in \mathbb{Z}_n \text{ قابل للقلب } \Leftrightarrow (a,n) = 1$$

2- ليكن $f:(A,+,.)\to(B,T,*)$ هوموموفيزم حلقات، وليكن 1 عنصر الوحدة في الحلقة $(A,+,.)$، ولنرمز لصفري الحلقتين $(A,+,.)$ و $(B,T,*)$ بـ 0 و $0'$ على الترتيب. بين أن:

أ- $f(1)$ عنصر الوحدة في الحلقة $(f(A),T,*)$.

ب- $f(a^{-1})$ مقلوب العنصر $f(a)$ في الحلقة $(f(A),T,*)$ بالنسبة للعملية $*$.

3- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ذات عنصر وحدة 1، ولتكن Δ و Δ' عمليتين جبريتين معرفتين على R بالشكل:

$$x\,\Delta\, y = x+y+1 \qquad \& \qquad x\,\Delta'\, y = x+y+x.y$$

من أجل كل x و y من R. برهن أن الحلقتين $(R,+,.)$ و (R,Δ,Δ') ايزومورفيزميتان.

السؤال الثاني: (30 درجة) **1**- عرف العنصر القاسم للصفر في حلقة ما والمنطقة التكاملية، ثم برهن أنه إذا كانت B_1 , B_2 مثاليتين من حلقة ما $(A,+,.)$ فإن $B_1 \cap B_2$ مثالية من الحلقة $(A,+,.)$.

2- لتكن $(\mathbb{Z},+,.)$ حلقة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتين. برهن أن $(\mathbb{Z},+,.)$ حلقة مثاليات رئيسية.

السؤال الثالث: (25 درجة) **1**- عرف مميز حلقة، ثم برهن أنه إذا كانت $(R,+,.)$ منطقة تكاملية فإن مميزها إما صفر أو عدد أولي.

2- لتكن $(A,+,.)$ حلقة اقليدية، وليكن $a \neq 0$ عنصراً من A ، برهن أن الشرط اللازم الكافي لكي يكون a قابلاً للقلب في A هو أن يكون $\varphi(a) = \varphi(1)$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2022-1-20

السؤال الأول: [35]

1) $\Rightarrow$ لنفرض أن $a \in Z_n$ عنصر قابل للقلب ولنبرهن أن $(a,n)=1$. لدينا:

a قابل للقلب في $Z_n \Rightarrow \exists b \in Z_n$; $a \odot b = 1 \Rightarrow \overline{a \cdot b} = 1$

$\Rightarrow a \cdot b = qn + 1 \Rightarrow ab - qn = 1 \Rightarrow ab + (-q)n = 1$

$\Rightarrow (a,n) = 1$

$\Leftarrow$ لنفرض أن $(a,n)=1$ ولنبرهن أن $a \in Z_n$ عنصر قابل للقلب في Z_n. لدينا:

$(a,n)=1 \Rightarrow \exists x, y \in Z$; $xa + yn = 1 \Rightarrow xa = (-y)n + 1$

$\Rightarrow \overline{x \cdot a} = 1 \Rightarrow x \odot a = 1 \Rightarrow$ a قابل للقلب في Z_n

2) ليكن y عنصراً ما من $f(A)$، عندئذ فإن:

$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A$; $f(x) = y$

$\Rightarrow f(x) \Delta f(1) = f(x \cdot 1) = f(x)$

$f(1) \Delta f(x) = f(1 \cdot x) = f(x)$

وهذا مع ملاحظة أن $f(1) \in f(A)$ يبين لنا أن $f(1)$ هو عنصر الوحدة في الخلقة $f(A)$.

ب) لدينا:

$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

$\Rightarrow f(a \cdot a^{-1}) = f(a^{-1} \cdot a) = f(1)$

$\Rightarrow f(a) \Delta f(a^{-1}) = f(a^{-1}) \Delta f(a) = f(1)$

وهذا مع ملاحظة أن $f(a^{-1}) \in f(A)$ يبين لنا أن $f(a^{-1})$ معاكس $f(a)$ في الخلقة $f(A)$ بالنسبة للعملية (Δ).

3) لنعرف التطبيق $f : (R, \Delta, \Delta') \longrightarrow (R, +, \cdot)$ بالشكل:

$\forall x \in R \qquad f(x) = x + 1$

أ) $\forall x_1, x_2 \in R \Rightarrow f(x_1 \Delta x_2) = f(x_1 + x_2 + 1)$

$= (x_1 + x_2 + 1) + 1 = (x_1 + 1) + (x_2 + 1)$

$= f(x_1) + f(x_2)$

ب) $\forall x_1, x_2 \in R \Rightarrow f(x_1 \Delta' x_2) = f(x_1 + x_2 + x_1 x_2)$

$= x_1 + x_2 + x_1 x_2 + 1 = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

$\forall x_1, x_2 \in R$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ (1

، بالتالي f متباين.

$\forall y \in R \Rightarrow \exists y-1 \in R$; $f(y-1) = y-1+1 = y \Rightarrow$ f غامر

من (1) و(2) و(3) نجد أن f ايزومورفزم ، وبالتالي الحلقتين $(R, +, .)$ و $(R, \oplus, \odot)$ ايزومورفيتان.

السؤال الثاني. [30]

1) العنصر القاسم للصفر: عنصر a في حلقة $(R, +, .)$ يسمى قاسم للصفر إذا وجد عنصر b يختلف عن الصفر من تلك الحلقة بحيث:

$$a \cdot b = 0 \quad \text{او} \quad b \cdot a = 0$$

المنطقة التكاملية: هي حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة لا تملك قواسم فعلية للصفر.

* 2) واضح أن $B_1 \cap B_2 \subseteq A$ لأن $0 \neq B_1 \cap B_2$ (3

$B_1 \cap B_2 \neq \emptyset \Leftarrow$

$0 \in B_1 \cap B_2 \Leftarrow 0 \in B_2$ ، $0 \in B_1$

ب)
$$\forall x, y \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \begin{cases} x \in B_1 & \& \quad x \in B_2 \\ y \in B_1 & \& \quad y \in B_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x - y \in B_1 \ \& \ x - y \in B_2 \Rightarrow x - y \in B_1 \cap B_2$$

ج)
$$\forall x \in B_1 \cap B_2 \ \& \ a \in A \Rightarrow x \in B_1 \ \& \ x \in B_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax \in B_1 & \& \quad ax \in B_2 \\ xa \in B_1 & \& \quad xa \in B_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ax \in B_1 \cap B_2 \ \& \ xa \in B_1 \cap B_2$$

من (1) و(ب) و(ج) نجد أن $B_1 \cap B_2$ مثالية من $(A, +, .)$.

3) لتكن $(\mathbb{Z}, +, .)$ مثالية ما في الحلقة $(\mathbb{Z}, +, .)$ ، ولنبرهن على أن المثالية B هي مثالية رئيسية في الحلقة $(\mathbb{Z}, +, .)$.

أ) إذا كانت $B = \{0\}$ ، فإن $B = \langle 0 \rangle$ ، وبالتالي فإن B مثالية رئيسية في الحلقة $(\mathbb{Z}, +, .)$ مولدة بالعنصر 0.

ب) إذا كانت $B \neq \{0\}$ ، فإنه يوجد في B أعداد صحيحة موجبة وأخرى سالبة. لنفرض أن n أصغر عدد صحيح موجب ينتمي إلى B

إن $B=Z_n$ وذلك لأنه: من جهة أولى $Z_n \subseteq B$ ... (1)

ومن جهة ثانية: إذا كان b عنصر كيفي من B، فإنه يوجد عددان صحيحان q و r بحيث يكون:

$$b = qn + r \quad ; \quad 0 \le r < n$$

إن $r = 0$، لأنه إذا كان $r \neq 0$، فإن:

$$r = b - qn \in B \quad \text{و} \quad 0 < r < n$$
$$B \ni \quad B \ni$$

وهذا تناقض مع كون n أصغر عدد صحيح موجب ينتمي إلى B. ومنه $b = qn$، وبالتالي $b \in Z_n$، ومنه:

$$B \subseteq Z_n \quad \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $B = Z_n$، وبالتالي B حلقة رئيسية مولدة بالعدد n

من (1) و(2) نجد أن $(Z_n, +, .)$ حلقة مثالية رئيسية.

