

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثانية

اسئلة ووراك محلولة

فيزياء للرياضيات

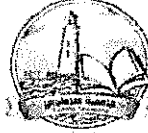
A 2 Z LIBRARY

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ، علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم 0931497960 TEL:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z



جامعة طرابلس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2024 - 2025

س ١- أجب عن البنود الثلاث التالية: (50 درجة).

١- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(B-E)}^{\max}$ لتوزيع بوزة - آينشتين، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

٢- مسألة: جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$) موزعة على سويتين للطاقة $\epsilon_1 = KT$ (J) و $\epsilon_2 = 2KT$ (J)، السويتان متحلتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:

١- أوجد عدد حالات التوزيع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).

٢- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(N-1, 1)$ في الحالات التالية

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

٣- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N=2$. أوجد تابعي تحاص الجملة Z والطاقي Z_0 . ثم استنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمال، ومثلها.

٣- تُعبر الصيغة $dN(g) = \frac{N}{Z} e^{\beta \epsilon} g(g) dg$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تتحصر سرعها المطلقة في

المجال $[g, g+dg]$ ، وفقاً لتوزيع (M-B). والمطلوب:

- أوجد تابع الكثافة $f(g^2)$ بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$. علماً أن قيمة تابع التحاص $Z = CV (2\pi mKT)^{3/2}$.
- مثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة مع مناقشة النتائج والتفسير.

س ٢- أجب عن البندين التاليين: (40 درجة).

١- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها

ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

٢- أجب عن النقاط الثلاث التالية

- استند من نظرية غوص ومن تعريفي الزاوية المجسمة والحقل الكهربائي بالصيغة الشعاعية في البرهان على أن: $\Phi = k q \Omega$

- اكتب معادلات مكسويل في الفراغ بالصيغة التفاضلية، ثم استند من الخاصية التالية

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

- برهن أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $\text{div} \vec{E} = 0$.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

2025 / /

طرطوس:

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم



امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2023 - 2024

س ١- أجب عن البندين التاليين: (40 درجة).

١- عرف عنصر فراغ الحجم الطوري $d\Gamma$ ، ثم استنتج الحجوم الطورية للعناصر التالية $d\Gamma(P)$ و $d\Gamma(v)$ و $d\Gamma(\varepsilon)$.

٢- مسألة: جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$) موزعة على سويتين للطاقة

$\varepsilon_1 = KT$ (J) و $\varepsilon_2 = 2KT$ (J) ، السويتين متحللتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:
١- أوجد عدد حالات التوزيع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).

٢- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\bar{N}-1, \bar{1})$ في الحالات التالية:

A- الجسيمات متمايضة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.
٣- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة Z والطاقي Z_Ω . ثم استنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمالاً، ومثلها.

س ٢- أجب عن البنود الأربعة التالية: (50 درجة).

١- اكتب تابع كثافة توزع برنولي وعرف مضمونه، ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال، ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية $\bar{n}$ و $\bar{n}^2$ و Δn^2 .

٢- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(g^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$) . ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استند في الحل من تكاملات بواسون التالية

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \frac{n!}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ; n \text{ زوجي } (n \geq 0) \\ \frac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ; n \text{ فردي } (n = 2m+1, m \geq 0) \end{cases}$$

٣- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها

ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

$\frac{D}{A+B}$	$\frac{C}{A+B}$	$\frac{D}{A+B}$
-----------------	-----------------	-----------------

٤- أجب عن النقطتين التاليتين

• استند من نظرية غوص ومن تعريفي الزاوية المجسمة والحقل الكهربائي بالصيغة الشعاعية في البرهان على أن: $\Phi = k q \Omega$

• اكتب معادلات مكسويل في الفراغ بالصيغة التفاضلية، ثم استند من الخاصة التالية
 $\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ في إيجاد معادلة انتشار متجهة الحقل الكهربائي.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الحبيب 2024 / 9 / 12

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2023 - 2024 (تسعون درجة)

ج 1: (40 درجة)

1- يعطى عنصر الفراغ الطوري $\Gamma(q, P)$ بدلالة إحداثيي الموضع q والاندفاع P المعممين. فيكون عنصر حجم الفراغ الطوري $d\Gamma$ بدلالة عنصري الحجم dq_v و dP_v (الخاصين بالموضع والاندفاع على الترتيب)، بالشكل:

$$d\Gamma = dq_v \cdot dP_v \quad (1)$$

نفرض للسهولة أن عنصر الحجم الخاص بالموضع مساوياً للحجم $dq_v = V$ لأنه يمثل جداءات لعناصر الموضع.
عنصر فراغ الاندفاع الطوري:

نأخذ عنصر الحجم الخاص بالاندفاع مساوياً لعنصر حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع P ذاته كما يلي:

$$dP_v = d\left(\frac{4}{3}\pi P^3\right) = 4\pi P^2 dP$$

بالتعويض في (1) عن كل بقيمته نحصل على عنصر فراغ الاندفاع الطوري:

$$d\Gamma(P) = 4\pi V P^2 dP \quad (2)$$

عنصر فراغ السرعة الطوري:

نجد من علاقة كمية الحركة بالسرعة حسب العلاقة:

$$P = m\vartheta \Rightarrow dP = m d\vartheta$$

وبالتعويض في (2) عن كل بقيمته نحصل على عنصر فراغ السرعة الطوري :

$$d\Gamma(\vartheta) = 4\pi V m^3 \vartheta^2 d\vartheta \quad (3)$$

عنصر فراغ الطاقة الطوري:

نجد من عبارة الطاقة الحركية (باعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم المدروس هي طاقة حركية فقط).

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \vartheta^2 = \frac{P^2}{2m} \quad (*)$$

وكما هو واضح يمكن إيجاده بالتعويض عن قيمة الاندفاع من (*) في (2) كما يلي:

$$P^2 = 2m\varepsilon \Rightarrow P = \sqrt{2m\varepsilon} \Rightarrow dP = \frac{m d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}$$

وبالتعويض في (2) نحصل على عنصر فراغ الطاقة الطوري :

$$d\Gamma(\varepsilon) = 4\pi V 2m\varepsilon \frac{m d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = 2\pi V \sqrt{2m} \sqrt{\varepsilon} 2m d\varepsilon$$

$$d\Gamma(\varepsilon) = 2\pi V (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon \quad (4)$$

2- المسألة:

$$N_o = \frac{(N + N_e - 1)!}{N!(N_e - 1)!} = \frac{(N + 2 - 1)!}{N!(2 - 1)!} = \frac{(N + 1)!}{N!1!} = \frac{(N + 1)N!}{N!1!} = N + 1$$

1- عدد حالات التوزيع الماكروي: (3)

2- A - الجسيمات متمايضة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = N! \left(\frac{1^{N-1}}{(N-1)!} \frac{2^1}{1!} \right) = 2N$$

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^M \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = \frac{(N - 1 + 1 - 1)!}{(N - 1)!} \frac{(1 + 2 - 1)!}{1! (2 - 1)!} = 2$$

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ لا تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي غير مقبولة

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. نوجد تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = 1e^{-1} + 2e^{-2}$$

تحاصل الطاقم

$$Z_{\Omega} = Z^N = (1e^{-1} + 2e^{-2})^2 = 1e^{-2} + 4e^{-4} + 4e^{-3} \quad (*)$$

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة

نلاحظ وجود 3 حالات ماكروية بطاقات موافقة $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$ كما يلي $(\bar{2}, 0)$ $(0, \bar{2})$ $(\bar{1}, \bar{1})$ $U=2KT$ $U=4KT$ $U=3KT$

نوجد تحاصل الطاقم بطريقة ثانية من العبارة.

$$Z_{\Omega} = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)} e^{\beta U_{(2,0)}} + W_{(0,2)} e^{\beta U_{(0,2)}} + W_{(1,1)} e^{\beta U_{(1,1)}}$$

نعوض عن طاقة كل من الحالات الماكروية بقيمتها، واعتبار أن $\beta = -1/KT$ ، نجد:

$$Z_{\Omega} = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)} e^{-2} + W_{(0,2)} e^{-4} + W_{(1,1)} e^{-3}$$

نطبق العبارة الحاصلة مع (*) فنجد قيم الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة.

$$W_{(1,1)} = 4 \text{ و } W_{(0,2)} = 4 \text{ و } W_{(2,0)} = 1$$

توجد حالتان لهما الوزن الإحصائي نفسه $W_{(1,1)} = 4$ و $W_{(0,2)} = 4$

فتكون الحالة الأكثر احتمال هي الحالة الماكروية (1,1) لأن طاقتها هي الأقل $U_{(1,1)} = 3KT$.

- تمثيل الحالة الماكروية الأكثر احتمال (1,1)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline B & B & A & A \\ \hline A & A & B & B \\ \hline \end{array}$$

ج ٢: (50 درجة)

١- يُعطى تابع كثافة توزيع برنولي بالعلاقة:

$$\omega(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} ; n \leq N$$

حيث $p \leq 1$ احتمال ظهور الحادثة n مرة من أصل N مرة. و $q \leq 1$ لأن $q = 1 - p$ يمثل احتمال عدم ظهور الحادثة $(N - n)$ مرة من أصل N مرة.

وهو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي (باعتباره يمثل صيغة منشور ثنائي الحد - نيوتن) كما يلي:

$$\sum_{n=0}^N \omega(n) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = (p+q)^N = (p+1-p)^N = 1$$

• إيجاد $\bar{n}$: (القيمة الوسطى للمتحول)

نشتق تابع التوزيع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين بـ p فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^N n \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} \Rightarrow Np(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^N n \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = \bar{n} \Rightarrow \boxed{\bar{n} = Np}$$

• إيجاد $\overline{n^2}$: وسطى القيمة التربيعية للمتحول (الانحراف المعياري)

نشتق تابع التوزيع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ مرتين بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين كل مرة بـ p فنجد:

لذا نشتق قيمة $\bar{n}$ مرة ثانية فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} + N(N-1)p(p+q)^{N-2} = \sum_{n=0}^N n^2 \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} \Rightarrow Np + N(N-1)p^2 = \sum_{n=0}^N n^2 \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = \overline{n^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{n^2} = Np + N^2 p^2 - Np^2}$$

• إيجاد $\Delta \overline{n^2}$: (التشتت) نعوض في العبارة

$$\boxed{\Delta \overline{n^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = Np + N^2 p^2 - Np^2 - N^2 p^2 = Np(1-p) = Npq = \bar{n} q}$$

٢- لإيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(g^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: ننطلق من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لسرعتها المطلقة وفق توزيع M-B في مجال السرعات $[g, g+dg]$.

$$dN(g) = \frac{N}{Z} e^{\beta m g^2/2} g(g) dg$$

ونعوض عن المقدار $g(g) dg$ بقيمة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(g) dg = C d\Gamma(g) = CV 4\pi m^3 g^2 dg$$

وعن تابع التحلل Z بقيمته $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\epsilon = m g^2/2$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(g) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-m g^2/2KT} CV 4\pi m^3 g^2 dg$$

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(g) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg$$

نعتبر أن $\alpha = m/2KT$

$$dN(g) = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg$$

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزيع السرعة بدلالة تابع كثافة السرعة كما يلي:

$$dF(g) = \frac{dN(g)}{N} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg = f(g^2) dg$$

حيث يعبر $f(g^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

$$f(g^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2}$$

للبهران على أن $f(g^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على السرعة في المجال $[0 \rightarrow \infty]$.

$$\int_0^\infty f(g^2) dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^\infty g^2 e^{-\alpha g^2} dg$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: $\int_0^\infty g^2 e^{-\alpha g^2} dg = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ وبالتعويض نجد:

$$F(g) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1$$

-3

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\vec{2}, \vec{1}, \vec{1})$

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1,1)} = 4! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^1}{1!} \frac{1^1}{1!} \right) = 96$$

D
C
A B

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\vec{2}, \vec{2}, \vec{1})$
الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+1-1)!}{1!0!} = 3 \times 3 \times 1 = 9$$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{1!}{1!(1-1)!} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\vec{2}, \vec{2}, \vec{2})$
الوزن الإحصائي

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+1-1)!}{2!0!} = 3 \times 3 \times 1 = 9$$

-4 أجوبة النقطتين التاليتين

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

• لدينا نظرية غوص

وباعتبار الحقل الكهربائي $\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r}$ ومن تعريف الزاوية المجسمة $\Omega = \oint_S \frac{\vec{r} d\vec{S}}{r^3}$

نجد بالتعويض في غوص

$$\Phi = \oint_S k \frac{q}{r^3} \vec{r} d\vec{S} = k q \oint_S \frac{\vec{r} d\vec{S}}{r^3} = k q \Omega$$

• لدينا معادلات مكسويل في الفراغ بالصيغة التفاضلية

- 1) $\text{div } \vec{E} = 0$
- 2) $\text{div } \vec{B} = 0$
- 3) $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- 4) $\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

وباستخدام الخاصة التالية للتوابع النقطية نجد:

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (*)$$

$$\text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\nabla^2 \vec{E} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} = \nabla^2 \vec{E} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{C^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \nabla^2 \vec{E} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

وهي معادلة انتشار متجهة الحقل الكهربائي.



امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الثاني للعام الدراسي 2023 - 2024

س ١- أجب عن البنود التالية: (50 درجة).

١- عرف عنصر فراغ الحجم الطوري $d\Gamma$ ، ثم استنتج الحجم الطورية للعناصر التالية $d\Gamma(P)$ و $d\Gamma(v)$ و $d\Gamma(\varepsilon)$.

٢- مسألة: جملة مكونة من 5000 جسيم متمايز موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = KT$ (J) و $\varepsilon_2 = 2KT$ (J)، السويتان متحلتان بالشكل $g_1 = g_2 = 2$. والمطلوب:

١- ارسم هيكل السويتات والتحولات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي.

٢- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\bar{N}_1, \bar{N}_2)_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2$ ، ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0,368$ و $e^{-2} = 0,135$).

٣- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال $(\bar{N}_1, \bar{N}_2)_{\max}$ أكبر من وزن الحالة $(N_1 + 1, N_2 - 1)$. ملاحظة: يرجى تدقيق النتائج الرقمية لهذه المسألة لأنها هامة

٣- بفرض أن تابع التحاص $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$. برهن على ضوء المشتقات $\partial/\partial\beta$ و $\partial^2/\partial\beta^2$ أن:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{2} KT \quad \text{و} \quad \bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \frac{15}{4} (KT)^2 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = \frac{3}{2} (KT)^2$$

• نفرض $Z = (1 - e^{\beta \varepsilon_0})^{-2}$ ، أوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ في الحالات: $\varepsilon_0 \ll KT$ و $\varepsilon_0 = KT$ و $\varepsilon_0 \gg KT$.

س ٢- أجب عن البنود التالية: (40 درجة).

١- جملة مكونة من N من الجسيمات الكمية (غير المتمايزة). فإذا علمت أن دفعها ترتبط بطاقتها بالعلاقة: $\varepsilon = C|P|$ حيث C سرعة الضوء. والمطلوب: أوجد تحاص الجملة Z (بدلالة T و V).

٢- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويتات فيها

ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

٣- أوجد العلاقة بين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ لشحنة q^+ تتحرك بسرعة $\vec{q}$.

ثم استنتج علاقة التوفيق لـ مكسويل التالية $\varepsilon_0 \mu_0 C^2 = 1$. علماً أن: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$ و $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{q} \wedge \vec{u}}{r^2}$

و $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hey/m}$ و $\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{Col}^2$ وأن وحدات القياس $\frac{C^2}{Nm^2} \frac{\text{Hey}}{m} = \frac{S^2}{m^2}$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرابلس: الاثنين 15 / 7 / 2024

د. محمد إبراهيم

مدرس المقرر

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
دورة الفصل الثاني للعام الدراسي 2023 - 2024 (تسعون درجة)

ج 1: (50 درجة)

1- يعطى عنصر الفراغ الطوري $\Gamma(q, P)$ بدلالة إحداثيي الموضع q والاندفاع P المعممين. فيكون عنصر حجم الفراغ الطوري $d\Gamma$ بدلالة عنصري الحجم dq_V و dP_V (الخاصين بالموضع والاندفاع على الترتيب)، بالشكل:

$$d\Gamma = dq_V \cdot dP_V \quad (1)$$

نفرض للسهولة أن عنصر الحجم الخاص بالموضع مساوياً للحجم $dq_V = V$ لأنه يمثل جداءات لعناصر الموضع.
عنصر فراغ الاندفاع الطوري:

نأخذ عنصر الحجم الخاص بالاندفاع مساوياً لعنصر حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع P ذاته كما يلي:

$$dP_V = d\left(\frac{4}{3}\pi P^3\right) = 4\pi P^2 dP$$

بالتعويض في (1) عن كل بقيمته نحصل على عنصر فراغ الاندفاع الطوري:

$$d\Gamma(P) = 4\pi V P^2 dP \quad (2)$$

عنصر فراغ السرعة الطوري:

نجد من علاقة كمية الحركة بالسرعة حسب العلاقة:

$$P = m g \Rightarrow dP = m dg$$

وبالتعويض في (2) عن كل بقيمته نحصل على عنصر فراغ السرعة الطوري:

$$d\Gamma(g) = 4\pi V m^3 g^2 dg \quad (3)$$

عنصر فراغ الطاقة الطوري:

نجد من عبارة الطاقة الحركية (باعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم المدروس هي طاقة حركية فقط):

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m g^2 = \frac{P^2}{2m} \quad (*)$$

وكما هو واضح يمكن إيجاده بالتعويض عن قيمة الاندفاع من (*) في (2) كما يلي:

$$P^2 = 2m\varepsilon \Rightarrow P = \sqrt{2m\varepsilon} \Rightarrow dP = \frac{m d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}}$$

وبالتعويض في (2) نحصل على عنصر فراغ الطاقة الطوري:

$$d\Gamma(\varepsilon) = 4\pi V 2m\varepsilon \frac{m d\varepsilon}{\sqrt{2m\varepsilon}} = 2\pi V \sqrt{2m} \sqrt{\varepsilon} 2m d\varepsilon$$

$$d\Gamma(\varepsilon) = 2\pi V (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon \quad (4)$$

٢- المسألة:

١- عدد حالات التوزيع الماكروي:

$$N_o = \frac{(N + N_e - 1)!}{N! (N_e - 1)!} = \frac{(5000 + 2 - 1)!}{5000! (2 - 1)!} = \frac{5001!}{5000!} = \frac{5001 \times 5000!}{5000!} = 5001$$

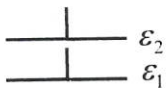
٢- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\bar{N}_1, \bar{N}_2)_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i/KT} ; Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} = 1,006$$

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\varepsilon_1/KT} = \frac{5000}{1,006} 2e^{-1} \approx 3658$$

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\varepsilon_2/KT} = \frac{5000}{1,006} 2e^{-2} \approx 1342$$

$$N = N_1 + N_2 = 3658 + 1342 = 5000$$



طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = \sum_i N_i \varepsilon_i = N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_{23} = 3658 KT + 1342 \times 2KT = 6342 KT \quad (1)$$

٣- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1, N_2)_{\max}} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1}}{N_1!} \frac{2^{N_2}}{N_2!} \right)$$

$$W'_{(N_1+1, N_2-1)} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1+1}}{(N_1+1)!} \frac{2^{N_2-1}}{(N_2-1)!} \right)$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-1)}} = \frac{2^{N_1} 2^{N_2}}{N_1! N_2!} \frac{(N_1+1)! (N_2-1)!}{2^{N_1+1} 2^{N_2-1}} = \frac{2^{N_1}}{N_1!} \frac{2^{N_2}}{N_2 (N_2-1)!} \frac{(N_1+1) N_1!}{2 \times 2^{N_1}} \frac{(N_2-1)!}{2^{-1} \times 2^{N_2}}$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-1)}} = \frac{(N_1+1)}{N_2} = \frac{3659}{1342} \approx 2.7 > 1 \Rightarrow W_{(N_1, N_2)_{\max}} > W'_{(N_1+1, N_2-1)} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad \text{لدينا المشتقة} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} = \frac{\partial}{\partial \beta} (KT^2 \frac{\partial}{\partial T}) = KT^2 \frac{\partial}{\partial T} (KT^2 \frac{\partial}{\partial T}) = KT^2 (2KT \frac{\partial}{\partial T} + KT^2 \frac{\partial^2}{\partial T^2}) \quad \text{بالشكل} \quad \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{2} KT \quad \text{لبرهان العلاقة} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad \text{ننتقل من الطرف الأيسر وباعتبار} \quad \text{ولدينا} \quad Z = CV (2\pi m KT)^{3/2} = CV (2\pi m K)^{3/2} T^{3/2} \Rightarrow \ln Z = \ln CV (2\pi m K)^{3/2} + \ln T^{3/2}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln CV (2\pi m K)^{3/2} + \ln T^{3/2}) = KT^2 (0 + \frac{3}{2T}) = \frac{3}{2} KT \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} = KT^2 (2KT \frac{\partial}{\partial T} + KT^2 \frac{\partial^2}{\partial T^2}) \quad \text{لبرهان العلاقة} \quad \bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \frac{15}{4} (KT)^2$$

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \frac{1}{Z} KT^2 (2KT \frac{\partial Z}{\partial T} + KT^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial T^2})$$

$$Z = CV (2\pi m K)^{3/2} T^{3/2} \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial T} = \frac{3}{2} CV (2\pi m K)^{3/2} T^{1/2} \quad \text{وبملاحظة أن}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial T^2} = \frac{3}{2} CV (2\pi m K)^{3/2} \frac{1}{2T^{1/2}} \quad \text{فيكون}$$

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{CV (2\pi m K)^{3/2} T^{3/2}} KT^2 [2KT \frac{3}{2} CV (2\pi m K)^{3/2} T^{1/2} + KT^2 \frac{3}{2} CV (2\pi m K)^{3/2} \frac{1}{2T^{1/2}}]$$

$$\bar{\varepsilon}^2 = KT^{1/2} (3KT^{3/2} + \frac{3}{4} KT^{3/2}) = \frac{15}{4} (KT)^2 \quad (3)$$

$$\Delta \bar{\varepsilon}^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = \frac{3}{2} (KT)^2 \quad \text{لبرهان العلاقة} \quad \text{نجد بنفس الأسلوب}$$

$$\Delta \bar{\varepsilon}^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = KT^2 (2KT \frac{\partial \ln Z}{\partial T} + KT^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2})$$

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{3}{2T} \quad \text{فيكون} \quad \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2} = -\frac{6}{4T^2} = -\frac{3}{2T^2} \quad \text{وبما أن}$$

$$\Delta \bar{\varepsilon}^2 = KT^2 (2KT \frac{3}{2T} - KT^2 \frac{3}{2T^2}) = \frac{3}{2} (KT)^2 \quad (3)$$

$$\Delta \bar{\varepsilon}^2 = \bar{\varepsilon}^2 - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{15}{4} (KT)^2 - (\frac{3}{2} KT)^2 = \frac{3}{2} (KT)^2$$

أرسل

• لدينا $Z = (1 - e^{\beta \epsilon_0})^{-2}$

نوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\epsilon}$ من العلاقة: $\bar{\epsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$

$$\ln Z = \ln(1 - e^{\beta \epsilon_0})^{-2} = -2 \ln(1 - e^{\beta \epsilon_0})$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -2 \frac{-\epsilon_0 e^{\beta \epsilon_0}}{1 - e^{\beta \epsilon_0}} = \frac{2\epsilon_0}{e^{-\beta \epsilon_0} - 1} = \frac{2\epsilon_0}{e^{\epsilon_0/KT} - 1} \quad (3)$$

من أجل $\epsilon_0 \ll KT$ ننشر التابع الأسّي ونكتفي بالحدين الأول والثاني $e^{\epsilon_0/KT} \approx 1 + \frac{\epsilon_0}{KT}$ وبالتعويض نجد:

$$\bar{\epsilon} = \frac{2\epsilon_0}{1 + \frac{\epsilon_0}{KT} - 1} \approx 2KT \quad (11)$$

من أجل $\epsilon_0 = KT$ نجد: $\bar{\epsilon} = \frac{2\epsilon_0}{e - 1} \approx 1.17KT \Rightarrow \bar{\epsilon} > KT \quad (11)$

من أجل $\epsilon_0 \gg KT$ يصبح المقدار $e^{\epsilon_0/KT} \gg 1$ ويهمل الواحد الموجود في المقام فنجد: $\bar{\epsilon} = \frac{2\epsilon_0}{e^{\epsilon_0/KT}} \approx 0$

ج ٢: (40 درجة)

١- نحسب Z من الصيغة التكاملية. ونأخذ التكامل على المجال الموجب $[0 \rightarrow \infty]$ لأن الاندفاعات مأخوذة بالقيمة المطلقة. كما يلي: (10)

$$Z = \int_0^{\infty} e^{\beta \epsilon} g(P) dP = \frac{1}{h^3} \int_0^{\infty} e^{-\frac{C}{KT}|P|} dq_V dP_V = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{\infty} P^2 e^{-\delta|P|} dP \quad ; \delta = C|\beta| = \frac{C}{KT}$$

نوجد قيمة التكامل بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} P^2 e^{-\delta|P|} dP &= \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} (e^{-\delta|P|}) dP = \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \int_0^{\infty} e^{-\delta|P|} dP = \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \left[-\frac{1}{\delta} e^{-\delta|P|} \right]_0^{\infty} = \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \left[-\frac{1}{\delta} (0 - 1) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \delta} \left[\frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{1}{\delta} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial \delta} \left(-\frac{1}{\delta^2} \right) = -\left(\frac{0 - 2\delta}{\delta^4} \right) = \frac{2}{\delta^3} = 2 \left(\frac{1}{\delta} \right)^3 \end{aligned}$$

ملاحظة: يمكن حل التكامل بطريقة ثانية باستخدام تابع غاما وذلك بإجراء تغيير في المتحول (نفرض $\delta|P| = x$)

$$\int_0^{\infty} P^2 e^{-\delta|P|} dP = \frac{1}{\delta^3} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2 \left(\frac{1}{\delta} \right)^3 \quad \text{كما يلي:}$$

$\Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2$

بالتعويض في عبارة Z نجد:

$$Z = \frac{8\pi V}{h^3} \left(\frac{1}{\delta} \right)^3 = \frac{8\pi V K^3}{C^3 h^3} T^3 = \lambda V T^3 \quad ; \lambda = \frac{8\pi K^3}{C^3 h^3} = \text{cte}$$

٢-

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2, \hat{\epsilon}_3) = (2, 0, 1)$

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = 3! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^0}{0!} \frac{1^1}{1!} \right) = 12$$

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2, \hat{\epsilon}_3) = (2, 2, 1)$

الوزن الإحصائي للبوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+2-1)!}{1!1!} = 3 \times 3 \times 2 = 18$$

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\vec{2}, \vec{2}, \vec{2})$ ●●●●●
●●●●●
●●●●●

الوزن الإحصائي للبوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+1-1)!}{2!0!} = 3 \times 3 \times 1 = 9 \quad (7)$$

٣- العلاقة بين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ لشحنة $q^{\pm}$ تتحرك بسرعة $\vec{q}$:

تُصدر الشحنة $q^{\pm}$ حقلاً كهربائياً $\vec{E}$ سواء كانت ساكنة أم متحركة ، تُعطي قيمته المتجهة وفق العلاقة :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} \quad ; \quad \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (*)$$

في حين تبدأ الشحنة $q^{\pm}$ بإصدار حقل تحريض مغناطيسي $\vec{B}$ عند حركتها المتسارعة فقط (بسرعة $\vec{q}$). تُعطي قيمة $\vec{B}$ المتجهة وفق قانون بيو - سافار :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{q} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hey/m}$$

بالضرب والقسمة على ϵ_0 ومراعاة (*) نجد :

$$\vec{B} = \frac{\epsilon_0 \mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{q} \wedge \vec{u}}{r^2} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{q} \wedge \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{q} \wedge \vec{E} \quad (**)$$

علاقة التوفيق (لـ مكسويل) :

نحسب قيمة جداء ثابتي النفاذية المغناطيسية للفراغ μ_0 ، والسماحية الكهربائية للفراغ ϵ_0

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \frac{C^2}{Nm^2} \times 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Hey}}{m} = \frac{1}{9 \times 10^{16}} \underbrace{\frac{C^2}{Nm^2} \frac{\text{Hey}}{m}}_{\Delta}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{9 \times 10^{16}} \frac{S^2}{m^2} = \frac{1}{9 \times 10^{16}} \frac{m^2}{S^2} \quad \Delta = \frac{S^2}{m^2} \text{ تساوي } \Delta \text{ بالتعويض}$$

لاحظ مكسويل أن للجداء $\epsilon_0 \mu_0$ قيمة تساوي مقلوب مربع سرعة . فافترضها C^2 حيث

$$C^2 = 9 \times 10^{16} \frac{m^2}{S^2} \Rightarrow C = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

فيما بعد تبين لمكسويل أن هذه القيمة $C = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ماهي إلا سرعة الضوء في الفراغ .

وبالتالي يكون قد اثبت أن الضوء عبارة عن أمواج كهروطيسية ينتشران في الفراغ بسرعة واحدة C . من هنا أتت تسمية العلاقة التالية بعلاقة التوفيق

$$\epsilon_0 \mu_0 C^2 = 1 \quad (A)$$

لذا يمكن إعادة صياغة (**) بدلالة سرعة الضوء بالشكل التالي :

$$\vec{B} = \frac{1}{C^2} \vec{q} \wedge \vec{E} \quad (B)$$



امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2023 - 2024

س1- أجب عن البنود التالية: (50 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(H-E)_{max}}$ لتوزيع بوزة - آينشتين، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$) موزعة على سويتين للطاقة $\epsilon_1 = KT$ (J) و $\epsilon_2 = 2KT$ (J)، السويتان متحلتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:

1- أوجد عدد حالات التوزيع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(N-1, 1)$ في الحالات التالية

A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

3- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة Z والطاقم Z_0 . ثم استنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمال، ومثلها.

3- تُعبر الصيغة $dN(\theta) = \frac{N}{Z} e^{\beta \epsilon} g(\theta) d\theta$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في

المجال $[\theta, \theta + d\theta]$ ، وفقاً لتوزيع (M-B). والمطلوب:

- أوجد تابع الكثافة $f(\theta^2)$ بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$. علماً أن قيمة تابع التحاص $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$.
- مثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة مع مناقشة النتائج والتفسير.

س2- أجب عن البنود التالية: (40 درجة).

1- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$

2- مسألة كهرباء:

تُثبت في رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه l (m)، ثلاث شحنات متساوية القيمة، q (col) لكل منها، ومهملة الوزن.

1- إذا كانت الشحنات مختلفة الإشارة بحيث تكون واحدة موجبة واثنين سالبتين. المطلوب:

- ارسم الشكل، ومثل عليه اتجاه قوة كولون $\vec{F}_i$ المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها (بدلالة q و k و l).
- مثل قوة كولون المحصلة المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها (بدلالة q و k و l)، وحدد اتجاه حركة كل منها بعد إزالة التثبيت.

2- إذا كانت الشحنات الثلاث متساوية القيمة ومتفقة الإشارة (سالبة). والمطلوب:

- ارسم الشكل الجديد، ومثل عليه اتجاه قوة كولون المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها.
- أوجد قيمة الشحنة الموجبة الرابعة الراجب وضعها في مركز المثلث بحيث تبقى الشحنات في أماكنها بعد إزالة التثبيت.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرابلس: الأربعاء 24 / 1 / 2024

د. محمد إبراهيم

مدرس المقرر

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
دورة الفصل الأول للعام الدراسي 2023 - 2024 (تسعون درجة)

ج 1: (50 درجة)

1- استنتاج رقم الانشغال لتوزيع $N_{i(B-E)}$

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (B-E). المعطاة بالعلاقة: $W_{B-E} = \prod_i \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!}$

وحيث أن الجسيمات هي بوزونات (كمية) فيكون عددها N ودرجة تحلل سويات الطاقة g_i كبيرين، لذا يُهمل الواحد في

توزيع (B-E) وتصبح عبارة الوزن الإحصائي بالشكل التالي: $W_{B-E} \approx \prod_i \frac{(N_i + g_i)!}{N_i! g_i!}$

نوجد بدايةً $\ln(W_{B-E})$ ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{B-E})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{B-E}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{B-E}) \approx \ln \prod_i \frac{(N_i + g_i)!}{N_i! g_i!} = \sum_i [\ln(N_i + g_i)! - \ln N_i! - \ln g_i!]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنج $\ln x! \approx x \ln x$ نجد:

$$\ln(W_{B-E}) \approx \sum_i [(N_i + g_i) \ln(N_i + g_i) - N_i \ln N_i - g_i \ln g_i]$$

بما أن W_{B-E} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{B-E}) = \frac{\partial \ln(W_{B-E})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \sum_i [(N_i + g_i) \ln(N_i + g_i) - N_i \ln N_i - g_i \ln g_i] dN_i$$

$$\approx \sum_i \left[\ln(N_i + g_i) + \frac{N_i + g_i}{N_i + g_i} - \ln N_i - \frac{N_i}{N_i} \right] dN_i = \sum_i [\ln(N_i + g_i) - \ln N_i] dN_i$$

$$d \ln(W_{B-E}) \approx \sum_i \ln \frac{N_i + g_i}{N_i} dN_i$$

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

$$d \ln(W_{B-E}) + \alpha dN + \beta dU = 0$$

$$\sum_i \left(\ln \frac{N_i + g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i \right) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{N_i + g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{N_i + g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} - 1 \Rightarrow N_{i(B-E)} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} - 1}$$

2- المسألة:

$$N_{\nu} = \frac{(N + N_{\nu} - 1)!}{N! (N_{\nu} - 1)!} = \frac{(N + 2 - 1)!}{N! (2 - 1)!} = \frac{(N + 1)!}{N! 1!} = \frac{(N + 1)N!}{N! 1!} = N + 1$$

1- عدد حالات التوزيع الماكروي:

2- A - الجسيمات متمايضة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = N! \left(\frac{1^{N-1}}{(N-1)!} \frac{2^1}{1!} \right) = 2N$$

B - الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^M \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = \frac{(N - 1 + 1 - 1)!}{(N - 1)! (1 - 1)!} \frac{(1 + 2 - 1)!}{1! (2 - 1)!} = 2$$

C - الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ لا تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي غير مقبولة

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. نوجد نخاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \epsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i / kT} = 1e^{-1} + 2e^{-2}$$

تحاص الطاقم

$$Z_{\Omega} = Z^N = (1e^{-1} + 2e^{-2})^2 = 1e^{-2} + 4e^{-4} + 4e^{-3} \quad (*)$$

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة

نلاحظ وجود 3 حالات ماكروية بطاقات موافقة $U = \sum_i N_i \epsilon_i$ كما يلي $(\bar{2}, 0)$ $(\bar{0}, 2)$ $(\bar{1}, 1)$ $U = 2KT$ $U = 4KT$ $U = 3KT$

نوجد تحاص الطاقم بطريقة ثانية من العبارة.

$$Z_{\Omega} = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)} e^{\beta U_{(2,0)}} + W_{(0,2)} e^{\beta U_{(0,2)}} + W_{(1,1)} e^{\beta U_{(1,1)}}$$

نعوض عن طاقة كل من الحالات الماكروية بقيمتها، واعتبار أن $\beta = -1/kT$ ، نجد:

$$Z_{\Omega} = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)} e^{-2} + W_{(0,2)} e^{-4} + W_{(1,1)} e^{-3}$$

نطبق العبارة الحاصلة مع (*) فنجد قيم الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة.

$$W_{(1,1)} = 4 \quad \text{و} \quad W_{(0,2)} = 4 \quad \text{و} \quad W_{(2,0)} = 1$$

توجد حالتان لهما الوزن الإحصائي نفسه $W_{(1,1)} = 4$ و $W_{(0,2)} = 4$

فتكون الحالة الأكثر احتمال هي الحالة الماكروية $(1,1)$ لأن طاقتها هي الأقل $U_{(1,1)} = 3KT$.