السؤال الثالث: [25]

1) مميز حلقة: نقول عن العدد الصحيح الموجب n، إنه مميز الحلقة R إذا كان n أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $na = 0$ لكل عنصر a من R.

* نفرض أن $char(R) = 0$ ونبرهن أن n أولي.

إذا كان n ليس عدد أولي فإن $n = r.s$ حيث $0 < r, s < n$

بما أن $char(R) = n$ فإن:

$$n1 = 0 \Rightarrow (r.s)1 = 0 \Rightarrow (r.1)(s.1) = 0$$

$\Rightarrow$ R حلقة تكاملية $r.1 = 0$ أو $s.1 = 0$

وفي كلا الحالتين نحصل على تناقض مع كون $char(R) = n$، وبالتالي فإن n عدد أولي.

2) لزوم الشرط: نفرض: a قابل للقلب في A

المطلوب: $\varphi(a) = \varphi(1)$

بما أن $a = 1.a$ و a عنصر قابل للقلب في A، فإن 1 و a من نفس الصنف في A، ومن ثم فإن: $\varphi(a) = \varphi(1)$

كفاية الشرط: نفرض: $\varphi(a) = \varphi(1)$

المطلوب: a قابل للقلب في A

مجال ان 1 يقسم a في A (لأن $a = 1.a$) ، وبما ان $|a| = |-a|$ ، فان
1 و a سيكان في A ، ومن ثم فانه يمكن ايجاد عنصر قابل للقلب
c في A بحيث يكون:

$$a.c = 1$$

وهذا يبين لنا ان a قابل للقلب في A .

الجمهورية العربية السورية　　امتحان بنى جبرية 2　　المدة ساعتان

جامعة طرطوس　　لطلاب السنة الثانية- رياضيات　　الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم　　الدورة الفصلية الثانية　　اسم الطالب:.....

السؤال الأول: (30 درجة) **1**- عرف العنصر الجامد ، ثم برهن أنه إذا كانت $(A,+,.)$ منطقة تكاملية و a,b عنصرين من A بحيث إن $a^5=b^5$ & $a^7=b^7$ فإن $a=b$.

2- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، ولتكن $C(R)=\{a\in R \mid ax=xa \quad \forall x\in R\}$. بين أن $C(R)$ حلقة جزئية من $(R,+,.)$.

السؤال الثاني: (30 درجة) **1**- عرف حلقة المثاليات الرئيسية، ثم برهن أنه إذا كان f هوموموروفيزم لحلقة ما $(A,+,.)$ في حلقة ما $(B,T,*)$، فإن $(Kerf,+,.)$ مثالية من الحلقة $(A,+,.)$.

2- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، ولتكن $(A,+,.)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,.)$، ولتكن I مثالية من R. بين أن:

$$A/(A\cap I)\cong (A+I)/I$$

السؤال الثالث: (30 درجة) **1**- لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية عنصر الوحدة فيها 1. برهن أن:

n أصغر عدد صحيح موجب يحقق $n.1=0 \Leftrightarrow char(R)=n>0$

2- عرف القاسم المشترك الأعظم d لعنصرين $a\neq 0, b\neq 0$ من حلقة تبديلية واحدية $(A,+,.)$، ثم بين أنه إذا كان ε عنصر قابل للقلب في $(A,+,.)$ فإن $d.\varepsilon$ قاسم مشترك أعظم للعنصرين a,b.

3- لتكن $(A,+,.)$ حلقة اقليدية، وليكن $a\neq 0$ و $b\neq 0$ عنصرين من A . إذا كان a قاسماً لـ b في A ، وإذا كان $\varphi(a)=\varphi(b)$ ، فبين أن a و b شريكان في A .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2021-8-8

د. علياء حكيم

مكتبة A to Z

التمرين الأول: [30]

1) * العنصر a من الحلقة $(R,+,.)$ يسمى عنصرا خاصا إذا كان $a^2=a$ 3/

* إذا كان $a=0$ فإن:

$a=0 \Rightarrow a^5=0 \Rightarrow b^5=0 \Rightarrow b=0$ (لأن A منطقة تكاملية)

$\Rightarrow a=b=0$ 3

ب) إذا كان $a\neq 0$ فإن:

$a^7=b^7 \Rightarrow a^5.a^2=b^5.b^2 \Rightarrow a^5.a^2=a^5 b^2$ (لأن $a^5=b^5$)

$\Rightarrow a^5(a^2-b^2)=0$ 4

وبما أن $(A,+,.)$ منطقة تكاملية و $a\neq 0$ فإن $a^5\neq 0$ وبالتالي:

$a^2-b^2=0 \Rightarrow a^2=b^2 \Rightarrow (a^2)^3=(b^2)^3$

$\Rightarrow a^6=b^6$ (1)

وبما أن: 5

$a^7=b^7 \Rightarrow a^6.a=b^6.b \Rightarrow a.a^6=a^6.b$ (من (1))

$\Rightarrow a^6(a-b)=0$

وبما أن $(A,+,.)$ منطقة تكاملية و $a\neq 0$ فإن $a^6\neq 0$ ومنه:

$a-b=0 \Rightarrow a=b$

ج) واضح أن $C(R)\subseteq R$ و $C(R)\neq\emptyset$ لأن $0x=x0$ 3

من أجل كل x من R وبالتالي $0\in C(R)$.

$\forall a_1,a_2\in C(R) \Rightarrow a_1x=xa_1$ و $a_2x=xa_2$ $\forall x\in R$ (ب

$\Rightarrow (a_1-a_2)x=a_1x-a_2x=xa_1-xa_2=x(a_1-a_2)$

$\Rightarrow a_1-a_2\in C(R)$ 6

$\forall a_1,a_2\in C(R) \Rightarrow a_1x=xa_1$ و $a_2x=xa_2$ $\forall x\in R$

$\Rightarrow (a_1.a_2)x=a_1(a_2x)=a_1(xa_2)=(a_1x)a_2$

$=(xa_1)a_2=x(a_1a_2) \Rightarrow a_1a_2\in C(R)$

من (أ) و(ب) و(ج) نجد أن $C(R)$ حلقة جزئية من $(R,+,.)$. 6

مكتبة A to Z

سؤال الثاني:

* إذا كانت $(A,+,\cdot)$ حلقة تبديلية ذات عنصر وحيد، فإننا نقول عن الحلقة $(A,+,\cdot)$ إنها حلقة مثاليات رئيسية إذا، وفقط إذا، كانت كل مثالية في الحلقة $(A,+,\cdot)$ مثالية رئيسية فيها.

= لإثبات أن $\ker f \subseteq A$، و $\ker f \neq \emptyset$ لأن $f(0)=0'$، وبالتالي $0 \in \ker f$

$\forall x,y \in \ker f \Rightarrow f(x)=f(y)=0'$

$\Rightarrow f(x-y)=f(x)\top f(y)=0'\top 0'=0' \Rightarrow x-y \in \ker f$ إذا

$\forall a \in A, x \in \ker f \Rightarrow f(ax)=f(a)\star f(x)$

$=f(a)\star 0'=0' \Rightarrow ax \in \ker f$

$f(xa)=f(x)\star f(a) = 0'\star f(a)=0' \Rightarrow xa \in \ker f$

من (أ) و(ب) و(ج) نجد أن $\ker f$ مثالية في الحلقة $(A,+,\cdot)$.

أ) لتعريف التطبيق:

$$f: A \longrightarrow (A+I)/I$$

بالشكل:

$$f(x)=x+I \qquad \forall x \in A$$

أ) $\forall x_1,x_2 \in A \Rightarrow f(x_1+x_2)=(x_1+x_2)+I=(x_1+I)+(x_2+I)$

$=f(x_1)+f(x_2)$

ب) $\forall x_1,x_2 \in A \Rightarrow f(x_1x_2)=x_1\cdot x_2+I=(x_1+I)(x_2+I)$

$=f(x_1)\cdot f(x_2)$

ج) ليكن y عنصراً في $A+I$ فإنه يكتب بالشكل:

$y=a_1+b \quad ; a_1 \in A \ \& \ b \in I$

$\Rightarrow f(a_1)=a_1+B=(a_1+B)+B=(a_1+B)+(b+B)$

$=(a_1+b)+I=y+I$

$\Rightarrow \forall y+I \in (A+I)/I \Rightarrow \exists a_1 \in A ; f(a_1)=y+I$

وبالتالي f غامر

د) إن $\ker f = A \cap I$ لأن

$\forall z \in \ker f \Rightarrow \ker f \subseteq A \ \& \ f(z)=B$

$\Rightarrow z \in A \ \& \ z+I=I$

$\Rightarrow z \in A \ \& \ z \in I \Rightarrow z \in A \cap I$

$\Rightarrow \ker f \subseteq A \cap I \cdots (1)$

مكتبة A to Z

$\forall z \in A \cap I \Rightarrow z \in A \wedge z \in I$

$\Rightarrow z \in A \wedge z + I = I \Rightarrow z \in A \wedge f(z) = \bar{I}$

$\Rightarrow z \in \ker f \Rightarrow A \cap I \subseteq \ker f \quad \ldots (2)$

من (1) و (2) نجد أن $\ker f = A \cap I$

من (1) و(2) و(3) و(4) نجد أن f هو تشاكل وتقابل من الحلقة $(A, +, \cdot)$ إلى الحلقة $(A+I/I, +, \cdot)$ نواته $A \cap I$، وعليه:

$$(A/A \cap I, +, \cdot) \cong ((A+I)/I, +, \cdot)$$

السؤال الثاني:

1) $\Leftarrow$) لنفرض أن $\text{Char}(R) = n > 0$ وبالتالي فإن $na = 0$ في أجل كل a من $(R, +, \cdot)$، وعليه $n1 = 0$. لنبرهن الآن أنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث أن $0 < m < n$، وتحقق $m.1 = 0$، وعليه:

$$\forall a \in R \quad ma = m(1.a) = (m.1)a = 0.a = 0$$

وهذا تناقض مع كون $\text{Char}(R) = n$، وبالتالي n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $n.1 = 0$

$\Rightarrow$) لنبرهن أن n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $n.1 = 0$ في أجل كل عنصر a في $(R, +, \cdot)$، فإن:

$$na = n(1.a) = (n.1)a = 0a = 0$$

وعليه $\text{Char}(R) = n$.

2) ★ نقول إن d قاسم مشترك لـ a و b في A إذا تحقق:

d قاسم لـ a و b في A أي $d \mid a \wedge d \mid b$

★ إذا وجد قاسم مشترك أكبر d' لـ a و b في A، فإن d' يقسم d في A

★ d قاسم مشترك أعظم لـ a و b بالتالي $a = cd \; ; c \in A$

$$\Rightarrow a = c(\xi^{-1})\xi d = (\xi^{-1})\xi d \Rightarrow \exists d \mid a$$

وبنفس الطريقة نجد أن $d \mid b$

d' قاسم مشترك أكبر فإن $d \mid d'$ وعليه

$$d = cd' \; ; c \in A \Rightarrow \exists d = \xi c d' = (\xi c) d'$$

$\Rightarrow d' \mid \exists d \Rightarrow$ قاسم مشترك أعظم

مكتبة A to Z

الجمهورية العربية السورية　　امتحان بنى جبرية 2　　المدة ساعتان

جامعة طرطوس　　لطلاب السنة الثانية- رياضيات　　الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم　　الدورة الفصلية الأولى　　اسم الطالب:.....

السؤال الأول: (25 درجة) 1- إذا كانت $(A,+,.)$ و $(B,T,*)$ حلقتين ما، ولنرمز لصفر الحلقة $(A,+,.)$ بـ 0 ولصفر الحلقة $(B,T,*)$ بـ $0'$ ، وليكن f هوموموروفيزم للحلقة $(A,+,.)$ في الحلقة $(B,T,*)$. بين أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون f مونوموروفيزم هو أن يكون $Kerf=\{0\}$.

2- لتكن $(A,+,.)$ حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة، ولتكن $(B,+,.)$ حلقة جزئية منها ذات عنصر وحدة $1'$. إذا فرضنا أن عنصر الوحدة في الحلقة $(A,+,.)$ لا ينتمي إلى الحلقة $(B,+,.)$ فبرهن أن $1'$ قاسم للصفر في الحلقة $(A,+,.)$.

السؤال الثاني: (35 درجة) 1- عرف المثالية الأعظمية والمنطقة التكاملية، ثم برهن أنه إذا كان f هوموموروفيزم لحلقة ما $(A,+,.)$ في حلقة ما $(B,T,*)$، فإن الصورة العكسية وفق f لأي مثالية في الحلقة $(A,+,.)$ هي مثالية في الحلقة $(B,T,*)$.

2- لتكن $B, A_1, A_2,\dots,A_n$ مثاليات في حلقة ما $(A,+,.)$. بين أن:

$$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) : B = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B)$$

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- ليكن $(K,+,.)$ حقلاً ما، ولتكن $\{(F_i,+,.)\}_{i\in I}$ أسرة غير خالية من الحقول الجزئية من الحقل $(K,+,.)$. أثبت أن $(\bigcap_{i\in I} F_i,+,.)$ حقل جزئي من الحقل $(K,+,.)$.

2- عرف منطقة التحليل الوحيد، ثم برهن أنه إذا كانت $(A,+,.)$ منطقة تكاملية، وكان $a\neq 0, b\neq 0$ عنصرين من A ، فإن الشرط اللازم والكافي لكي يكون a , b شركين في A هو أن يكون كل من العنصرين a , b قاسماً للآخر في A .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2021-1-28

سنة ثانية رياضيات (2)

السؤال الأول: [25]

1/ لزوم الشرط: الفرض: f هومومورفزم

(1.5)

2/ الطلب: $\ker f = \{0\}$

$\forall x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0' \Rightarrow f(x) = f(0)$ (f هومومورفزم)

$\Rightarrow x = 0$ (f متباين) $\Rightarrow \ker f = \{0\}$

كفاية الشرط: الفرض: $\ker f = \{0\}$

الطلب: f مونومورفزم

$\forall x_1, x_2 \in A \; ; \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0'$

$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0'$ (f هومومورفزم)

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f = \{0\} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

وعليه f متباين، وعليه فإن f هومومورفزم، فإن f مونومورفزم.

(1.0)

2/ نرمز لصفر الحلقة $(A, +, .)$ بـ 0، ولنأخذ عنصر الوحدة في A لا ينتمي إلى B، فإن $1'$ لا يمكن أن يكون عنصر الوحدة في A، ومن ثم فإنه يوجد في A عنصرين مختلفين a و b، بحيث:

$1'.a = b \Rightarrow 1'(1'.a) = 1'b$

$\Rightarrow (1'.1').a = 1'.b$

$\Rightarrow 1'.a = 1'.b \Rightarrow 1'a - 1'b = 0$

$\Rightarrow 1'(a-b) = 0$

وهذا مع ملاحظة أن $a - b \in A$ ($\neq 0$ لأن a و b مختلفان) يبين لنا أن $1'$ قاسم للصفر في الحلقة A.