- تمثيل الحالة الماكروية الأكثر احتمال $(1,1)$

$$\begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline A \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline A \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline \end{array}$$

-3 لدينا صيغة $dN(g)$ المعطاة والمعبرة عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[g, g + dg]$ بالشكل التالي:

$$dN(g) = \frac{N}{Z} e^{\beta \epsilon} g(g) dg \quad (*)$$

لدينا من تعريف تابع التحاص

$$Z = CV (2\pi m kT)^{3/2} \quad (a)$$

نوجد عبارة تحلل السويات بدلالة عنصر الفراغ الطوري الذي يرتبط اندفاعه بالسرعة المطلقة بالشكل التالي:

$$p = m g \Rightarrow dp = m dg$$

$$g(g) dg = C d\Gamma(g) = C dq_1 dp_1 = CV 4\pi p^2 dp = CV 4\pi m^3 g^2 dg \quad (b)$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

$$\epsilon = m g^2 / 2 \quad (c)$$

بتعويض العبارات (a) و (b) و (c) في (*)، مع الأخذ بعين الاعتبار قيمة مضروب لاغرانج $\beta = -1/kT$ نجد:

$$dN(g) = \frac{N}{CV (2\pi m kT)^{3/2}} e^{-m g^2 / 2 kT} CV 4\pi m^3 g^2 dg$$

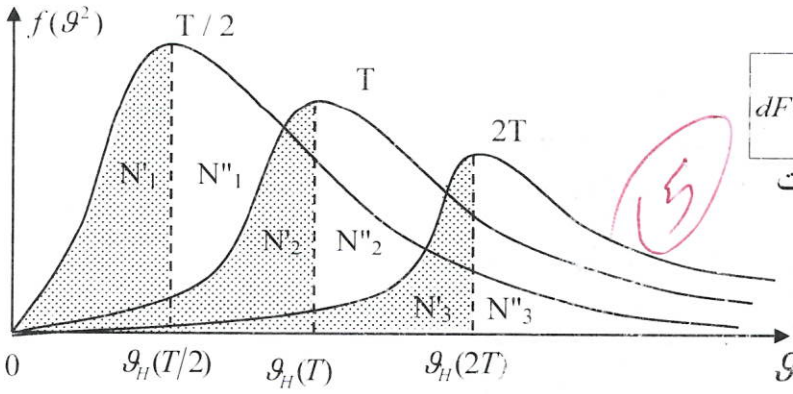
بالاختزال والقسمة على N نحصل على تابع توزيع السرعة المطلقة لجسيم واحد، بالشكل التالي:

$$dF(g) = \frac{dN(g)}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} g^2 e^{-m g^2 / 2 kT} dg = f(g^2) dg$$

و بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$

$$dF(\vartheta) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \vartheta^2 e^{-\alpha \vartheta^2} d\vartheta = f(\vartheta^2) d\vartheta$$

• نمثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة كما هو موضح في الشكل التالي:



المناقشة والتفسير :

تحقيقاً لمبدأ انحفاظ عدد الجسيمات

$N = \text{cte}$ عند كل درجة حرارة .

فإننا نمثل المساحة المحصورة تحت المنحني البياني بـ N ، حيث $N = N' + N''$

حيث N' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أقل من السرعة الأكثر احتمالاً g_H .

و N'' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أكبر من g_H .

حيث g_H السرعة الموافقة لقمة المنحني (حيث تكون قيمة تابع الكثافة أعظمية) ، (السرعة الأكثر احتمالاً).

النتائج :

1- تنزاح النهايات العظمى للمنحنيات بارتفاع درجات الحرارة نحو تزايد قيمة السرعة المطلقة للجسيمات

2- بارتفاع درجات الحرارة يزداد N'' على حساب تناقص N' بحيث يبقى N ثابت ($N = N' + N''$) .

3- بارتفاع درجات الحرارة تنخفض قيمة تابع الكثافة $f(g^2)$ ، مما يشير لانخفاض عدد الجسيمات التي

تقع سرعتها المطلقة في المجال $[g, g + dg]$.

ج 2 (40 درجة)

-1

20

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (2, 1, 0)$

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1,0)} = 3! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^1}{1!} \frac{1^0}{0!} \right) = 24$$

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (2, 0, 2)$

الوزن الإحصائي

●●●
●●●

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,0,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!1!} \frac{(0+2-1)!}{0!1!1!} \frac{(2+1-1)!}{2!0!1!} = 3 \times 1 \times 1 = 3$$

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (2, 0, 1)$

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

●●●
●●●

$$W_{B-F} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!1!} \frac{(0+2-1)!}{0!1!1!} \frac{(1+2-1)!}{1!1!1!} = 3 \times 1 \times 2 = 6$$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

●●●
●●●

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{0!(2-0)!} \frac{2!}{1!(2-1)!} = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

• التمثيل موضح بالشكل، وهي تنافر بين الشحنتين السالبتين، وتجاذب بين الموجبة والسالبة. نحسب شداتها بتطبيق كولون

وهي متساوية لجميع الشحنات . $F_C = k \frac{q^2}{\ell^2}$ (3)

• نمثل قوة كولون المحصلة المؤثرة في كل شحنة، كما بالشكل :
نحسب شدة المحصلة المؤثرة في كل من الشحنتين السالبتين

$$\vec{F}_T(q^-) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^-) = \sqrt{F_{C1}^2 + F_{C2}^2 + 2F_{C1}F_{C2}\cos(\pi - 60)}$$

$$\vec{F}_T(q^-) = F_{C1}\sqrt{2[1 - \cos(60)]} = F_{C1}\sqrt{2[1 - 0.5]} = F_{C1} = k \frac{q^2}{\ell^2} \quad (3)$$

وهي تساوي الشدة المؤثرة في كل منهما على حدة .

نحسب شدة المحصلة المؤثرة في الشحنة الموجبة بنفس الأسلوب

$$F_T(q^+) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^+) = \sqrt{F_{C1}^2 + F_{C2}^2 + 2F_{C1}F_{C2}\cos(60)}$$

$$\vec{F}_T(q^+) = F_{C1}\sqrt{2[1 + \cos(60)]} = \sqrt{3} F_{C1} = \sqrt{3} k \frac{q^2}{\ell^2} \quad (3)$$

وهذا يعني أن كل شحنة ستتحرك وفق المحصلة $\vec{F}_T$ عند إزالة تثبيتها .

-2

• بدايةً نحسب محصلة قوى التدافع المؤثرة في كل من الشحنات السالبة، كما هو موضح بالشكل.

علماً أن قوة كولون المتبادلة بين كل شحنتين سالبتين هي $F_{C1} = k \frac{q^- q^-}{\ell^2}$

$$\vec{F}_T(q^-) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^-) = \sqrt{F_{C1}^2 + F_{C2}^2 + 2F_{C1}F_{C2}\cos(60)}$$

$$F_T(q^-) = \sqrt{3} F_{C1} = \sqrt{3} k \frac{(q^-)^2}{\ell^2}$$

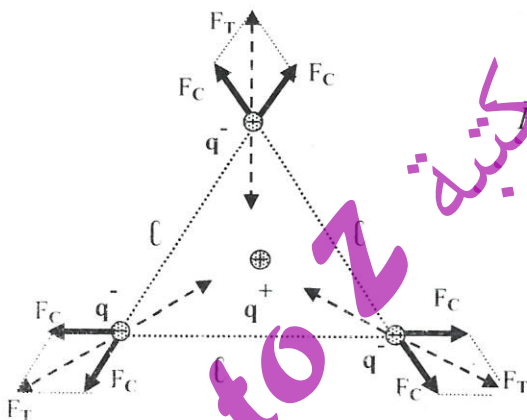
تتوازن كل من الشحنات السالبة الثلاث مع الشحنة الموجبة المركزية بقوة تجاذب $F_{q^+q^-} = k \frac{q^- q^+}{x^2} = F_T(q^-)$

أي أن $F_{q^+q^-}$ مساوية بالقيمة المطلقة ومعاكسة بالاتجاه للمحصلة $F_T(q^-)$. حيث x المسافة بين مركز المثلث وأحد رؤوسه وهي هندسياً تساوي ثلثي طول العائد (الارتفاع في المثلث) والمساوي بدوره لـ

$$x = \frac{2}{3} \ell \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{3} \ell \quad \text{إن} \quad \ell \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \ell$$

بالتعويض والاختزال نحصل على قيمة q^+ بدلالة q^- كما يلي:

$$3k \frac{q^- q^+}{\ell^2} = \sqrt{3} k \frac{(q^-)^2}{\ell^2} \Rightarrow q^+ = \frac{\sqrt{3}}{3} q^- \Leftrightarrow q^+ < q^- \quad (5)$$



ميكانيكا

2016



امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2022 - 2023

س ١ - أجب عن البندين التاليين: (40 درجة).

١ - استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{I(M-B)}$ لتوزيع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

٢ - مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة $\varepsilon_1 = KT$ (J) و $\varepsilon_2 = 2KT$ (J) و $\varepsilon_3 = 3KT$ (J)، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = g_3 = 2$. والمطلوب:

١ - ارسم هيكل السويات والتحولات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي.

٢ - أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3)_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$.

ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0,368$ و $e^{-2} = 0,135$ و $e^{-3} = 0,05$).

ملاحظة: يرجى تدقيق النتائج الرقمية لهذه المسألة لأنها هامة

س ٢ - أجب عن البنود الأربعة التالية: (50 درجة).

١ - اكتب تابع كثافة توزيع برنولي وعرف مضمونه، ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال، ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية

التالية $\bar{n}$ و $\bar{n}^2$ و Δn^2 .

٢ - استنتج تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان، ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استند في الحل من تكاملات غاما التالية $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ و $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n\Gamma(n)$

٣ - أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها

$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{3}{0}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$

ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

٤ - أجب عن النقطتين التاليتين

• استند من نظرية غوص ومن تعريفي الزاوية المجسمة والحقل الكهربائي بالصيغة الشعاعية في البرهان على

أن: $\Phi = k q \Omega$

• اكتب بدلالة المؤثر نابلا نتيجة ما يلي: $div \overrightarrow{rot A} = ?$ $rot \overrightarrow{grad \varphi} = ?$ $div \overrightarrow{grad \varphi} = ?$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرابلس: ٢٥ / ٩ / 2023

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2022 - 2023 (تسعون درجة)

ج 1: (40 درجة)

1- استنتاج رقم الانشغال لتوزيع $N_{i(M-B)}$ max

20

نطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d Ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln N! + \sum_i [N_i Ln g_i - Ln N_i!]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $Ln x! \approx x Ln x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة، فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \left[N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i) \right] dN_i \quad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln g_i - Ln N_i - 1 + 1) dN_i = \sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i$$

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i (Ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i) dN_i = 0 \Rightarrow Ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$N_{i(M-B)} = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} \Leftrightarrow N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

2- المسألة:

1- عدد حالات التوزيع الماكروي:

$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N! (N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(1000 + 3 - 1)!}{1000! (3 - 1)!} = \frac{1002!}{1000! \times 2!} = \frac{1002 \times 1001 \times 1000!}{1000! \times 2!} = 501501$$

2- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\frac{\varepsilon_1}{N_1}, \frac{\varepsilon_2}{N_2}, \frac{\varepsilon_3}{N_3})_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i/KT} ; Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} + 2e^{-3} = 1,106$$

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\varepsilon_1/KT} = \frac{1000}{1,106} 2 e^{-1} \approx 666$$

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\varepsilon_2/KT} = \frac{1000}{1,106} 2 e^{-2} \approx 244$$

1	ε_3
1	ε_2
1	ε_1

$$N_3 = \frac{N}{Z} g_3 e^{-\varepsilon_3/KT} = \frac{1000}{1,106} 2e^{-3} \approx 90 \quad (3)$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 666 + 244 + 90 = 1000 \quad (2) \quad \text{التحقق: طاقة الحالة الأكثر احتمال}$$

$$U_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = \sum_i N_i \varepsilon_i = N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + N_3 \varepsilon_3 = 666KT + 244 \times 2KT + 90 \times 3KT = 1424 KT \quad (2)$$

ج ٢: (50 درجة)

١- يُعطى تابع كثافة توزيع برنولي بالعلاقة:

$$\omega(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \quad ; n \leq N \quad (11)$$

حيث $p \leq 1$ احتمال ظهور الحادثة n مرة من أصل N مرة. و $q \leq 1$ لأن $q = 1 - p$ يمثل احتمال عدم ظهور الحادثة $(N - n)$ مرة من أصل N مرة.

وهو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي (باعتباره يمثل صيغة منشور ثنائي الحد - نيوتن) كما يلي:

$$\sum_{n=0}^N \omega(n) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = (p+q)^N = (p+1-p)^N = 1 \quad (4)$$

• إيجاد $\bar{n}$: (القيمة الوسطى للمتحول)

نشتق تابع التوزيع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين بـ p فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^N n \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} \Rightarrow Np(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^N n \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} = \bar{n} \Rightarrow \boxed{\bar{n} = Np} \quad (3)$$

• إيجاد $\overline{n^2}$: وسطى القيمة التربيعية للمتحول (الانحراف المعياري)

نشتق تابع التوزيع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ مرتين بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين كل مرة بـ p فنجد:

لذا نشتق قيمة $\bar{n}$ مرة ثانية فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} + N(N-1)p(p+q)^{N-2} = \sum_{n=0}^N n^2 \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} \Rightarrow Np + N(N-1)p^2 = \sum_{n=0}^N n^2 \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} = \overline{n^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{n^2} = Np + N^2 p^2 - Np^2} \quad (3)$$

• إيجاد Δn^2 : (التشتت) نعوض في العبارة

$$\boxed{\Delta n^2 = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = Np + N^2 p^2 - Np^2 - N^2 p^2 = Np(1-p) = Npq = \bar{n} q} \quad (3)$$

٢- لإيجاد تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان:

نكتب العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقتها، في المجال الطاقوي $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$. انطلاقاً من عبارة رقم

$$dN(\varepsilon) = \frac{N}{Z} e^{\beta \varepsilon} g(\varepsilon) d\varepsilon \quad \text{ف نجد } e^{\alpha} = \frac{N}{Z} \quad \text{وباعتبار } N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta \varepsilon_i} \quad \text{انشغال مكسويل}$$

نعوض عن المقدار $g(\varepsilon) d\varepsilon$ بقيمة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

$$g(\varepsilon) d\varepsilon = C d\Gamma(\varepsilon) = CV 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته

$$Z = CV (2\pi m KT)^{3/2} \quad \text{واعتبار أن } \beta = -1/KT \quad \text{نجد:}$$

$$dN(\varepsilon) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT} CV 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

بالاختزال والاصلاح.

$$dN(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع الطاقة بدلالة تابع كثافة الطاقة كما يلي:

$$dF(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{N} = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon = f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1)$$

حيث يعبر $f(\varepsilon)$ عن تابع كثافة الطاقة

$$f(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT}$$

للبرهان على أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على الطاقة في المجال $[0 \rightarrow \infty[$.

$$F(\varepsilon) = \int_0^\infty f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x = \varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT x \Rightarrow d\varepsilon = KT dx \quad \text{و} \quad \varepsilon^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل واستخدام تكاملات غاما نجد المطلوب

$$\int_0^\infty f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} (KT)^{1/2} KT \int_0^\infty x^{1/2} e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} (KT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\vec{2}, \vec{0}, \vec{1})$

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = 3! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^0}{0!} \frac{1^1}{1!} \right) = 12$$

الوزن الإحصائي (4)

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\vec{2}, \vec{2}, \vec{1})$

الوزن الإحصائي للبوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+2-1)!}{1!1!} = 3 \times 3 \times 2 = 18$$

(4)

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\vec{2}, \vec{2}, \vec{2})$

الوزن الإحصائي للبوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+1-1)!}{2!0!} = 3 \times 3 \times 1 = 9$$

(4)

٤- أجوبة النقطتين التاليتين

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

• لدينا نظرية غوص

$$\Omega = \oiint_S \frac{\vec{E} d\vec{S}}{r^3} \quad \text{ومن تعريف الزاوية المجسمة} \quad \vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

نجد بالتعويض في غوص

$$\Phi = \oint_S k \frac{q}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{S} = k q \oint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = k q \Omega$$

(4)

• نتائج العلاقات

$$\text{div rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$$

$$\text{rot grad } \varphi = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{0}$$

$$\text{div grad } \varphi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \nabla^2 \varphi$$

(2)
(2)
(2)

At 10 2



امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
السنة الثانية رياضيات الفصل الثاني للعام الدراسي 2022 - 2023

س1- أجب عن البندين التاليين: (45 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{i(M-B)}^{\max}$ لتوزيع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من 3 جسيمات متميزة موزعة على سويتين للطاقة $\epsilon_1 = kT$ و $\epsilon_2 = 2kT$ ، متحلتين بالشكل: $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزيع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تحاصي الجملة والطاقم (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.
- تحقق من صحة نتائجك بحساب طاقم الجملة.
- أوجد (مع تمثيل كافة الحالات الميكروية) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية (ϵ_1, ϵ_2) في الحالات التالية:
1- الجسيمات متميزة A و B و C. 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

س2- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (45 درجة).

1- ليكن تابع كثافة توزيع غوص الطبيعي $f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2}$; $-\infty < x < +\infty$ والمطلوب:

برهن أنه تابع كثافة احتمال، ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية: $\bar{x}$ و $\overline{x^2}$ و $\overline{\Delta x^2}$.
2- جملة مكونة من عدد لانهائي من الجسيمات غير المتميزة. موزعة على عدد لانهائي من السويات بالشكل:
 $\epsilon_n = n\epsilon_0$; $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ودرجات تحللها معطاة بالعلاقة: $g_n = n + 1$. والمطلوب:

- 1- أوجد تحاص الجملة Z.
- 2- أوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\epsilon}$ في الحالات: $\epsilon_0 \ll KT$ و $\epsilon_0 = KT$ و $\epsilon_0 \gg KT$.

3- أجب عن النقطتين التاليتين

- استند من نظرية غوص ومن تعريفي الزاوية المجسمة والحقل الكهربائي بالصيغة الشعاعية في البرهان على أن: $\Phi = kq\Omega$

• اكتب نتيجة ما يلي: $div \overrightarrow{rot \vec{A}} = ?$ $rot \overrightarrow{grad \varphi} = ?$ $div \overrightarrow{grad \varphi} = ?$

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الاثنين 2023 / 7 / 24

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
السنة الثانية رياضيات الفصل الثاني للعام الدراسي 2022 - 2023 (تسعون درجة)

ج 1: (45 درجة)

1- استنتاج رقم الانشغال لتوزيع $N_{i(M-B)}$

25

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $\ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{M-B}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{M-B}) = \ln N! + \sum_i [N_i \ln g_i - \ln N_i!]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنج $\ln x! \approx x \ln x - x$ نجد:

$$\ln(W_{M-B}) \approx N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{M-B}) = \frac{\partial \ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \left[N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i) \right] dN_i \quad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (\ln g_i - \ln N_i - 1 + 1) dN_i = \sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i$$

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \epsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \epsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \epsilon_i dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i (\ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \epsilon_i) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \epsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)}$$

$$N_{i(M-B)} = g_i e^{\alpha + \beta \epsilon_i} \Leftrightarrow N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta \epsilon_i}$$

2- المسألة:

$$N_o = \frac{(N + N_\epsilon - 1)!}{N!(N_\epsilon - 1)!} = \frac{(3 + 2 - 1)!}{3!(2 - 1)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

• حالات التوزيع الماكروي: $U = \sum_i N_i \epsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزيع الماكروي الأربعة.

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\{(3,0), (0,3), (2,1), (1,2)\}$
 $\begin{matrix} U=3kT & U=6kT & U=4kT & U=5kT \end{matrix}$

• نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{e^{\alpha} g_i e^{\beta \epsilon_i}}{e^{\alpha} g_j e^{\beta \epsilon_j}} = \frac{g_i e^{-\epsilon_i/KT}}{g_j e^{-\epsilon_j/KT}} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{1 e^{-\frac{KT}{KT}}}{2 e^{-\frac{2KT}{KT}}} = \frac{1}{2e^{-1}} = \frac{e}{2} > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$$

والتوزيع طبيعي

$$Z = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/KT} = e^{-1} + 2e^{-2}$$

• تحاص الجملة:

تحاص الطاقم: $Z_{\Omega} = Z^N = (e^{-1} + 2e^{-2})^3 = e^{-3} + 6e^{-4} + 12e^{-5} + 8e^{-6}$
 نقارنه بالعباره: $Z_{\Omega} = \sum W_i e^{-U_i/kT} = W_{(3,0)} e^{-3} + W_{(2,1)} e^{-4} + W_{(1,2)} e^{-5} + W_{(0,3)} e^{-6}$

فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزيع الماكروي بالشكل: $W_{(3,0)} = 1$ و $W_{(2,1)} = 6$ و $W_{(1,2)} = 12$ و $W_{(0,3)} = 8$

الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة (1,2) $\Omega = (\sum g_i)^N = 3^3 = 27$ للتحقق من صحة النتائج نحسب طاقم الجملة من العلاقة

وهذا يتطابق مع الحسابات $\Omega = \sum W_i = 1 + 6 + 12 + 8 = 27$

1- الجسيمات متمايضة (كلاسيكية) $W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,2)} = 3! \left(\frac{1^1}{1!} \frac{2^2}{2!} \right) = 12$

$\frac{BC }{A}$	$\frac{ BC}{A}$	$\frac{B C}{A}$	$\frac{C B}{A}$
$\frac{AC }{B}$	$\frac{ AC}{B}$	$\frac{A C}{B}$	$\frac{C A}{B}$
$\frac{AB }{C}$	$\frac{ AB}{C}$	$\frac{A B}{C}$	$\frac{B A}{C}$

2- الجسيمات بوزونات $W_{B-E} = \prod_{i=1}^2 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{(1+1-1)!}{1! (1-1)!} \frac{(2+2-1)!}{2! (2-1)!} = 3$

$\frac{\bullet\bullet|}{\bullet} \quad \frac{| \bullet\bullet}{\bullet} \quad \frac{\bullet| \bullet}{\bullet}$

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (1,2) تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة نوزع مقبولة $W_{F-D} = \prod_{i=1}^2 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{1!}{1! (1-1)!} \frac{2!}{2! (2-2)!} = 1$

$\frac{\bullet| \bullet}{\bullet}$

ج 2: (45 درجة)

1- لدينا تابع كثافة توزيع غوص: $f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2}$; $-\infty < x < +\infty$

هو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي كما يلي:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} 2 \int_0^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} 2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$

• إيجاد $\bar{x}$: $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = 0$

• إيجاد $\overline{x^2}$: $\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} 2 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{2\alpha}$

$\Delta x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 1/2\alpha$

• إيجاد Δx^2 : نعوض في العبارة

2- الحل: 1- نحسب Z من صيغة التجميع في المجال $[0 \rightarrow \infty]$ كما يلي:

$Z = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{\beta \epsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e^{n\beta \epsilon_0}$

نفرض $x = e^{\beta \epsilon_0} < 1$

لأن $\varepsilon_o < KT$ و $\varepsilon_o > KT$ في الحالتين $e^{\varepsilon_o/KT} > 1$ حيث يكون $e^{\beta\varepsilon_o} = e^{-\varepsilon_o/KT} = (1/e^{\varepsilon_o/KT}) < 1$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

وبفرض $m = n+1$ يمكننا كتابة Z بدلالة مشتق سلسلة أخرى S_m كما يلي:

$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d x^m}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

وبإيجاد عبارة الحد العام للسلسلة الجديدة S_m التي أساسها x :

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \dots = (1-x)^{-1}$$

$$Z = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{d}{dx} (1-x)^{-1} = \frac{d}{dx} \frac{1}{(1-x)} = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = (1-e^{\beta\varepsilon_o})^{-2}$$

2- نوجد متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$ من العلاقة:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln (1-e^{\beta\varepsilon_o})^{-2}}{\partial \beta} = -2 \frac{\partial \ln (1-e^{\beta\varepsilon_o})}{\partial \beta} = -2 \frac{-\varepsilon_o e^{\beta\varepsilon_o}}{1-e^{\beta\varepsilon_o}} = \frac{2\varepsilon_o}{e^{\beta\varepsilon_o} - 1} = \frac{2\varepsilon_o}{e^{\varepsilon_o/KT} - 1}$$

من أجل $\varepsilon_o \ll KT$ ننشر التابع الأسّي ونكتفي بالحدين الأول والثاني $e^{\varepsilon_o/KT} \approx 1 + \frac{\varepsilon_o}{KT}$ وبالتعويض نجد:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_o}{1 + \frac{\varepsilon_o}{KT} - 1} \approx 2KT$$

من أجل $\varepsilon_o = KT$ نجد: $\bar{\varepsilon} > KT \Rightarrow \bar{\varepsilon} \approx 1.16 KT$

من أجل $\varepsilon_o \gg KT$ يصبح المقدار $e^{\varepsilon_o/KT} \gg 1$ ويهمل الواحد الموجود في المقام فنجد: $\bar{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon_o}{e^{\varepsilon_o/KT}} \approx 0$

3- أجوبة النقطتين التاليتين

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

• لدينا نظرية غوص

$$\Omega = \iint_S \frac{d\vec{S}}{r^3} \quad \text{وباعتبار الحقل الكهربائي} \quad \vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad \text{ومن تعريف الزاوية المجسمة}$$

نجد بالتعويض في غوص

$$\Phi = \iint_S k \frac{q}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{S} = kq \iint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = kq \Omega$$

• نتائج العلاقات

$$\left. \begin{aligned} \text{div rot } \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \\ \text{rot grad } \phi &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = \vec{0} \\ \text{div grad } \phi &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \nabla^2 \phi \end{aligned} \right\}$$



امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠٢٢ - ٢٠٢٣

س١- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (٥٠ درجة).

١- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(M-B)}$ لتوزيع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

٢- مسألة: جملة مكونة من 5000 جسيم متمايز موزعة على سويتين للطاقة $\epsilon_1 = KT$ و $\epsilon_2 = 2KT$ (J) السويتان متحلتتان بالشكل $g_1 = g_2 = 2$. والمطلوب:

١- ارسم هيكل السويتات والتحولات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي.

٢- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(N_1, N_2)_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2$ ، ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0,368$ و $e^{-2} = 0,135$).

٣- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(N_1 + 1, N_2 - 1)$ ملاحظة: يرجى تدقيق النتائج الرقمية لهذه المسألة لأنها هامة

٣- برهن أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $\text{div } \vec{E} = 0$.

س٢- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (٤٠ درجة).

١- استنتج من بواسون (باستخدام التقريبات المناسبة) تابع كثافة غوص الطبيعي.

٢- عرف تابع فيرمي $f(\epsilon)$ ، ومثله بيانياً عند سوية فيرمي للطاقة $\epsilon_f(T = 0K)$.

ثم مثله في جوارها من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\epsilon = \epsilon_f(0) \pm KT$.

• اذكر ثلاث تعاريف مختلفة لسوية فيرمي $\epsilon_f^{(0)}$.

٣- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويتات فيها

$\frac{C}{A \cup B}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{C}{A \cap B}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{C}{A \setminus B}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{C}{B \setminus A}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس: ٢٠٢٣ / ٣ / ٥

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
دورة الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠٢٢ - ٢٠٢٣ (تسعون درجة)

ج ١: (٥٠ درجة)

١- استنتاج رقم الانشغال لتوزع $N_{i(M-B)}$

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $\ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{M-B}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{M-B}) = \ln N! + \sum_i [N_i \ln g_i - \ln N_i!]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنج $\ln x! \approx x \ln x - x$ نجد:

$$\ln(W_{M-B}) \approx N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i ، وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{M-B}) = \frac{\partial \ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \left[N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i) \right] dN_i \quad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (\ln g_i - \ln N_i - 1 + 1) dN_i = \sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i$$

بالتعويض في (١) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

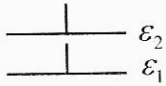
$$\sum_i (\ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$N_{i(M-B)} = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} \Leftrightarrow N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

٢- المسألة:

١- عدد حالات التوزع الماكروي:

$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N! (N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(5000 + 2 - 1)!}{5000! (2 - 1)!} = \frac{5001!}{5000!} = \frac{5001 \times 5000!}{5000!} = 5001$$



٢- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\bar{N}_1, \bar{N}_2)_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i / KT} ; Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i / KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} = 1,006$$

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\varepsilon_1 / KT} = \frac{5000}{1,006} 2e^{-1} \approx 3658$$

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\varepsilon_2 / KT} = \frac{5000}{1,006} 2e^{-2} \approx 1342$$

$$N = N_1 + N_2 = 3658 + 1342 = 5000$$

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1, N_2, \dots)_{\max}} = \sum_i N_i \varepsilon_i = N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 = 3658 KT + 1342 \times 2KT = 6342 KT$$

٣- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1, N_2, \dots)_{\max}} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1} 2^{N_2}}{N_1! N_2!} \right)$$

$$W'_{(N_1+1, N_2-1)} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1+1} 2^{N_2-1}}{(N_1+1)! (N_2-1)!} \right)$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-1)}} = \frac{2^{N_1} 2^{N_2}}{N_1! N_2!} \frac{(N_1+1)! (N_2-1)!}{2^{N_1+1} 2^{N_2-1}} = \frac{2^{N_1}}{N_1! N_2 (N_2-1)!} \frac{(N_1+1) N_1! (N_2-1)!}{2^{N_1} \times 2^{N_2} \frac{2^{-1} \times 2^{N_2}}{2^{-1} \times 2^{N_2}}}$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-1)}} = \frac{(N_1+1)}{N_2} = \frac{3659}{1341} \approx 2,73 > 1 \Rightarrow W_{(N_1, N_2)_{\max}} > W'_{(N_1+1, N_2-1)}$$

٣- برهان أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $\text{div } \vec{E} = 0$

نعلم أن العبارة الشعاعية للحقل الكهربائي للشحنة النقطية يعطى على بعد منها r بالعلاقة

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad ; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{و} \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{E} = kq \frac{x}{r^3} \vec{i} + kq \frac{y}{r^3} \vec{j} + kq \frac{z}{r^3} \vec{k}$$

نوجد حدود عبارة التفرق

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = kq \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = kq \frac{r^3 - 3r^2 \frac{\partial r}{\partial x} x}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kq r^2 \frac{x}{r}}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kq x^2}{r^5}$$

وبالمثل نوجد الحدين الآخرين $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ وبالتعويض نجد :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq}{r^3} = 0$$

ج ٢: (٤٠ درجة)

١- لإيجاد تابع كثافة توزيع غوص الطبيعي ننشر لغارتم تابع كثافة توزيع بواسون باستخدام منشور تايلور بجوار القيمة الوسطى $\bar{x} = a$. ونكتفي بالحدود الثلاثة الأولى من المنشور فقط.

$$\text{Ln } \omega(x) = \text{Ln } \omega(x) \Big|_{x=a} + \frac{(x-a)}{1!} \frac{d \text{Ln } \omega(x)}{dx} \Big|_{x=a} + \frac{(x-a)^2}{2!} \frac{d^2 \text{Ln } \omega(x)}{dx^2} \Big|_{x=a} + \dots \quad (a)$$

نوجد قيمة $\text{Ln } \omega(x)$ ومشتقاته، ثم نعوض في حدود المنشور.

$$\omega(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a} \Rightarrow \text{Ln } \omega(x) = x \text{Ln } a - a - \text{Ln } x!$$

وباستخدام تقريب ستيرلنج $\text{Ln } x! \approx x \text{Ln } x - x$

$$\text{Ln } \omega(x) \approx x \text{Ln } a - a - x \text{Ln } x + x$$

$$\frac{d \text{Ln } \omega(x)}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{d}{dx} [x \text{Ln } a - a - x \text{Ln } x + x] \Big|_{x=a} = [\text{Ln } a - \text{Ln } x - 1 + 1] \Big|_{x=a} = 0$$

$$\left. \frac{d^2 \ln \omega(x)}{dx^2} \right|_{x=a} = \frac{d}{dx} [\ln a - \ln x]_{x=a} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=a} = -\frac{1}{a}$$

بتعويض كل بقيمته في (a) نجد:

$$\ln \omega(x) \approx \ln \omega(a) + 0 + \frac{(x-a)^2}{2!} \left(-\frac{1}{a}\right) \Rightarrow \ln \frac{\omega(x)}{\omega(a)} \approx -\frac{\Delta X^2}{2a} ; \Delta X^2 = (x-a)^2$$

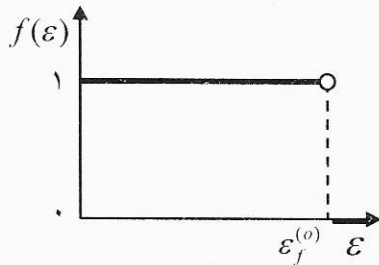
$$\Rightarrow \omega(x) \approx \omega(a) e^{-\frac{\Delta X^2}{2a}}$$

وهذا يطابق تابع كثافة توزع غوص الطبيعي المعطى بالصيغة $f(x) = A e^{-\alpha x^2} ; -\infty < x < +\infty$

٢- يُعرف تابع فيرمي من عبارة توزع (فيرمي - ديراك) لعدد dN من الجسيمات الواقعة في مجال الطاقة $(\varepsilon \rightarrow \varepsilon + d\varepsilon)$ الذي درجة تحلله $(g \rightarrow g + dg)$ بالشكل:

$$dN = \frac{dg(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon ; f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1}$$

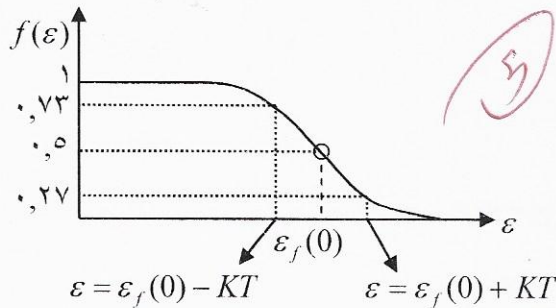
حيث $\varepsilon_f(0)$ سوية فيرمي عند درجة الصفر المطلق $T = 0K$ ، ونمثله بالشكل:



$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1 & ; \varepsilon < \varepsilon_f \\ \frac{1}{e^{+\infty} + 1} = 0 & ; \varepsilon > \varepsilon_f \\ \frac{1}{e^{0/0} + 1} = XX & ; \varepsilon = \varepsilon_f \end{cases}$$

نستنتج أن تابع فيرمي هو تابع احتمال لأنه يأخذ قيمه في المجال $[0 - 1]$. شكل ()

وفي جوار سوية فيرمي ، من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\varepsilon = \varepsilon_f(0) \pm KT$.



$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{e^{-1} + 1} \approx 0,73 & ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) - KT \\ \frac{1}{e^0 + 1} = 0,5 & ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) \\ \frac{1}{e^{+1} + 1} \approx 0,27 & ; \varepsilon = \varepsilon_f(0) + KT \end{cases}$$

• تعاريف سوية فيرمي $\varepsilon_f^{(0)}$:

- ١- هي الطاقة الموافقة لتوزع الفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0K$
- ٢- هي أعلى سويات الطاقة المشغولة بالكامل بالفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0K$ وبمعدل فيرميون واحد لكل حالة مسموحة من أجل $\varepsilon_i < \varepsilon_f^{(0)}$ ، وفارغة من أجل $\varepsilon_i > \varepsilon_f^{(0)}$
- ٣- هي الطاقة الموافقة لقيمة تابع فيرمي الاحتمالي $f(\varepsilon) = 0,5$

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(2, 0, 1)$

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,0,1)} = 3! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^0}{0!} \frac{1^1}{1!} \right) = 12$$

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(2, 2, 1)$

$$\frac{C}{A+B}$$

$$\frac{1}{100}$$

الوزن الإحصائي للبوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+2-1)!}{1!1!} = 3 \times 3 \times 2 = 18$$

(5)

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{2})$

●●●

الوزن الإحصائي للبوزونات

●●●

●●●

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+1-1)!}{2!0!} = 3 \times 3 \times 1 = 9$$

(5)



امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات -
السنة الثانية رياضيات الفصل الثاني للعام الدراسي 2021 - 2022

س1- أجب عن البندين التاليين: (40 درجة).

1- أوجد علاقة المشتقة الثانية $\partial^2/\partial\beta^2$ انطلاقاً من المشتقة الأولى $\partial/\partial\beta$ وبفرض أن تابع التخاص $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$ برهن على ضوء المشتقات $\partial/\partial\beta$ و $\partial^2/\partial\beta^2$ صحة المساواة الثانية لما يلي $\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{2} KT$ و $\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \frac{15}{4} (KT)^2$ و $\overline{\Delta \varepsilon^2} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = \frac{3}{2} (KT)^2$

2- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة $\varepsilon_1 = KT$ (J) و $\varepsilon_2 = 2KT$ (J) و $\varepsilon_3 = 3KT$ (J)، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = g_3 = 2$. والمطلوب:

- 1- ارسم هيكل السويات والتحلات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي.
- 2- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3)_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$. ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0,368$ و $e^{-2} = 0,135$ و $e^{-3} = 0,05$).

3- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(\bar{N}_1, \bar{N}_2 + 1, \bar{N}_3 - 1)$.
ملاحظة: يرجى تدقيق النتائج الرقمية لهذه المسألة لأنها هامة

س2- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (50 درجة).

1- ليكن تابع كثافة توزيع غوص الطبيعي $f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2}$; $-\infty < x < +\infty$ والمطلوب:

برهن أنه تابع كثافة احتمال، ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية: $\bar{x}$ و $\overline{x^2}$ و $\overline{\Delta x^2}$.

2- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة $f(g^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2}$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان (بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$). ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استند في الحل من تكاملات بواسون التالية

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \frac{n!}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{n+1}}} & ; n \text{ زوجي} \\ \frac{m!}{2\alpha^{m+1}} & ; n \text{ فردي} \end{cases}$$

3- أجب عن النقطتين التاليتين

- برهن أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $\text{div } \vec{E} = 0$.
- اكتب القانون الرياضي فقط (دون برهان) لكل مما يلي: دعوى استوكس، دعوى أوستراغرادسكي - غوص، نظرية غوص.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الاثنين 18 / 7 / 2022

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
السنة الثانية رياضيات الفصل الثاني للعام الدراسي 2021 - 2022 (تسعون درجة)

ج 1: (40 درجة)

1- إيجاد المشتقة $\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$: لدينا المشتقة الأولى $\frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T}$ بالشكل فتكون المشتقة الثانية $\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$ بالشكل

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} = \frac{\partial}{\partial \beta} (KT^2 \frac{\partial}{\partial T}) = KT^2 \frac{\partial}{\partial T} (KT^2 \frac{\partial}{\partial T}) = KT^2 (2KT \frac{\partial}{\partial T} + KT^2 \frac{\partial^2}{\partial T^2})$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad \bar{\epsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{2} KT \quad \text{لبرهان العلاقة}$$

ولدينا $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2} = CV (2\pi m K)^{3/2} T^{3/2} \Rightarrow \ln Z = \ln CV (2\pi m K)^{3/2} + \ln T^{3/2}$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = KT^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln CV (2\pi m K)^{3/2} + \ln T^{3/2}) = KT^2 (0 + \frac{3}{2T}) = \frac{3}{2} KT$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} = KT^2 (2KT \frac{\partial}{\partial T} + KT^2 \frac{\partial^2}{\partial T^2}) \quad \bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \frac{15}{4} (KT)^2 \quad \text{لبرهان العلاقة}$$

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} = \frac{1}{Z} KT^2 (2KT \frac{\partial Z}{\partial T} + KT^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial T^2})$$

$$Z = CV (2\pi m K)^{3/2} T^{3/2} \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial T} = \frac{3}{2} CV (2\pi m K)^{3/2} T^{1/2}$$

$$\text{فيكون } \frac{\partial^2 Z}{\partial T^2} = \frac{3}{2} CV (2\pi m K)^{3/2} \frac{1}{2T^{1/2}}$$

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{CV (2\pi m K)^{3/2} T^{3/2}} KT^2 [2KT \frac{3}{2} CV (2\pi m K)^{3/2} T^{1/2} + KT^2 \frac{3}{2} CV (2\pi m K)^{3/2} \frac{1}{2T^{1/2}}]$$

$$\bar{\epsilon}^2 = KT^{1/2} (3KT^{3/2} + \frac{3}{4} KT^{3/2}) = \frac{15}{4} (KT)^2$$

$$\Delta \bar{\epsilon}^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = \frac{3}{2} (KT)^2 \quad \text{لبرهان العلاقة}$$

$$\Delta \bar{\epsilon}^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = KT^2 (2KT \frac{\partial \ln Z}{\partial T} + KT^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2})$$

$$\text{وبما أن } \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{3}{2T} \quad \text{فيكون } \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2} = -\frac{6}{4T^2} = -\frac{3}{2T^2}$$

$$\Delta \bar{\epsilon}^2 = KT^2 (2KT \frac{3}{2T} - KT^2 \frac{3}{2T^2}) = \frac{3}{2} (KT)^2$$

2- المسألة:

1- عدد حالات التوزيع الماكروي:

$$N_o = \frac{(N + N_e - 1)!}{N! (N_e - 1)!} = \frac{(1000 + 3 - 1)!}{1000! (3 - 1)!} = \frac{1002!}{1000! \times 2!} = \frac{1002 \times 1001 \times 1000!}{1000! \times 2!} = 501501$$

2- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3)_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\epsilon_i/KT} \quad ; Z = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} + 2e^{-3} = 1,106$$

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\epsilon_1/KT} = \frac{1000}{1,106} 2e^{-1} \approx 666$$

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\varepsilon_2/KT} = \frac{1000}{1,106} 2 e^{-2} \approx 244 \quad (3)$$

$$N_3 = \frac{N}{Z} g_3 e^{-\varepsilon_3/KT} = \frac{1000}{1,106} 2 e^{-3} \approx 90 \quad (3)$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 666 + 244 + 90 = 1000 \quad (2)$$

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = \sum_i N_i \varepsilon_i = N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + N_3 \varepsilon_3 = 666KT + 244 \times 2KT + 90 \times 3KT = 1424 KT \quad (2)$$

3- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1} 2^{N_2} 2^{N_3}}{N_1! N_2! N_3!} \right)$$

$$W'_{(N_1, N_2+1, N_3-1)} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1} 2^{N_2+1} 2^{N_3-1}}{N_1! (N_2+1)! (N_3-1)!} \right)$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1, N_2+1, N_3-1)}} = \frac{2^{N_1} 2^{N_2} 2^{N_3} N_1! (N_2+1)! (N_3-1)!}{N_1! N_2! N_3! 2^{N_1} 2^{N_2+1} 2^{N_3-1}} = \frac{2^{N_1} 2^{N_2} 2^{N_3} N_1! (N_2+1) N_2! (N_3-1)!}{N_1! N_2! N_3 (N_3-1)! 2^{N_1} 2^{+1} \times 2^{N_2} 2^{-1} \times 2^{N_3}}$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1, N_2+1, N_3-1)}} = \frac{(N_2+1)}{N_3} = \frac{245}{90} = 2,72 > 1 \Rightarrow W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} > W'_{(N_1, N_2+1, N_3-1)} \quad (4)$$

ج 2: (50 درجة)

$$f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} \quad ; -\infty < x < +\infty$$

1- لدينا تابع كثافة توزيع غوص:

هو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي كما يلي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} 2 \int_0^{+\infty} x^0 e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} 2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1 \quad (4)$$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = 0 \quad \bullet \text{ إيجاد } \bar{x} \quad (4)$$

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} 2 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{2\alpha} \quad \bullet \text{ إيجاد } \overline{x^2} \quad (4)$$

$$\Delta x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 1/2\alpha \quad \bullet \text{ إيجاد } \Delta x^2: \text{نعوض في العبارة} \quad (4)$$

2- لإيجاد تابع كثافة السرعة المطلقة $f(g^2)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: ننتقل من العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لـ g إلى الموزعة وفقاً لـ g^2 وفق توزيع M-B في مجال السرعات $[g, g+dg]$.

$$dN(g) = \frac{N}{Z} e^{\beta m g^2/2} g(g) dg \quad (5)$$

ونعوض عن المقدار $g(g) dg$ بقيمة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري

$$g(g) dg = C d\Gamma(g) = CV/4\pi m^3 g^2 dg$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$ ، وعن الطاقة $\varepsilon = m g^2/2$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(g) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-m g^2/2KT} CV 4\pi m^3 g^2 dg \quad (4)$$

بالاختزال على CV والإصلاح نجد:

$$dN(g) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg$$

$$dN(g) = 4\pi N \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg$$

نعتبر أن $\alpha = m/2KT$ فنجد

وبقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجزمة N نحصل على تابع توزيع السرعة بدلالة تابع كثافة السرعة كما يلي:

$$\frac{dN(g)}{N} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg = f(g^2) dg$$

$$f(g^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2}$$

حيث يعبر $f(g^2)$ عن تابع كثافة السرعة المطلقة

للبرهان على أن $f(g^2)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحد في المجال $[0 \rightarrow \infty[$.

$$\int_0^\infty f(g^2) dg = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^\infty g^2 e^{-\alpha g^2} dg$$

$$\int_0^\infty g^2 e^{-\alpha g^2} dg = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

نحل التكامل باستخدام تكاملات بواسون: وبالتعويض نجد:

$$F(g) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = 1$$

3- أجوبة النقطتين التاليتين

• برهان أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $\text{div } \vec{E} = 0$
نعلم أن العبارة الشعاعية للحقل الكهربائي للشحنة النقطية يعطى على بعد منها r بالعلاقة

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad ; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{و} \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{E} = kq \frac{x}{r^3} \vec{i} + kq \frac{y}{r^3} \vec{j} + kq \frac{z}{r^3} \vec{k}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

نوجد حدود عبارة التفرق

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = kq \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = kq \frac{r^3 - 3r^2 \frac{\partial r}{\partial x} x}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kq r^2 \frac{x}{r}}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kq x^2}{r^5}$$

وبالمثل نوجد الحدين الآخرين $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z}$. وبالتعويض نجد:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq}{r^3} = 0$$

$$\oint_c \vec{E} d\vec{r} = \iint_S (\text{rot } \vec{E})_n d\vec{S}$$

$$\iiint_S \vec{B} d\vec{S} = \iiint_\tau \text{div } \vec{B}_n d\tau$$

$$\Phi = \iiint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

• دعوى ستوكس

دعوى أوستراغرادسكي - غوص

نظرية غوص



امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2021 - 2022

س1- أجب عن البندين التاليين: (40 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{i(M-B)}^{\max}$ لتوزيع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة $\epsilon_1 = KT$ (J) و $\epsilon_2 = 2KT$ (J) و $\epsilon_3 = 3KT$ (J)، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = g_3 = 2$. والمطلوب:
1- ارسم هيكل السويات والتحولات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي.

2- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3)_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$ ، ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0,368$ و $e^{-2} = 0,135$ و $e^{-3} = 0,05$).

3- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(\bar{N}_1, \bar{N}_2 + 1, \bar{N}_3 - 1)$.
ملاحظة: يرجى تدقيق النتائج الرقمية لهذه المسألة لأنها هامة

س2- أجب عن البنود الأربعة التالية: (50 درجة).

1- اكتب تابع كثافة توزيع برنولي وعرف مضمونه، ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال، ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية $\bar{n}$ و n^2 و Δn^2 .

2- استنتج تابع كثافة الطاقة $f(\epsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان، ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استند في الحل من تكاملات غاما التالية $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ و $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n\Gamma(n)$

3- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها

ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

● ● ●	● ● ●	D
● ● ●	● ● ●	C
● ● ●	● ● ●	A/B

4- أجب عن النقطتين التاليتين

- برهن أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $\text{div } \vec{E} = 0$.
- اكتب القانون الرياضي فقط (دون برهان) لكل مما يلي: دعوى استوكس، دعوى أوستراغرادسكي - غوص، نظرية غوص.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: المحي 2022/9/8

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2021 - 2022 (تسعون درجة)

ج1: (40 درجة)

1- استنتاج رقم الانشغال لتوزيع $N_{i(M-B)}$

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d Ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln N! + \sum_i [N_i Ln g_i - Ln N_i!]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنج $Ln x! \approx x Ln x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \left[N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i) \right] dN_i$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln g_i - Ln N_i - 1 + 1) dN_i = \sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i \quad (*)$$

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \epsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \epsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \epsilon_i dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i (Ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \epsilon_i) dN_i = 0 \Rightarrow Ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \epsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)}$$

$$N_{i(M-B)} = g_i e^{\alpha + \beta \epsilon_i} \Leftrightarrow N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta \epsilon_i}$$

2- المسألة:

1- عدد حالات التوزيع الماكروي:

$$N_o = \frac{(N + N_e - 1)!}{N! (N_e - 1)!} = \frac{(1000 + 3 - 1)!}{1000! (3 - 1)!} = \frac{1002!}{1000! \times 2!} = \frac{1002 \times 1001 \times 1000!}{1000! \times 2!} = 501501$$

2- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3)_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\epsilon_i / KT} ; Z = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i / KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} + 2e^{-3} = 1,106$$

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\epsilon_1 / KT} = \frac{1000}{1,106} 2e^{-1} \approx 666$$

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\epsilon_2 / KT} = \frac{1000}{1,106} 2e^{-2} \approx 244$$

$$N_3 = \frac{N}{Z} g_3 e^{-\epsilon_3/KT} = \frac{1000}{1,106} 2e^{-3} \approx 90 \quad (3)$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 666 + 244 + 90 = 1000 \quad (1)$$

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = \sum_i N_i \epsilon_i = N_1 \epsilon_1 + N_2 \epsilon_2 + N_3 \epsilon_3 = 666KT + 244 \times 2KT + 90 \times 3KT = 1424KT \quad (1)$$

3- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1} 2^{N_2} 2^{N_3}}{N_1! N_2! N_3!} \right)$$

$$W'_{(N_1, N_2+1, N_3-1)} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1} 2^{N_2+1} 2^{N_3-1}}{N_1! (N_2+1)! (N_3-1)!} \right) \quad (3)$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1, N_2+1, N_3-1)}} = \frac{2^{N_1} 2^{N_2} 2^{N_3} N_1! (N_2+1)! (N_3-1)!}{N_1! N_2! N_3! 2^{N_1} 2^{N_2+1} 2^{N_3-1}} = \frac{2^{N_1} 2^{N_2} 2^{N_3}}{N_1! N_2! N_3! (N_3-1)!} \frac{N_1! (N_2+1)! (N_3-1)!}{2^{N_1} 2^{N_2+1} 2^{N_3-1}}$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1, N_2+1, N_3-1)}} = \frac{(N_2+1)}{N_3} = \frac{245}{90} = 2.72 > 1 \Rightarrow W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} > W'_{(N_1, N_2+1, N_3-1)}$$

ج 2: (50 درجة)

1- يُعطى تابع كثافة توزع برنولي بالعلاقة:

$$\omega(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \quad ; n \leq N$$

حيث $p \leq 1$ احتمال ظهور الحادثة n مرة من أصل N مرة. و $q \leq 1$ لأن $q = 1 - p$ يمثل احتمال عدم ظهور الحادثة $(N - n)$ مرة من أصل N مرة.

وهو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي (باعتباره يمثل صيغة منشور ثنائي الحد لـ نيوتن) كما يلي:

$$\sum_{n=0}^N \omega(n) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = (p+q)^N = (p+1-p)^N = 1 \quad (3)$$

• إيجاد $\bar{n}$: (القيمة الوسطى للمتحول)

نشتق تابع التوزيع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين بـ p فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^N n \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} \Rightarrow Np(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^N \underbrace{n \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n}}_{\omega(n)} = \bar{n} \Rightarrow \boxed{\bar{n} = Np} \quad (3)$$

• إيجاد $\overline{n^2}$: وسطى القيمة التربيعية للمتحول (الانحراف المعياري)

نشتق تابع التوزيع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ مرتين بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين كل مرة بـ p فنجد:

لذا نشتق قيمة $\bar{n}$ مرة ثانية فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} + N(N-1)p(p+q)^{N-2} = \sum_{n=0}^N n^2 \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} \Rightarrow Np + N(N-1)p^2 = \sum_{n=0}^N \underbrace{n^2 \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n}}_{\omega(n)} = \overline{n^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{n^2} = Np + N^2 p^2 - Np^2} \quad (3)$$

• إيجاد Δn^2 : (التشتت) نعوض في العبارة

$$\Delta n^2 = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = Np + N^2 p^2 - Np^2 - N^2 p^2 = Np(1-p) = Npq = \bar{n} q$$

2- لإيجاد تابع كثافة الطاقة $f(\epsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: نكتب العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقتها، في المجال الطاقي $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$. انطلاقاً من عبارة رقم

$$dN(\epsilon) = \frac{N}{Z} e^{\beta \epsilon} g(\epsilon) d\epsilon \quad \text{فنجذ} \quad e^{\alpha} = \frac{N}{Z} \quad \text{وباعتبار} \quad N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta \epsilon_i}$$

انشغال مكسويل نعوض عن المقدار $g(\epsilon) d\epsilon$ بقيمة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

$$g(\epsilon) d\epsilon = C d\Gamma(\epsilon) = CV 2\pi (2m)^{3/2} (\epsilon)^{1/2} d\epsilon$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(\epsilon) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-\epsilon/KT} CV 2\pi (2m)^{3/2} (\epsilon)^{1/2} d\epsilon$$

بالاختزال والاصلاح.

$$dN(\epsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\epsilon/KT} (\epsilon)^{1/2} d\epsilon$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع الطاقة بدلالة تابع كثافة الطاقة كما يلي:

$$dF(\epsilon) = \frac{dN(\epsilon)}{N} = \frac{2\epsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\epsilon/KT} d\epsilon = f(\epsilon) d\epsilon \quad (1)$$

حيث يعبر $f(\epsilon)$ عن تابع كثافة الطاقة

$$f(\epsilon) = \frac{2\epsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\epsilon/KT}$$

للبهران على أن $f(\epsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على الطاقة في المجال $[0 \rightarrow \infty]$.

$$F(\epsilon) = \int_0^{\infty} f(\epsilon) d\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/KT} d\epsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x = \epsilon/KT$ فنجد:

$$\epsilon = KT x \Rightarrow d\epsilon = KT dx \quad \text{و} \quad \epsilon^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل واستخدام تكاملات غاما نجد المطلوب

$$\int_0^{\infty} f(\epsilon) d\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} (KT)^{1/2} KT \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} (KT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

أجوبة النقطتين التاليتين

• برهان أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $\text{div } \vec{E} = 0$ نعلم أن العبارة الشعاعية للحقل الكهربائي للشحنة النقطية يعطى على بعد منها r بالعلاقة

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad ; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{و} \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{E} = kq \frac{x}{r^3} \vec{i} + kq \frac{y}{r^3} \vec{j} + kq \frac{z}{r^3} \vec{k}$$

نوجد حدود عبارة التفريق $\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = kq \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = kq \frac{r^3 - 3r^2 \frac{\partial r}{\partial x} x}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kq r^2 \frac{x}{r}}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kq x^2}{r^5} \quad (5)$$

وبالمثل نجد الحدين الآخرين $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z}$. وبالتعويض نجد:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq}{r^3} = 0 \quad (2)$$

• دعوى ستوكس

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{rot } \vec{E})_n d\vec{S} \quad (2)$$

$$\iiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{B}_n d\tau \quad (2)$$

دعوى أوستراغرادسكي - غوص

نظرية غوص

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2)$$

كلاركين واما الخ (2, 1, 1)

$$W_{n-1} = n! \pi \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} = 4! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^1}{1!} \frac{1^1}{1!} \right) = 96 \quad (3)$$

بوزونات أو فيزيونات واما الخ (2, 2, 1)

$$W_{B-E} = \pi \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!} = \frac{(2+2-1)!}{2! (2-1)!} \frac{(2+2-1)!}{2! (2-1)!} \frac{(1+1-1)!}{1! (1-1)!} = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$$

بما فيزيونات

$$W_{F-D} = \pi \frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!} = \frac{2!}{2! (2-2)!} \frac{2!}{2! (2-2)!} \frac{1!}{1! (1-1)!} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$= \frac{2!}{2! (2-2)!} \frac{2!}{2! (2-2)!} \frac{1!}{1! (1-1)!} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

بوزونات واما الخ (2, 2, 2)

$$W_{B-E} = \pi \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!} = \frac{(2+2-1)!}{2! (2-1)!} \frac{(2+2-1)!}{2! (2-1)!} \frac{(2+1-1)!}{2! (1-1)!} = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9 \quad (3)$$



امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2021 - 2022

السؤال الثاني

س1- أجب عن البنود التالية: (45 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{i(M-B)}^{\max}$ لتوزيع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$) موزعة على سويتين للطاقة $\epsilon_1 = KT$ (J) و $\epsilon_2 = 2KT$ (J)، السويتين متحلتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:
1- أوجد عدد حالات التوزيع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية (ϵ_1, ϵ_2) في الحالات التالية:
A- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.
3- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة Z والطاقي Z_Q . ثم استنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمال، ومثلها.

3- برهن أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $\text{div } \vec{E} = 0$.

س2- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (45 درجة).

1- اكتب تابع كثافة توزيع برنولي وعرف مضمونه، ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال،

ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية (بعد تسميتها) $\bar{n}$ و n^2 و Δn^2 .

2- استنتج تابع كثافة الطاقة $f(\epsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان، ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استند في الحل من تكاملات غاما التالية $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ و $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n\Gamma(n)$

3- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها

$\frac{D}{C}$	$\frac{D}{A}$	$\frac{D}{B}$
$\frac{1}{C}$	$\frac{1}{A}$	$\frac{1}{B}$
$\frac{1}{A}$	$\frac{1}{B}$	$\frac{1}{C}$

ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرابلس: 15 / 2 / 2022

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
دورة الفصل الأول للعام الدراسي 2021 - 2022 (تسعون درجة)

17: (45 درجة)
1- استنتاج رقم الانشغال لتوزع $N_{i(M-B)}$ max

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d Ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln N! + \sum_i [N_i Ln g_i - Ln N_i!]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنج $Ln x! \approx x Ln x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \left[N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i) \right] dN_i \quad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln g_i - Ln N_i - 1 + 1) dN_i = \sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i$$

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i (Ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i) dN_i = 0 \Rightarrow Ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$N_{i(M-B)} = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} \Leftrightarrow N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

2- المسألة:

$$N_o = \frac{(N + N_e - 1)!}{N! (N_e - 1)!} = \frac{(N + 2 - 1)!}{N! (2 - 1)!} = \frac{(N + 1)!}{N! 1!} = \frac{(N + 1) N!}{N! 1!} = N + 1$$

1- عدد حالات التوزع الماكروي

2- A - الجسيمات متمايضة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = N! \left(\frac{1^{N-1}}{(N-1)!} \frac{2^1}{1!} \right) = 2N$$

B- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^M \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = \frac{(N-1+1-1)! (1+2-1)!}{(N-1)! (1-1)! 1! (2-1)!} = 2$$

C- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (N-1,1) لا تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي غير مقبولة

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. نوجد تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i / KT} = 1e^{-1} + 2e^{-2}$$

تحاص الطاقم

$$Z_{\Omega} = Z^N = (1e^{-1} + 2e^{-2})^2 = 1e^{-2} + 4e^{-4} + 4e^{-3} \quad (*)$$

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة

نلاحظ وجود 3 حالات ماكروية بطاقات موافقة $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$ كما يلي $(\vec{1}, \vec{1})$ $(\vec{0}, \vec{2})$ $(\vec{2}, \vec{0})$ $U=2KT$ $U=4KT$ $U=3KT$

نوجد تحاص الطاقم بطريقة ثانية من العبارة.

$$Z_{\Omega} = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)} e^{\beta U_{(2,0)}} + W_{(0,2)} e^{\beta U_{(0,2)}} + W_{(1,1)} e^{\beta U_{(1,1)}}$$

نعوض عن طاقة كل من الحالات الماكروية بقيمتها، واعتبار أن $\beta = -1/KT$ ، نجد:

$$Z_{\Omega} = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)} e^{-2} + W_{(0,2)} e^{-4} + W_{(1,1)} e^{-3}$$

نطابق العبارة الحاصلة مع (*) فنجد قيم الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة.

$$W_{(1,1)} = 4 \text{ و } W_{(0,2)} = 4 \text{ و } W_{(2,0)} = 1$$

توجد حالتان لهما الوزن الإحصائي نفسه $W_{(1,1)} = 4$ و $W_{(0,2)} = 4$

فتكون الحالة الأكثر احتمال هي الحالة الماكروية $(1,1)$ لأن طاقتها هي الأقل $U_{(1,1)} = 3KT$

- تمثيل الحالة الماكروية الأكثر احتمال $(1,1)$

$$\begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline A \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline A \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline \end{array}$$

3- يرهان أن تفرق الحقل الكهربائي الساكن لشحنة نقطية معدوم $\text{div } \vec{E} = 0$ نعلم أن العبارة الشعاعية للحقل الكهربائي للشحنة النقطية يعطى على بعد منها r بالعلاقة

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad ; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{و} \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{E} = kq \frac{x}{r^3} \vec{i} + kq \frac{y}{r^3} \vec{j} + kq \frac{z}{r^3} \vec{k}$$

نوجد حدود عبارة التفرق

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = kq \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = kq \frac{r^3 - 3r^2 \frac{\partial r}{\partial x} x}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kq r^2 \frac{x}{r}}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kq x^2}{r^5}$$

وبالمثل نجد الحدين الآخرين $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z}$. وبالتعويض نجد:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq}{r^3} = 0$$

2: (45 درجة)

1- يعطى تابع كثافة توزيع برنولي بالعلاقة:

$$\omega(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \quad ; \quad n \leq N$$

حيث $p \leq 1$ احتمال ظهور الحادثة n مرة من أصل N مرة. و $q \leq 1$ لأن $q = 1 - p$ يمثل احتمال عدم ظهور الحادثة $(N - n)$ مرة من أصل N مرة.

وهو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي (باعتباره يمثل صيغة منشور ثنائي الحد لـ نيوتن) كما يلي:

$$\sum_{n=0}^N \omega(n) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = (p+q)^N = (p+1-p)^N = 1$$

• إيجاد $\bar{n}$: (القيمة الوسطى للمتحول)

نشتق تابع التوزيع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين بـ p فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^N n \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} \Rightarrow Np(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^N \underbrace{n \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n}}_{\omega(n)} = \bar{n} \Rightarrow \boxed{\bar{n} = Np}$$

• إيجاد $\bar{n}^2$: وسطى القيمة التربيعية للمتحول (الانحراف المعياري)

نشتق تابع التوزيع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ مرتين بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين كل مرة بـ p فنجد:

لذا نشتق قيمة $\bar{n}$ مرة ثانية فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} + N(N-1)p(p+q)^{N-2} = \sum_{n=0}^N n^2 \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} \Rightarrow Np + N(N-1)p^2 = \sum_{n=0}^N \underbrace{n^2 \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n}}_{\omega(n)} = \bar{n}^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{n}^2 = Np + N^2 p^2 - Np^2}$$

• إيجاد Δn^2 : (التشتت) نعوض في العبارة

$$\boxed{\Delta n^2 = \bar{n}^2 - \bar{n}^2 = Np + N^2 p^2 - Np^2 - N^2 p^2 = Np(1-p) = Npq = \bar{n} q}$$

2- لإيجاد تابع كثافة الطاقة $f(\varepsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: 15
نكتب العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقتها، في المجال الطاقى $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$. انطلاقاً من عبارة رقم

$$dN(\varepsilon) = \frac{N}{Z} e^{\beta \varepsilon} g(\varepsilon) d\varepsilon \quad \text{ف نجد} \quad e^{\alpha} = \frac{N}{Z} \quad \text{وباعتبار} \quad N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

نعوض عن المقدار $g(\varepsilon) d\varepsilon$ بقيمة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

$$g(\varepsilon) d\varepsilon = C d\Gamma(\varepsilon) = CV 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته

$$Z = CV (2\pi m KT)^{3/2} \quad , \quad \text{واعتبار أن} \quad \beta = -1/KT \quad \text{نجد:}$$

$$dN(\varepsilon) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT} CV 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

بالاختزال والاصلاح.

$$dN(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزيع الطاقة بدلالة تابع كثافة الطاقة كما يلي:

$$dF(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{N} = \frac{2 \varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon = f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1)$$

حيث يعبر $f(\varepsilon)$ عن تابع كثافة الطاقة

$$\boxed{f(\varepsilon) = \frac{2 \varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT}}$$

للبهرمان على أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدى بإجراء التكامل على الطاقة في

المجال $[0 \rightarrow \infty]$.

$$F(\varepsilon) = \int_0^{\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x = \varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT x \Rightarrow d\varepsilon = KT dx \quad \text{و} \quad \varepsilon^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل واستخدام تكاملات غاما نجد المطلوب

$$\int_0^{\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} (KT)^{1/2} KT \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} (KT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \quad (5)$$

$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

-3 15

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{1})$ الوزن الإحصائي

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1,1)} = 4! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^1}{1!} \frac{1^1}{1!} \right) = 96 \quad (3)$$

D
C
A B

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{1})$ الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+1-1)!}{1!0!} = 3 \times 3 \times 1 = 9 \quad (3)$$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

● ● ●
● ● ●
● ● ●

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{1!}{1!(1-1)!} = 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (3)$$

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{2})$ الوزن الإحصائي

● ● ●
● ● ●
● ● ●

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+1-1)!}{2!0!} = 3 \times 3 \times 1 = 9 \quad (3)$$



اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون درجة
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الثاني للعام الدراسي 2020 - 2021

س1- أجب عن البندين التاليين (40 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(F-D)}$ لتوزيع فيرمي - ديراك، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز موزعة على ثلاث سويات للطاقة $\epsilon_1 = KT$ (J) و $\epsilon_2 = 2KT$ (J) و $\epsilon_3 = 3KT$ (J)، السويات متحللة بالشكل $g_1 = g_2 = 2$ و $g_3 = 1$. والمطلوب:
1- ارسم هيكل السويات والتحللات للجملة، ثم أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي.

2- أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3)_{\max}$. ثم تحقق أن $N = N_1 + N_2 + N_3$ ، ثم احسب طاقة هذه الحالة. (علماً أن: $e^{-1} = 0,368$ و $e^{-2} = 0,135$ و $e^{-3} = 0,05$).

3- برهن أن الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمال أكبر من وزن الحالة $(\bar{N}_1 + 1, \bar{N}_2 - 2, \bar{N}_3 + 1)$

س2- أجب عن البنود الثلاثة التالية (50 درجة).

1- استنتج صيغة تحول كل من غازي بوزة وفيرمي الكميّين إلى غاز بوزة الكلاسيكي عند الطاقات العالية.

2- استنتج تابع كثافة مركبة السرعة المطلقة $G(g_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha g_x^2}$ (غوص الطبيعي)، أي ما يعرف بالسرعة الموجهة، ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال. ثم أوجد قيمة ما يلي: $\overline{\Delta g_x^2}$ ، $\overline{g_x^2}$ ، $\overline{g_x}$

توجيه: استند في الحل من تكاملات بواسون التالية $\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{2} \frac{\pi}{\alpha^{n+1}}$; n زوجي

3- أجب عن النقاط التالية

- برهن أن الحقل الكهربائي الساكن $\vec{E}$ تدرج لكمون كهربائي سلمي V .
- برهن أن الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ دوار لكمون مغناطيسي متجه $\vec{A}$.
- استنتج معادلتا بواسون ولاپلاس.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرابلس: 26 / 8 / 2021

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الثاني للعام الدراسي 2020 - 2021 (تسعون درجة)

ج 1: (40 درجة)

1- استنتاج رقم الانشغال لتوزيع $N_{(F-D)}$ max

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (F-D). المعطاة بالعلاقة: $W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!}$

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التحلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i . أي $g_i \gg N_i$.
نوجد بدايةً $\ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{F-D}) \approx \ln \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} = \sum_i [\ln g_i! - \ln N_i! - \ln (g_i - N_i)!]$$

وباستخدام التقريب الثاني لاستيرلنج $\ln x! \approx x \ln x$ نجد:

$$\ln(W_{F-D}) \approx \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i)]$$

بما أن W_{F-D} تابع لكل من g_i و N_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{F-D}) = \frac{\partial \ln(W_{F-D})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i)] dN_i$$

$$\approx \sum_i \left[-\ln N_i - 1 + \frac{g_i}{g_i - N_i} + \ln (g_i - N_i) - \frac{N_i}{g_i - N_i} \right] dN_i = \sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} - 1 + \frac{g_i - N_i}{g_i - N_i} \right) dN_i$$

$$d \ln(W_{F-D}) \approx \sum_i \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} dN_i$$

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0$$

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i \right) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i - N_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} + 1 \Rightarrow \boxed{N_{i(F-D)} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} + 1}}$$

2- المسألة:

1- عدد حالات التوزيع الماكروي:

$$\begin{array}{|c|} \hline \varepsilon_3 \\ \hline \varepsilon_2 \\ \hline \varepsilon_1 \\ \hline \end{array}$$

$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N! (N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(1000 + 3 - 1)!}{1000! (3 - 1)!} = \frac{1002!}{1000! \times 2!} = \frac{1002 \times 1001 \times 1000!}{1000! \times 2!} = 501501$$

2- نوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمال $(N_1, N_2, N_3)_{\max}$ من العبارة

$$N_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i / KT} ; Z = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i / KT} = 2e^{-1} + 2e^{-2} + e^{-3} = 1,056$$

$$N_1 = \frac{N}{Z} g_1 e^{-\varepsilon_1 / KT} = \frac{1000}{1,056} 2 e^{-1} \approx 697$$

$$N_2 = \frac{N}{Z} g_2 e^{-\varepsilon_2 / KT} = \frac{1000}{1,056} 2 e^{-2} \approx 256$$

$$N_3 = \frac{N}{Z} g_3 e^{-\varepsilon_3/KT} = \frac{1000}{1,056} e^{-3} \approx 47 \quad (2)$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 697 + 256 + 47 = 1000 \quad (2)$$

طاقة الحالة الأكثر احتمال

$$U_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = \sum_i N_i \varepsilon_i = N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + N_3 \varepsilon_3 = 697KT + 256 \times 2KT + 47 \times 3KT = 1340KT \quad (2)$$

3- نوجد الوزن الإحصائي للحالتين ثم ننسبهما

$$W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1} 2^{N_2} 1^{N_3}}{N_1! N_2! N_3!} \right)$$

$$W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} = N! \left(\frac{2^{N_1+1} 2^{N_2-2} 1^{N_3+1}}{(N_1+1)! (N_2-2)! (N_3+1)!} \right) \quad (24)$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)}} = \frac{2^{N_1} 2^{N_2} 1^{N_3}}{N_1! N_2! N_3!} \frac{(N_1+1)! (N_2-2)! (N_3+1)!}{2^{N_1+1} 2^{N_2-2} 1^{N_3+1}} = \frac{2^{N_1}}{N_1!} \frac{2^{N_2}}{N_2 (N_2-1) (N_2-2)!} \frac{1}{N_3!} \frac{(N_1+1) N_1!}{2 \times 2^{N_1}} \frac{(N_2-2)!}{2^{-2} \times 2^{N_2}} \frac{(N_3+1) N_3!}{1}$$

$$\frac{W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}}}{W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)}} = 2 \frac{(N_1+1)(N_3+1)}{N_2 (N_2-1)} = 2 \frac{(698)(48)}{256(255)} = 1,026 \Rightarrow W_{(N_1, N_2, N_3)_{\max}} > W'_{(N_1+1, N_2-2, N_3+1)}$$

ج 2: (50 درجة)

1- تحول غاز يوزنه الكمي إلى غاز مكسويل الكلاسيكي (عند الطاقات العالية):

عند الطاقات العالية تكون قيمة المعامل $e^{\varepsilon_i/KT} \gg 1$ حيث يمكننا إهمال الواحد الموجود في مقام عبارة رقم الانشغال بالشكل:

$$N_{i(B-E)} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} - 1} \approx \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}} = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} = N_{i(M-B)}_{\max}$$

تحول غاز فيرمي الكمي إلى غاز بوزة الكلاسيكي (عند الطاقات العالية):

أي من أجل $\varepsilon - \varepsilon_f^{(0)} \gg kT$ يكون $e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f^{(0)}}{kT}} \gg 1$ وبالتالي يمكن إهمال الواحد في مقام عبارة رقم الانشغال. وتصبح بالشكل التالي:

$$N_{(F-D)}_{\max} \approx \frac{g}{e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_f^{(0)}}{kT}}} \Rightarrow N_{(F-D)}_{\max} \Rightarrow N_{Clasic B-E} \equiv N_{M-B} = g e^{\frac{\varepsilon_f^{(0)} - \varepsilon}{kT}} = g e^{\alpha + \beta \varepsilon_i}$$