السؤال الثاني: [35]

1) المثالية الأعظمية: لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة تبديلية. نسمي كل مثالية $A \neq B$ من الحلقة $(A,+,\cdot)$ مثالية أعظمية منها، إذا كانت B هي المثالية الوحيدة التي تحوي B في A ولا يمكن إيجاد مثالية A_1 من الحلقة $(A,+,\cdot)$ بحيث يكون $A_1 \neq A$ و $A_1 \neq B$.

الحلقة البسيطة: هي حلقة تبديلية ذات عنصر واحدة و لا تقبل قواسم للصفر.

* لتكن B_1 مثالية في الحلقة $(B,T,*)$. عندئذ B_1 حلقة جزئية في $(B,T,*)$ وعلماً أن $f^{-1}(B_1)$ حلقة جزئية من الحلقة $(A,+,\cdot)$. حتى نبرهن أن $f^{-1}(B_1)$ مثالية يكفي أن نبين أن:

$$\forall a \in A, x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow ax \in f^{-1}(B_1) \text{ و } xa \in f^{-1}(B_1)$$

لدينا:

$$\forall x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x) \in B_1 \text{ و } f(a) \in B$$
$$\Rightarrow f(x) * f(a) \in B_1 \Rightarrow f(x \cdot a) \in B_1$$
$$\Rightarrow xa \in f^{-1}(B_1)$$

و

$$f(a) * f(x) \subset B_1 \Rightarrow f(a \cdot x) \in B_1$$
$$\Rightarrow a \cdot x \in f^{-1}(B)$$

مما سبق نجد أن $f^{-1}(B_1)$ مثالية من الحلقة $(A,+,\cdot)$.

2) لدينا:

$$\forall x \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) : B \Rightarrow x \cdot B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow x \cdot B \in A_i \quad \forall i=1,\dots,n$$
$$\Rightarrow x \in A_i : B \quad \forall i=1,\dots,n \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B)$$
$$\Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) : B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B) \quad \dots (1)$$

وبصيغة أخرى

$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B) \Rightarrow x \in A_i : B \quad ; \quad i=1,2,\dots,n$$

$\Rightarrow x \cdot B \subseteq A_i \quad ; i = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow x \cdot B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow x \in (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) : B$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B) \subseteq (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) : B \quad \dots (2)$

من (1) و (2) نجد أن

$$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) : B = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i : B)$$

السؤال الثالث [30]

أ) [7] واضح أن $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq K$ ، وبما أن $\{(F_i, +, \cdot)\}$ أسرة من

حلقات جزئية من الحقل $(K, +, \cdot)$ فإن:

$0, 1 \in F_i \quad \forall i \in I \Rightarrow 0, 1 \in \bigcap_{i \in I} F_i$

وهذا يبين لنا أنه يوجد في $\bigcap_{i \in I} F_i$ عنصران على الأقل.

ب)

$\forall x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i \Rightarrow x, y \in F_i \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow x - y \in F_i \quad \forall i \in I \Rightarrow x - y \in \bigcap_{i \in I} F_i$

ج) $\forall x, y \in \bigcap F_i \; ; \; y \neq 0 \Rightarrow x, y \in F_i \quad \forall i \in I \; ; \; y \neq 0$

$\Rightarrow x \cdot y^{-1} \in F_i \quad \forall i \in I \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in \bigcap_{i \in I} F_i$

من (أ) و(ب) و(ج) نجد أن $(\bigcap_{i \in I} F_i, +, \cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(K, +, \cdot)$

ج) منطقة التكامل الأولية: لتكن $(A, +, \cdot)$ منطقة تكاملية. نسمي $(A, +, \cdot)$

منطقة تحليل وهي إذا تحقق الشرطان:

1- كل عنصر $a \neq 0$ من A وغير قابل للتحليل فيها هو جداء منتهٍ

لعناصر من R كل منها غير قابل للتحليل فيها.

2- أي تحليلين لـ a يختلفان عن بعضهما بترتيب العناصر وبفارق

عناصر قابلة للقلب.

* لرقم السؤال: الفرض: a و b شريكان في A

المطلوب: a يقسم b و b يقسم a في A

البرهان واضح من كون a, b شريكان في A.

تتمة البرهان: الفرض: a يقسم b ، و b يقسم a في A

المطلوب: a و b شريكان في A.

بما أن كلاً من العنصرين a و b قاسم للآخر في A، فإنه يمكن إيجاد عنصرين c_1 و c_2 من A بحيث يكون:

$$a = bc_1 \quad \text{و} \quad b = ac_2$$

$$\Rightarrow a = ac_2c_1 \Rightarrow a - ac_2c_1 = 0$$

$$\Rightarrow a(1 - c_2c_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - c_2c_1 = 0 \quad (a \neq 0 \text{ و } A \text{ منطقة تكاملية})$$

$$\Rightarrow c_2c_1 = 1$$

إذاً العنصران c_1 و c_2 قابلان للقلب في A، وبالتالي العلاقتان:

$$a = bc_1 \quad \text{و} \quad b = ac_2$$

تبين لنا أن a و b شريكان في A.

الجمهورية العربية السورية | امتحان بنى جبرية 2 | المدة ساعتان

جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثانية- رياضيات | الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم | الدورة الفصلية الثانية | اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (25 درجة) 1- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ذات عنصر وحدة 1، وليكن a عنصراً غير قابل للقلب فيها. بين أن a غير قاسم للصفر فيها.

2- لتكن $M_2(\mathbb{Z})$ حلقة المصفوفات المربعة فوق الحلقة $\mathbb{Z}$ مع عمليتي جمع وضرب المصفوفات، ولتكن $H=\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \; ; \; a,b\in Z\}$. برهن أن H حلقة جزئية من الحلقة $M_2(\mathbb{Z})$.

السؤال الثاني: (35 درجة) 1- عرف كلاً من المثالية الأولية والمثالية الرئيسية، ثم برهن أنه إذا كانت B_1 , B_2 مثاليتين من حلقة ما $(A,+,.)$ فإن $B_1.B_2$ مثالية من الحلقة $(A,+,.)$.

2- لتكن A_1 , A_2 مثاليتين من حلقة ما $(A,+,.)$، ولنفرض أن $A_1 \subseteq A_2$. برهن أن:

$$A/A_1/A_2/A_1 \cong A/A_2$$

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- ليكن $(K,+,.)$ حقلاً تبديلياً ما، ولتكن F مجموعة جزئية من K . إذا كانت $(F,+,.)$ منطقة تكاملية ، وإذا كانت $F'=\{a.b^{-1} \mid a,b\in F \;\; \& \;\; b\neq 0\}$ ، فإن $(F',+,.)$ حقل جزئي من الحقل $(K,+,.)$.

2- عرف العنصر غير القابل للتحليل، ثم برهن أنه إذا كانت $(A,+,.)$ حلقة اقليدية، وإذا كان $a\neq 0$ عنصراً من A ، فإن الشرط اللازم الكافي لكي يكون a قابلاً للقلب في A هو أن يكون $\varphi(a)=\varphi(1)$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2020-8-17

د. علياء حكيم

حل التمرين الأول: (5ن)

1) بما أن a قابل للعكس، فإن a يختلف عن الصفر.

نفرض جدلاً أن a قاسم للصفر، وبالتالي يوجد عنصر $b \neq 0$ من الحلقة R يحقق $ab = 0$ أو $ba = 0$، وبالتالي:

a قابل للعكس ; $a^{-1}ab = 0$ ⇒ $\exists a^{-1} \in R$ إذا كان $ab = 0$

$\Rightarrow 1.b = 0 \Rightarrow b = 0$

وهذا تناقض مع كون $b \neq 0$.

أو إذا كان $ba = 0$ ⇒ $\exists \bar{a}^{-1} \in R$; $ba\bar{a}^{-1} = 0$ (a قابل للعكس)

$\Rightarrow b.1 = 0 \Rightarrow b = 0$

وهذا تناقض مع كون $b \neq 0$.

وبالتالي a ليس قاسما (فعليا) للصفر.