2- نعيد كتابة العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لمركبات سرعتها المطلقة وفق توزيع M-B في المجالات $[\vartheta_x, \vartheta_x + d\vartheta_x]$ ، $[\vartheta_y, \vartheta_y + d\vartheta_y]$ ، $[\vartheta_z, \vartheta_z + d\vartheta_z]$ كما يلي:

$$dN(\vartheta_{x,y,z}) = \frac{N}{Z} e^{\beta \varepsilon} g(\vartheta_{x,y,z}) d\vartheta_{x,y,z} \quad (1)$$

لمعرفة عدد الجسيمات المتحركة باتجاه أحد المحاور (مثلاً ox). (أي لمعرفة $dN(\vartheta_x)$ التي تنحصر سرعتها في المجال $[\vartheta_x, \vartheta_x + d\vartheta_x]$)، نُعيد صياغة مفهوم عنصر فراغ الاندفاع الطوري بالشكل التالي:

$$d\Gamma(P_{x,y,z}) = dq_V \cdot dP_V = V dP_x dP_y dP_z \quad (2)$$

$$dP_x = m d\vartheta_x \quad \wp \quad dP_y = m d\vartheta_y \quad \wp \quad dP_z = m d\vartheta_z \quad \text{وبما أن}$$

بالتعويض في (2) بعد استبدال مركبات الاندفاع بمركبات السرعة

$$d\Gamma(\vartheta_{x,y,z}) = dq_V \cdot dP_V = V m^3 d\vartheta_x d\vartheta_y d\vartheta_z$$

وبالعودة إلى العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري التي تصبح بالشكل التالي:

$$g(\vartheta_{x,y,z}) d\vartheta_{x,y,z} = C d\Gamma(\vartheta_{x,y,z}) = CV m^3 d\vartheta_x d\vartheta_y d\vartheta_z \quad (3) \quad (7)$$

وإذا اعتبرنا الطاقة الإجمالية طاقة حركية

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m g^2 = \frac{1}{2} m (g_x^2 + g_y^2 + g_z^2) \quad (4)$$

وإذا أخذنا تابع التحاص لجسيم واحد

$$Z = CV (2\pi m KT)^{3/2} \quad (5)$$

كما نأخذ مضروب لا غرارج بعين الاعتبار

$$\beta = -1/KT \quad (6)$$

نعوض (3) و (4) و (5) و (6) في (1) نحصل على عدد الجسيمات الموزعة تبعاً لمركبات سرعتها المطلقة بالشكل التالي:

$$dN(g_{x,y,z}) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-\frac{m}{2KT} (g_x^2 + g_y^2 + g_z^2)} CV m^3 dg_x dg_y dg_z$$

$$dN(g_{x,y,z}) = N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2KT} g_x^2} dg_x e^{-\frac{m}{2KT} g_y^2} dg_y e^{-\frac{m}{2KT} g_z^2} dg_z \quad (7)$$

لمعرفة عدد الجسيمات المتحركة باتجاه أحد المحاور (وليكن ox مثلاً) ندع مركبة سرعته دون تكامل. ونكامل مركبات السرعة على المحورين الآخرين oy و oz في المجال $[-\infty, +\infty]$ كما يلي:

$$dN(g_x) = N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2KT} g_x^2} dg_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2KT} g_y^2} dg_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2KT} g_z^2} dg_z$$

نحل التكاملات باستخدام تكاملات بواسون وذلك بفرض $\alpha = m/2KT$ على النحو التالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_y^0 e^{-\alpha g_y^2} dg_y = 2 \int_0^{+\infty} g_y^0 e^{-\alpha g_y^2} dg_y = 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_z^0 e^{-\alpha g_z^2} dg_z = 2 \int_0^{+\infty} g_z^0 e^{-\alpha g_z^2} dg_z = 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

بالتعويض عن $\alpha = m/2KT$ وعن التكاملات بقيمها نجد:

$$dN(g_x) = N \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha g_x^2} dg_x = N \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha g_x^2} dg_x$$

للحصول على تابع كثافة مركبة السرعة المطلقة ، نقسم الطرفين على N

$$dF(g_x) = \frac{dN(g_x)}{N} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha g_x^2} dg_x \quad (6)$$

وبملاحظة أن المقدار $G(g_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha g_x^2}$ يمثل تابع كثافة غوص الطبيعي،

وهو تابع كثافة احتمال. لأنه يحقق الشرط الواحدي.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(v_x) dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} 2 \int_0^{+\infty} v_x^0 e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} 2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$$

إيجاد قيم المقادير: $\overline{v_x^2}$ ، $\overline{g_x^2}$ ، $\overline{g_x}$

$$\overline{g_x} = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x G(g_x) dg_x = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_x^1 e^{-\alpha g_x^2} dg_x = 0$$

بما أن الأس فردي فنجد من تكاملات بواسون

تشير هذه النتيجة إلى أن عدد الجسيمات المتحركة وفق ox^+ يساوي العدد المتحرك وفق ox^-

$$\overline{g_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x^2 G(g_x) dg_x = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{+\infty} g_x^2 e^{-\alpha g_x^2} dg_x = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \underbrace{\int_0^{+\infty} g_x^2 e^{-\alpha g_x^2} dg_x}_{\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}} = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{KT}{m}$$

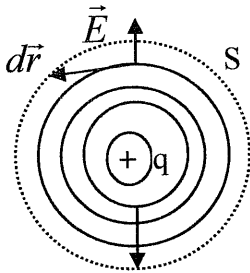
$$\Delta v_x^2 = v_x^2 - \bar{v}_x^2 = 1/2\alpha$$

3- أجب عن النقاط التالية

• برهان أن الحقل الكهربائي الساكن $\vec{E}$ تدرج لكمون كهربائي سلمي V .

$$\oint_C \vec{E} d\vec{r} = \iint_S (\text{rot} \vec{E})_n dS$$

بتطبيق دعوى ستوكس



نفرض C منحنى مغلق واقع في سطح تساوي كمون،

$$\vec{E} \perp d\vec{r} \Rightarrow \oint_C \vec{E} d\vec{r} = 0$$

فنجد بالاستفادة من الشكل:

فيكون ما تحت التكامل في الطرف الثاني معدوم أيضاً $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$ (دوار الحقل الكهربائي الساكن معدوم).

وبمطابقة الناتج مع العبارة $\text{rot} \text{grad} \phi = \vec{0}$ نجد: $\vec{E} = \text{grad} \phi$

أي أن الحقل $\vec{E}$ يساوي تدرج كمون سلمي ϕ . فإذا فرضنا $\phi = -V$ نجد: $\vec{E} = -\text{grad} V$

• برهان أن الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ دوار لكمون مغناطيسي متجه $\vec{A}$.

بما أن $\vec{B}$ حقل لفاف (يكون مماسياً للدوائر المتمركزة مع التيار I)

كما بالشكل. فنجد بتطبيق دعوى أوستراغر ادسكي - غوص:

وملاحظة أن $\vec{B}$ لا يتدفق عبر السطح الاسطواني الافتراضي S ،

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \iiint_\tau \text{div} \vec{B}_n d\tau = 0$$

نجد:

وهذا يشير إلى مبدأ انحفاظ التدفق المغناطيسي

أي: $\text{div} \vec{B}_n = 0$ وبمطابقة الناتج مع العبارة $\text{div} \text{rot} \vec{A} = 0$ نجد: $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$

يدعى $\vec{A}$ الكمون المغناطيسي، وهو مقدار متجه.

• استنتاج معادلتا بواسون ولاپلاس.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \iiint_\tau \text{div} \vec{E}_n d\tau$$

بتطبيق دعوى أوستراغر ادسكي - غوص،

نوجد تدفق $\vec{E}$ لشحنة نقطية q واقعة داخل سطح افتراضي غاوسي S بتطبيق نظرية غوص $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

فإذا افترضنا أن الشحنة النقطية q موزعة داخل الحجم المحدد بهذا السطح الافتراضي الغاوسي S بكثافة حجمية ρ ثابتة، نستطيع أن نعبر عن الطرف الأيسر من الدعوى بالشكل التالي:

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \iiint_\tau \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau = \iiint_\tau \text{div} \vec{E}_n d\tau$$

وبمطابقة ما داخل التكامل في الطرفين، نحصل على عبارة بواسون التي اعتمدها مكسويل كواحدة من المعادلات الأربعة التي تشرح النظرية الكهربائية.

$$\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

يمكن كتابة النتيجة بصيغة أخرى باستخدام $\vec{E} = -\text{grad} V$ بالشكل: $\text{div} \text{grad} V = -\rho / \epsilon_0$

$$\nabla^2 V = -\rho / \epsilon_0$$

وبما أن تفرق التدرج هو اللابلاسي نجد

وعند كثافة توزع حجمي معدومة للشحنة $\rho = 0$ ، نحصل على معادلة لابلاس التالية: $\nabla^2 V = 0$



مكتبة
A to Z



امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2020 - 2021

س1- أجب عن البندين التاليين: (45 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(F-D)_{\max}}$ لتوزيع فيرمي - ديراك، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$) موزعة على سويتين للطاقة

$\epsilon_1 = KT$ (J) و $\epsilon_2 = 2KT$ (J)، السويتين متحلتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:

1- أوجد عدد حالات التوزيع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\overline{N-1}, \overline{1})$ في الحالات التالية:

A- الجسيمات متميزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

3- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة Z والطاقي Z_Ω . ثم استنتج من ذلك

(حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمال، ومثلها.

س2- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (45 درجة).

1- اكتب تابع كثافة توزيع برنولي وعرف مضمونه، ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال،

ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية (بعد تسميتها) $\bar{n}$ و $\overline{n^2}$ و $\overline{\Delta n^2}$.

2- استنتج تابع كثافة الطاقة $f(\epsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان، ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال.

توجيه: استند في الحل من تكاملات غاما التالية $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ و $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n\Gamma(n)$

3- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها

$\begin{array}{c} \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \end{array}$	$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \end{array}$	$\begin{array}{c} D \\ \hline C \\ \hline A \end{array}$
$\begin{array}{c} \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \end{array}$	$\begin{array}{c} \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \end{array}$	$\begin{array}{c} \hline B \end{array}$

ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الخميس 2021 / 2 / 18

د. محمد إبراهيم

مدرس المقرر



امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2020 - 2021

س1- أجب عن البندين التاليين: (45 درجة).
1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(F-D)}$ لتوزيع فيرمي - ديراك، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- مسألة: جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$) موزعة على سويتين للطاقة $\epsilon_1 = KT$ (J) و $\epsilon_2 = 2KT$ (J)، السويتين متحلتين بالشكل $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$. والمطلوب:
1- أوجد عدد حالات التوزيع الماكروية (العدد فقط بدلالة N).

2- أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\bar{N}, \bar{\epsilon})$ في الحالات التالية:
A- الجسيمات متميزة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.
3- نفرض الجسيمات كلاسيكية و $N = 2$. أوجد تابعي تحاص الجملة Z والطاخم Z_Ω . ثم استنتج من ذلك (حصراً) الأوزان الإحصائية لحالات التوزيع الماكروية المختلفة، والحالة الأكثر احتمال، ومثلها.

س2- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (45 درجة).
1- اكتب تابع كثافة توزيع برنولي و عرف مضمونه، ثم برهن أنه تابع كثافة احتمال، ثم استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية (بعد تسميتها) $\bar{n}$ و $\bar{n}^2$ و Δn^2 .
2- استنتج تابع كثافة الطاقة $f(\epsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان، ثم تحقق أنه تابع كثافة احتمال. **توجيه:** استفد في الحل من تكاملات غاما التالية $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ و $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n\Gamma(n)$

3- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها
ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

D		
C		
A B		

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرابلس: الخميس 2021 / 2 / 18

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
دورة الفصل الأول للعام الدراسي 2020 - 2021 (تسعون درجة)

ج1: (45 درجة)

1- استنتاج رقم الانشغال لتوزيع $N_{(F-D)}$ max

18

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (F-D). المعطاة بالعلاقة:

$$W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!}$$

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التحلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i . أي $g_i \gg N_i$.
نوجد بدايةً $\ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{F-D}) \approx \ln \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} = \sum_i [\ln g_i! - \ln N_i! - \ln (g_i - N_i)!]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنج $\ln x! \approx x \ln x$ نجد:

$$\ln(W_{F-D}) \approx \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i)] \quad (6)$$

بما أن W_{F-D} تابع لكل من g_i و N_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{F-D}) = \frac{\partial \ln(W_{F-D})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i)] dN_i$$

$$\approx \sum_i \left[-\ln N_i - 1 + \frac{g_i}{g_i - N_i} + \ln (g_i - N_i) - \frac{N_i}{g_i - N_i} \right] dN_i = \sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} - 1 + \frac{g_i - N_i}{g_i - N_i} \right) dN_i$$

$$d \ln(W_{F-D}) \approx \sum_i \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} dN_i$$

$$U = \sum_i \epsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \epsilon_i dN_i$$

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0$$

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} + \alpha + \beta \epsilon_i \right) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \epsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i - N_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)}$$

$$\Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} + 1 \Rightarrow \boxed{N_{i(F-D)} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} + 1}} \quad (6)$$

2- المسألة:

$$N_o = \frac{(N + N_\epsilon - 1)!}{N! (N_\epsilon - 1)!} = \frac{(N + 2 - 1)!}{N! (2 - 1)!} = \frac{(N + 1)!}{N! 1!} = \frac{(N + 1) N!}{N! 1!} = N + 1$$

1- عدد حالات التوزيع الماكروي: (4)

2- A - الجسيمات متميزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = N! \left(\frac{1^{N-1}}{(N-1)!} \frac{2^1}{1!} \right) = 2N \quad (4)$$

B - الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^M \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = \frac{(N - 1 + 1 - 1)! (1 + 2 - 1)!}{(N - 1)! (1 - 1)! 1! (2 - 1)!} = 2 \quad (4)$$

C - الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (N-1,1) لا تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي غير مقبولة (3)

3- بفرض أن الجسيمات كلاسيكية و $N=2$. نوجد تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = 1e^{-1} + 2e^{-2}$$

تحاص الطاقم $Z_{\Omega} = Z^N = (1e^{-1} + 2e^{-2})^2 = 1e^{-2} + 4e^{-4} + 4e^{-3}$ (*)

لاستنتاج الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة

نلاحظ وجود 3 حالات ماكروية بطاقات موافقة $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$ كما يلي $(\bar{2}, 0)$ $(0, \bar{2})$ $(\bar{1}, \bar{1})$ $U=2KT$ $U=4KT$ $U=3KT$

نوجد تحاص الطاقم بطريقة ثانية من العبارة.

$$Z_{\Omega} = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)} e^{\beta U_{(2,0)}} + W_{(0,2)} e^{\beta U_{(0,2)}} + W_{(1,1)} e^{\beta U_{(1,1)}}$$

نعوض عن طاقة كل من الحالات الماكروية بقيمتها، واعتبار أن $\beta = -1/KT$ ، نجد:

$$Z_{\Omega} = \sum_i W_i e^{\beta U_i} = W_{(2,0)} e^{-2} + W_{(0,2)} e^{-4} + W_{(1,1)} e^{-3}$$

نطابق العبارة الحاصلة مع (*) فنجد قيم الأوزان الإحصائية لحالات التوزع الماكروية المختلفة.

$$W_{(1,1)} = 4 \text{ و } W_{(0,2)} = 4 \text{ و } W_{(2,0)} = 1$$

توجد حالتان لهما الوزن الإحصائي نفسه $W_{(1,1)} = 4$ و $W_{(0,2)} = 4$

فتكون الحالة الأكثر احتمال هي الحالة الماكروية $(1,1)$ لأن طاقتها هي الأقل $U_{(1,1)} = 3KT$.

- تمثيل الحالة الماكروية الأكثر احتمال $(1,1)$

$$\begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline A \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline A \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline B \\ \hline \end{array}$$

ج 2: (45 درجة)

1- يُعطى تابع كثافة توزع برنولي بالعلاقة:

$$\omega(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} ; n \leq N$$

حيث $p \leq 1$ احتمال ظهور الحادثة n مرة من أصل N مرة. و $q \leq 1$ لأن $q = 1 - p$ يمثل احتمال عدم ظهور الحادثة $(N - n)$ مرة من أصل N مرة.

وهو تابع كثافة احتمال لأنه يحقق الشرط الواحدي (باعتباره يمثل صيغة منشور ثنائي الحد - نيوتن) كما يلي:

$$\sum_{n=0}^N \omega(n) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = (p+q)^N = (p+1-p)^N = 1$$

• إيجاد $\bar{n}$: (القيمة الوسطى للمتحول)

نشق تابع التوزع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين بـ p فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^N n \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} \Rightarrow Np(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^N n \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = \bar{n} \Rightarrow \boxed{\bar{n} = Np}$$

• إيجاد $\bar{n}^2$: وسطى القيمة التربيعية للمتحول (الانحراف المعياري)

نشق تابع التوزع $(p+q)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ مرتين بالنسبة لـ p ونضرب الطرفين كل مرة بـ p فنجد:

لذا نشق قيمة $\bar{n}$ مرة ثانية فنجد:

$$N(p+q)^{N-1} + N(N-1)p(p+q)^{N-2} = \sum_{n=0}^N n^2 \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n} \Rightarrow Np + N(N-1)p^2 = \sum_{n=0}^N n^2 \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = \overline{n^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{n^2} = Np + N^2 p^2 - Np^2} \quad (4)$$

• إيجاد $\Delta \overline{n^2}$: (التشتت) نعوض في العبارة

$$\boxed{\Delta \overline{n^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = Np + N^2 p^2 - Np^2 - N^2 p^2 = Np(1-p) = Npq = \bar{n} q}$$

2- لإيجاد تابع كثافة الطاقة $f(\epsilon)$ في إحصاء مكسويل - بولتزمان: نكتب العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقتها، في المجال الطاقى $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$. انطلاقاً من عبارة رقم

$$dN(\epsilon) = \frac{N}{Z} e^{\beta \epsilon} g(\epsilon) d\epsilon \quad \text{انشغال مكسويل} \quad N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta \epsilon_i} \quad \text{وباعتبار } e^{\alpha} = \frac{N}{Z} \text{ فنجد}$$

نعوض عن المقدار $g(\epsilon) d\epsilon$ بقيمة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

$$g(\epsilon) d\epsilon = C d\Gamma(\epsilon) = CV 2\pi (2m)^{3/2} (\epsilon)^{1/2} d\epsilon$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته

$$Z = CV (2\pi m KT)^{3/2} \quad \text{، واعتبار أن } \beta = -1/KT \text{ نجد:}$$

$$dN(\epsilon) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-\epsilon/KT} CV 2\pi (2m)^{3/2} (\epsilon)^{1/2} d\epsilon$$

بالاختزال والاصلاح.

$$dN(\epsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\epsilon/KT} (\epsilon)^{1/2} d\epsilon$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع الطاقة بدلالة تابع كثافة الطاقة كما يلي:

$$dF(\epsilon) = \frac{dN(\epsilon)}{N} = \frac{2\epsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\epsilon/KT} d\epsilon = f(\epsilon) d\epsilon \quad (1)$$

حيث يعبر $f(\epsilon)$ عن تابع كثافة الطاقة

$$\boxed{f(\epsilon) = \frac{2\epsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\epsilon/KT}}$$

للبرهان على أن $f(\epsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تكامله يحقق الشرط الواحدي بإجراء التكامل على الطاقة في المجال $[0 \rightarrow \infty]$.

$$F(\epsilon) = \int_0^{\infty} f(\epsilon) d\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/KT} d\epsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x = \epsilon/KT$ فنجد:

$$\epsilon = KT x \Rightarrow d\epsilon = KT dx \quad \epsilon^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل واستخدام تكاملات غاما نجد المطلوب

$$\int_0^{\infty} f(\epsilon) d\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} (KT)^{1/2} KT \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} (KT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

-3
19

① $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{1}, \overset{\varepsilon_3}{1})$ الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(2, 1, 1)$ الوزن الإحصائي $W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1,1)} = 4! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^1}{1!} \frac{1^1}{1!} \right) = 96$

D
C
A B

① $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{1})$ الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(2, 2, 1)$

الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات) $W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+1-1)!}{1!0!} = 3 \times 3 \times 1 = 9$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات) $W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{1!}{1!(1-1)!} = 1 \times 1 \times 1 = 1$

① $(\overset{\varepsilon_1}{2}, \overset{\varepsilon_2}{2}, \overset{\varepsilon_3}{2})$ الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(2, 2, 2)$ الوزن الإحصائي

$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+1-1)!}{2!0!} = 3 \times 3 \times 1 = 9$

A to Z



امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الثاني للعام الدراسي 2019 - 2020

س ١- أجب عن البندين التاليين: (45 درجة).

١- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(M-B)}^{\max}$ لتوزيع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

٢- مسألة: جملة مكونة من 3 جسيمات متميزة موزعة على سويتين للطاقة $\epsilon_1 = kT$ و $\epsilon_2 = 2kT$ ،

متحلتين بالشكل: $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزيع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تحاصي الجملة والطاقي (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.
- تحقق من صحة نتائجك بحساب طاقي الجملة

- أوجد (مع تمثيل كافة الحالات الميكروية) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية (ϵ_1, ϵ_2) في الحالات التالية:
١- الجسيمات متميزة A و B و C. ٢- الجسيمات بوزونات. ٣- الجسيمات فيرميونات.

س ٢- أجب عن البنود الثلاثة التالية: (45 درجة).

١- استنتج من بواسون (باستخدام التقريبات المناسبة) تابع كثافة غوص الطبيعي.

٢- استنتج علاقة كثافة الطاقة الطيفية $\rho(\epsilon)$ لماكس بلانك في تفسير إشعاع الجسم الأسود (الغاز الفوتوني)، ثم ضع العبارة الحاصلة بدلالة التردد والطول الموجي، ثم مثل بيانياً $\rho(\lambda)$ عند ثلاث درجات حرارة مختلفة، ماذا تستنتج؟

٣- أعد رسم الجمل التالية، ثم حدد نوع الجسيمات (كلاسيكية، بوزونات، فيرميونات) الموزعة على السويات فيها

$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$	$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$	$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$
$\begin{array}{c} \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$	$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$	$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$
$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$	$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$	$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$

ثم حدد حالتها الماكروية الأم، واحسب وزنها الإحصائي.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الأحد 2020 / 9 / 6

د. محمد إبراهيم

مدرس المقرر

سلم تصحيح امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - السنة الثانية رياضيات
الفصل الثاني للعام الدراسي 2019 - 2020 (تسعون درجة)

ج 1: (45 درجة)

1- استنتاج رقم الانشغال لتوزع $N_{i(M-B)}$ max

20

ننتقل من عبارة الوزن الإحصائي لتوزع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $\sum_i W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i}{N_i!}$

نوجد بدايةً $\ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$\sum_i d \ln(W_{M-B}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i \ln(W_{M-B}) = \ln N! + \sum_i [N_i \ln g_i - \ln N_i!]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنغ $\ln x! \approx x \ln x - x$ نجد:

$$\sum_i \ln(W_{M-B}) \approx N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i) \quad (10)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{M-B}) = \frac{\partial \ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \left[N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i) \right] dN_i \quad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (\ln g_i - \ln N_i - 1 + 1) dN_i = \sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i \quad (6)$$

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \epsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \epsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \epsilon_i dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i (\ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \epsilon_i) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \epsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)}$$

$$N_{i(M-B)} = g_i e^{\alpha + \beta \epsilon_i} \Leftrightarrow N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta \epsilon_i} \quad (5)$$

2- المسألة:

$$N_0 = \frac{(N + N_e - 1)!}{N!(N_e - 1)!} = \frac{(3 + 2 - 1)!}{3!(2 - 1)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

• حالات التوزع الماكروي:

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i \epsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزع الماكروي الأربعة.

$$\left\{ \begin{array}{l} (3, 0) \\ (0, 3) \\ (2, 1) \\ (1, 2) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} U=3kT \\ U=6kT \\ U=4kT \\ U=5kT \end{array}$$

• نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{e^{\alpha} g_i e^{\beta \epsilon_i}}{e^{\alpha} g_j e^{\beta \epsilon_j}} = \frac{g_i e^{-\epsilon_i/KT}}{g_j e^{-\epsilon_j/KT}} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{1 e^{-\frac{KT}{KT}}}{2 e^{-\frac{2KT}{KT}}} = \frac{1}{2e^{-1}} = \frac{e}{2} > 1 \Rightarrow N_1 > N_2 \quad (2)$$

والتوزع طبيعي

$$Z = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/KT} = e^{-1} + 2e^{-2}$$

• تحاص الجملة:

1. $Z_{\Omega} = Z^N = (e^{-1} + 2e^{-2})^3 = e^{-3} + 6e^{-4} + 12e^{-5} + 8e^{-6}$ تحاص الطاقم:

1. $Z_{\Omega} = \sum_i W_i e^{-U_i/kT} = W_{(3,0)} e^{-3} + W_{(2,1)} e^{-4} + W_{(1,2)} e^{-5} + W_{(0,3)} e^{-6}$ نقارنه بالعباره:

فنتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزيع الماكروي بالشكل:

1. $W_{(3,0)} = 1$ و $W_{(2,1)} = 6$ و $W_{(1,2)} = 12$ و $W_{(0,3)} = 8$

الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة (1,2) 1. $\Omega = (\sum_i g_i)^N = 3^3 = 27$ للتحقق من صحة النتائج نحسب طاقم الجملة من العلاقة

2. $\Omega = \sum_i W_i = 1 + 6 + 12 + 8 = 27$ وهذا يتطابق مع الحسابات

1. الجسيمات متمايضة (كلاسيكية) $W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,2)} = 3! \left(\frac{1^1}{1!} \frac{2^2}{2!} \right) = 12$

$\frac{BC }{A}$	$\frac{ BC}{A}$	$\frac{B C}{A}$	$\frac{C B}{A}$
$\frac{AC }{B}$	$\frac{ AC}{B}$	$\frac{A C}{B}$	$\frac{C A}{B}$
$\frac{AB }{C}$	$\frac{ AB}{C}$	$\frac{A B}{C}$	$\frac{B A}{C}$

3

2. الجسيمات بوزونات $W_{B-E} = \prod_{i=1}^2 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{(1+1-1)!}{1! (1-1)!} \frac{(2+2-1)!}{2! (2-1)!} = 3$

$\frac{\bullet\bullet }{\bullet}$	$\frac{ \bullet\bullet}{\bullet}$	$\frac{\bullet \bullet}{\bullet}$
-----------------------------------	------------------------------------	------------------------------------

3

3. الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (1,2) تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزيع مقبولة

$W_{F-D} = \prod_{i=1}^2 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{1!}{1! (1-1)!} \frac{2!}{2! (2-2)!} = 1$

$\frac{\bullet \bullet}{\bullet}$

ج 2: (45 درجة)

1. لإيجاد تابع كثافة توزيع غوص الطبيعي ننشر لغارتم تابع كثافة توزيع بواسون باستخدام منشور تايلور بجوار القيمة الوسطى $\bar{x} = a$. ونكتفي بالحدود الثلاثة الأولى من المنشور فقط.

2. $Ln \omega(x) = Ln \omega(x)|_{x=a} + \frac{(x-a) d Ln \omega(x)}{1! dx}|_{x=a} + \frac{(x-a)^2 d^2 Ln \omega(x)}{2! dx^2}|_{x=a} + \dots$ (a)

نوجد قيمة $Ln \omega(x)$ ومشتقاته، ثم نعوض في حدود المنشور

3. $\omega(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a} \Rightarrow Ln \omega(x) = x Ln a - a - Ln x!$

وباستخدام تقريب ستيرلنغ $Ln x! \approx x Ln x - x$

1. $Ln \omega(x) \approx x Ln a - a - x Ln x + x$

2. $\frac{d Ln \omega(x)}{dx}|_{x=a} = \frac{d}{dx} [x Ln a - a - x Ln x + x]|_{x=a} = [Ln a - Ln x - 1 + 1]|_{x=a} = 0$

3. $\frac{d^2 Ln \omega(x)}{dx^2}|_{x=a} = \frac{d}{dx} [Ln a - Ln x]|_{x=a} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=a} = -\frac{1}{a}$

بتعويض كل بقيمته في (a) نجد:

$$\ln \omega(x) \approx \ln \omega(a) + 0 + \frac{(x-a)^2}{2!} \left(-\frac{1}{a}\right) \Rightarrow \ln \frac{\omega(x)}{\omega(a)} \approx -\frac{\Delta X^2}{2a} ; \Delta X^2 = (x-a)^2$$

$$\Rightarrow \omega(x) \approx \omega(a) e^{-\frac{\Delta X^2}{2a}} \quad (2)$$

وهذا يطابق تابع كثافة توزيع غوص الطبيعي المعطى بالصيغة $f(x) = A e^{-\alpha x^2} ; -\infty < x < +\infty$

٢- الفوتونات هي جسيمات الطاقة الكهربائية (الإشعاع الكهرومغناطيسي)، وهي تنتمي لطائفة البوزونات، وعددها داخل تجويف الجسم الأسود غير ثابت وذلك بسبب ظاهرتي الخلق Creation والإفناء Annihilation. أي:

$$N = \sum_i N_i \neq \text{cte} \Rightarrow dN \neq 0$$

ف نجد من شرط الحالة الأكثر احتمالاً: $d \ln(W_{B-E}) + \alpha dN + \beta dU = 0$ أن $\alpha = 0$. وبالتالي يكون: $e^{-\alpha} = 1$. ويصبح عدد الفوتونات التي تملك طاقة في المجال $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ وفقاً لتوزيع بوز-أينشتاين:

$$dN_{(B-E)} = \frac{dg(\varepsilon)}{e^{-\alpha} e^{\varepsilon/kT} - 1} = \frac{dg(\varepsilon)}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \quad (a) \quad (3)$$

نكتب درجة التحلل $dg(\varepsilon)$ للسويات الواقعة في المجال $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ بدلالة عنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma$ من العبارة

$$dg(\varepsilon) = c d\Gamma(\varepsilon) ; c = 1/h^3 \quad \text{و} \quad d\Gamma(\varepsilon) = dq_v dp_v = V d\left(\frac{4}{3}\pi p^3\right) = V 4\pi p^2 dp$$

$$dg(\varepsilon) = \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3} \quad (*)$$

وبما أن الفوتونات أشعة كهربائية فهي تملك اتجاهين مستقلين للاستقطاب، ويحصل تضاعف لقيمة درجة التحلل. وحيث أن طاقة الفوتون ε مرتبطة بزخمه p بواسطة سرعة الضوء c وفق العلاقة:

$$\varepsilon = c p \Rightarrow p = \frac{\varepsilon}{c} \Rightarrow dp = \frac{d\varepsilon}{c} \quad (3)$$

ف نجد بالتعويض في (*):

$$dg(\varepsilon) = 2 \frac{V 4\pi \varepsilon^2 d\varepsilon}{h^3 c^3} \quad (**)$$

نعوض (**) في (a) فنجد:

$$dN_{(B-E)} = \frac{V 8\pi \varepsilon^2}{h^3 c^3} \frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \quad (b)$$

وبما أن طاقة الجملة في الحالة المستمرة

$$U = \int \varepsilon dN \Rightarrow dU = \varepsilon dN_{(B-E)} \quad (c)$$

نعوض (b) في (c) فنجد:

$$dU = \frac{V 8\pi \varepsilon^3}{h^3 c^3} \frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$

نحصل على كثافة الطاقة في وحدة الحجم ($V=1$) بالشكل:

$$du = \frac{dU}{V} = \frac{8\pi \varepsilon^3}{h^3 c^3} \frac{d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} = \rho(\varepsilon) d\varepsilon \quad (d) \quad (3)$$

يمثل $\rho(\varepsilon)$ كثافة طيف طاقة الإشعاع الصادر عن الجسم الأسود وفقاً لتفسير ماكس بلانك. (علاقة ماكس بلانك في الإشعاع)

$$\rho(\varepsilon) = \frac{8\pi \varepsilon^3}{h^3 c^3} \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \quad (E) \quad (2)$$

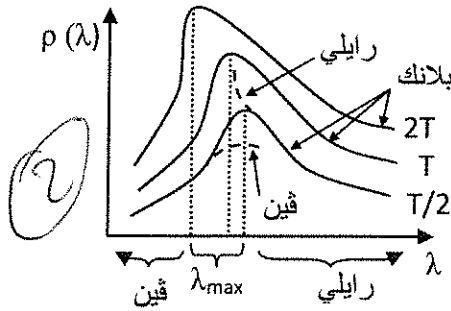
- نكتب عبارة الكثافة $\rho(\varepsilon)$ بدلالة التردد ν ، باستخدام علاقة ماكس بلانك: $\varepsilon = h\nu \Rightarrow d\varepsilon = h d\nu$

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (F) \quad (2)$$

- نكتب عبارة الكثافة $\rho(\nu)$ بدلالة طول الموجة λ ، باستخدام العلاقة: $|d\nu| = (c/\lambda^2)d\lambda$ $\Rightarrow \nu = c/\lambda$

$$\rho(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (2) \quad (G)$$

• نمثل بيانياً عبارة بلانك (G) لكثافة الطاقة الطيفية لإشعاع الجسم الأسود بدلالة طول الموجة λ كما هو موضح بالشكل.



ونستنتج مايلي:

١- لا تتعلق كثافة الإشعاع بكتلة الجسم m .

٢- يتحقق قانون فين في الإزاحة

$$\lambda_{\max} T = cte = 2,897 \times 10^{-3} \text{ mk}^0$$

٣- تتزاح القيمة العظمى للأطوال الموجية بارتفاع درجات الحرارة نحو الأطوال الموجية القصيرة (الطاقات العالية).

14

الجملة كلاسيكية، والحالة الأم هي $(\hat{1}, \hat{2}, \hat{0})$ (2)

$$(2) \quad W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^3 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,2,0)} = 3! \left(\frac{2^1}{1!} \frac{2^2}{2!} \frac{1^0}{0!} \right) = 24$$

الجملة بوزونات أو فيرميونات والحالة الأم هي $(\hat{2}, \hat{2}, \hat{1})$ (2)
الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(1+1-1)!}{1!(1-1)!} = 3 \times 3 \times 1 = 9$$

الوزن الإحصائي (بحالة فيرميونات)

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^3 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,2,1)} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{1!}{1!(1-1)!} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

الجملة بوزونات حصراً والحالة الأم هي $(\hat{2}, \hat{0}, \hat{2})$ (2)
الوزن الإحصائي (بحالة بوزونات)

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^3 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,0,2)} = \frac{(2+2-1)!}{2!1!} \frac{(0+2-1)!}{0!1!} \frac{(2+1-1)!}{2!0!} = 3 \times 1 \times 1 = 3$$

السؤال الأول: أجب عن البنود التالية: (45 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(F-D)_{\max}}$ لتوزيع فيرمي - ديراك، في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروبي لاغرانج).

2- استنتج عبارة تابع كثافة الطاقة التالية $f(\varepsilon) = \frac{2 \varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT}$ ، علماً أن قيمة تابع التحاص Z

$Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$ ، والعلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري هي

$$g(\varepsilon) d\varepsilon = CV 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

ثم أجب عن النقاط التالية، علماً أن: $\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n\Gamma(n)$ و $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

1- برهن أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. 2- برهن باستخدام طريقة الوسطي الإحصائية أن $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} KT$.

3- أوجد قيمة تشتت الطاقة الحركية $\overline{\Delta \varepsilon^2}$. 4- أوجد عبارة القيمة الوسطى للطاقة $\overline{\varepsilon^n}$ (من المرتبة n).

السؤال الثاني: أجب عن البندين التاليين: (45 درجة).

1- جملة مكونة من 3 جسيمات متميزة موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = kT$ و $\varepsilon_2 = 2kT$ ، متحللتين بالشكل:

$$g_1 = 2 \text{ و } g_2 = 1 \text{ والمطلوب:}$$

- أوجد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد تحاصي الجملة والطاقت (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.

- أوجد (مع التمثيل) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ في الحالات التالية:

1- الجسيمات متميزة A و B و C. 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

2- برهن أن سعة مكثفة اسطوانية (مكونة من سطحين اسطوانيين S متحدي المركز، تفصل بينهما مسافة ثابتة d).

تعطى بالعلاقة $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ ، (الرسم ضروري).