2) أ) واضح أن $H \subseteq M_2(\mathbb{Z})$، $H \neq \emptyset$ لأن $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in H$

ب) $\forall A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \in H \Rightarrow$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ -b_1 + b_2 & a_1 - a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ -(b_1 - b_2) & a_1 - a_2 \end{bmatrix} \in H$$

$\forall A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ -b_1a_2 - a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ -(a_1b_2 + b_1a_2) & a_1a_2 - b_1b_2 \end{bmatrix}$$

$\in H$

من (أ) و(ب) و(ج) نجد أن H حلقة جزئية من $M_2(\mathbb{Z})$

A حلقة تبديلية ذات عنصر وحدة .
B_1, B_2 مثالية منها مثالية رئيسة
A حلقة تبديلية B مثالية من A يكون $xy \in B$ أو $x \in B$ أو $y \in B$

1) أ) نبين أن $B_1 B_2 \subseteq A$ ، $B_1 B_2 \neq \emptyset$ أي $0 \in B_1 B_2$

$$\forall x, x' \in B_1 . B_2 \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \; ; \; x_i \in B_1, y_i \in B_2, n \in \mathbb{Z}^+$$

$$x' = \sum_{j=1}^{m} x'_j y'_j \; ; \; x'_j \in B_1, y'_j \in B_2, n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow x - x' = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{j=1}^{m} x'_j y'_j = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i + \sum_{j=1}^{m} (-x'_j) y_i \in B_1 B_2$$

$B_1 \Rightarrow$

ب) مجموع عناصر هذا الصنف بين الأول من B_1 والثاني من B_2

$$\forall a \in A, x \in B_1 . B_2 \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \; ; \; x_i \in B_1, y_i \in B_2, n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax = a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (a x_i) y_i \in B_1 B_2 \\ \quad B_1 \Rightarrow \\ xa = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) a = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i a) \in B_1 B_2 \\ \quad B_2 \Rightarrow \end{cases}$$

من (أ) و(ب) نجد أن $B_1 B_2$ مثالية في الحلقة $(A_1, +, \cdot)$.

2) إذا f هو التطبيق :

$$f : A/A_1 \longrightarrow A/A_2$$

$$f(x + A_1) = x + A_2$$

أ) نبين أن f تشاكل

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow f((x_1 + A) + (x_2 + A)) = f((x_1 + x_2) + A_1)$$

$$= (x_1 + x_2) + A_2 = (x_1 + A_2) + (x_2 + A_2)$$

$$= f(x_1 + A_1) + f(x_2 + A_2)$$

ب)

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow f((x_1 + A_1).(x_2 + A_1)) = f(x_1 . x_2 + A)$$

$$= x_1 . x_2 + A_2 = (x_1 + A_2).(x_2 + A_2)$$

$$= f(x_1 + A_1) \, f(x_2 + A_1)$$

ب) f غامر لأن:

$\forall x+A_2 \in A/A_2 \Rightarrow \exists x+A_1 \in A/A_1 \; ; \; f(x+A_1)=x+A_2$

ج) $\forall x+A_1 \in Kerf \Rightarrow f(x+A_1)=A_2 \Rightarrow x+A_2=A_2$

$\Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow x+A_1 \in A_2/A_1$

$\Rightarrow Kerf \subseteq A_2/A_1 \quad \dots (1)$

د) $\forall x+A_1 \in A_2/A_1 \Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow x+A_2=A_2$

$\Rightarrow f(x+A_1)=A_2 \Rightarrow x+A_1 \in Kerf$

$\Rightarrow A_2/A_1 \subseteq Kerf \quad \dots (2)$

من (1) و (2) نجد أن $Kerf = A_2/A_1$

من (أ) و (ب) و (ج) و (د) نجد أن f إيبيمورفيزم الحلقة A/A_1 في الحلقة A/A_2 ونواته A_2/A_1. ومنه:

$$(A/A_1 \,/\, A_2/A_1, +, \cdot) \cong (A/A_2, +, \cdot)$$

التمرين الثاني: (3ن)

1) أ) واضح أن $F' \subseteq K$

ب) بما أن F' تحوي عنصرين على الأقل وذلك لأن $0, 1 \in F'$

$$\forall x, y \in F' \Rightarrow \begin{cases} x = ab^{-1} \; ; \; a, b \in F \;\&\; b \neq 0 \\ y = a_1 b_1^{-1} \; ; \; a_1, b_1 \in F \;\&\; b_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x-y = ab^{-1} - a_1 b_1^{-1}$$

$$= a(b_1 b_1^{-1}) b^{-1} - a_1 (b b^{-1}) b_1^{-1}$$

$$= (ab_1)(bb_1)^{-1} - (a_1 b)(b_1 b)^{-1}$$

$$= (ab_1 - a_1 b)(bb_1)^{-1}$$

ولكن

$ab_1 - a_1 b \in F \; , \; bb_1 \in F \; , \; bb_1 \neq 0$ لأن F حلقة

- $(ab_1 - a_1 b)(bb_1)^{-1} \in F' \Rightarrow x \cdot y \in F'$

$\forall x, y \in F$ و $y \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = ab^{-1} ; a, b \in F, b \neq 0 \\ y = a_1 b_1^{-1} ; a_1, b_1 \in F \text{ و } a_1 \neq 0, b_1 \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow xy^{-1} = (ab^{-1})(a_1 b_1^{-1})^{-1} = (ab^{-1})(b_1 a_1^{-1})$

$= (ab_1)(a_1 b)^{-1}$

ولكن (مغلقة تكاملية)

$ab_1, a_1 b \in F$ و $a_1 b \neq 0$

وعليه

$(ab_1)(a_1 b_1)^{-1} \in F' \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in F'$

من (1) و(2) و(3) نجد أن F' حقل جزئي من الحقل $(K, +, \cdot)$.

2) العنصر غير القابل للتحليل: نقول إن a غير قابل للتحليل في A إذا كان $a \neq 0$ تحقق الشرطان:

1) a غير قابل للعكس في A

2) إذا كان b و c عنصرين من A بحيث إن $a = b \cdot c$ فإما أحد العنصرين قابل للعكس في A. أي إما a و b متكافئان.

لزوم الشرط: الفرض: a قابل للعكس في A

المطلوب $\varphi(a) = \varphi(1)$

بما أن $a = 1 \cdot a$ و a عنصر قابل للعكس في A، فإن 1 و a في A، ومن ثم فإن $\varphi(a) = \varphi(1)$

كفاية الشرط: الفرض: $\varphi(a) = \varphi(1)$

المطلوب: a قابل للعكس في A

بما أن 1 يقسم a في A (لأن $a = 1 \cdot a$)، وبما أن $\varphi(a) = \varphi(1)$، فإنه لا يمكن إيجاد عنصر غير قابل للعكس c في A بحيث يكون $a = 1 \cdot c$. وهذا يعني أن a قابل للعكس

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان بنى جبرية 2
لطلاب السنة الثانية- رياضيات
الدورة الفصلية الأولى

المدة ساعتان
الدرجة العظمى: 90 درجة
إسم الطالب:

السؤال الأول: (30 درجة) 1- ليكن $f:(A,+,.)\to(B,T,*)$ هوموموفيزم حلقات، وليكن 1 عنصر الوحدة في الحلقة $(A,+,.)$، ولنرمز لصفري الحلقتين $(A,+,.)$ و $(B,T,*)$ بـ 0 و $0'$ على الترتيب. بين أن:

أ- $\forall a\in A \quad f(-a)=-f(a)$.

ب- $f(1)$ عنصر الوحدة في الحلقة $(f(A),T,*)$.

2- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ذات عنصر وحدة 1، ولتكن Δ و Δ' عمليتين جبريتين معرفتين على R بالشكل:

$$x\Delta y=x+y+1 \qquad \& \qquad x\Delta' y=x+y+x.y$$

من أجل كل x و y من R. برهن أن الحلقتين $(R,+,.)$ و (R,Δ,Δ') ايزومورفيزميتان.