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس 2018 / 9 / 4

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - لطلاب السنة الثانية رياضيات
الدورة التكميلية للعام الدراسي 2017 - 2018 (الدرجة العظمى: تسعون)

أجوبة بنود السؤال الأول: (45 درجة)

1/20

نتطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (F-D). المعطاة بالعلاقة:

$$W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!}$$

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التحلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i . أي $g_i \gg N_i$.
نوجد بدايةً $\ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{F-D}) \approx \ln \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} = \sum_i [\ln g_i! - \ln N_i! - \ln (g_i - N_i)!]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنج $\ln x! \approx x \ln x$ نجد:

$$\ln(W_{F-D}) \approx \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i)]$$

بما أن W_{F-D} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{F-D}) = \frac{\partial \ln(W_{F-D})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i)] dN_i$$

$$\approx \sum_i \left[-\ln N_i - 1 + \frac{g_i}{g_i - N_i} + \ln (g_i - N_i) - \frac{N_i}{g_i - N_i} \right] dN_i = \sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} - 1 + \frac{g_i - N_i}{g_i - N_i} \right) dN_i$$

$$d \ln(W_{F-D}) \approx \sum_i \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} dN_i$$

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i$$

و

$$N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0$$

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i \right) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i - N_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} + 1 \Rightarrow \boxed{N_{i(F-D)}^{\max} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} + 1}}$$

16

2: نكتب العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقتها، في المجال الطاقى $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$.

$$dN(\varepsilon) = \frac{N}{Z} e^{\beta \varepsilon} g(\varepsilon) d\varepsilon$$

25

نعوض عن المقدار $g(\varepsilon) d\varepsilon$ بقيمة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

$$g(\varepsilon) d\varepsilon = C d\Gamma(\varepsilon) = CV 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

وعن تابع التحاص Z بقيمته $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(\varepsilon) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT} CV 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

بالاختزال والإصلاح.

$$dN(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزيع الطاقة بدلالة تابع كثافة الطاقة كما يلي:

$$dF(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{N} = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon = f(\varepsilon) d\varepsilon$$

يعبر $f(\varepsilon)$ عن تابع كثافة الطاقة

$$f(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT}$$

(5)

1- للبرهان على أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تابع الكثافة يحقق الشرط الواحدي. وذلك بإجراء التكامل على الطاقة في المجال $[0 \rightarrow \infty]$.

$$\int_0^{\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x = \varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT x \Rightarrow d\varepsilon = KT dx \quad \text{و} \quad \varepsilon^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل:

$$\int_0^{\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} (KT)^{1/2} KT \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} (KT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

(5)

2- نحسب الطاقة الوسطى $\bar{\varepsilon}$ بطريقة الوسطي الإحصائية بالشكل التالي

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^{\infty} \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نوجد قيمة التكامل من تابع غاما

نفرض $x = \varepsilon/KT \Rightarrow \varepsilon = KT x \Rightarrow \varepsilon^{3/2} = (KT)^{3/2} x^{3/2}$ فتكون $d\varepsilon = KT dx$ وبالتعويض:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon = (KT)^{3/2} KT \int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-x} dx = (KT)^{5/2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = (KT)^{5/2} \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

بالتعويض نجد المطلوب

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} (KT)^{5/2} \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3}{2} KT$$

(5)

3- نوجد تشتت الطاقة الحركية من العلاقة $\Delta\varepsilon^2 = (\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2$

نوجد أولاً وسطى القيمة التربيعية للطاقة $\overline{\varepsilon^2}$ بطريقة الوسطي. علماً أن مربع القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}^2 = \frac{9}{4} (KT)^2$

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_0^{\infty} \varepsilon^2 f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{5/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نوجد قيمة التكامل بفرض $x = \varepsilon/KT \Rightarrow \varepsilon = KT x \Rightarrow d\varepsilon = KT dx$ و $\varepsilon^{5/2} = (KT)^{5/2} x^{5/2}$

وبالتعويض

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} (KT)^{5/2} KT \int_0^{\infty} x^{5/2} e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (KT)^2 \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (KT)^2 \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{15}{4} (KT)^2$$

بالتعويض في عبارة تشتت الطاقة نجد

$$\overline{\Delta \epsilon^2} = \overline{\epsilon^2} - \bar{\epsilon}^2 = \frac{15}{4}(KT)^2 - \frac{9}{4}(KT)^2 = \frac{3}{2}(KT)^2$$

4- نوجد وسطي الطاقة $\bar{\epsilon}^n$ (من الرتبة n) بالطريقة الإحصائية.

$$\bar{\epsilon}^n = \int_0^\infty \epsilon^n f(\epsilon) d\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^\infty \epsilon^n \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/KT} d\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^\infty \epsilon^{n+1/2} e^{-\epsilon/KT} d\epsilon$$

نوجد قيمة التكامل بفرض $\epsilon^{n+1/2} = (KT)^{n+1/2} x^{n+1/2}$ وبالتعويض $x = \epsilon/KT \Rightarrow \epsilon = KT x \Rightarrow d\epsilon = KT dx$

$$\bar{\epsilon}^n = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} (KT)^{n+1/2} KT \int_0^\infty x^{n+1/2} e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (KT)^n \Gamma(n + \frac{3}{2})$$

أجوبة بنود السؤال الثاني: (45 درجة).

1/25

$$N_o = \frac{(N + N_\epsilon - 1)!}{N!(N_\epsilon - 1)!} = \frac{(3 + 2 - 1)!}{3!(2 - 1)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

• حالات التوزع الماكروي:

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i \epsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزع الماكروي الأربعة.

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي:

$$\left\{ \begin{array}{c} (3, 0) \\ U=3kT \end{array} , \begin{array}{c} (0, 3) \\ U=6kT \end{array} , \begin{array}{c} (2, 1) \\ U=4kT \end{array} , \begin{array}{c} (1, 2) \\ U=5kT \end{array} \right\}$$

• تحاص الجملة: $Z = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/KT} = 2e^{-1} + e^{-2}$

تحاص الطاقم: $Z_\Omega = Z^N = (2e^{-1} + e^{-2})^3 = 8e^{-3} + 12e^{-4} + 6e^{-5} + e^{-6}$

نقارنه بالعبارة: $Z_\Omega = \sum_i W_i e^{-U_i/KT} = W_{(3,0)} e^{-3} + W_{(2,1)} e^{-4} + W_{(1,2)} e^{-5} + W_{(0,3)} e^{-6}$

فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزع الماكروي بالشكل:

$$W_{(0,3)} = 1 \quad \text{و} \quad W_{(1,2)} = 6 \quad \text{و} \quad W_{(2,1)} = 12 \quad \text{و} \quad W_{(3,0)} = 8$$

الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة (2,1)

• 1- الجسيمات متمايضة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1)} = 3! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{1^1}{1!} \right) = 12$$

A	A	A	A
BC	BC	B C	C B
B	B	B	B
AC	AC	A C	C A
C	C	C	C
AB	AB	A B	B A

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^2 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,1)} = \frac{(2+2-1)! (1+1-1)!}{2! (2-1)! 1! (1-1)!} = 3$$

2- الجسيمات بوزونات

•	•	•
••	••	• •

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (2,1) تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^2 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,1)} = \frac{2!}{2! (2-2)!} \frac{1!}{1! (1-1)!} = 1$$

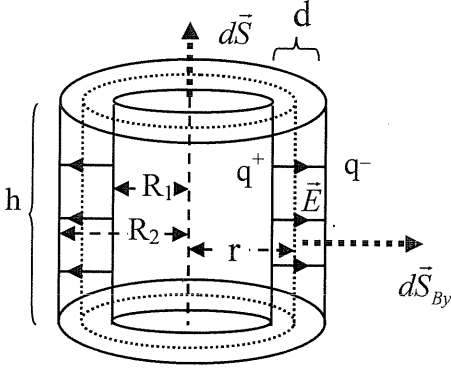
$$\frac{\cdot}{\cdot} \cdot$$

5

2: (حساب سعة المكثفة الاسطوانية)

نأخذ سطح افتراضي غاوسي على شكل اسطوانة متحدة المحور مع اللبوسين الاسطوانيين نصف قطرها r حيث $R_1 < r < R_2$ وارتفاعها h ثابت وتحيط باللبوس الموجب q^+ كما في الشكل:

أولاً: نحسب شدة الحقل بتطبيق غوص، أي نوجد تدفق الحقل $\vec{E}$ عبر السطح الغاوسي الافتراضي المغلق S ، علماً أن $E = cte$ فيكون تدفق الحقل $\vec{E}$ عبر سطح الاسطوانة المغلق عبارة عن مجموع تدفقين عبر سطحين مفتوحين، هما سطح القاعدة S ، والسطح الجانبي S_{By} .



$$\phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}}_{\vec{E} \perp d\vec{S}} + \iint_{S_{By}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{By} = \iint_{S_{By}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{By} = \iint_S E dS_{By} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

وبما أن $E = cte$ (يمكن إخراجها خارج التكامل) ومساحة السطح الافتراضي الجانبي $S_{By} = 2\pi r h$ ، نجد:

$$E \iint_S dS = E (2\pi r h) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi r h \epsilon_0}$$

ثانياً: نطبق العبارة (جولان الحقل بين الشحنتين يساوي فرق الكمون بينهما) مع الأخذ بعين الاعتبار أن

$$\ln(1 \pm \frac{d}{R}) = \ln(1 \pm \delta) \approx \pm \delta ; \delta = \frac{d}{R} \ll 1$$

حيث اعتبرنا R متوسط نصف قطر الاسطوانتين

$$\int_{q^+}^{q^-} E dr = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln \frac{R_1 + d}{R_1} = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln(1 + \frac{d}{R_1}) \approx \frac{q}{2\pi \epsilon_0 h} \frac{d}{R} = V$$

ثالثاً: نحسب السعة بتطبيق العلاقة: (بعد اعتبار أن $k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$ و $S_{By} = 2\pi r h$) نجد المطلوب

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi \epsilon_0 h} \frac{d}{R}} = \epsilon_0 \frac{2\pi R h}{d} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: تسعون
مدة الامتحان: ساعتان

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
لطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الثاني للعام الدراسي 2017 - 2018

س1: أجب عن البندين التاليين: (45 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(B-E)}^{\max}$ لتوزع بوز - آينشتين $(B-E)$ ، في الحالة الأكثر احتمال.

2- استنتج عبارة تابع كثافة الطاقة التالية $f(\varepsilon) = \frac{2 \varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi} (KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT}$ ، علماً أن قيمة تابع التحاص Z
 $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$ ، والعلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري هي
 $g(\varepsilon) d\varepsilon = CV 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$

ثم أجب عن النقاط التالية، علماً أن: $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n\Gamma(n)$ و $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

1- برهن أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال.
2- برهن باستخدام طريقة الوسطى الإحصائية أن $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} KT$.

3- أوجد قيمة تشتت الطاقة الحركية $\Delta \varepsilon^2$.
4- أوجد عبارة القيمة الوسطى للطاقة ε^n (من المرتبة n).

س2: أجب عن البندين التاليين: (45 درجة).

1- جملة مكونة من N جسيم موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = 0$ و $\varepsilon_2 = KT$.

السويتان متحلتين بالشكل: $g_1 = N$ و $g_2 = 1$. والمطلوب:

أولاً: أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي (العدد فقط بدلالة N).

ثانياً: أوجد طاقة الحالة الماكروية $(1, N-1)$ ، ثم أوجد وزنها الإحصائي في الحالات التالية:

A- الجسيمات متمايضة (كلاسيكية). B- الجسيمات بوزونات. C- الجسيمات فيرميونات.

ثالثاً: بفرض أن الجسيمات متمايضة، أوجد رقمي انشغال حالة التوزع الماكروي الأكثر احتمال (N_1, N_2) بدلالة العدد N وتابع التحاص Z ، وتحقق من ذلك (تحقق أن $N_1 + N_2 = N$)، ثم تحقق أن هذا التوزع هو توزع طبيعي.

2- برهن أن سعة مكثفة كروية (مكونة من سطحين كرويين S متحدي المركز، تفصل بينهما مسافة ثابتة d).

تعطى بالعلاقة $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ ، (الرسم ضروري).

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس: الأحد 2018 / 7 / 1

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
اطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الثاني للعام الدراسي 2017 - 2018
(الدرجة العظمى: تسعون)

جواب السؤال الأول: (45 درجة).

البند 1:

20

نطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (B-E). المعطاة بالعلاقة: $W_{B-E} = \prod_i \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!}$

وحيث أن الجسيمات هي بوزونات (كمية) فيكون عددها N_i ودرجة تحلل سويات الطاقة g_i كبيرين، لذا يُهمل الواحد في

توزيع (B-E) وتصبح عبارة الوزن الإحصائي بالشكل التالي: $W_{B-E} \approx \prod_i \frac{(N_i + g_i)!}{N_i! g_i!}$

نوجد بدايةً $\ln(W_{B-E})$ ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{B-E})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{B-E}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{B-E}) \approx \ln \prod_i \frac{(N_i + g_i)!}{N_i! g_i!} = \sum_i [\ln(N_i + g_i)! - \ln N_i! - \ln g_i!]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ ستيرلنج $\ln x! \approx x \ln x$ نجد:

$$\ln(W_{B-E}) \approx \sum_i [(N_i + g_i) \ln(N_i + g_i) - N_i \ln N_i - g_i \ln g_i] \quad (7)$$

بما أن W_{B-E} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{B-E}) = \frac{\partial \ln(W_{B-E})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \sum_i [(N_i + g_i) \ln(N_i + g_i) - N_i \ln N_i - g_i \ln g_i] dN_i$$

$$\approx \sum_i \left[\ln(N_i + g_i) + \frac{N_i + g_i}{N_i + g_i} - \ln N_i - \frac{N_i}{N_i} \right] dN_i = \sum_i [\ln(N_i + g_i) - \ln N_i] dN_i$$

$$d \ln(W_{B-E}) \approx \sum_i \ln \frac{N_i + g_i}{N_i} dN_i \quad (7)$$

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$U = \sum_i \epsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \epsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

$$d \ln(W_{B-E}) + \alpha dN + \beta dU = 0$$

$$\sum_i (\ln \frac{N_i + g_i}{N_i} + \alpha + \beta \epsilon_i) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{N_i + g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \epsilon_i) \Rightarrow \frac{N_i + g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)}$$

$$\Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} - 1 \Rightarrow \boxed{N_{i(B-E)} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} - 1}} \quad (6)$$

البند 2:

25

نكتب العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لطاقتها، في المجال الطاقى $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$.

$$dN(\epsilon) = \frac{N}{Z} e^{\beta \epsilon} g(\epsilon) d\epsilon$$

نعوض عن المقدار $g(\epsilon) d\epsilon$ بقيمة من العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ الطاقة الطوري

$$g(\epsilon) d\epsilon = C d\Gamma(\epsilon) = CV 2\pi (2m)^{3/2} (\epsilon)^{1/2} d\epsilon$$

وعن تابع التحاص Z قيمته $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$ ، واعتبار أن $\beta = -1/KT$. نجد:

$$dN(\epsilon) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-\epsilon/KT} CV 2\pi (2m)^{3/2} (\epsilon)^{1/2} d\epsilon$$

بالاختزال والإصلاح.

$$dN(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

بقسمة الطرفين على العدد الكلي لجسيمات الجملة N نحصل على تابع توزع الطاقة بدلالة تابع كثافة الطاقة كما يلي:

$$dF(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{N} = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon = f(\varepsilon) d\varepsilon$$

يعبر $f(\varepsilon)$ عن تابع كثافة الطاقة

$$f(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} e^{-\varepsilon/KT} \quad \checkmark \quad (5)$$

1- للبرهان على أن $f(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمال. نبرهن أن تابع الكثافة يحقق الشرط الواحدي. وذلك بإجراء التكامل على الطاقة في المجال $[0 \rightarrow \infty[$.

$$\int_0^{\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x = \varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT x \Rightarrow d\varepsilon = KT dx \quad \text{و} \quad \varepsilon^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل:

$$\int_0^{\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} (KT)^{1/2} KT \underbrace{\int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx}_{\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} (KT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \quad \checkmark \quad (5)$$

2- نحسب الطاقة الوسطى $\bar{\varepsilon}$ بطريقة الوسطي الإحصائية بالشكل التالي

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^{\infty} \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نوجد قيمة التكامل من تابع غاما

نفرض $\varepsilon^{3/2} = (KT)^{3/2} x^{3/2}$ فنكون $x = \varepsilon/KT \Rightarrow \varepsilon = KT x \Rightarrow d\varepsilon = KT dx$ وبالتعويض:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon = (KT)^{3/2} KT \int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-x} dx = (KT)^{5/2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = (KT)^{5/2} \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

بالتعويض نجد المطلوب

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} (KT)^{5/2} \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3}{2} KT \quad \checkmark \quad (5)$$

3- نوجد تشتت الطاقة الحركية من العلاقة $\Delta\varepsilon^2 = (\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 = \varepsilon^2 - \bar{\varepsilon}^2$

نوجد أولاً وسطى القيمة التربيعية للطاقة $\bar{\varepsilon}^2$ بطريقة الوسطي. علماً أن مربع القيمة الوسطى $\bar{\varepsilon}^2 = \frac{9}{4} (KT)^2$

$$\bar{\varepsilon}^2 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2 f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{5/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نوجد قيمة التكامل بفرض $\varepsilon^{5/2} = (KT)^{5/2} x^{5/2}$ فنكون $x = \varepsilon/KT \Rightarrow \varepsilon = KT x \Rightarrow d\varepsilon = KT dx$

وبالتعويض

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} (KT)^{5/2} KT \int_0^{\infty} x^{5/2} e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (KT)^2 \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (KT)^2 \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{15}{4} (KT)^2$$

بالتعويض في عبارة تشتت الطاقة نجد

$$\overline{\Delta \varepsilon^2} = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{15}{4}(KT)^2 - \frac{9}{4}(KT)^2 = \frac{3}{2}(KT)^2 \quad (5)$$

4- نوجد وسطى الطاقة $\bar{\varepsilon}^n$ (من الرتبة n) بالطريقة الإحصائية.

$$\bar{\varepsilon}^n = \int_0^\infty \varepsilon^n f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^n \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} \int_0^\infty \varepsilon^{n+1/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نوجد قيمة التكامل بفرض $\varepsilon^{n+1/2} = (KT)^{n+1/2} x^{n+1/2}$ وبالتعويض
 $x = \varepsilon/KT \Rightarrow \varepsilon = KT x \Rightarrow d\varepsilon = KT dx$

$$\bar{\varepsilon}^n = \frac{2}{\sqrt{\pi}(KT)^{3/2}} (KT)^{n+1/2} KT \int_0^\infty x^{n+1/2} e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (KT)^n \Gamma(n+\frac{3}{2}) \quad (5)$$

جواب السؤال الثاني: (45 درجة).

البند 1:

$$N_o = \frac{(N+N_\varepsilon-1)!}{N!(N_\varepsilon-1)!} = \frac{(N+2-1)!}{N!(2-1)!} = \frac{(N+1)!}{N!!} = \frac{(N+1)N!}{N!!} = N+1 \quad (5)$$

$$U_{(N-1,1)} = \sum_i N_i \varepsilon_i = (N-1) \times 0 + 1 \times KT = KT \quad (1)$$

الأوزان الإحصائية:

A - الجسيمات متميزة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = N! \left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!} \frac{1!}{1!} \right) = N(N-1)! \left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!} \frac{1!}{1!} \right) = N N^{N-1} = N^N \quad (3)$$

B - الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^2 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = \frac{(N-1+1-1)!}{(N-1)! (1-1)!} \frac{(1+1-1)!}{1! (1-1)!} = \frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2} \quad (3)$$

C - الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^2 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = \frac{N!}{(N-1)! (N-N+1)!} \frac{1!}{1! (1-1)!} = \frac{N(N-1)!}{(N-1)!} = N \quad (3)$$

ثالثاً - بفرض أن الجسيمات كلاسيكية، نوجد تحاص الجملة Z (يتبع لعدد السويات فقط):

$$Z = \sum_i g_i e^{\beta \varepsilon_i} = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = N e^{-0} + e^{-1} = N + e^{-1}$$

نوجد رقم انشغال السويات في الحالة الأكثر احتمال من مكسويل

$$N_i = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} = e^\alpha g_i e^{-\varepsilon_i/KT} = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i/KT}$$

$$N_2 = \frac{N}{N+e^{-1}} e^{-1} = \frac{N e^{-1}}{Z} \quad (4) \quad N_1 = \frac{N}{N+e^{-1}} N = \frac{N}{Z} N \quad (4)$$

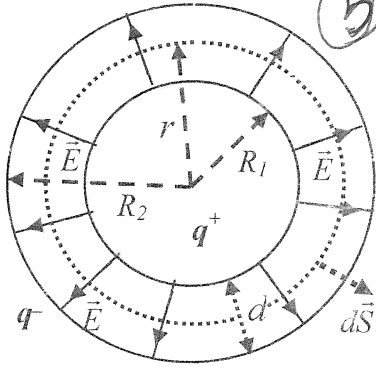
$$(1) \quad N_1 + N_2 = \frac{N}{N+e^{-1}} N + \frac{N}{N+e^{-1}} e^{-1} = \frac{N(N+e^{-1})}{N+e^{-1}} = N$$

للتحقق من كون هذا التوزيع (في الحالة الأكثر احتمالاً) هو توزيع طبيعي نوجد نسبة رقمي الانشغال

$$(1) \quad \frac{N_1}{N_2} = N e > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$$

البند 2: (حساب سعة المكثفة الكروية)

نأخذ سطح افتراضي غاوسي يحيط باللبوس الموجب q^+ على شكل كرة نصف قطرها r حيث $R_1 < r < R_2$ ومتحد المركز مع اللبوسين الكرويين q^+ و q^- ، كما هو موضح في الشكل.



أولاً: نحسب شدة الحقل بتطبيق غوص، أي نوجد تدفق الحقل $\vec{E}$ عبر السطح الغاوسي الافتراضي المغلق S ، علماً أن $E = cte$

$$\phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = k \frac{q}{r^2}$$

ثانياً: نطبق العبارة (جولان الحقل بين الشحنتين يساوي فرق الكمون بينهما)

$$\int_{q^+}^{q^-} E dr = kq \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = kq \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = kq \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \approx kq \frac{d}{R^2} = V$$

حيث اعتبرنا R متوسط نصف قطر الكرتين $R_1 R_2 \approx R^2$ و $d = R_2 - R_1$ حيث $d \ll R$

ثالثاً: نحسب السعة بتطبيق العلاقة: (بعد اعتبار أن $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ و $S = 4\pi R^2$) نجد المطلوب

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{kq \frac{d}{R^2}} = \epsilon_0 \frac{4\pi R^2}{d} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون
مدة الامتحان: ساعتان

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
طلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الأول للعام الدراسي 2017 - 2018

س ١- أجب عن البنود التالية: (60 درجة).

١- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{i(M-B)}^{\max}$ لتوزع مكسويل - بولتزمان، في الحالة الأكثر احتمال. (بدلالة مضروبي لاغرانج).

٢- مسألة:

جملة مكونة من 3 جسيمات موزعة على سويتين للطاقة $\epsilon_1 = kT$ و $\epsilon_2 = 2kT$ ، متحللتين بالشكل:

$g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ والمطلوب:

• أوجد حالات التوزع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.

• أوجد (مع التمثيل) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(1, 2)$ في الحالات التالية:

١- الجسيمات متمايزة A و B و C. ٢- الجسيمات بوزونات. ٣- الجسيمات فيرميونات.

٣- تعبّر الصيغة $dN(g) = \frac{N}{Z} e^{-\beta \epsilon} g(g) dg$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في

المجال $[g, g + dg]$ ، وفقاً لتوزع $(M-B)$ والمطلوب:

• أوجد تابع الكثافة $f(g^2)$ بدلالة القابل $\alpha = m/2kT$. علماً أن قيمة تابع التحاص $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$.

• مثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة مع مناقشة النتائج والتفسير.

س ٢- أجب عن المسألة التالية: (20 درجة).

نثبت في رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه ℓ (m)، ثلاث شحنات متساوية القيمة، q (col)، لكل منها، ومهملة الوزن.

١- إذا كانت الشحنات مختلفة الإشارة بحيث تكون واحدة موجبة والثنتين سالبتين. المطلوب:

• ارسم الشكل، ومثل عليه اتجاه قوة كولون $\vec{F}_C$ المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها (بدلالة q و k و ℓ).

• مثل قوة كولون المحصلة المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها (بدلالة q و k و ℓ)، وحدد اتجاه حركة كل منها بعد إزالة التثبيت.

٢- إذا كانت الشحنات الثلاث متساوية القيمة ومتفقة الإشارة (سالبة). والمطلوب:

• ارسم الشكل الجديد، ومثل عليه اتجاه قوة كولون المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها.

• أوجد قيمة الشحنة الموجبة الرابعة الواجب وضعها في مركز المثلث بحيث تبقى الشحنات في أماكنها بعد إزالة التثبيت.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس: الثلاثاء 2018 / 1 / 16

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
طلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الأول للعام الدراسي 2017 - 2018
(الدرجة العظمى: ثمانون)

جواب السؤال الأول: (60 درجة).

1- ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$ 20

نوجد بدايةً $Ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d Ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$dLn(W_{M-B}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$Ln(W_{M-B}) = Ln N! + \sum_i [N_i Ln g_i - Ln N_i!]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنج $Ln x! \approx x Ln x - x$ نجد:

$$Ln(W_{M-B}) \approx N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i) \quad (5)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i وحيث أننا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحليلها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$dLn(W_{M-B}) = \frac{\partial Ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \left[N Ln N - N + \sum_i (N_i Ln g_i - N_i Ln N_i + N_i) \right] dN_i \quad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (Ln g_i - Ln N_i - 1 + 1) dN_i = \sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i$$

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i Ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0 \quad (5)$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i (Ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i) dN_i = 0 \Rightarrow Ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$N_{i(M-B)} = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i}$$

$$N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta \varepsilon_i} \quad (5)$$

2- المسألة 20

$$N_o = \frac{(N + N_\varepsilon - 1)!}{N! (N_\varepsilon - 1)!} = \frac{(3 + 2 - 1)!}{3! (2 - 1)!} = \frac{4!}{3! 1!} = 4$$

• حالات التوزيع الماكروي:

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزيع الماكروي الأربعة.

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\left\{ \begin{matrix} (3, 0) \\ U=3kT \end{matrix}, \begin{matrix} (0, 3) \\ U=6kT \end{matrix}, \begin{matrix} (2, 1) \\ U=4kT \end{matrix}, \begin{matrix} (1, 2) \\ U=5kT \end{matrix} \right\}$ 5

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,2)} = 3! \left(\frac{1!}{1!} \frac{2^2}{2!} \right) = 12$$

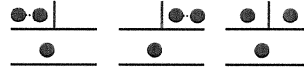
• 1- الجسيمات متميزة (كلاسيكية)

$\frac{BC }{A}$	$\frac{ BC}{A}$	$\frac{B C}{A}$	$\frac{C B}{A}$
$\frac{AC }{B}$	$\frac{ AC}{B}$	$\frac{A C}{B}$	$\frac{C A}{B}$
$\frac{AB }{C}$	$\frac{ AB}{C}$	$\frac{A B}{C}$	$\frac{B A}{C}$

(5)

٢- الجسيمات بوزونات

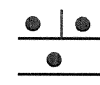
$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^2 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{(1+1-1)! (2+2-1)!}{1! (1-1)! 2! (2-1)!} = 3$$



(5)

٣- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (1, 2) تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزع مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^2 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{1!}{1! (1-1)!} \frac{2!}{2! (2-2)!} = 1$$



(5)

لدينا صيغة $dN(g)$ المعطاة والمعبرة عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعتها المطلقة في المجال $[g, g + dg]$ بالشكل التالي:

$$dN(g) = \frac{N}{Z} e^{\beta \epsilon} g(g) dg \quad (*)$$

لدينا من تعريف تابع التخاص

$$Z = CV (2\pi m kT)^{3/2} \quad (a)$$

نوجد عبارة تحلل السويات بدلالة عنصر الفراغ الطوري الذي يرتبط اندفاعه بالسرعة المطلقة بالشكل التالي:

$$p = m\theta \Rightarrow dp = m d\theta$$

$$g(g) dg = C d\Gamma(g) = C dq_x dq_y = CV 4\pi p^2 dp = CV 4\pi m^3 g^2 dg \quad (b)$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

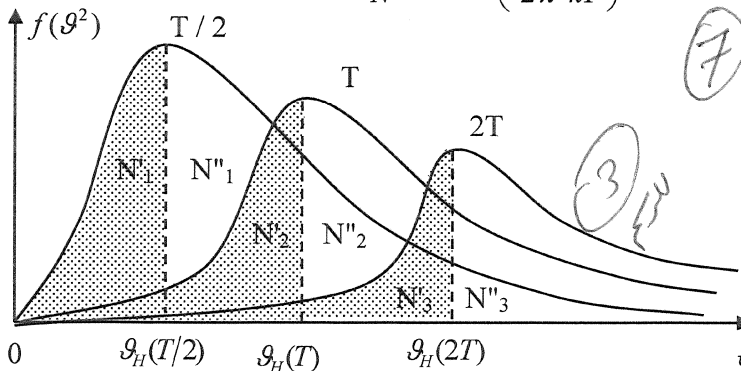
$$\epsilon = m g^2 / 2 \quad (c)$$

بتعويض العبارات (a) و (b) و (c) في (*)، مع الأخذ بعين الاعتبار قيمة مصروب لاغرانج $\beta = -1/kT$ نجد:

$$dN(g) = \frac{N}{CV (2\pi m kT)^{3/2}} e^{-m g^2 / 2kT} CV 4\pi m^3 g^2 dg$$

بالاختزال والقسمة على N نحصل على تابع توزع السرعة المطلقة لجسيم واحد، بالشكل التالي:

$$dF(g) = \frac{dN(g)}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} g^2 e^{-m g^2 / 2kT} dg = f(g^2) dg$$



و بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$

$$dF(g) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg = f(g^2) dg$$

• نمثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة كما هو موضح في الشكل التالي:

المناقشة والتفسير:

تحقيقاً لمبدأ انحفاظ عدد الجسيمات

$N = cte$ عند كل درجة حرارة.

فإننا نمثل المساحة المحصورة تحت المنحني البياني بـ N، حيث $N = N' + N''$

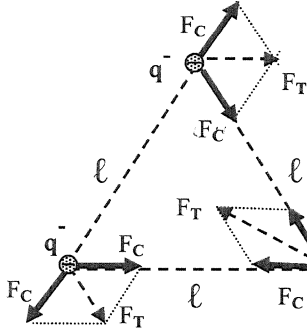
4

حيث N' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أقل من السرعة الأكثر احتمالاً $\mathcal{G}_H$.
و N'' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أكبر من $\mathcal{G}_H$.

حيث $\mathcal{G}_H$ السرعة الموافقة لقمة المنحني (حيث تكون قيمة تابع الكثافة أعظمية) ، (السرعة الأكثر احتمالاً).
النتائج:

- ١- تنزاح النهايات العظمى للمنحنيات بارتفاع درجات الحرارة نحو تزايد قيمة السرعة المطلقة للجسيمات
- ٢- بارتفاع درجات الحرارة يزداد N'' على حساب تناقص N' بحيث يبقى N ثابت ($N = N' + N''$) .
- ٣- بارتفاع درجات الحرارة تنخفض قيمة تابع الكثافة $f(\mathcal{G}^2)$ ، مما يشير لانخفاض عدد الجسيمات التي تقع سرعتها المطلقة في المجال $[\mathcal{G}, \mathcal{G} + d\mathcal{G}]$.

جواب السؤال الثاني (المسألة): (20 درجة).



• التمثيل موضح بالشكل، وهي تنافر بين الشحنتين السالبتين، وتجاذب بين الموجبة والسالبة. نحسب شداتها بتطبيق كولون

وهي متساوية لجميع الشحانات . $F_C = k \frac{q^2}{\ell^2}$

• نمثل قوة كولون المحصلة المؤثرة في كل شحنة ، كما بالشكل :
نحسب شدة المحصلة المؤثرة في كل من الشحنتين السالبتين

$$\vec{F}_T(q^-) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^-) = \sqrt{F_{C1}^2 + F_{C2}^2 + 2F_{C1}F_{C2}\cos(\pi - 60)}$$

$$\vec{F}_T(q^-) = F_{C1}\sqrt{2[1 - \cos(60)]} = F_{C1}\sqrt{2[1 - 0.5]} = F_{C1} = k \frac{q^2}{\ell^2}$$

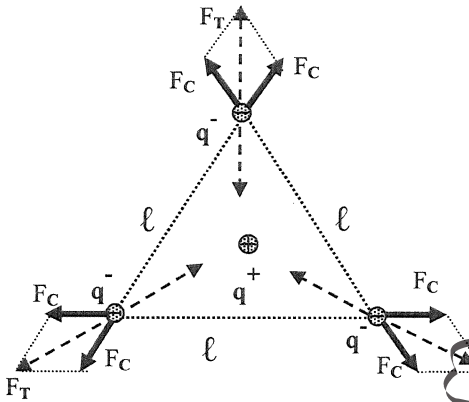
وهي تساوي الشدة المؤثرة في كل منهما على حدة .

نحسب شدة المحصلة المؤثرة في الشحنة الموجبة بنفس الأسلوب

$$\vec{F}_T(q^+) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^+) = \sqrt{F_{C1}^2 + F_{C2}^2 + 2F_{C1}F_{C2}\cos(60)}$$

$$\vec{F}_T(q^+) = F_{C1}\sqrt{2[1 + \cos(60)]} = \sqrt{3} F_{C1} = \sqrt{3} k \frac{q^2}{\ell^2}$$

وهذا يعني أن كل شحنة ستتحرك وفق المحصلة $\vec{F}_T$ عند إن التثبيتها .



• بدايةً نحسب محصلة قوى التدافع المؤثرة في كل من الشحانات السالبة، كما هو موضح بالشكل.

علماً أن قوة كولون المتبادلة بين كل شحنتين سالبتين هي $F_{C1} = k \frac{q^{-2}}{\ell^2}$

$$\vec{F}_T(q^-) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^-) = \sqrt{F_{C1}^2 + F_{C2}^2 + 2F_{C1}F_{C2}\cos(60)}$$

$$F_T(q^-) = \sqrt{3} F_{C1} = \sqrt{3} k \frac{(q^-)^2}{\ell^2}$$

• تتوازن كل من الشحانات السالبة الثلاث مع الشحنة الموجبة المركزية بقوة تجاذب $F_{q^+q^-} = k \frac{q^- q^+}{x^2} = F_T(q^-)$

أي أن $F_{q^+q^-}$ مساوية بالقيمة المطلقة ومعاكسة بالاتجاه للمحصلة $F_T(q^-)$. حيث x المسافة بين مركز المثلث وأحد رؤوسه وهي هندسياً تساوي ثلثي طول العاقد (الارتفاع في المثلث) والمساوي بدوره لـ

$$x = \frac{2}{3} \ell \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{3} \ell \quad \text{إذن} \quad \ell \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \ell$$

بالتعويض والاختزال نحصل على قيمة q^+ بدلالة q^- كما يلي:

$$3k \frac{q^- q^+}{\ell^2} = \sqrt{3} k \frac{(q^-)^2}{\ell^2} \Rightarrow q^+ = \frac{\sqrt{3}}{3} q^- \Leftrightarrow q^+ < q^-$$

5

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون
مدة الامتحان: ساعتان

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - لطلاب السنة الثانية رياضيات
الدورة الإضافية (الصيفية) للعام الدراسي 2016-2017

السؤال الأول: أجب عن البنود التالية: (60 درجة).

1- جملة مكونة من 3 جسيمات متمايضة موزعة على سويتين للطاقة $\varepsilon_1 = kT$ و $\varepsilon_2 = 2kT$ ، متحللتين بالشكل:
 $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد نسب أرقام الانشغال، ما نوع التوزيع الحاصل (طبيعي أم لا).
- أوجد تحاسي الجملة والطاقي (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.
- أوجد (مع التمثيل) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ في الحالات التالية:
1- الجسيمات متمايضة A و B و C. 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

2- جملة مكونة من N جزيء نقطي متماثل (من غاز مثالي)، موضوعة في وعاء حجمه V ، في الدرجة $T(k^\circ)$. فإذا علمت أن كتلة كل جزيء m ، وطاقته الحركية ε . وأن حجم كرة نصف قطرها r في فراغ ذي n بُعد يعطى بالصيغة $V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} r^n$ ، المطلوب:

- 1- أوجد (بدلالة المعطيات) عبارة الوزن الإحصائي للجملة W .
- 2- أوجد عبارة الأنتروبية.
- 3- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(F-D)_{\max}}$ لتوزيع فيرمي - ديراك في الحالة الأكثر احتمال (بدلالة مضروب لاغرانج).

السؤال الثاني: أجب عن أحد البندين التاليين: (20 درجة).

- 1- برهن أن تفرق الحقل الكهربائي لشحنة نقطية q معدوم $(\text{div } \vec{E} = 0)$
ثم برهن أنه يمكن كتابة الحقل الكهربائي بالصيغة $\vec{E} = -kq \text{ grad } \frac{1}{r}$
- 2- احسب الكمون V الناتج عن قرص دائري، نصف قطره R ، يهمل السماكة، ويقع في المستوي (x, y) ، إذا كان مشحوناً بشحنة سالبة q ، موزعة عليه بكثافة سطحية σ منتظمة، وذلك في نقطة ما M من محوره، بحيث تبعد عن مركزه O مسافة z ثابتة. ثم احسب شدة الحقل $\vec{E}$ في هذه النقطة. (الرسم ضروري)
ناقش قيمتي الحقل $\vec{E}$ والكمون V في الحالتين $z = 0$ و $z \gg R$.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس 7/9/2017

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - لطلاب السنة الثانية رياضيات
الدورة الإضافية (الصيفية) للعام الدراسي 2016 - 2017 (الدرجة العظمى: ثمانون)
أجوبة بنود السؤال الأول: (60 درجة).

1 20

• حالات التوزيع الماكروي: $N_o = \frac{(N + N_e - 1)!}{N!(N_e - 1)!} = \frac{(3 + 2 - 1)!}{3!(2 - 1)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i \epsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزيع الماكروي الأربعة.

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\left\{ \begin{matrix} (3,0) \\ U=3kT \end{matrix}, \begin{matrix} (0,3) \\ U=6kT \end{matrix}, \begin{matrix} (2,1) \\ U=4kT \end{matrix}, \begin{matrix} (1,2) \\ U=5kT \end{matrix} \right\}$

• نسب أرقام الانشغال

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{e^\alpha g_i e^{\beta \epsilon_i}}{e^\alpha g_j e^{\beta \epsilon_j}} = \frac{g_i e^{-\epsilon_i/KT}}{g_j e^{-\epsilon_j/KT}} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{1e^{-\frac{KT}{KT}}}{2e^{-\frac{2KT}{KT}}} = \frac{1}{2e^{-1}} = \frac{e}{2} > 1 \Rightarrow N_1 > N_2$$

والتوزيع الطبيعي

• تحاس الجملية: $Z = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/KT} = e^{-1} + 2e^{-2}$

تحاس الطاقم: $Z_\Omega = Z^N = (e^{-1} + 2e^{-2})^3 = e^{-3} + 6e^{-4} + 12e^{-5} + 8e^{-6}$

نقارنه بالعبارة: $Z_\Omega = \sum_i W_i e^{-U_i/KT} = W_{(3,0)} e^{-3} + W_{(2,1)} e^{-4} + W_{(1,2)} e^{-5} + W_{(0,3)} e^{-6}$

فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزيع الماكروي بالشكل:

$W_{(3,0)} = 1$ و $W_{(2,1)} = 6$ و $W_{(1,2)} = 12$ و $W_{(0,3)} = 8$

الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة (1,2)

• 1- الجسيمات متميزة (كلاسيكية) $W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,2)} = 3! \frac{1! 2!}{1! 2!} = 12$

B C	B C	B C	C B
A	A	A	A
A C	A C	A C	C A
B	B	B	B
A B	A B	A B	B A
C	C	C	C

• 2- الجسيمات بوزونات $W_{B-E} = \prod_{i=1}^2 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{(1+1-1)!}{1! (1-1)!} \frac{(2+2-1)!}{2! (2-1)!} = 3$

••	•••	•••
•	•	•

• 3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (1,2) تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزيع مقبولة

$W_{F-D} = \prod_{i=1}^2 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{1!}{1! (1-1)!} \frac{2!}{2! (2-2)!} = 1$

•••
•

20

1- لدينا عدد الحالات الإجمالي التي يمكن أن يشغلها N جزيء هو $N!$ حالة. فيكون احتمال وقوع الجزيء في إحدى الحالات $\omega = 1/N!$. ويكون عدد الجسيمات المتوزعة في المجال الطاقى $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ هو $dN(\varepsilon)$. فتكون صيغة عبارة الوزن الإحصائي للجملية W بالشكل التالي:

$$dW = \omega dN(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{N!} = \frac{C d\Gamma(\varepsilon)}{N!} = \frac{dq_v dP_v}{h^{3N} N!}; C = \frac{1}{h^{3N}}$$

بمكاملة الطرفين على أبعاد الفراغ الطوري المكون من $6N$ بُعد. منها $3N$ للحجم q_v و $3N$ للاندفاع P_v .

$$W = \int dW = \frac{\int_{3N} dq_v \int_{3N} dP_v}{h^{3N} N!}$$

(a)

وبملاحظة أن التكامل الخاص بالحجم لجزيء واحد بثلاثة أبعاد هو $\int_3 dq_v = \int_3 dx dy dz = V$

فيكون من أجل N جزيء

$$\int_{3N} dq_v = \left(\int_3 dx dy dz \right)^N = V^N$$

(b)

أما التكامل الخاص بالاندفاع لجزيء واحد (بثلاثة أبعاد)، وكما نعلم، فهو يساوي حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع

$$\int_3 dP_v = \frac{4}{3} \pi P^3$$

ذاته. أي: $\int_3 dP_v = \frac{4}{3} \pi P^3$. أما بالنسبة لـ N جزيء (ذي $3N$ بعداً)، فإننا نجد (اعتماداً على المعطيات) أن حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع في هذا الفراغ يعطى بالصيغة

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{(\frac{n}{2})!} r^n \Leftrightarrow \int_{3N} dP_v = V_{3N}(P) = \frac{\pi^{3N/2}}{(\frac{3N}{2})!} P^{3N}$$

(c)

وبدلالة الطاقة الحركية المرتبطة بالاندفاع $P = m g$ بالعلاقة:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m g^2 = \frac{m^2 g^2}{2m} = \frac{P^2}{2m} \Rightarrow P = \sqrt{2m\varepsilon}$$

نعوض $P = \sqrt{2m\varepsilon}$ في (c)، ثم نعوض (b) و (c) في (a) نجد:

$$W = \frac{V^N}{h^{3N} N!} \frac{\pi^{3N/2}}{(\frac{3N}{2})!} (\sqrt{2m\varepsilon})^{3N} = \frac{V^N}{h^{3N} N!} \frac{(\sqrt{2\pi m\varepsilon})^{3N}}{(\frac{3N}{2})!}$$

(d)

2- نوجد عبارة الأنتروبية من علاقة بولتزمان $S = K \ln W$. فنجد من (d)

$$S = K \ln W = K \left[\ln \frac{V^N}{h^{3N} N!} + \ln \frac{(\sqrt{2\pi m})^{3N} \varepsilon^{3N/2}}{(\frac{3N}{2})!} \right]$$

$$S = K \ln W = K \left[N \ln V - N \ln h^3 - \ln N! + N \ln (\sqrt{2\pi m})^3 + \frac{3N}{2} \ln \varepsilon - \ln \left(\frac{3N}{2} \right)! \right]$$

وباستخدام تقريب ستيرلنج $\ln X! \approx X \ln X - X$ نجد:

$$S \approx K \left[N \ln V - N \ln h^3 - N \ln N + N + N \ln (\sqrt{2\pi m})^3 + \frac{3N}{2} \ln \varepsilon - \frac{3N}{2} \ln \left(\frac{3N}{2} \right) + \frac{3N}{2} \right]$$

$$S \approx NK \left[\ln V - \ln h^3 - \ln N + 1 + \ln (\sqrt{2\pi m})^3 + \frac{3}{2} \ln \varepsilon - \frac{3}{2} \ln \left(\frac{3N}{2} \right) + \frac{3}{2} \right]$$

$$S \approx NK \left[\ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \frac{2\varepsilon}{3N} + \ln \frac{(\sqrt{2\pi m})^3}{h^3} + \ln e^{5/2} \right] ; \frac{5}{2} = \ln e^{5/2}$$

$$S \approx NK \left[\ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \frac{2\varepsilon}{3N} + \ln \frac{(\sqrt{2\pi m})^3 e^{5/2}}{h^3} \right]$$

يعبر الحدين الأول والثاني الواقعين داخل القوس عن متحولات الجملة (N, ε, V) ، أما الحد الثالث فيعبر عن المقادير الثابتة.

3: 20

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (F-D). المعطاة بالعلاقة: $W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!}$

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التحلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i . أي $g_i \gg N_i$. نوجد بدايةً $\ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{F-D}) \approx \ln \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} = \sum_i [\ln g_i! - \ln N_i! - \ln (g_i - N_i)!]$$

وباستخدام التقريب الثاني لـ $\ln x! \approx x \ln x$ نجد:

$$\ln(W_{F-D}) \approx \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i)]$$

بما أن W_{F-D} تابع لكل من g_i و N_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$\begin{aligned} d \ln(W_{F-D}) &= \frac{\partial \ln(W_{F-D})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i)] dN_i \\ &\approx \sum_i \left[-\ln N_i - 1 + \frac{g_i}{g_i - N_i} + \ln (g_i - N_i) \right] dN_i = \sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} - 1 + \frac{g_i - N_i}{g_i - N_i} \right) dN_i \\ d \ln(W_{F-D}) &\approx \sum_i \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} dN_i \end{aligned}$$

بالتعويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad \text{و} \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0$$

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i \right) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i - N_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} + 1 \Rightarrow$$

$$N_{i(F-D)}^{\max} = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} + 1}$$

أجوبة بنود السؤال الثاني: (20 درجة).

1: (اختياري)

• نعلم أن العبارة الشعاعية للحقل الكهربائي للشحنة النقطية q يعطى على بعد منها $\vec{r}$ بالعلاقة:

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad ; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{و} \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{E} = kq \frac{x}{r^3} \vec{i} + kq \frac{y}{r^3} \vec{j} + kq \frac{z}{r^3} \vec{k}$$

نوجد حدود عبارة التفرق

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = kq \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = kq \frac{r^3 - 3r^2 \frac{\partial r}{\partial x} x}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kq r^2 \frac{x}{r}}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kq x^2}{r^5}$$

وبالمثل نوجد الحدين الآخرين $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ و $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ وبالتعويض نجد:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq}{r^3} = 0$$

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r} = kq \frac{\vec{r}}{r^3}$$

• نكتب العبارة الشعاعية للحقل بالشكل:

ثم نبرهن أن $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\text{grad} \frac{1}{r}$ بالشكل التالي:

$$\text{grad} \frac{1}{r} = \vec{\nabla} \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{0 - \frac{x}{r^2}}{r^2} \vec{i} + \frac{0 - \frac{y}{r^2}}{r^2} \vec{j} + \frac{0 - \frac{z}{r^2}}{r^2} \vec{k} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{E} = -kq \text{grad} \frac{1}{r} \quad \text{فنجد المطلوب}$$

2: (اختياري)

نحسب الكمون الناتج عن عنصر الشحنة dq المتوضع على عنصر المساحة dS (الشريحة) من القرص في النقطة M ، كما هو موضح في الشكل، وفق العلاقة التالية.

$$dV = k \frac{dq}{a}$$

وبما أن $dS = r dr d\theta$ وبالأخذ بعين الاعتبار

كثافة التوزيع السطحي $dq = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$

وَبُعد النقطة M عن الشريحة $a = \sqrt{z^2 + r^2}$

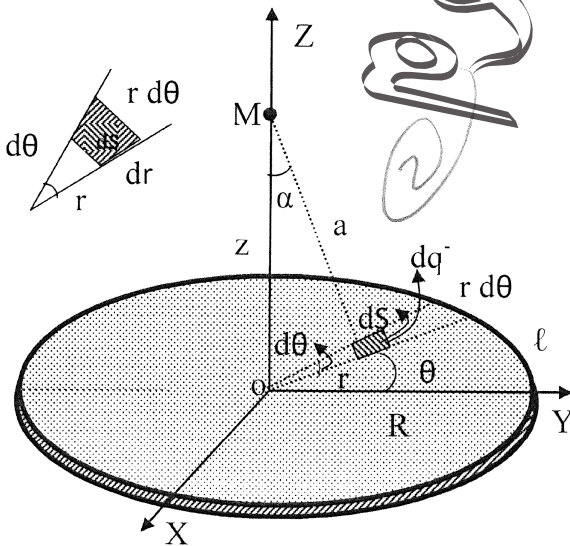
بالتعويض نجد:

$$dV = k \frac{\sigma r dr d\theta}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

وبالمكاملة على r في المجال $[0, R]$

وعلى θ في المجال $[0, 2\pi]$ نجد:

$$V = \int dV = k\sigma \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$



نحل التكامل على r بتغيير المتحول ، حيث نفرض $u = z^2 + r^2 \Rightarrow du = 2r dr$ وبملاحظة التغير في حدود التكامل ، ونعوض عن k بقيمتها $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ فنجد :

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{1}{2} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+R^2} d\sqrt{u} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{z^2+R^2} - z] \quad (5)$$

نحسب شدة الحقل من عبارة التدرج

$$|\vec{E}| = -|\text{grad} V| = -\frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \right] \quad (2)$$

عندما $z = 0$ نجد $V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} R$ و $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ و عندما $R \gg z$ نُجري التقريب التالي

$$\sqrt{z^2+R^2} = z \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx z \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + \dots \right)$$

فنجد الكمون V

$$V \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \left[1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} - 1 \right] = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 z} \frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z} = k \frac{q}{z}$$

حيث قمنا بالضرب والقسمة على π ، مع العلم أن $q = \sigma S = \sigma \pi R^2$ فنحصل بهذه الحالة على كمون شحنة نقطية q . ونجد الحقل $|\vec{E}|$ بنفس الطريقة فنحصل على حقل شحنة نقطية كما يلي :

$$|\vec{E}| \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} \right] = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 z^2} \frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} = k \frac{q}{z^2} \quad (2)$$

السلامة

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
طلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الثاني للعام الدراسي 2016 - 2017

أجب عن أربعة فقط من الأسئلة التالية: (20 درجة لكل سؤال).

س1- جملة مكونة من 3 جسيمات متميزة موزعة على سويتين للطاقة $\epsilon_1 = kT$ و $\epsilon_2 = 2kT$ ، متحللتين بالشكل:
 $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$ والمطلوب:

- أوجد حالات التوزيع الماكروي الإجمالي وطاقة كل منها.
- أوجد تحاسي الجملة والطاغم (بدلالة e)، واستنتج من ذلك كافة الأوزان الإحصائية والحالة الأكثر احتمال.

• أوجد (مع التمثيل) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(1, 2)$ في الحالات التالية:

1- الجسيمات متميزة A و B و C. 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

س2- جملة مكونة من N جزيء نقطي متمثل (من غاز مثالي)، موضوعة في وعاء حجمه V ، في الدرجة $T(k^\circ)$. فإذا علمت أن كتلة كل جزيء m ، وطاقته الحركية ϵ . وأن حجم كرة نصف قطرها r في فراغ ذي n بُعد يعطى

$$\text{بالصيغة } V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} r^n$$

1- أوجد (بدلالة المعطيات) عبارة الوزن الإحصائي للجملة W .

2- أوجد عبارة الأنتروبية.

3- استند من معادلة الحالة للغاز المثالي $PV = NKT$ في الحصول على قيمة المقدار $T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{\epsilon, N}$.

س3- عرف تابع فيرمي $f(\epsilon)$ ، ومثله بيانياً عند سوية فيرمي للطاقة $\epsilon_f(T = 0k^\circ)$.

ثم مثله في جوارها من أجل $T \neq 0$ (عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\epsilon = \epsilon_f(0) \pm KT$).

- اذكر ثلاث تعاريف مختلفة لسوية فيرمي $\epsilon_f^{(0)}$.

س4- نُثِّب في النقطتين $M_1(0,1)$ و $M_2(0,-1)$ من المستوى الديكارتي ذي المحاور المقطرة بالمتري شحنتين موجبة

وسالبة على الترتيب ومتساويتين عددياً $|q_1^+| = |q_2^-| = 10^{-6} \text{ col}$.

فإذا علمت أن قيمة ثابت التناسب الكولوني هي $\frac{Nm^2}{\text{col}^2}$ $k = 9 \times 10^9$ ، والمطلوب:

1. ارسم الشكل ومثل عليه قوة كولون واحسب شدتها.
2. احسب شدات الحقول والحقل المحصل في النقطة $M_3(\sqrt{3}, 0)$ ومثلها جميعاً على الشكل.
3. احسب الكمون المحصل في M_3 . واحسب الطاقة الكامنة لهذا التوزيع.

س5- احسب الكمون V الناتج عن قرص دائري، نصف قطره R ، مهمل السماكة، ويقع في المستوى (x,y) ، إذا كان مشحوناً بشحنة موجبة q^+ ، موزعة عليه بكثافة سطحية σ منتظمة، وذلك في نقطة ما M من محوره، بحيث تبعد

عن مركزه O مسافة z ثابتة. ثم احسب شدة الحقل $\vec{E}$ في هذه النقطة.

ناقش قيمتي الحقل $\vec{E}$ والكمون V في الحالتين $z = 0$ و $z \gg R$.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس 2017/7/18

د. محمد ابراهيم

مدرس المقرر

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
لطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الثاني للعام الدراسي 2016 - 2017
(الدرجة العظمى: ثمانون)

جواب السؤال الأول: 20

$$N_0 = \frac{(N + N_e - 1)!}{N!(N_e - 1)!} = \frac{(3 + 2 - 1)!}{3!(2 - 1)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

• حالات التوزيع الماكروي:

نطبق قانون انحفاظ الطاقة الداخلية $U = \sum_i N_i \epsilon_i$ على كل حالة من حالات التوزيع الماكروي الأربعة.

ونكتب هذه الحالات بالشكل التالي: $\left\{ \begin{matrix} (3,0) \\ U=3kT \end{matrix}, \begin{matrix} (0,3) \\ U=6kT \end{matrix}, \begin{matrix} (2,1) \\ U=4kT \end{matrix}, \begin{matrix} (1,2) \\ U=5kT \end{matrix} \right\}$

$$Z = \sum_i g_i e^{-\epsilon_i/KT} = 2e^{-1} + e^{-2} \quad \bullet \text{ تحاص الجملة:}$$

$$Z_\Omega = Z^N = (2e^{-1} + e^{-2})^3 = 8e^{-3} + 12e^{-4} + 6e^{-5} + e^{-6} \quad \bullet \text{ تحاص الطاقم:}$$

$$Z_\Omega = \sum W_i e^{-U_i/KT} = W_{(3,0)} e^{-3} + W_{(2,1)} e^{-4} + W_{(1,2)} e^{-5} + W_{(0,3)} e^{-6} \quad \bullet \text{ نقارنه بالعباره:}$$

فتكون الأوزان الإحصائية لكافة حالات التوزيع الماكروي بالشكل:

$$W_{(0,3)} = 1 \quad \text{و} \quad W_{(1,2)} = 6 \quad \text{و} \quad W_{(2,1)} = 12 \quad \text{و} \quad W_{(3,0)} = 8$$

الحالة الماكروية الأكثر احتمال هي الحالة (2,1)

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(2,1)} = 3! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{1^1}{1!} \right) = 12 \quad \bullet \text{ 1- الجسيمات متمايضة (كلاسيكية)}$$

A	A	A	A
BC	BC	B C	C B
B	B	B	B
AC	AC	A C	C A
C	C	C	C
AB	AB	A B	B A

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^2 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(2,1)} = \frac{(2+2-1)!}{2! (2-1)!} \frac{(1+1-1)!}{1! (1-1)!} = 3 \quad \bullet \text{ 2- الجسيمات بوزونات}$$

•	•	•
•	•	•
•	•	•

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (2,1) تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزيع مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^2 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(2,1)} = \frac{2!}{2! (2-2)!} \frac{1!}{1! (1-1)!} = 1 \quad \bullet$$

جواب السؤال الثاني: 20

1- لدينا عدد الحالات الإجمالي التي يمكن أن يشغلها N جزيء هو $N!$ حالة. فيكون احتمال وقوع الجزيء في إحدى الحالات $\omega = 1/N!$. ويكون عدد الجسيمات المتوزعة في المجال الطاقى $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$ هو $dN(\epsilon)$. فتكون صيغة عبارة الوزن الإحصائي للجملة W بالشكل التالي:

$$dW = \omega dN(\epsilon) = \frac{dN(\epsilon)}{N!} = \frac{C d\Gamma(\epsilon)}{N!} = \frac{dq_V dP_V}{h^{3N} N!}; C = \frac{1}{h^{3N}}$$

بمكاملة الطرفين على أبعاد الفراغ الطوري المكون من $6N$ بُعد. منها $3N$ للحجم q_V و $3N$ للإندفاع P_V .

$$W = \int dW = \frac{\int dq_V \int dP_V}{h^{3N} N!}$$

(a)

وبملاحظة أن التكامل الخاص بالحجم لجزيء واحد بثلاثة أبعاد هو $\int_0^V dq_V = \int_0^V dx dy dz = V$

فيكون من أجل N جزيء

$$\int_{3N} dq_V = \left(\int_0^V dx dy dz \right)^N = V^N$$

(b)

أما التكامل الخاص بالاندفاع جزيء واحد (بثلاثة أبعاد)، وكما نعلم، فهو يساوي حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع

$$\int_0^P dP_V = \frac{4}{3} \pi P^3$$

أما بالنسبة لـ N جزيء (ذي الـ $3N$ بُعد خاص بالاندفاع)، فإننا نجد (اعتماداً على المعطيات) أن حجم الكرة التي نصف قطرها الاندفاع في هذا الفراغ يعطى بالصيغة

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} r^n \Leftrightarrow \int_{3N} dP_V \equiv V_{3N}(P) = \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} P^{3N} \quad (c)$$

وبدلالة الطاقة الحركية المرتبطة بالاندفاع $P = m g$ بالعلاقة:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m g^2 = \frac{m^2 g^2}{2m} = \frac{P^2}{2m} \Rightarrow P = \sqrt{2m\varepsilon}$$

نعوض $P = \sqrt{2m\varepsilon}$ في (c)، ثم نعوض (b) و (c) في (a) نجد:

$$W = \frac{V^N}{h^{3N} N!} \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} (\sqrt{2m\varepsilon})^{3N} = \frac{V^N}{h^{3N} N!} \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} (2m\varepsilon)^{3N/2} \quad (d)$$

2- نوجد عبارة الأنتروبية من علاقة بولتزمان $S = K \ln W$ نجد من (d):

$$S = K \ln W = K \left[\ln \frac{V^N}{h^{3N} N!} + \ln \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} (2m\varepsilon)^{3N/2} \right]$$

$$S = K \ln W = K \left[N \ln V - N \ln h^3 - \ln N! + N \ln (\sqrt{2\pi m})^3 + \frac{3N}{2} \ln \varepsilon - \ln \left(\frac{3N}{2} \right)! \right]$$

وباستخدام تقريب ستيرلنج $\ln X! \approx X \ln X - X$ نجد:

$$S \approx K \left[N \ln V - N \ln h^3 - N \ln N + N + N \ln (\sqrt{2\pi m})^3 + \frac{3N}{2} \ln \varepsilon - \frac{3N}{2} \ln \left(\frac{3N}{2} \right) + \frac{3N}{2} \right]$$

$$S \approx NK \left[\frac{\ln V}{N} - \frac{\ln h^3}{N} - \frac{\ln N}{N} + 1 + \ln (\sqrt{2\pi m})^3 + \frac{3}{2} \ln \varepsilon - \frac{3}{2} \ln \left(\frac{3N}{2} \right) + \frac{3}{2} \right]$$

$$S \approx NK \left[\ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \frac{2\varepsilon}{3N} + \ln \frac{(\sqrt{2\pi m})^3}{h^3} + \ln e^{5/2} \right] ; \frac{5}{2} = \ln e^{5/2}$$

$$S \approx NK \left[\ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \frac{2\varepsilon}{3N} + \ln \frac{(\sqrt{2\pi m})^3}{h^3} + \ln e^{5/2} \right]$$

يعبر الحدين الأول والثاني الواقعين داخل القوس عن متحولات الجملة (N, ε, V) ، أما الحد الثالث فيعبر عن المقادير الثابتة.

3- نوجد قيمة المقدار $T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{\varepsilon, N}$

1/

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{\epsilon, N} = N K T \left(\frac{1/N}{V/N} \right) = \frac{N K T}{V} = P$$

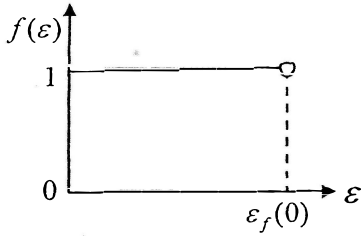
أي أنها تعبر عن الضغط.

جواب السؤال الثالث: 20

يُعرف تابع فيرمي من عبارة توزع (فيرمي - ديراك) لعدد dN من الجسيمات الواقعة في مجال الطاقة $(\epsilon \rightarrow \epsilon + d\epsilon)$ الذي درجة تحلله $(g \rightarrow g + dg)$ بالشكل :

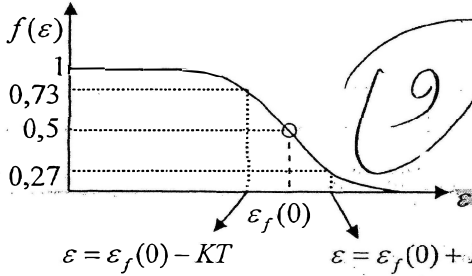
$$dN = \frac{dg(\epsilon)}{e^{\frac{\epsilon - \epsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \frac{g(\epsilon)d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon - \epsilon_f(0)}{KT}} + 1} = f(\epsilon)g(\epsilon)d\epsilon ; f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \epsilon_f(0)}{KT}} + 1}$$

حيث $\epsilon_f(0)$ سوية فيرمي عند درجة الصفر المطلق $T = 0 K^\circ$ ، ونمثله بالشكل :



$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \epsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1 & ; \epsilon < \epsilon_f \\ \frac{1}{e^{+\infty} + 1} = 0 & ; \epsilon > \epsilon_f \\ \frac{1}{e^{0/0} + 1} = XX & ; \epsilon = \epsilon_f \end{cases}$$

نستنتج أن تابع فيرمي هو تابع احتمال لأنه يأخذ قيمة في المجال $[0 - 1]$. وفي جوار سوية فيرمي، من أجل $T \neq 0$ ، عندما تمتلك الجسيمات طاقة حرارية $\epsilon = \epsilon_f(0) \pm KT$.



$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \epsilon_f(0)}{KT}} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{e^{-1} + 1} \approx 0.73 & ; \epsilon = \epsilon_f(0) - KT \\ \frac{1}{e^0 + 1} = 0.5 & ; \epsilon = \epsilon_f(0) \\ \frac{1}{e^{+1} + 1} \approx 0.27 & ; \epsilon = \epsilon_f(0) + KT \end{cases}$$

تعريف سوية فيرمي $\epsilon_f^{(0)}$:

- 1- هي الطاقة الموافقة لتوزع الفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0 K^\circ$.
- 2- هي أعلى سويات الطاقة المشغولة بالكامل بالفيرميونات في درجة الصفر المطلق $T = 0 K^\circ$ وبمعدل فيرميون واحد لكل حالة مسموحة من أجل $\epsilon_i < \epsilon_f^{(0)}$ ، وفارغة من أجل $\epsilon_i > \epsilon_f^{(0)}$.
- 3- هي الطاقة الموافقة لقيمة تابع فيرمي الاحتمالي $f(\epsilon) = 0.5$.

جواب السؤال الرابع: 20

قبل كل شيء نحسب المسافات غير المعلومة القيمة، فنجد من الشكل أن

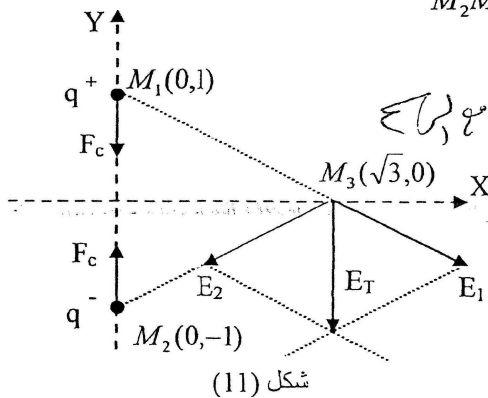
$$M_2M_3 \equiv r_2 = 2 m \text{ و } M_1M_3 \equiv r_1 = 2 m \text{ و } M_1M_2 \equiv r = 2 m$$

- 1- تتجه قوة كولون نحو الداخل (حالة تجاذب) كما هو موضح بالشكل نحسب شدتها بتطبيق قانون كولون

$$F_c = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{10^{-12}}{2^2} = \frac{9}{4} \times 10^{-3} N$$

- 2- تتجه الحقول الناتجة والحقل المحصل في M_3 كما هو موضح بالشكل. نحسب شداتها كما يلي

$$E_1(M_3) = k \frac{q_1}{r_1^2} = 9 \times 10^9 \frac{10^{-6}}{2^2} = \frac{9}{4} \times 10^{+3} \frac{V}{m}$$



شكل (11)

$$E_2(M_3) = k \frac{q_2}{r_2^2} = 9 \times 10^9 \frac{10^{-6}}{2^2} = \frac{9}{4} \times 10^{+3} \frac{V}{m}$$

نلاحظ أن شدتي الحقلين متساويتين في M_3 أي $E_1(M_3) = E_2(M_3)$

لحساب E_T المحصل، نلاحظ من الشكل أن المثلث $M_1M_2M_3$ متساوي الأضلاع فتكون زاويته الخارجية

أي بين $(\vec{E}_1, \vec{E}_2) = 120^\circ$ والمحصلة الشعاعية هي $\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. نوجد القيمة المطلقة بتربيع الطرفين

$$E_T^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos 120 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos(\pi - 60)$$

$$= E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos 60 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \frac{1}{2} = E_1^2 ; E_1(M_3) = E_2(M_3)$$

$$E_T = E_1 = \frac{9}{4} \times 10^{+3} \frac{V}{m}$$

$$V(M_3) = k \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

3- نحسب الكمون المحصل في M_3 بتطبيق العلاقة

$$V(M_3) = k \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right) = 0 \text{ V}$$

$$U = q^+ V_{q^-} = q \left(-k \frac{q}{2} \right) = -k \frac{q^2}{2} = -\frac{9}{2} \times 10^{-3} \text{ J}$$

جواب السؤال الخامس:

نحسب الكمون الناتج عن عنصر الشحنة dq^+ المتوزع على عنصر المساحة dS (الشريحة) من القرص في النقطة M ، كما هو موضح في الشكل، وفق العلاقة التالية:

$$dV = k \frac{dq}{a}$$

وبما أن $dS = r dr d\theta$ وبالأخذ بعين الاعتبار

كثافة التوزيع السطحي $dq = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$

وبعد النقطة M عن الشريحة $a = \sqrt{z^2 + r^2}$ بالتعويض نجد:

$$dV = k \frac{\sigma r dr d\theta}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

وبالمكاملة على r في المجال $[0, R]$

وعلى θ في المجال $[0, 2\pi]$ نجد:

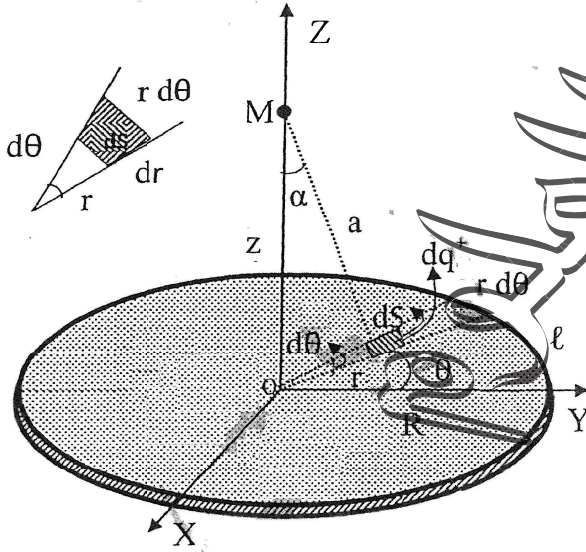
$$V = \int dV = k\sigma \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

نحل التكامل على r بتغيير المتحول، حيث نفرض $u = z^2 + r^2 \Rightarrow du = 2r dr$ وبملاحظة التغير في حدود التكامل،

ونعوض عن k بقيمتها $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ فنجد:

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{1}{2} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+R^2} d\sqrt{u} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{z^2+R^2} - z]$$

نحسب شدة الحقل من عبارة التدرج



$$|\vec{E}| = -|\text{grad } V| = -\frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

عندما $z = 0$ نجد $V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} R$ و $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
و عندما $z \gg R$ نُجري التقريب التالي

$$\sqrt{z^2 + R^2} = z \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx z \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + \dots \right)$$

فنجد الكُمون V

$$V \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \left[1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} - 1 \right] = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 z} \frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z} = k \frac{q}{z}$$

حيث قمنا بالضرب والقسمة على π ، مع العلم أن $q = \sigma S = \sigma \pi R^2$ فنحصل بهذه الحالة على كمون شحنة نقطية q.
ونجد الحقل $|\vec{E}|$ بنفس الطريقة فنحصل على حقل شحنة نقطية كما يلي:

$$|\vec{E}| \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} \right] = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 z^2} \frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} = k \frac{q}{z^2}$$

موقع

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون
مدة الامتحان: ساعتان

مدة طرطوس
خية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
لطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الأول للعام الدراسي 2016 - 2017

س1- أجب عن البنود التالية: (60 درجة).

1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(F-D)}^{\max}$ لتوزيع فيرمي - ديراك $(F-D)$ ، في الحالة الأكثر احتمال.

• جملة مكونة من N جسيم موزعة على سويتين للطاقة ϵ_1 و ϵ_2 ، متحلتين بالشكل: $g_1 = N$ و $g_2 = 2$

والمطلوب: أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(N-1, 1)$ في الحالات التالية:

1- الجسيمات متمايضة (كلاسيكية). 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

2- ثعب الصيغة $dN(\mathcal{G}) = \frac{N}{Z} e^{\beta \epsilon} g(\mathcal{G}) d\mathcal{G}$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطلقة في

المجال $[\mathcal{G}, \mathcal{G} + d\mathcal{G}]$ ، وفقاً لتوزيع (M-B). والمطلوب:

• استنتج قيمة تابع التخاص التالية $Z = CV (2\pi m kT)^{3/2}$ في الحالة المستمرة بدلالة متحولات الجملة.

$$\int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

• أوجد تابع الكثافة $f(\mathcal{G}^2)$ بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$.

• مثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة مع مناقشة النتائج والتفسير.

3- نثبت في رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه $\ell(m)$ ، ثلاث شحنات متساوية القيمة، $q(\text{col})$ لكل منها، ومهملة الوزن.

1- إذا كانت الشحنات مختلفة الإشارة بحيث تكون واحدة موجبة واثنين سالبتين. المطلوب:

• ارسم الشكل، ومثل عليه اتجاه قوة كولون $\vec{F}_C$ المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها (بدلالة q و k و ℓ).

• مثل قوة كولون المحصلة المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها (بدلالة q و k و ℓ)، وحدد اتجاه حركة كل منها بعد إزالة التثبيت.

2- إذا كانت الشحنات الثلاث متساوية القيمة ومتفقة الإشارة (سالبة). والمطلوب:

• ارسم الشكل الجديد، ومثل عليه اتجاه قوة كولون المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها.

• أوجد قيمة الشحنة الموجبة الرابعة الواجب وضعها في مركز المثلث بحيث تبقى الشحنات في أماكنها بعد إزالة التثبيت.

س2- أجب عن واحد فقط مما يلي: (20 درجة).

1- برهن أن تفرق الحقل الكهربائي لشحنة نقطية q معدوم $(\text{div } \vec{E} = 0)$.