السؤال الثاني: (35 درجة) 1- ليكن $f:(A,+,.)\to(B,T,*)$ هوموموفيزم حلقات. برهن أن الصورة العكسية وفق f لأي مثالية B_1 من الحلقة $(B,T,*)$ هي مثالية من الحلقة $(A,+,.)$.

2- إذا كانت $A=\{\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix} \ ; \ a,b,d\in\mathbb{R}\}$ حلقة جزئية من الحلقة $M_2(\mathbb{R})$، ولنفرض أن $I=\{\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{bmatrix} \ ; \ a,b\in\mathbb{R}\}$. بين أن I مثالية من A. هل I مثالية من $M_2(\mathbb{R})$؟ وضح ذلك.

السؤال الثالث: (25 درجة) 1- ليكن $(K,+,.)$ حقلاً ما، ولتكن $\{(F_i,+,.)\}_{i\in I}$ أسرة غير خالية من الحقول الجزئية من الحقل $(K,+,.)$. أثبت أن $(\bigcap_{i\in I}F_i,+,.)$ حقل جزئي من الحقل $(K,+,.)$.

2- لتكن $(A,+,.)$ حلقة اقليدية، وليكن $a\neq 0$ و $b\neq 0$ عنصرين من A. إذا كان a قاسماً لـ b في A، وإذا كان $\varphi(a)=\varphi(b)$، فبين أن a و b شريكان في A.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2020-2-11

د. علياء حكيم

Scanned by CamScanner

سلم تصحيح بنى هندسة [2]
سنة رابعة / 2019-2020
فحص أول

السؤال الأول: [30]

$a+(-a)=0 \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow f(a+(-a)) = f(0)$

$\Rightarrow f(a) \top f(-a) = 0'$ 5

$\Rightarrow -f(a) = f(-a)$

$\forall y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \; ; \; f(x) = y$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \star f(1) = f(x.1) = f(x) \\ f(1) \star f(x) = f(1.x) = f(x) \end{cases}$ 5

و هذا مع ملاحظة أن $f(1) \in f(A)$ يبين لنا أن $f(1)$ هو عنصر الوحدة في الحلقة $f(A)$.

2 لنعرف التطبيق $f:(R,\Delta,\Delta') \to (R,+,.)$ بالشكل:

$f(x) = x+1 \quad \forall x \in R$

بأن f ايزومورفزم حلقات لأن:

$\forall x_1, x_2 \in R \Rightarrow f(x_1 \Delta x_2) = f(x_1 + x_2 + x_1 x_2)$ 5

$= x_1 + x_2 + x_1 x_2 + 1$

$= (x_1+1)(x_2+1) = f(x_1) + f(x_2)$

أ)

$\forall x_1, x_2 \in R \Rightarrow f(x_1 \Delta x_2) = f(x_1 + x_2 + 1)$

$= (x_1 + x_2 + 1) + 1$

$= (x_1+1) + (x_2+1) = f(x_1) + f(x_2)$

ب)

$\forall x_1, x_2 \in R \; ; \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1$ 5

$\Rightarrow x_1 = x_2$

وبالتالي f متباين

$\forall y \in R \Rightarrow y-1 \in R \; ; \; f(y-1) = y-1+1 = y \Rightarrow$ f غامر

ج من أ) و ب) و د) و ا) نجد أن f ايزومورفزم، وبالتالي الحلقتين $(R,+,.)$ و (R,Δ,Δ') ايزومورفزمتان.

Scanned by CamScanner

ثانياً

$f^{-1}(B_1) \subseteq A$ واضح أن

$0 \in B_1$ وبالتالي $f^{-1}(B_1) \neq \emptyset$ ، لأن

$0 = f(0) \in f^{-1}(B_1)$ ، وبالتالي $f^{-1}(B_1) \neq \emptyset$.

(1)

$$\forall x_1, x_2 \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x_1) \in B_1 \text{ و } f(x_2) \in B_1$$
$$\Rightarrow f(x_1) + (-f(x_2)) \in B_1$$
$$\Rightarrow f(x_1) + f(-x_2) \in B_1$$
$$\Rightarrow f(x_1 - x_2) \in B_1 \Rightarrow x_1 - x_2 \in f^{-1}(B_1)$$

(2)

$$\forall a \in A, x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x) \in B_1 \text{ و } f(a) \in B$$
$$\Rightarrow f(x) * f(a) \in B_1 \Rightarrow f(x \cdot a) \in B_1$$
$$\Rightarrow x \cdot a \in f^{-1}(B_1)$$

و

$$f(a) * f(x) \in B_1 \Rightarrow f(ax) \in B_1$$
$$\Rightarrow ax \in f^{-1}(B_1)$$

مما سبق نجد أن $f^{-1}(B_1)$ مثالية في الحلقة A .

(3) (20)

(1) واضح أن $I \subseteq A$ ، $I \neq \emptyset$ ($\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$)

(2)

$$\forall x = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I \Rightarrow$$
$$x - y = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

(3)

$$\forall x \in \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I, \ a = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in A \Rightarrow$$
$$x \cdot a = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$
$$a \cdot x = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_2 b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

من (1) و(2) ، (3) فإن I مثالية في $(A, +, \cdot)$.

Scanned by CamScanner

$\forall x = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I \;,\; y = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \in M_2(R)$

$\Rightarrow y \cdot x = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 & a_1 b \\ ca & d_1 b \end{bmatrix} \in I$ 5

وبالتالي I لمثالية في $M_2(R)$.

السؤال الثالث [25]

(15) 1) واضح أن $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq K$

وبما أن $(F_i, +, \cdot)$ أسرة حقول جزئية في الحقل $(R, +, \cdot)$، فإن: 3

$0, 1 \in F_i \quad \forall i \in I \Rightarrow 0, 1 \in \bigcap_{i \in I} F_i$

وهذا يبين أنه يوجد في $\bigcap_{i \in I} F_i$ عنصران على الأقل.

ب)

$\forall x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i \Rightarrow x, y \in F_i \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow x - y \in F_i \quad \forall i \in I \Rightarrow x - y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ 6

$\forall x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i \;;\; y \neq 0 \Rightarrow x, y \in F_i \quad \forall i \in I, y \neq 0$ (*)

$\Rightarrow x \cdot y^{-1} \in F_i \quad \forall i \in I$ 6

من (أ) و(ب) و(*) نجد أن $(\bigcap_{i \in I} F_i, +, \cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(R, +, \cdot)$

(10) 2) بما أن $(A, +, \cdot)$ حلقة اقليدية، فإنه من أجل العنصرين a و b يوجد عنصران q و r في R بحيث يكون:

$a = bq + r$

و r إما أن يكون صفر أو $d(r) < d(b)$ 5

ان $r = 0$ لأنه: إذا كان $r \neq 0$، فإن:

$d(r) < d(b) = d(a)$

وهي جزئية ثانية بما أن a يقسم b في A، فإنه بالإمكان إيجاد عنصر c في A بحيث يكون:

Scanned by CamScanner

$b = a \cdot c$

$a = bq + r \Rightarrow r = a - b \cdot q = a - acq$

$= a(1 - c \cdot q)$

ومنه فإن a يقسم r في A، وهو تناقض.

4

$d(a) \leq d(r)$

وهذا تناقض.

بما أن

$a = bq + r \quad \& \quad r = 0 \Rightarrow a = bq$

وبالتالي b يقسم a في A، بما أن a يقسم b في A (فرضاً) فإن a و b شريكان في A.

Scanned by CamScanner

الجمهورية العربية السورية — امتحان بنى جبرية 2 — المدة ساعتان

جامعة طرطوس — لطلاب السنة الثانية- رياضيات — الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم — الدورة الفصلية الثالثة — اسم الطالب: .....