ثم برهن أنه يمكن كتابة الحقل الكهربائي بالصيغة $\vec{E} = -k q \overline{\text{grad}} \frac{1}{r}$

2- اشرح (مع الرسم) آلية تشكل القوة المحركة (الدافعة) الكهربائية التأثيرية في موصل يتحرك بسرعة $\vec{v}$ عمودياً على حقل تحريض مغناطيسي $\vec{B}$:

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح

طرطوس 2017 / 2 / 4

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
طلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الأول للعام الدراسي 2016 - 2017
(الدرجة العظمى ثمانون)

جواب السؤال الأول: 60

1- نطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (F-D). المعطاة بالعلاقة: $W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!}$

وهو محقق فقط في الحالة التي تكون فيها درجة التحلل g_i أكبر بكثير من عدد الجسيمات N_i . أي $g_i \gg N_i$.
نوجد بدايةً $\ln(W_{F-D})$ ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{F-D})$ الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{F-D}) \approx \ln \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} = \sum_i [\ln g_i! - \ln N_i! - \ln (g_i - N_i)!]$$

وباستخدام التقريب الثاني لاستيرلنج: $\ln x! \approx x \ln x$ نجد:

$$\ln(W_{F-D}) \approx \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - (g_i - N_i) \ln (g_i - N_i)]$$

بما أن W_{F-D} تابع لكل من g_i و N_i وحيث أننا نبحث عن عدد الفيرميونات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{F-D}) = \frac{\partial \ln(W_{F-D})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - (g_i - N_i) \ln (g_i - N_i)] dN_i$$

$$\approx \sum_i \left[-\ln N_i - 1 + \frac{g_i}{g_i - N_i} + \ln (g_i - N_i) - \frac{g_i - N_i}{g_i - N_i} \right] dN_i = \sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} - 1 + \frac{g_i - N_i}{g_i - N_i} \right) dN_i$$

$$d \ln(W_{F-D}) \approx \sum_i \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} dN_i$$

بالإضافة، ويض في (1) نجد: مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i$$

$$N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

$$d \ln(W_{F-D}) + \alpha dN + \beta dU = 0$$

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i \right) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i - N_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$\Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{(\alpha + \beta \varepsilon_i)} + 1 \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = \frac{e^{(\alpha + \beta \varepsilon_i)}}{e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)} + 1}$$

وفي الحالة المستمرة يصبح عدد الفيرميونات التي تملك طاقة في المجال $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ وفقاً لتوزيع (F-D) بالشكل:

$$N_{(F-D)} = \frac{g(\varepsilon)}{e^{-(\alpha + \beta \varepsilon)} + 1}$$

• 1- الجسيمات متمايضة (كلاسيكية)

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = N! \left(\frac{N^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \frac{2^1}{1!} \right) = 2N^N$$

2- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^2 \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = \frac{(N-1 + N-1)!}{(N-1)! (N-1)!} \cdot \frac{(1+2-1)!}{1! (2-1)!} = 2 \frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2}$$

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي حالة توزيع مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^2 \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = \frac{N!}{(N-1)! (N-N+1)!} \frac{2!}{1! (2-1)!} = 2N \quad (9)$$

• إيجاد قيمة Z في الحالة المستمرة بدلالة متحولات الجملة: -2/21

$$Z = \int_0^{\infty} e^{\beta \epsilon} g(\epsilon) d\epsilon \quad \text{من عبارة تابع التخاص في الحالة المستمرة}$$

بالاستفادة من العلاقة التي تربط درجة التحلل $g(\epsilon)$ بعنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma(\epsilon)$

$$g(\epsilon) d\epsilon = C d\Gamma(\epsilon) = CV 2\pi (2m)^{3/2} (\epsilon)^{1/2} d\epsilon$$

وبالتعويض وإخراج المقدار الثابت $CV 2\pi (2m)^{3/2}$ خارج عبارة التكامل، نجد:

$$Z = CV 2\pi (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \epsilon^{1/2} e^{\beta \epsilon} d\epsilon$$

فإذا أخذنا بعين الاعتبار أن قيمة $\beta < 0$ حيث $\beta = -1/KT$ نجد:

$$Z = CV 2\pi (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/KT} d\epsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غاما: لذا نفرض $x = \epsilon/KT$ فنجد:

$$\epsilon = KT x \Rightarrow d\epsilon = KT dx \quad \epsilon^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل:

$$Z = CV 2\pi (2m)^{3/2} (KT)^{1/2} KT \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$Z = CV 2\pi (2m)^{3/2} (KT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$$

• لدينا صيغة $dN(g)$ المعطاة والمعبرة عن عدد الجسيمات اللاسبكية التي تنحصر سرعها المطلقة في المجال $[g, g + dg]$ بالشكل التالي:

$$dN(g) = \frac{N}{Z} e^{\beta \epsilon} g(g) dg \quad (*)$$

لدينا من تعريف تابع التخاص

$$Z = CV (2\pi m kT)^{3/2} \quad (a)$$

نوجد عبارة تحلل السويات بدلالة عنصر الفراغ الطوري الذي يربط اندفاعه بالسرعة المطلقة بالشكل التالي:

$$p = m g \Rightarrow dp = m dg$$

$$g(g) dg = C d\Gamma(g) = C dq_v dp_v = CV 4\pi p^2 dp = CV 4\pi m^3 g^2 dg \quad (b)$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

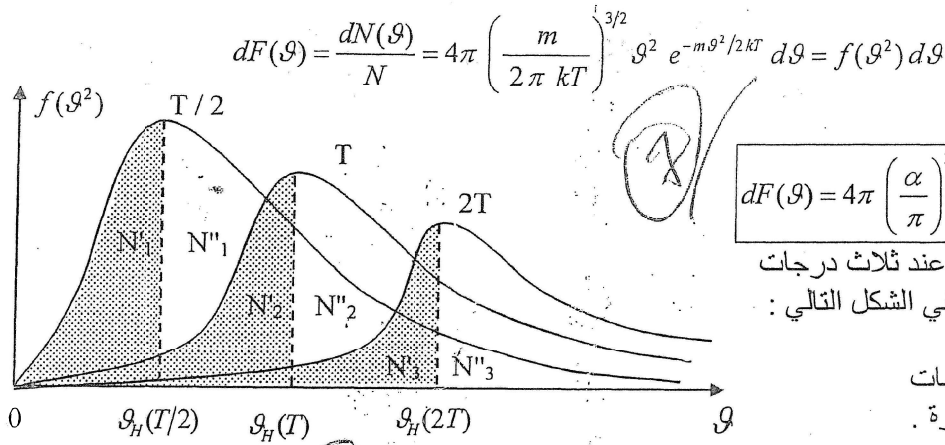
$$\epsilon = m g^2 / 2 \quad (c)$$

بتعويض العبارات (a) و (b) و (c) في (*).

مع الأخذ بعين الاعتبار قيمة مضروب لاغرانج $\beta = -1/kT$ نجد:

$$dN(g) = \frac{N}{CV (2\pi m kT)^{3/2}} e^{-m g^2 / 2kT} CV 4\pi m^3 g^2 dg$$

بالاختزال والقسمة على N نحصل على تابع توزيع السرعة المعطاة لجسيم واحد، بالشكل التالي:



و بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$

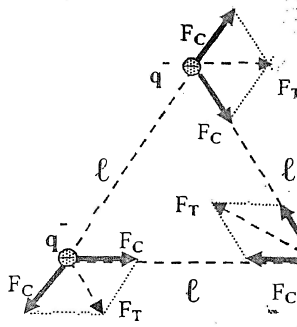
$$dF(g) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} g^2 e^{-\alpha g^2} dg = f(g^2) dg$$

• تمثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة كما هو موضح في الشكل التالي:
المناقشة والتفسير:
تحقيقاً لمبدأ انحفاظ عدد الجسيمات
 $N = \text{cte}$ عند كل درجة حرارة.

فإننا نمثل المساحة المحصورة تحت المنحني البياني بـ N ، حيث $N = N' + N''$ حيث N' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أقل من السرعة الأكثر احتمالاً g_H . و N'' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أكبر من g_H .

حيث g_H السرعة الموافقة لقمة المنحني (حيث تكون قيمة تابع الكثافة أعظمية)، (السرعة الأكثر احتمالاً).
النتائج:

- 1- تنزاح النهايات العظمى للمنحنيات بارتفاع درجات الحرارة نحو تزايد قيمة السرعة المطلقة للجسيمات
- 2- بارتفاع درجات الحرارة يزداد N'' على حساب تناقص N' بحيث يبقى N ثابت ($N = N' + N''$).
- 3- بارتفاع درجات الحرارة تنخفض قيمة تابع الكثافة $f(g^2)$ ، مما يشير لانخفاض عدد الجسيمات التي تقع سرعتها المطلقة في المجال $[g, g + dg]$.



• التمثيل موضح بالشكل، وهي تنافر بين الشحنتين السالبتين، وتجاذب بين الموجبة والسالبة. نحسب شداتها بتطبيق كولون
 $F_C = k \frac{q^2}{l^2}$ وهي متساوية لجميع الشحنات.

• نمثل قوة كولون المحصلة المؤثرة في كل شحنة، كما بالشكل:
نحسب شدة المحصلة المؤثرة في كل من الشحنتين السالبتين

$$\vec{F}_T(q^-) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^-) = \sqrt{F_{C1}^2 + F_{C2}^2 + 2F_{C1}F_{C2}\cos(\pi - 60)}$$

$$\vec{F}_T(q^-) = F_{C1} \sqrt{2[1 - \cos(60)]} = F_{C1} \sqrt{2[1 - 0,5]} = F_{C1} = k \frac{q^2}{l^2}$$

وهي تساوي الشدة المؤثرة في كل منهما على حدة.

نحسب شدة المحصلة المؤثرة في الشحنة الموجبة بنفس الأسلوب

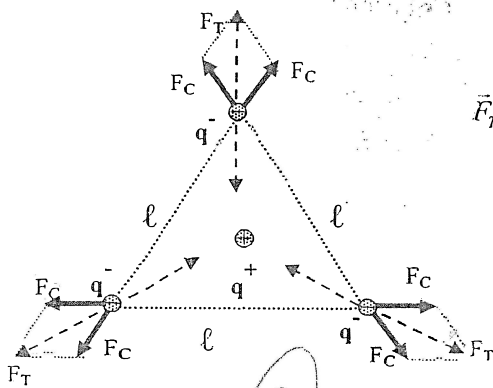
$$\vec{F}_T(q^+) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_T(q^+) = \sqrt{F_{C1}^2 + F_{C2}^2 + 2F_{C1}F_{C2}\cos(60)}$$

$$\vec{F}_T(q^+) = F_{C1} \sqrt{2[1 + \cos(60)]} = \sqrt{3} F_{C1} = \sqrt{3} k \frac{q^2}{l^2}$$

وهذا يعني أن كل شحنة ستتحرك وفق المحصلة $\vec{F}_T$ عند إزالة تثبيتها.

-2

• بدايةً نحسب محصلة قوى التدافع المؤثرة في كل من الشحنات السالبة، كما هو موضح بالشكل.



علماً أن قوة كولون المتبادلة بين كل شحنتين سالبتين هي $F_{C1} = k \frac{q^-^2}{\ell^2}$

$$\vec{F}_r(q^-) = \vec{F}_{C1} + \vec{F}_{C2} \Rightarrow F_r(q^-) = \sqrt{F_{C1}^2 + F_{C2}^2 + 2F_{C1}F_{C2}\cos(60)}$$

$$F_r(q^-) = \sqrt{3} F_{C1} = \sqrt{3} k \frac{(q^-)^2}{\ell^2}$$

تتوازن كل من الشحنات السالبة الثلاث مع الشحنة الموجبة المركزية بقوة تجاذب

$$F_{q^+q^-} = k \frac{q^- q^+}{x^2} = F_r(q^-)$$

أي أن $F_{q^+q^-}$ مساوية بالقيمة المطلقة ومعاكسة بالاتجاه للمحصلة $F_r(q^-)$. حيث x المسافة بين مركز المثلث وأحد

رؤوسه وهي هندسياً تساوي ثلثي طول العاقد (الارتفاع في المثلث) والمساوي بدوره لـ

$$x = \frac{2}{3} \ell \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{3} \ell \quad \text{إذن} \quad \ell \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \ell$$

بالتعويض والاختزال نحصل على قيمة q^+ بدلالة q^- كما يلي:

$$3k \frac{q^- q^+}{\ell^2} = \sqrt{3} k \frac{(q^-)^2}{\ell^2} \Rightarrow q^+ = \frac{\sqrt{3}}{3} q^- \Leftrightarrow q^+ < q^-$$

جواب السؤال الثاني:

1- (اختياري)

• نعلم أن العبارة الشعاعية للحقل الكهربائي للشحنة النقطية q يعطى على بعد منها $\vec{r}$ بالعلاقة:

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad ; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{و} \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{E} = kq \frac{x}{r^3} \vec{i} + kq \frac{y}{r^3} \vec{j} + kq \frac{z}{r^3} \vec{k}$$

نوجد حدود عبارة التفريق

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = kq \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = kq \frac{r^3 - 3x^2}{r^6} = \frac{kq}{r^3} - \frac{3kq x^2}{r^5}$$

وبالمثل نوجد الحدين الآخرين $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ و $\frac{\partial E_z}{\partial z}$. وبالتعويض نجد:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = \frac{3kq}{r^3} - \frac{3kq}{r^3} = 0$$

• نكتب العبارة الشعاعية للحقل بالشكل: $\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r} = kq \frac{\vec{r}}{r^3}$

ثم نبين أن $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\text{grad} \frac{1}{r}$ بالشكل التالي:

$$\text{grad} \frac{1}{r} = \vec{\nabla} \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{0 - \frac{x}{r^2}}{r^2} \vec{i} + \frac{0 - \frac{y}{r^2}}{r^2} \vec{j} + \frac{0 - \frac{z}{r^2}}{r^2} \vec{k} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

فنجد المطلوب $\vec{E} = -kq \text{grad} \frac{1}{r}$

(خيارى)

رض ناقل طوله l يتحرك بسرعة $\vec{q}$ في حقل تحريض مغناطيسي ثابت $\vec{B} = cte$ يتجه نحو الداخل . كما هو موضح في الشكل . تكتسب الإلكترونات الحرة (الشحنات السالبة) سرعة الناقل $\vec{q}$ ، فتخضع لقوة مغناطيسية $\vec{F}_m = q(\vec{q} \wedge \vec{B})$ ، تتحدد جهتها حسب قاعدة اليد اليمنى . تتحرك الإلكترونات الحرة تحت تأثير $\vec{F}_m$ نحو الأسفل لتتراكم عند النهاية السفلى للناقل (مشكلة القطب السالب) ، وبالتزامن تتحرك الثقوب (الأماكن التي هجرتها الإلكترونات الحرة) باعتبارها شحنات موجبة (مساوية بالقيمة العددية لشحنة الإلكترون ومعاكسة لها بالإشارة) نحو الأعلى لتتراكم عند النهاية العليا للناقل (مشكلة القطب الموجب) .

يرافق تراكم الشحنات عند القطبين نشوء حقل كهربائي متنامي $\vec{E}$ يتجه من الشحنات الموجبة نحو السالبة ، الأمر الذي يؤدي لنشوء قوة كهربائية $\vec{F}_c = q\vec{E}$ متنامية ، تعاكس القوة المغناطيسية $\vec{F}_m$ بالاتجاه .

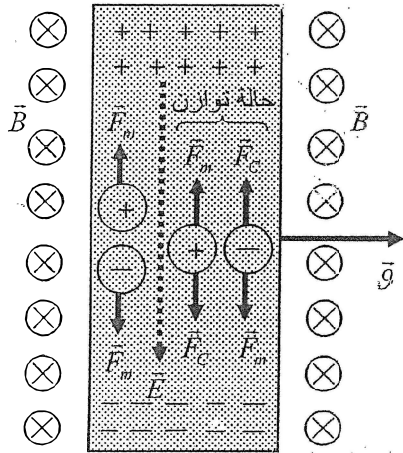
تستمر هجرة الشحنات باتجاه القطبين إلى الحد الذي تبلغ فيه شدة $\vec{E}$ قيمة كبيرة ، توافقها قوة كهربائية $\vec{F}_c$ مساوية ومعاكسة للقوة

المغناطيسية $\vec{F}_m$ أي

$$\vec{F}_c = -\vec{F}_m \Rightarrow q\vec{E} = -q(\vec{q} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \vec{E} = -\vec{q} \wedge \vec{B}$$

عندئذ تتوقف هجرة الشحنات باتجاه القطبين (حالة توازن قوى) ، ونحصل على مدخرة مشحونة ، أو قوة محرك (دافعة) كهربائية تأثيرية . تبقى المدخرة مشحونة بالتأثير طالما بقيت متحركة بنفس السرعة $\vec{q}$ فإذا وصلنا قطبيها إلى مقاومة R نلاحظ سريان تيار كهربائي من القطب الموجب إلى السالب عبر R .

ملاحظة : عند حركة الناقل بسرعة $\vec{q}$ في حقل مغناطيسي $\vec{B}$ متناوبة (نحو الداخل والخارج) ، يحصل تناوب في نوع الشحنات المتجمعة عند الأقطاب ، وهو الأساس المستخدم في توليد التيار المتناوب .



اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون
مدة الامتحان: ساعتان

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
لطلاب السنة الثانية رياضيات - الدورة الإضافية للعام الدراسي 2015 - 2016

اجب عن السؤالين التاليين: (50 درجة).

- س1- استنتج عبارة رقم الانشغال $N_{(M-B)}$ لتوزيع مكسويل - بولتزمان (بدلالة مضروبي لاغرانج).
• جملة مكونة من N جسيم ($N \gg 1$) موزعة على سويتين للطاقة ϵ_1 و ϵ_2 ، متحلتين بالشكل: $g_1 = 1$ و $g_2 = 2$
والمطلوب: أوجد الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(1, N-1)$ في الحالات التالية:
1- الجسيمات متمايزة (كلاسيكية). 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

- س2- تُعبر الصيغة $dN(\vartheta_{x,y,z}) = \frac{N}{Z} e^{\beta \epsilon} g(\vartheta_{x,y,z}) d\vartheta_{x,y,z}$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تتحصر مركبات سرعتها المطلقة وفق توزيع M-B في المجالات $[\vartheta_x, \vartheta_x + d\vartheta_x]$ ، $[\vartheta_y, \vartheta_y + d\vartheta_y]$ ، $[\vartheta_z, \vartheta_z + d\vartheta_z]$.
فإذا علمت أن الطاقة الإجمالية للجسيمات هي طاقة ماكروية، وأن قيمة تابع التحاص $Z = CV (2\pi mKT)^{3/2}$
وقيمة التكامل $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$ ، حيث $\alpha = m/2kT$ ، والمطلوب:

- أوجد عبارة عدد الجسيمات $dN(\vartheta_x)$ المتحركة وفق المحور Ox ، واستنتج عبارة تابع الكثافة $g(\vartheta_x)$.
- برهن أن تابع الكثافة $g(\vartheta_x)$ هو تابع كثافة احتمال.
- استند من العبارة الحاصلة $dN(\vartheta_x)$ ومن تابع الخط $E_r(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ في حساب عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي المتحركة وفق المحور Ox ، التي تقع سرعتها المطلقة في المجال $N(0 \rightarrow \vartheta_0)$.

اجب عن واحد فقط من السؤالين التاليين: (30 درجة).

- س3- نُثبت في رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه ℓ (m)، ثلاث شحنات متساوية القيمة، q (col)، لكل منها، ومهملة الوزن.

- 1- إذا كانت الشحنات مختلفة الإشارة بحيث تكون واحدة موجبة واثنين سالبين. المطلوب:
• ارسم الشكل، ومثل عليه اتجاه قوة كولون $\vec{F}_0$ المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها (بدلالة q و k و ℓ).
• أوجد قيمة القوة المؤثرة في كل شحنة (بدلالة q و k و ℓ) بعد إزالة التثبيت.

- 2- إذا كانت الشحنات الثلاث متساوية القيمة ومتفقة الإشارة (سالبة). والمطلوب:
• ارسم الشكل الجديد، ومثل عليه اتجاه قوة كولون المؤثرة في كل شحنة، واحسب شدتها.
• أوجد قيمة الشحنة الموجبة الرابعة الواجب وضعها في مركز المثلث بحيث تبقى الشحنات في أماكنها بعد إزالة التثبيت.

- س4- احسب شدة واتجاه حقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ الناتج عن سلك مستقيم لانهائي الطول عندما يمر فيه تيار شدته I وذلك في نقطة تبعد عنه مسافة x . وضح بالرسم اتجاه $\vec{B}$ الموافق للاتجاه الافتراضي للتيار.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس 4 / 9 / 2016

د. محمد إبراهيم

مدرس المقرر

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
طلاب السنة الثانية رياضيات - الدورة الإضافية للعام الدراسي 2015 - 2016
(الدرجة العسرى: ثمانون)

أجوبة الأسئلة الإلزامية:
جواب السؤال الأول: (الزامي) 25

ننطلق من عبارة الوزن الإحصائي لتوزيع (M-B). المعطاة بالعلاقة: $W_{M-B} = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$

نوجد بدايةً $\ln(W_{M-B})$ ، ثم نوجد تفاضله $d \ln(W_{M-B})$ ، الذي نعوضه في عبارة شرط الحالة الأكثر احتمالاً التالي:

$$d \ln(W_{M-B}) + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad (1)$$

$$\ln(W_{M-B}) = \ln N! + \sum_i [N_i \ln g_i - \ln N_i!]$$

وبما أن الجسيمات كلاسيكية نستخدم تقريب ستيرلنج $\ln x! \approx x \ln x - x$ نجد:

$$\ln(W_{M-B}) \approx N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i)$$

بما أن W_{M-B} تابع لكل من N_i و g_i ، ونبحث هنا نبحث عن عدد الجسيمات N_i الموزعة على السوية i التي درجة تحللها g_i ثابتة. فإننا نجد بمفاضلة الطرفين:

$$d \ln(W_{M-B}) = \frac{\partial \ln(W_{M-B})}{\partial N_i} dN_i \approx \frac{\partial}{\partial N_i} \left[N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i) \right] dN_i \quad (*)$$

$$\approx 0 - 0 + \sum_i (\ln g_i - \ln N_i - 1 + 1) dN_i = \sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i$$

بالتعويض في (1) مع الأخذ بعين الاعتبار شرطي انحفاظ عدد الجسيمات والطاقة التاليين:

$$U = \sum_i \varepsilon_i N_i \Rightarrow dU = \sum_i \varepsilon_i dN_i \quad N = \sum_i N_i \Rightarrow dN = \sum_i dN_i$$

فنحصل على رقم الانشغال في الحالة الأكثر احتمالاً:

$$\sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i + \alpha \sum_i dN_i + \beta \sum_i \varepsilon_i dN_i = 0$$

وبالإصلاح:

$$\sum_i (\ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \varepsilon_i) dN_i = 0 \Rightarrow \ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \varepsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_i)}$$

$$N_{i(M-B)} = g_i e^{\alpha + \beta \varepsilon_i}$$

$$N_{i(M-B)} = e^{\alpha} g_i e^{\beta \varepsilon_i}$$

بشكل كلاسيكي

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(N-1,1)} = N! \left(\frac{1^{N-1}}{(N-1)!} \frac{2^1}{1!} \right) = 2N$$

2- الجسيمات بوزونات

$$W_{B-F} = \prod_{i=1}^M \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{(N-1+1-1)! (1+2-1)!}{(N-1)! (1-1)! 1! (2-1)!} = 2$$

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة $(N-1,1)$ لا تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ فهي غير مقبولة

25

جواب السؤال الثاني: (الزامي)

تعيد كتابة العبارة التفاضلية لعدد الجسيمات الموزعة تبعاً لمركبات سرعتها المطلقة وفق توزيع M-B في المجالات $[g_x, g_x + dg_x]$ ، $[g_y, g_y + dg_y]$ ، $[g_z, g_z + dg_z]$ كما يلي:

$$dN(g_{x,y,z}) = \frac{N}{Z} e^{\beta \epsilon} g(g_{x,y,z}) dg_{x,y,z} \quad (1)$$

لمعرفة عدد الجسيمات المتحركة باتجاه أحد المحاور (مثلاً ox) (أي لمعرفة $dN(g_x)$ التي تنحصر سرعتها في المجال $[g_x, g_x + dg_x]$)، نُعيد صياغة مفهوم عنصر فراغ الاندفاع الطوري بالشكل التالي:

$$d\Gamma(g_{x,y,z}) = dq_x \cdot dP_y = V dg_x dP_y dP_z \quad (2)$$

$$dP_x = m dg_x \quad dP_y = m dg_y \quad dP_z = m dg_z \quad \text{وبما أن}$$

بالتعويض في (2) بعد استبدال مركبات الاندفاع بمركبات السرعة

$$d\Gamma(g_{x,y,z}) = dq_x \cdot dP_y = V m^3 dg_x dg_y dg_z$$

وبالعودة إلى العلاقة التي تربط بين درجة التحلل وعنصر فراغ السرعة الطوري التي تصبح بالشكل التالي:

$$g(g_{x,y,z}) dg_{x,y,z} = C d\Gamma(g_{x,y,z}) = CV m^3 dg_x dg_y dg_z \quad (3)$$

وإذا اعتبرنا الطاقة الإجمالية طاقة حركية

$$\epsilon = \frac{1}{2} m g^2 = \frac{1}{2} m (g_x^2 + g_y^2 + g_z^2) \quad (4)$$

وإذا أخذنا تابع التحاص لجسيم واحد

$$Z = CV (2\pi m KT)^{3/2} \quad (5)$$

كما نأخذ مضروب لاغرانج بعين الاعتبار

$$\beta = -1/KT \quad (6)$$

نعوض (3) و (4) و (5) و (6) في (1) نحصل على عدد الجسيمات الموزعة تبعاً لمركبات سرعتها المطلقة بالشكل التالي:

$$dN(g_{x,y,z}) = \frac{N}{CV (2\pi m KT)^{3/2}} e^{-\frac{m}{2KT} (g_x^2 + g_y^2 + g_z^2)} CV m^3 dg_x dg_y dg_z$$

$$dN(g_{x,y,z}) = N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2KT} g_x^2} dg_x e^{-\frac{m}{2KT} g_y^2} dg_y e^{-\frac{m}{2KT} g_z^2} dg_z$$

لمعرفة عدد الجسيمات المتحركة باتجاه أحد المحاور (وليكن ox) نضع مركبة سرعته دون تكامل ونكامل مركبات السرعة على المحورين الآخرين oy و oz في المجال $[-\infty, +\infty]$ كما يلي:

$$N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2KT} g_x^2} dg_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2KT} g_y^2} dg_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2KT} g_z^2} dg_z$$

نحل التكاملات باستخدام تكاملات بواسون وذلك بفرض $\alpha = m/2KT$ على النحو التالي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha g_y^2} dg_y = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\alpha g_y^2} dg_y = 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha g_z^2} dg_z = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\alpha g_z^2} dg_z = 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

بالتعويض عن $\alpha = m/2KT$ وعن التكاملات بقيمها نجد:

$$dN(g_x) = N \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha g_x^2} dg_x = N \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha g_x^2} dg_x$$

للحصول على تابع توزيع مركبة السرعة المطلقة ، نقسم الطرفين على N

$$dF(g_x) = \frac{dN(g_x)}{N} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha g_x^2} dg_x = g(g_x) dg_x$$

يمثل المقدار $g(g_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha g_x^2}$ تابع كثافة غوص الطبيعي.

• للبرهان على أن تابع الكثافة $g(g_x)$ هو تابع كثافة احتمال. نتحقق من كونه يحقق الشرط الواحد.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(g_x) dg_x = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha g_x^2} dg_x = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha g_x^2} dg_x = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = 1$$

• وجدنا أن عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي $dN_o(g_x)$ المتحركة وفق المحور ox ، التي تقع سرعتها المطلقة في المجال

$$المحدد $[g_x, g_x + dg_x]$ يعطى بالعلاقة: $dN_o(g_x) = N \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha g_x^2} dg_x$$$

لإيجاد العدد الواقع في المجال $N_o(0 \rightarrow g_o)$ نكامل على المجال المذكور.

$$N_o(0 \rightarrow g_o) = \int_0^{g_o} dN_o(g_x) = N \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^{g_o} e^{-\alpha g_x^2} dg_x$$

نفرض الوسيط x بالشكل التالي $x^2 = \alpha g_x^2$ ، فيكون $g_x = x/\sqrt{\alpha}$ و $dg_x = dx/\sqrt{\alpha}$

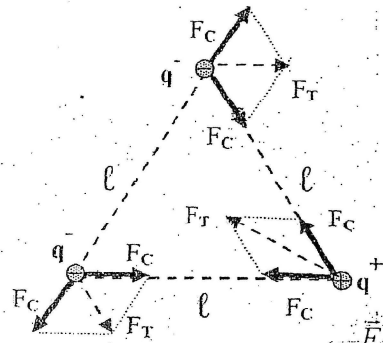
أما حدود التكامل فتصبح: عندما $g_x = 0$ فإن $x = 0$ ، وعندما $g_x = g_o$ فإن $x = \sqrt{\alpha} g_o$ بالضرب والقسمة على 2 والتعويض نجد:

$$N_o(0 \rightarrow g_o) = N \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\sqrt{\alpha} g_o} e^{-x^2} dx = \frac{N}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx \right] \Rightarrow N_o(0 \rightarrow g_o) = \frac{N}{2} E_r(x)$$

أجوبة الأسئلة الاختيارية:

جواب السؤال الثالث: (اختياري)

30



• التمثيل موضح بالشكل، وهي تتأثر بين الشحنتين السالبتين، وتجاذب بين الموجبة والسالبة. نحسب شداتها بتطبيق كولون

$$F_c = k \frac{q^2}{\ell^2} \text{ وهي متساوية لجميع الشحنت}$$

• نمثل قوة كولون المحصلة المؤثرة في كل شحنة، كما بالشكل. نحسب شدة المحصلة المؤثرة في كل من الشحنتين السالبتين

$$\vec{F}_T(q^-) = \vec{F}_{c1} + \vec{F}_{c2} \Rightarrow F_T(q^-) = \sqrt{F_{c1}^2 + F_{c2}^2 + 2F_{c1}F_{c2}\cos(\pi - 60)}$$

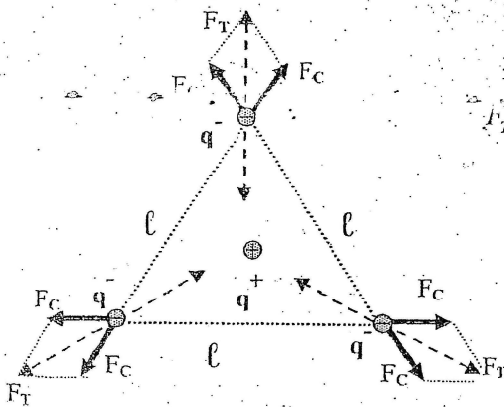
$$F_T(q^-) = \sqrt{F_{c1}^2 + F_{c2}^2 + 2F_{c1}F_{c2}\cos(120)} = \sqrt{F_{c1}^2 + F_{c2}^2 - F_{c1}F_{c2}} = \sqrt{3} F_{c1} = \sqrt{3} k \frac{q^2}{\ell^2}$$

وهي تساوي الشدة المؤثرة في كل منهما على حدة. نحسب شدة المحصلة المؤثرة في الشحنة الموجبة بنفس الأسلوب

$$F_T(q^+) = F_{c1} + F_{c2} \Rightarrow F_T(q^+) = \sqrt{F_{c1}^2 + F_{c2}^2 + 2F_{c1}F_{c2}\cos(60)}$$

$$F_T(q^+) = F_{c1} \sqrt{2[1 + \cos(60)]} = \sqrt{3} F_{c1} = \sqrt{3} k \frac{q^2}{\ell^2}$$

وهذا يعني أن كل شحنة ستتحرك وفق المحصلة $\vec{F}_T$ عند إزالة تثبيتها



• بداية نحسب محصلة قوى التداخل المؤثرة في كل من الشحنت السالبة، كما هو موضح بالشكل.

علماً أن قوة كولون المتبادلة بين كل شحنتين سالبتين هي $F_{c1} = k \frac{q^2}{\ell^2}$

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات
اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون
مدة الامتحان: ساعتان
امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
لطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الثاني للعام الدراسي 2015 - 2016

أجب عن مايلي: (20 درجة لكل سؤال).

- س1- استنتج** (بتطبيق قواعد العد) عبارة الوزن الإحصائي لتوزع مكسويل - بولتزمان W_{M-B} .
- جملة مكونة من 3 جسيمات موزعة على سويتين للطاقة ϵ_1 و ϵ_2 ، متحللتين بالشكل: $g_1=1$ و $g_2=2$
- والمطلوب: أوجد (مع التمثيل) الوزن الإحصائي للحالة الماكروية $(2, 1)$ في الحالات التالية:
- 1- الجسيمات متمايضة A و B و C. 2- الجسيمات بوزونات. 3- الجسيمات فيرميونات.

س2- تُعبر الصيغة $dN(\vartheta) = \frac{N}{Z} e^{\beta \epsilon} g(\vartheta) d\vartheta$ عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تنحصر سرعها المطفقة في

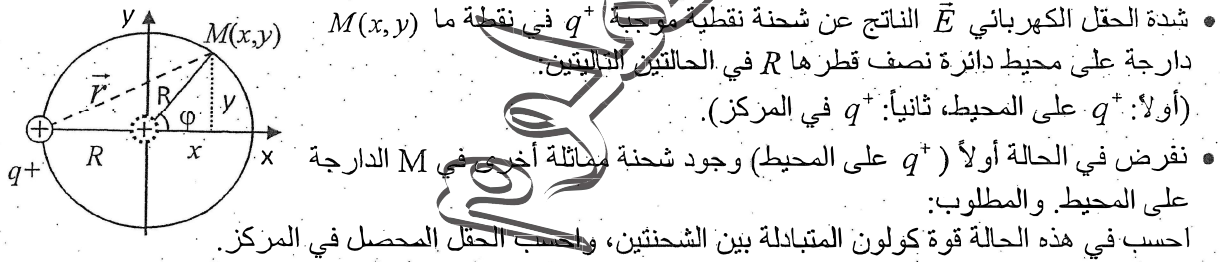
المجال $[q, q+dq]$ وفقاً لتوزع (M-B). والمطلوب:

- استنتج قيمة تابع التفاضل التالية $Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$ في الحالة المستمرة بدلالة متحولات الجملة.

علماً أن $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \Gamma(\frac{n}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

- أوجد تابع الكثافة $f(\vartheta^2)$ بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$.
- مثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة مع مناقشة النتائج والتفسير.

س3- أوجد ما يلي بدلالة k ثابتة كولون والشحنة q^+ نصف قطر الدائرة R والزاوية φ الموضحة بالشكل



س4- اشرح (مع الرسم) آلية تشكل القوة المحركة (الدافعة) الكهربائية التأثيرية في موصل يتحرك بسرعة $\vec{v}$ عمودياً على حقل تحريض مغناطيسي $\vec{B}$.

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس 11 / 7 / 2016

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

16

أجوبة امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات
لطلاب السنة الثانية رياضيات - الفصل الثاني للعام الدراسي 2015 - 2016
(الدرجة العظمى: ثمانون)

جواب السؤال الأول: 20

نفرض جملة معزولة مكونة من N جسيم متمايز، موزعة على ε_i سوية طاقة متحللة، ودرجة تحلل كل منها g_i .
تحوي السوية الواحدة على N_i جسيم (ندعوه رقم انشغال السوية). يجري التوزيع بحيث يتحقق قانوني انحفاظ عدد الجسيمات $N = \sum_i N_i$ وطاقتها $U = \sum_i N_i \varepsilon_i$

بتطبيق قواعد العد:

يعطى عدد الحالات الميكروية الإجمالي w ، الناتج عن التوزيع المسبق لـ N جسيم متمايز على M سوية (الموافق للحالة الماكروية) $(N_1, N_2, \dots, N_i, \dots, N_M)$ بالعلاقة:

$$w = \frac{N!}{\prod_{i=1}^M N_i!}$$

وبما أن السويات متحللة لطبقات (خلايا).