السؤال الأول: (30 درجة)

1 -لتكن $(R,+,.)$ حلقة ذات عنصر وحدة 1، وليكن a عنصراً غير قابل للقلب فيها. بين أن a غير قاسم للصفر فيها.

2 -إذا كانت $(A,+,.)$ و $(B,T,*)$ حلقتين ما، ولنرمز لصفر الحلقة $(A,+,.)$ بـ 0 ولصفر الحلقة $(B,T,*)$ بـ $0'$ ، وليكن f هوموموروفيزم للحلقة $(A,+,.)$ في الحلقة $(B,T,*)$. بين أن $(Kerf,+,.)$ حلقة جزئية من الحلقة $(A,+,.)$.

السؤال الثاني: (35 درجة)

1 -لتكن B_1 , B_2 مثاليتين من حلقة تبديلية $(A,+,.)$. برهن أن $B_1 : B_2$ مثالية من الحلقة $(A,+,.)$ تحوي B_1 .

2 -لتكن $(2Z,+,.)$ حلقة الأعداد الصحيحة الزوجية بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتين، ولتكن $S = 4Z \subset 2Z$. بين أن S مثالية من الحلقة $(2Z,+,.)$. هل S مثالية أعظمية؟ وهل S مثالية أولية؟

السؤال الثالث: (25 درجة)

1 -لتكن $(A,+,.)$ منطقة تكاملية، وليكن $a \neq 0, b \neq 0$ عنصرين من A . بين أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون a , b شركين في A هو أن يكون كل من العنصرين a , b قاسماً للآخر في A .

2 -أوجد القاسم المشترك الأعظم لكثيري الحدود:

$$f(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 - X - 1$$
$$g(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X - 1$$

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2019-7-29

سنة ١٢١ رياضيات فصل ثالث
الواجب

السؤال الأول: [30]

أ) بما أن a قاسم للعنصر a يختلف عن الصفر. لنبرهن (15)
على أن a قاسم للصفر، بالتالي a عنصر في الحلقة

نريد أن a قاسم للصفر، بالتالي $ab=0$ و $ba=0$ كيف $b\neq 0$

$ab=0$ إذا كان $\Rightarrow \exists a' \in R ; a'ab=0$ (a قاسم للعنصر a)

$\Rightarrow 1b=0 \Rightarrow b=0$ تناقض

وهذا تناقض مع كون $b\neq 0$.

$ba=0$ إذا كان $\Rightarrow \exists a' \in R ; baa'=0$

$\Rightarrow b1=0 \Rightarrow b=0$ تناقض

وهذا تناقض مع كون $b\neq 0$.

بالتالي a قاسم للصفر.

ب) (15)
واضح أن $Ker f \subseteq A$، $Ker f \neq \emptyset$ لأن $f(0)=0'$

(f هومومورفيزم) بالتالي $0 \in Ker f$، وهذا $Ker f \neq \emptyset$.

$\forall x, y \in Ker f \Rightarrow f(x)=f(y)=0'$

$\Rightarrow f(x-y)=f(x)-f(y)=0'-0'=0$

$\Rightarrow x-y \in Ker f$

$\forall x, y \in Ker f \Rightarrow f(x)=f(y)=0'$

$\Rightarrow f(x.y)=f(x).f(y)=0.0'=0'$

$\Rightarrow x.y \in Ker f$

من (أ)، (ب)، (ج) نجد أن $Ker f$ حلقة جزئية من الحلقة $(A,+,.)$

السؤال الثالث: [35]

ا) (٢) بإثبات أن $B_1:B_2 \subseteq A$ ، $B_1:B_2 \neq \emptyset$ لأن (3)

$0 B_2 = \{0\} \subseteq B_1 \Rightarrow 0 \in B_1:B_2 \Rightarrow B_1:B_2 \neq \emptyset$ (1.5)

ب)

$\forall x, x' \in B_1:B_2 \Rightarrow xB_2 \subseteq B_1$ و $x'B_2 \subseteq B_1$

$\Rightarrow xB_2 - x'B_2 \subseteq B_1 \Rightarrow (x-x')B_2 \subseteq B_1$ (4)

$\Rightarrow x-x' \in B_1:B_2$

$\forall y \in B_1:B_2$ و $a \in A \Rightarrow yB_2 \subseteq B_1$ (1)

ج) $\Rightarrow a(yB_2) \subseteq aB_1 \subseteq B_1$ (لأن B_1 مثالية)

$\Rightarrow (ay)B_2 \subseteq B_1 \Rightarrow ay \in B_1:B_2$

د) $\forall b_1 \in B_1 \Rightarrow b_1 B_2 \subseteq B_1$ (لأن B_1 مثالية) (3)

$\Rightarrow b_1 \in B_1:B_2 \Rightarrow B_1 \subseteq B_1:B_2$

من (أ) و (ب) و (ج) و (د) نجد أن $B_1:B_2$ مثالية تحتوي B_1 (1)

(2.5) ٢) أ) بإثبات أن $\emptyset \neq S \subseteq 4\mathbb{Z}$

ب) $\forall x, y \in S \Rightarrow \exists m, m' \in \mathbb{Z}$; $x = 4m$, $y = 4m'$

$\Rightarrow x - y = 4m - 4m' = 4(m-m') \in 4\mathbb{Z} = S$ (1)

ج) $\forall x \in 4\mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}$; $x = 4m$

$\Rightarrow xy = (4m)y = 4(my) \in 4\mathbb{Z} = S$

من (أ) و (ب) و (ج) نجد أن S مثالية في الحلقة R.

- لبرهان أنه توجد مثالية I بحيث أن $S \subsetneq I \subsetneq R$ ، لبرهان أن $I = R$

بما أن $S \subsetneq I$ ، فإنه يوجد عنصر $z \in I$ ، $z \notin S$ ، بالتالي

بما أن:

$$x = 4m + 2 \quad ; m \in \mathbb{Z}$$

لدينا:

$$4m \in S \Rightarrow -4m \in S \subsetneq I \Rightarrow \underset{\in I}{x} + (\underset{\in I}{-4m}) \in I$$

$$\Rightarrow 4m + 2 - 4m \Rightarrow 2 \in I \Rightarrow 2\mathbb{Z} \subseteq I$$

$$\Rightarrow I = 2\mathbb{Z}$$

وبالتالي مما سبق نجد أن I مثالي أعظمي

لنبرهن أن $a = 2$ ، $b = 6$ $\Leftarrow$ $a, b \in 2\mathbb{Z} = R$ و $a, b \notin S$

ولكن لدينا:

$$a \cdot b = 2 \times 6 = 12 \in S$$

وبالتالي S ليست أولية.

السؤال الثالث: [25]

1) نقدم البرهان: البرهان: a و b شريكان في A

3 الطلب: a يقسم b ، b يقسم a في A

البرهان واضح في كون a و b شريكين في A

2) كفاية الشرط: البرهان: a يقسم b و b يقسم a في A

الطلب: a و b شريكان في A

بما أن كل من العنصرين a و b قاسم للآخر في A، فإنه يمكن إيجاد عنصرين c_1 و c_2 في A بحيث يكون:

2

$$a = b c_1 \quad \& \quad b = a c_1$$

$$\Rightarrow a = a c_2 c_1 \Rightarrow a - a c_1 c_2 = 0$$

$$\Rightarrow a(1 - c_1 c_2) = 0 \Rightarrow 1 - c_1 c_2 = 0$$ (لأن A منطقة تكامل و $a \neq 0$)

$\Rightarrow c_2 c_1 = 1$

إذاً العنصرين c_1 و c_2 قابلان للعكس في A، وبالتالي العلاقتان:

$$a = bc_1 \quad \& \quad b = ac_2$$

تبين لنا أن a, b متكافئان في A.

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 + 2x^2 + x - 1 & x \\ \hline x^3 + x^2 + 2x + 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 + 2x + 1 & x^2 - 1 \\ \hline x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 - x & \\ \hline x^2 - 1 & \end{array}$$

الباقي الأول هو:

$$\rho(x) = x^2 - 1$$

نقسم $g(x)$ على $\rho(x)$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 + 2x^2 + x - 1 & x^2 + x + 3 \\ \hline -x^2 \quad -1 & \\ \hline x^3 + 3x^2 + x - 1 & \\ -x^3 \quad \pm x & \\ \hline 3x^2 + 2x - 1 & \\ 3x^2 \quad \pm 3 & \\ \hline 2x + 2 & \end{array}$$

الباقي بعد الانقسام:

$$\rho_1(x) = x + 1$$

وبما أن $\rho(x) = \rho_1(x) \cdot (x - 1)$

وبالتالي $\rho_1(x)$ هو القاسم المشترك الأعظم لـ $g(x)$ و $\rho(x)$

د. علياء طايع

سلم تصحيح بديل 2
الفصل الثاني 2019
طوس

السؤال الأول: [30]

(15)

1) (1) واضح أن $C(R) \subseteq R$ و كذلك $C(R) \neq \emptyset$ لأن $0x = x0$ من أجل كل x من R ، و بالتالي $0 \in C(R)$ و منه $C(R) \neq \emptyset$ 5

(ب) $\forall a_1, a_2 \in C(R) \Rightarrow a_1 x = x a_1 \wedge a_2 x = x a_2 \quad \forall x \in R$

$\Rightarrow (a_1 - a_2)x = a_1 x - a_2 x = x a_1 - x a_2$

$= x(a_1 - a_2)$

$\Rightarrow a_1 - a_2 \in C(R)$ 5

$\forall a_1, a_2 \in C(R) \Rightarrow x a_1 = a_1 x \wedge x a_2 = a_2 x \quad \forall x \in R$

$\Rightarrow (a_1 \cdot a_2)x = a_1(a_2 x) = a_1(x a_2)$

$= (a_1 x) a_2 = (x a_1) a_2 = x(a_1 a_2)$ 5

$\Rightarrow a_1 a_2 \in C(R)$

من (1) و (ب) و (د) نجد أن $C(R)$ حلقة جزئية من $(R, +, .)$

(15)

2) لزوم الشرط: الفرض: f ايزومورفزم 2

المطلوب: $\ker f = \{0\}$

$\forall x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0' \Rightarrow f(x) = f(0)$ (f هومومورفزم)

$\Rightarrow x = 0$ (f متباين) 5

$\Rightarrow \ker f = \{0\}$

كفاية الشرط: الفرض: $\ker f = \{0\}$

المطلوب: f ايزومورفزم 2

$\forall x_1, x_2 \in A \; ; \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0'$

$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0'$ (2) (f هومومورفزم)

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f = \{0\}$ 3/

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

وفنه f متباين، وبما أن f هومومورفزم فان f ايسومورفزم

السؤال الثاني:

1/ لتكن B مثالية ما من الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$، ولبرهن على أن المثالية B هي مثالية رئيسية من الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

2/ إذا كانت $B = \{0\}$، فإن:

$$B = \mathbb{Z}.0$$

وبالتالي فإن B مثالية رئيسية من الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ مولدة بالعدد 0.

3/ إذا كانت $B \neq \{0\}$، فإنه يوجد في B أعداد صحيحة موجبة وأخرى سالبة، لنفرض أن n أصغر عدد صحيح ينتمي إلى B.

إن $B = \mathbb{Z}n$ وذلك لأنه: من جهة أولى $\mathbb{Z}n \subseteq B$ .. (1)

من جهة ثانية إذا كان b عنصر كيفي من B، فإنه يوجد عددان صحيحان q و r بحيث يكون:

4/ $b = qn + r$; $0 \leq r < n$

إن $r = 0$ وذلك لأنه إذا كان $r \neq 0$، فإن:

$$0 < r < n \quad \text{و} \quad r = b - qn \in B$$
$$\in B \quad \in B$$

5/ وهذا تناقض مع كون n أصغر عدد صحيح موجب ينتمي إلى B.

وفنه $b = qn$. بالتالي $b \in \mathbb{Z}n$ وفنه:

$B \subseteq \mathbb{Z}n$ ... (2)

من (1) و (2) نجد أن $B = \mathbb{Z}n$

السؤال الثالث: [25]

1) (15)

٢) واضح أن $\bigcap_{i\in I} F_i \subseteq K$.

وبما أن $(F_i,+,\cdot)$ أسرة حقول جزئية من الحقل $(K,+,\cdot)$

فإن :

$$0,1 \in F_i \quad \forall i\in I \Rightarrow 0,1 \in \bigcap_{i\in I} F_i$$

وهذا يبين أنه يوجد في $\bigcap_{i\in I} F_i$ عنصران على الأقل.

ب)

$$\forall x,y \in \bigcap_{i\in I} F_i \Rightarrow x,y \in F_i \quad \forall i\in I$$

$$\Rightarrow x-y \in F_i \ \forall i\in I \Rightarrow x-y \in \bigcap_{i\in I} F_i$$

$$\forall x,y \in \bigcap_{i\in I} F_i \ ; \ y\neq 0 \Rightarrow x,y\in F_i \ \forall i\in I \ \& \ y\neq 0$$

$$\Rightarrow x y^{-1} \in F_i \ \forall i\in I \Rightarrow x y^{-1} \in \bigcap_{i\in I} F_i$$

ف (أ) و(ب) و(د) نجد أن $(\bigcap_{i\in I} F_i,+,\cdot)$ حقل جزئي من الحقل $(K,+,\cdot)$.

(10)

2) بما أن a يقسم $a\cdot b$ في A، فإن :

$$\varphi(a) \leq \varphi(a\cdot b)$$

إذ : إذا كان $\varphi(a)=\varphi(a\cdot b)$ فإن هذا يعني أن $\varphi(a)\neq\varphi(a\cdot b)$

مع ملاحظة أن a يقسم $a\cdot b$ في A، يبقى لنا أن a و $a\cdot b$ شريكان في A، وبالتالي يوجد عنصر قابل للقلب c في A بحيث يكون :

$$a\cdot b = a\cdot c \Rightarrow b=c \qquad (A \text{ منطقة تكاملية})$$

وهذا تناقض لكون b غير قابل للقلب في A.

وبالتالي B مثالية رئيسية.

من (أ) و(ب) نجد أن $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حلقة مثالية رئيسية

2/ لنعرف التطبيق $f : A \longrightarrow A+I/I$ بالشكل:

$$f(x) = x + I$$

أ) 5/
$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + I$$
$$= (x_1 + I) + (x_2 + I) = f(x_1) + f(x_2)$$

ب) 5/
$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow f(x_1 \cdot x_2) = (x_1 \cdot x_2) + I$$
$$= (x_1 + I)(x_2 + I) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

من (أ) و(ب) نجد أن f هومومورفزم

ج) 5/
$$\forall y + I \in A + I/I \Rightarrow y \in A + I \Rightarrow y = x + i \; ; \; x \in A, \; i \in I$$
$$\Rightarrow x = y - i$$

وعليه:

$$\forall y + I \in A + I/I \Rightarrow \exists x = y - i \in A \; ; \; f(x) = f(y - i)$$
$$= (y - i) + I = y + I$$

إذاً f غامر

د) 5/
$$\forall x \in \ker f \Leftrightarrow x \in A \; \& \; f(x) = I$$
$$\Leftrightarrow x \in A \; \& \; x + I = I \Leftrightarrow x \in A \; \& \; x \in I$$
$$\Leftrightarrow x \in A \cap I$$

وعليه فإن $\ker f = A \cap I$

من (أ) و(ب) و(ج) و(د) نجد أن $A/A \cap I \cong A + I/I$

بیان:

$$\varphi(a) \leq \varphi(a \cdot b) \quad \text{و} \quad \varphi(a) \neq \varphi(b)$$

آنگاه:

$$\varphi(a) < \varphi(a \cdot b)$$