فمن أجل السوية i ، يعطى عدد حالات التوزيع الميكروية w^i ، الناتج عن توزيع N_i جسيم متمايز على g_i خلية بالعلاقة:

$$w^i = \frac{N_i!}{g_i!}$$

ومن أجل كافة السويات $i \in [1, 2, \dots, M]$ يصبح عدد حالات التوزيع الميكروية w'' بالشكل:

$$w'' = \prod_{i=1}^M \frac{N_i!}{g_i!}$$

فيكون العدد الإجمالي لحالات التوزيع الميكروية (الوزن الإحصائي W) الموافق للحالة الماكروية - مسبقة التوزيع - بالشكل التالي: $(N_1, N_2, \dots, N_i, \dots, N_M)$

$$W_{M-B} = w w'' = N! \prod_{i=1}^M \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$$

$$W_{M-B} = N! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \Rightarrow W_{(1,2)} = 3! \left(\frac{1!}{1!} \frac{2^2}{2!} \right) = 12$$

• 1- الجسيمات متميزة (كلاسيكية)

BC	BC	B C	C B
A	A	A	A
AC	AC	A C	C A
B	B	B	B
AB	AB	A B	B A
C	C	C	C

$$W_{B-E} = \prod_{i=1}^M \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i! (g_i - 1)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{(1+1-1)!}{1! (1-1)!} \frac{(2+2-1)!}{2! (2-1)!} = 3$$

2- الجسيمات بوزونات

••	•••	•••
•	•	•

3- الجسيمات فيرميونات: نلاحظ أن الحالة (1,2) تحقق الشرط $g_i \geq N_i$ وهي حالة توزيع مقبولة

$$W_{F-D} = \prod_{i=1}^M \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!} \Rightarrow W_{(1,2)} = \frac{1!}{1! (1-1)!} \frac{2!}{2! (2-1)!} = 1$$

$$\frac{1!}{1! (1-1)!} \frac{2!}{2! (2-1)!} = 1$$

جواب السؤال الثاني:

• إيجاد قيمة Z في الحالة المستمرة بدلالة متحولات الجملة:

$$Z = \int_0^{\infty} e^{\beta \varepsilon} g(\varepsilon) d\varepsilon \quad \text{من عبارة تابع التخاص في الحالة المستمرة}$$

بالاستفادة من العلاقة التي تربط درجة التحلل $g(\varepsilon)$ بعنصر فراغ الطاقة الطوري $d\Gamma(\varepsilon)$

$$g(\varepsilon) d\varepsilon = C d\Gamma(\varepsilon) = CV 2\pi (2m)^{3/2} (\varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

وبالتعويض وإخراج المقدار الثابت $CV 2\pi (2m)^{3/2}$ خارج عبارة التكامل، نجد:

$$Z = CV 2\pi (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} e^{\beta \varepsilon} d\varepsilon$$

فإذا أخذنا بعين الاعتبار أن قيمة $\beta < 0$ حيث $\beta = -1/KT$ نجد:

$$Z = CV 2\pi (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/KT} d\varepsilon$$

نحل التكامل بتحويله لتابع غامب لذا نفرض $x = \varepsilon/KT$ فنجد:

$$\varepsilon = KT x \Rightarrow d\varepsilon = KT dx \quad \text{و} \quad \varepsilon^{1/2} = (KT)^{1/2} x^{1/2}$$

وبالتعويض في عبارة التكامل:

$$Z = CV 2\pi (2m)^{3/2} (KT)^{1/2} KT \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$Z = CV 2\pi (2m)^{3/2} (KT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow Z = CV (2\pi m KT)^{3/2}$$

• لدينا صيغة $dN(g)$ المعطاة والمعبرة عن عدد الجسيمات الكلاسيكية التي تتحصر سرعها المطلقة في المجال $[g, g + dg]$ بالشكل التالي:

$$dN(g) = \frac{N}{Z} e^{\beta \varepsilon} g(g) dg \quad (*)$$

لدينا من تعريف تابع التخاص

$$Z = CV (2\pi m kT)^{3/2} \quad (a)$$

نوجد عبارة تحلل السويات بدلالة عنصر الفراغ الطوري الذي يرتبط إندفاعه بالسرعة المطلقة بالشكل التالي:

$$p = m g \Rightarrow dp = m dg$$

$$g(g) dg = C d\Gamma(g) = C dq_x dp_x = CV 4\pi p^2 dp = CV 4\pi m^3 g^2 dg \quad (b)$$

وباعتبار أن الطاقة الإجمالية للجسيم هي طاقة حركية فقط

$$\varepsilon = m g^2 / 2 \quad (c)$$

بتعويض العبارات (a) و (b) و (c) في (*):

مع الأخذ بعين الاعتبار قيمة مضروب لاغرانج $\beta = -1/kT$ نجد:

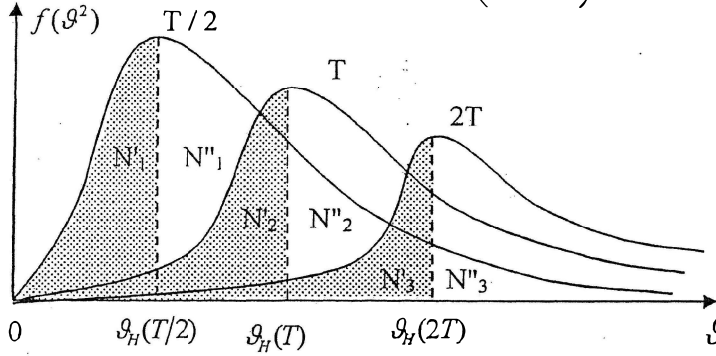
$$dN(g) = \frac{N}{CV (2\pi m kT)^{3/2}} e^{-m g^2 / 2kT} CV 4\pi m^3 g^2 dg$$

بالاختزال والقسمة على N نحصل على تابع توزيع السرعة المطلقة لجسيم واحد ، بالشكل التالي :

$$dF(\mathcal{G}) = \frac{dN(\mathcal{G})}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \mathcal{G}^2 e^{-m\mathcal{G}^2/2kT} d\mathcal{G} = f(\mathcal{G}^2) d\mathcal{G}$$

و بدلالة الثابت $\alpha = m/2kT$

$$dF(\mathcal{G}) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \mathcal{G}^2 e^{-\alpha\mathcal{G}^2} d\mathcal{G} = f(\mathcal{G}^2) d\mathcal{G}$$



• نمثل تابع الكثافة بيانياً عند ثلاث درجات حرارة مختلفة كما هو موضح في الشكل التالي :

المناقشة والتفسير :

تحقيقاً لمبدأ انحفاظ عدد الجسيمات $N = cte$ عند كل درجة حرارة .

فإننا نمثل المساحة المحصورة تحت المنحنى البياني بـ N ، حيث $N = N' + N''$ حيث N' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أقل من السرعة الأكثر احتمالاً $\mathcal{G}_H$. و N'' عدد الجسيمات التي تمتلك سرعة مطلقة أكبر من $\mathcal{G}_H$.

حيث $\mathcal{G}_H$ السرعة الموافقة لقمة المنحنى (حيث تكون قيمة تابع الكثافة أعظمية) ، (السرعة الأكثر احتمالاً).

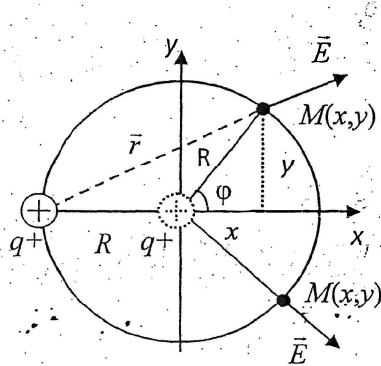
النتائج :

- 1- تتزاح النهايات العظمى للمنحنيات بارتفاع درجات الحرارة نحو تزايد قيمة السرعة المطلقة للجسيمات
- 2- بارتفاع درجات الحرارة يزداد N'' على حساب تناقص N' بحيث يبقى N ثابت ($N = N' + N''$) .
- 3- بارتفاع درجات الحرارة تنخفض قيمة تابع الكثافة $f(\mathcal{G}^2)$ ، مما يشير لانخفاض عدد الجسيمات التي تقع سرعتها المطلقة في المجال $[\mathcal{G}, \mathcal{G} + d\mathcal{G}]$.

جواب السؤال الثالث:

• حساب $\vec{E}$

أولاً: عندما q^+ على المحيط فتكون إحداثياتها $(-R, 0)$ وموجهة موضع النقطة $M(x, y)$



$$\vec{r} = [x - (-R)]\vec{i} + (y - 0)\vec{j}$$

$$x = R \cos \varphi \quad \varphi \quad y = R \sin \varphi$$

$$\vec{r} = (R \cos \varphi + R)\vec{i} + (R \sin \varphi - 0)\vec{j}$$

$$r^2 = (R \cos \varphi + R)^2 + (R \sin \varphi)^2$$

$$r^2 = 2R^2(1 + \cos \varphi)$$

فتكون جهة الحقل كما هو موضح في الشكل () . وشدته:

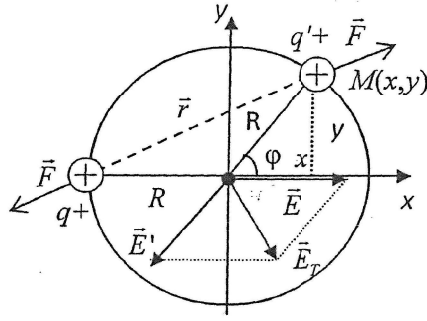
$$E = k \frac{q}{r^2} = k \frac{q}{2R^2(1 + \cos \varphi)} = \begin{cases} E_{\max} = \infty ; \varphi = \pi \\ E_{\min} = k \frac{q}{4R^2} ; \varphi = 0 \end{cases}$$

وهنا تكون الشدة متغيرة القيمة والاتجاه من نقطة لأخرى.

ثانياً: من أجل q^+ في المركز فإن $R = r$ ، ونحصل على شدة ثابتة القيمة متغيرة الاتجاه $E = k \frac{q}{R^2}$

• لحساب قوة كولون المتبادلة، والحقل المحصل في المركز.

$$F = k \frac{q^2}{r^2} = k \frac{q^2}{2R^2(1 + \cos \varphi)} = \begin{cases} F_{\max} = \infty ; \varphi = \pi \\ F_{\min} = k \frac{q^2}{4R^2} ; \varphi = 0 \end{cases}$$



شكل ()

نلاحظ من الشكل أن الزاوية بين الحقلين $(\vec{E}, \vec{E}') = \pi - \phi$ وشدنا الحقلين في المركز متساويتين

$$E = E' = k \frac{q}{R^2}$$

فتكون شدة الحقل المحصل

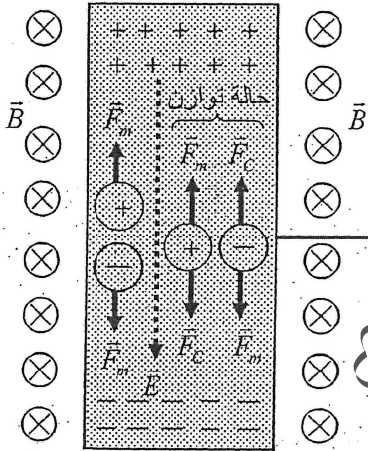
$$E_T = \sqrt{E^2 + E'^2 + 2EE' \cos(\pi - \phi)}$$

$$E_T = \sqrt{2E^2(1 - \cos \phi)}$$

$$E_T = k \frac{q}{R^2} \sqrt{2(1 - \cos \phi)} = \begin{cases} 0 & ; \phi = 0 \\ \sqrt{2} k \frac{q}{R^2} & ; \phi = \frac{\pi}{2} \\ 2k \frac{q}{R^2} & ; \phi = \pi \end{cases}$$

جواب السؤال الرابع:

نفرض ناقل طوله l يتحرك بسرعة $\vec{q}$ في حقل تحريض مغناطيسي ثابت $\vec{B} = cte$ يتجه نحو الداخل . كما هو موضح في الشكل . تكتسب الإلكترونات الحرة (الشحنات السالبة) سرعة الناقل $\vec{q}$ ، فتخضع لقوة مغناطيسية $\vec{F}_m = q(\vec{q} \wedge \vec{B})$ ، تتحدد جهتها حسب قاعدة اليد اليمنى . تتحرك الإلكترونات الحرة تحت تأثير $\vec{F}_m$ نحو الأسفل لتتراكم عند النهاية السفلى للناقل (مشكلة القطب السالب) ، وبالعكس تتحرك الثقوب (الأمكان التي هجرتها الإلكترونات الحرة) باعتبارها شحنات موجبة (مساوية بالقيمة العددية لشحنة الإلكترون ومعاكسة لها بالإشارة) نحو الأعلى لتتراكم عند النهاية العليا للناقل (مشكلة القطب الموجب) .



يرافق تراكم الشحنات عند القطبين نشوء حقل كهربائي متنامي $\vec{E}$ يتجه من الشحنات الموجبة نحو السالبة ، الأمر الذي يؤدي لنشوء قوة كهربائية $\vec{F}_c = q\vec{E}$ متنامية ، تعاكس القوة المغناطيسية $\vec{F}_m$ بالاتجاه تستمر هجرة الشحنات باتجاه القطبين إلى الحد الذي تبلغ فيه شدة E قيمة كبيرة ، توافقها قوة كهربائية $\vec{F}_c$ مساوية ومعاكسة للقوة المغناطيسية $\vec{F}_m$ أي

$$\vec{F}_c = -\vec{F}_m \Rightarrow q\vec{E} = -q(\vec{q} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \vec{E} = -\vec{q} \wedge \vec{B}$$

عندئذ تتوقف هجرة الشحنات باتجاه القطبين (حالة توازن قوى) ،

ونحصل على مدخنة مشحونة ، أو قوة محرقة (دافعة) كهربائية تأثيرية

تبقى المدخنة مشحونة بالتأثير طالما بقيت متحركة بنفس السرعة $\vec{q}$

فإذا وصلنا قطبيها إلى مقاومة R نلاحظ سريان تيار كهربائي من القطب الموجب إلى السالب عبر R .

ملاحظة : عند حركة الناقل بسرعة $\vec{q}$ في حقل مغناطيسي $\vec{B}$ متناوبة (نحو الداخل والخارج) ، يحصل تناوب في نوع الشحنات المتجمعة عند الأقطاب ، وهو الأساس المستخدم في توليد التيار المتناوب .

10X



اسم الطالب :
الدرجة العظمى : ثمانون
مدة الامتحان : ساعتان

جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية بطرطوس
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2013 - 2014

السؤال الأول استنتج باستخدام التقريبات المناسبة تابع كثافة توزع بواسون انطلاقاً من
(20 درجة) تابع كثافة برنولي

السؤال الثاني استنتج عبارة توزع (M-B) في الحالة الأكثر احتمالاً (بدلالة مضارب لاغرانج)
(15 درجة)

السؤال الثالث أوجد عبارة الطاقة الوسطى لجسيم كلاسيكي بدلالة تابع التخاص ومشتقه بالنسبة
لدرجة الحرارة (15 درجة)

السؤال الرابع يوزع جسيमान متميزان A و B على مستويين للطاقة $\epsilon_1 = \epsilon_0$ و $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$ متحللين ودرجة تحلل كل منهما ($g_1 = g_2 = 2$) والمطلوب حساب عدد الحالات
الماكروية الممكنة وطاقة كل منها وعدد الحالات الميكروية الموافقة لكل حالة توزع
ماكروي ومثلها وأوجد الحالة الأكثر احتمالاً

السؤال الخامس 1- استنتج معادلتا بواسون ولا بلاس
2- مثل قوة لا بلاس المغناطيسية المؤثرة في وحدة الطول من سلكين لانهايين الطول
(15 درجة) ومتوازيان عندما يمر بهما تياران كهربائيان متساويين الشدة في الحالتين
• التياران مختلفان في الجهة
• التياران متفقان في الجهة

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس 2014 / 1 / 20

مدرس المقرر

د. محمد ابراهيم

أصول الاحتمال في الفيزياء والرياضيات
 الطبعة الثانية رياضيات
 الفصل الأول لعام 2013-2014

1. في كتاب الاحتمال لبرنولي

$$\omega(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \quad (1) \quad p+q=1$$

120

p احتمال ظهور علامة فيزيائية ما n مرة من أصل N مرة.
 q احتمال عدم الظهور بموافقة $(N-n)$ مرة من أصل N مرة.
 وبذلك N مقدار ثابت العينة الجملية كبيرة جداً بالمقارنة مع n
 أي $n \ll N$ وهذه الموافقة $p \ll 1$ (5)
 التوزيع الموحد $n \ll N$ في صيغة التوافيق

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)(N-n)!}{n!(N-n)!}$$

$$\approx \frac{N \cdot N \cdot N \dots N}{n!} = \frac{N^n}{n!} \quad (2)$$

التوزيع الموحد $(p \ll 1 \Leftrightarrow n \ll N)$

$$\ln q^{N-n} = \ln(1-p)^{N-n} = (N-n) \ln(1-p) \approx N \ln(1-p) \approx -NP$$

$$q^{N-n} \approx e^{-NP} \quad (3) \quad (5)$$

بتقريب (2) و (3) نجد

$$\begin{aligned} \omega(n) &\approx \frac{N^n}{n!} p^n e^{-NP} \\ &\approx \frac{(NP)^n}{n!} e^{-NP} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha = NP \\ x = n \end{cases}$$

$$\omega(x) = \frac{\alpha^x}{x!} e^{-\alpha}$$

في كتاب بوارسوا

$$\bar{X} = \alpha$$

2: معيارية الجزيئات المتماثلة لـ $(M-B)$

$$W = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \quad (3) \quad \text{نقطة}$$

$$\ln W = \ln N! + \sum_i (N_i \ln g_i - \ln N_i!) \quad (2) \quad \text{مثال}$$

وباستخدام تقريب ستيرلينج $\ln N! = N \ln N - N$

$$\ln W = N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i)$$

$$d \ln W = \sum_i \frac{\partial \ln W}{\partial N_i} dN_i$$

$$= \sum_i \left(\ln g_i - \ln N_i - \frac{N_i}{N_i} + 1 \right) dN_i$$

$$= \sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i \quad (2) \quad \text{مثال}$$

(مثال)

$$(2) \quad d \ln W + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad \text{مثال} \quad dN = \sum_i dN_i$$

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \epsilon_i \right) dN_i = 0 \quad (2) \quad dU = \sum_i \epsilon_i dN_i$$

$$\ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \epsilon_i) \Rightarrow N_i = g_i e^{\alpha + \beta \epsilon_i} \quad (2) \quad \text{مثال}$$

وهذا معيارية الجزيئات المتماثلة

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_i N_i \epsilon_i}{\sum_i N_i} = \frac{\sum_i g_i e^{\alpha - \frac{\epsilon_i}{kT}} \epsilon_i}{\sum_i g_i e^{\alpha - \frac{\epsilon_i}{kT}}} = \frac{\sum_i g_i \epsilon_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}}{Z} \quad (6) \quad \text{مثال} \quad \frac{38}{15}$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{kT^2} \sum_i g_i \epsilon_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}} \quad \text{مثال} \quad Z = \sum_i g_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}$$

$$\sum_i g_i \epsilon_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}} = kT^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_V$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{kT^2}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_V \Rightarrow \bar{\epsilon} = kT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V \quad (3) \quad \text{مثال} \quad \text{بالتميز في نسبة}$$

48 : عدد حالات الکریستال $N_0 = \frac{(N+M-1)!}{N!(M-1)!} = \frac{(2+2-1)!}{2!(2-1)!} = 3$ (2)

توضیح عدد حالات الکریستال با استفاده از $W_{n-B} = N! \prod \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$ (15)

(2,0) $\Rightarrow W = 2! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^0}{0!} \right) = 4$ { $\begin{matrix} \overline{AB} & \overline{AB} \\ \overline{A} & \overline{B} \end{matrix}$ }

$U_{(2,0)} = 2\epsilon_0$ (3)

(1,1) $\Rightarrow W = 2! \left(\frac{2^1}{1!} \frac{2^1}{1!} \right) = 8$ { $\begin{matrix} \overline{B} & \overline{A} & \overline{B} & \overline{A} \\ \overline{A} & \overline{B} & \overline{A} & \overline{B} \end{matrix}$ }

$U_{(1,1)} = 3\epsilon_0$ (3)

(0,2) $\Rightarrow W = 2! \left(\frac{2^0}{0!} \frac{2^2}{2!} \right) = 4$ { $\begin{matrix} \overline{AB} & \overline{AB} \\ \overline{AB} & \overline{AB} \end{matrix}$ }

$U_{(0,2)} = 4\epsilon_0$ (3)

حالت های دیگر هم قابل ذکر است (1,1)

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint \text{div } \vec{E} \cdot d\tau$ (2)

برای محاسبه میدان

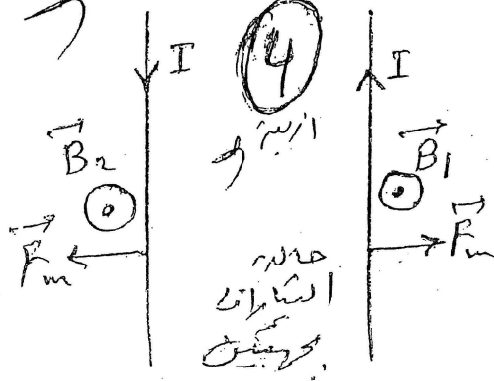
بزرگ داریم $\frac{1}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \cdot d\tau = \iiint \text{div } \vec{E} \cdot d\tau$ (15)

با قرار دادن این در معادله

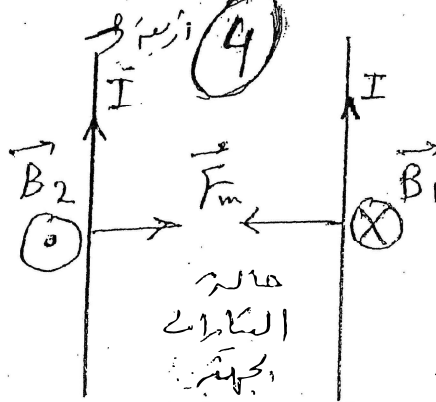
$\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ (2)

بنابراین $\vec{E} = -\text{grad } V$ (1) و $\nabla^2 V = -\rho / \epsilon_0$ (1)

معادله لاپلاس $\nabla^2 V = 0$ (1) (برای $\rho = 0$)



(1) و (2) نیروهای



(1) و (2) نیروهای



جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية بطرطوس
قسم الرياضيات

اسم الطالب :
الدرجة العظمى : ثمانون
مدة الامتحان : ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - لطلاب السنة الثانية رياضيات
الدورة الصيفية للعام الدراسي 2012 - 2013

أجب عن مايلي

السؤال الأول : إذا علمت أن تابع كثافة توزع برنولي يعطى بالعلاقة

$$\omega(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \quad \text{والمطلوب :} \quad (20 \text{ درجة})$$

- برهن أن $\omega(n)$ تابع كثافة احتمال .
- أوجد قيمة المقادير الإحصائية التالية : $\bar{n}$ و $\overline{n^2}$ و $\overline{\Delta n^2}$

السؤال الثاني استنتج عبارة توزع (F-D) في الحالة الأكثر احتمالاً (بدلالة مضارب لاغرانج)
(15 درجة)

السؤال الثالث يوزع جسيमान متميزان (A,B) على سويتين للطاقة $\epsilon_1 = \epsilon_0$ و $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$ متحلتين ودرجة تحلل كل منهما ($g_1=2$, $g_2=1$) والمطلوب :
(15 درجة)

أوجد الحالات الماكروية الممكنة , وطاقة كل منها , وعدد حالات التوزع الميكروية الموافقة لكل حالة توزع ماكروي , ومثلها , وأوجد الحالة الماكروية الأكثر احتمالاً .

السؤال الرابع نثبت شحنتين نقطيتين موجبتين و متساويتين بالقيمة المطلقة $q_1=q_2=10^{-6} \text{ C}$ في رأسين متقابلين من مربع طول ضلعه متر واحد , والمطلوب :
(15 درجة)

- ارسم الشكل ومثل عليه اتجاه قوة كولون المؤثرة في كلا الشحنتين واحسب شدتها .
- مثل اتجاهات الحقول والحقل المحصل واحسب شدتها في أحد الرأسين الآخرين .

السؤال الخامس (15 درجة)

- اكتب العبارتين الرياضيتين (مع الشرح المناسب) لكل من دعوى شترس ودعوى أوستراغرادسكي - غوص
- مثل قوة لابلاس المغناطيسية المؤثرة في وحدة الطول من سلكين لانهايتي الطول ومتوازيان عندما يمر بهما تياران كهربائيان متساويا الشدة في الحالتين :
 - التياران مختلفان في الجهة
 - التياران متفقان في الجهة

مع الأمنيات بالتوفيق والنجاح
طرطوس ٨ / ٢٠١٣

مدرس المقرر

محمد ابراهيم

الاحتمالات - القياسات
 منهجية رياضية - الصورة البديلة للبيانات 2003

1. ليكن $w(n)$ كثافة الاحتمال - يجب ان يحقق شرط التامة

$$\sum_{n=0}^{\infty} w(n) = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = (p+q)^N = 1^N = 1 \quad (20)$$

لذا p احتمال وقوع حدث و q احتمال عدم وقوعه $p+q=1$

متوسط $\bar{n}$: $\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$

$$(p+q)^N = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$$

$$N(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n}$$

بمضاعفة الطرفين
 بالنسبة لـ p

$$Np(p+q)^{N-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = Np \quad (1)$$

نضرب الطرفين بـ p

$$\bar{n} = Np \quad (7) \quad p+q=1$$

متوسط $\bar{n}^2$: نشتق مرة ثانية

$$N(p+q)^{N-1} + N(N-1)p(p+q)^{N-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \binom{N}{n} p^{n-1} q^{N-n}$$

$$Np(p+q)^{N-1} + N(N-1)p^2(p+q)^{N-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = \bar{n}^2$$

بضرب الطرفين بـ p

$$\bar{n}^2 = Np + N(N-1)p^2$$

$$\bar{n}^2 = Np + N^2p^2 - Np^2 \quad (7) \quad p+q=1$$

$$\Delta n^2 = \bar{n}^2 - \bar{n}^2 \quad \Delta n^2 = \bar{n}^2 - \bar{n}^2$$

$$= Np + N^2p^2 - Np^2 - Np^2 = Np(1-p)$$

$$= Npq = \bar{n}q$$

(3)

در عبارت انرژی از عبارتی تقریبی می توان

$$W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!} \quad (2)$$

$$\ln W_{F-D} = \sum_i [\ln g_i! - \ln n_i! - \ln (g_i - n_i)!]$$

و با استفاده از تقریب استرلینگ $\ln x! \approx x \ln x$ (2)

$$\ln W_{F-D} = \sum_i [g_i \ln g_i - n_i \ln n_i - (g_i - n_i) \ln (g_i - n_i)]$$

$$d \ln W_{F-D} = \sum_i \frac{d \ln W_{F-D}}{d n_i} d n_i = \sum_i \ln \frac{g_i - n_i}{n_i} d n_i \quad (3)$$

با استفاده از شرایط تعادل $d \ln W_{F-D} + \alpha d N + \beta d U = 0$ (2)

$$\sum_i (\ln \frac{g_i - n_i}{n_i} + \alpha + \beta \epsilon_i) d n_i = 0 \quad (2) \quad d N = \sum_i d n_i \quad d U = \sum_i \epsilon_i d n_i$$

$$\ln \frac{g_i - n_i}{n_i} = -(\alpha + \beta \epsilon_i)$$

$$\frac{g_i - n_i}{n_i} = e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} \Rightarrow \frac{g_i}{n_i} = e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} + 1 \Rightarrow n_i = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} + 1} \quad (4)$$

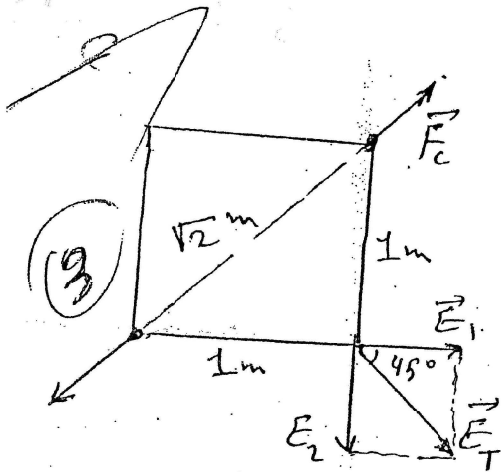
38: عدد حالت های ممکن برای 3 ذره در 2 سطح انرژی 2 و 1 است. $n_0 = \frac{(n_1 + n_2 - 1)!}{n_1! (n_2 - 1)!} = \frac{(2 + 2 - 1)!}{2! (2 - 1)!} = \frac{3!}{2!} = 3$ (15)

39: $W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!}$ و $U = \sum_i \epsilon_i n_i$

3) $W(2,0) = 2! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{1^0}{0!} \right) = 4$ { $\overline{AB}$ $\overline{BA}$ $\overline{A|B}$ $\overline{B|A}$ }
 $U(2,0) = 2 \epsilon_0$

3) $W(0,2) = 2! \left(\frac{2^0}{0!} \frac{1^2}{2!} \right) = 1$ { $\overline{AB}$ }
 $U(0,2) = 4 \epsilon_0$

3) $W(1,1) = 2! \left(\frac{2^1}{1!} \frac{1^1}{1!} \right) = 4$ { $\overline{B|A}$ $\overline{B|A}$ $\overline{A|B}$ $\overline{A|B}$ }



$$F_c = k \frac{q_1 q_2}{r^2} ; r = \sqrt{2} \text{ m}$$

$$= 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-6} \cdot 10^{-6}}{2} = \frac{9}{2} \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

15

(4) وحيث أن الشحنة سالبة...

$$E_1 = E_2 = k \frac{q_1}{r^2} ; r = 1 \text{ m}$$

$$= 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-6}}{1} = 9 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

4

المجال الكلي

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E_T^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 \cos \frac{\pi}{2} = 2 E_1^2$$

$$E_T = \sqrt{2} E_1 = 9 \sqrt{2} \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

4

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\text{rot } \vec{E})_n \cdot d\vec{S}$$

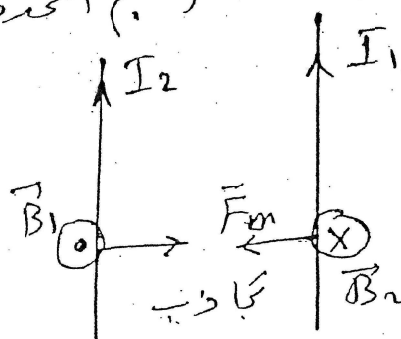
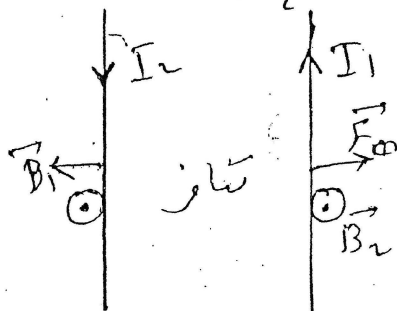
5

15

حولات (تحويل) المجال الكهربائي من شكله المتجهي إلى شكله القياسي...
الناطقة كدور هذا الحقل في المجال الكهربائي...

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\text{div } \vec{E})_n \cdot d\tau$$

دعوى أو استنتاج...
تكون الحقل E في شكله القياسي...
الناطقة في شكله القياسي...



التيارات المتساوية (4)

التيارات متعاكسة (4)



جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية بطرطوس
قسم الرياضيات

اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون
مدة الامتحان: ساعتان

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات - لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2012 - 2013

أجب عن مايلي

السؤال الأول استنتج السرعات المميزة التالية $(\bar{v}, \bar{v}_H, \bar{v}^2)$ لتوزيع (M-B) ومثلها بيانياً على تابع كثافة السرعة المطلقة بدلالة $\bar{v}_H$ علماً أن (20 درجة)

$$\int_0^{\infty} v^3 e^{-av^2} dv = \frac{1}{2\alpha^2} \quad \text{وأن} \quad \int_0^{\infty} v^4 e^{-av^2} dv = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

السؤال الثاني استنتج عبارة توزع (F-D) في الحالة الأكثر احتمالاً (بدلالة مضارب لاغرانج) - اكتب عبارة التوزيع السابقة بدلالة سوية فيرمي واكتب الخطوات والشروط التي يتحول فيها التوزيع (F-D) إلى توزيع (B-E) (20 درجة)

السؤال الثالث يوزع ثلاث فيرميونات على سويتين للطاقة $\epsilon_1 = \epsilon_0$ و $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$ متحللة ودرجة تحلل كل منها $(g_1 = g_2 = 2)$ والمطلوب (20 درجة)
إيجاد الحالات الماكروية الممكنة وطاقة كل منها وعدد الحالات الميكروية الموافقة لكل حالة توزيع ماكروية ومثلها وأوجد الحالة الأكثر احتمالاً

السؤال الرابع نثبت شحنتين نقطيتين متساويتين ومتساويتين بالقيمة المطلقة $q_1 = q_2 = 10^{-6} \text{ C}$ في النقطتين $M_1(1,1)$ و $M_2(-1,1)$ من المستوى الديكارتي ذي المحاور المقطرة بالمتري والمطلوب (10 درجات)
• ارسم الشكل ومثل عليه اتجاه قوة كولون المؤثرة في كلا الشحنتين واحسب شدتها
• مثل اتجاهات الحقول والحقل المحصل واحسب شداتها في المبدأ

السؤال الخامس 1- استنتج معادلتا بواسون ولاپلاس (10 درجات)
2- مثل قوة لاپلاس المغناطيسية المؤثرة في وحدة الطول من سلكين لاتهنائي الطرفين ومتوازيان عندما يمر بهما تياران كهربائيان متساويين الشدة في الحالتين
• التياران مختلفان في الجهة
• التياران متفقان في الجهة

مع الأمنيات بالتوفيق والتجاح
طرطوس 10 / 4 / 2013

مدرس المقرر

د. محمد إبراهيم

أجوبة امتحان مركز البحوث للرياضيات - سنة ثالثة رياضيات
 دورة الفصل الثالث للعام 2012 - 2013 الدرس (الفصل 80)

18. v_H : (سرعة الجسيمات) وهي السرعة التي تكون عندها
 الكثافة القصوى لكثافة الجسيمات $f(v)$ ونجد ما يلي $\frac{f(v)}{dv} = 0$ 20

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} v^2 e^{-\alpha v^2}$$

$$\frac{df(v)}{dv} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} [2v e^{-\alpha v^2} - 2\alpha v^3 e^{-\alpha v^2}] = 0$$

$$2v e^{-\alpha v^2} (1 - \alpha v^2) = 0 \Rightarrow v = 0, \pm \infty$$

$$1 - \alpha v^2 = 0 \Rightarrow v_H = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{2KT}{m}} \quad \alpha = \frac{m}{2KT} \quad (6)$$

م. $\bar{v}$: (المتوسط الحسابي للسرعة) : نحتاج تعريف القيمة لـ $\bar{v}$

$$\bar{v} = \int_0^\infty v f(v) dv = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2} dv$$

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{2\alpha^2}\right)$$

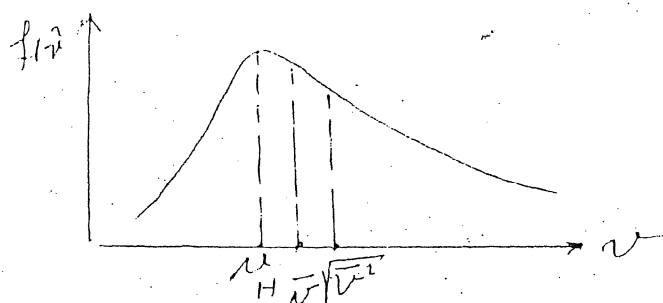
$$\bar{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_H = 1.13 v_H$$

م. $\bar{v^2}$: (المتوسط الحسابي للسرعة المربعة) : نحتاج تعريف القيمة لـ $\bar{v^2}$

$$\bar{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 e^{-\alpha v^2} dv$$

$$\bar{v^2} = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}\right)$$

$$\bar{v} = \frac{3}{2} v_H \Rightarrow \sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_H = 1.22 v_H \quad (6)$$



الفصل الثاني : سرعة الجسيمات v_H

(2)

معيارية لوزن الإحصائي لتوزيع - ويرى أنه
 تحديد استخدام معيارية لتوزيع إيسويب (2)
 $W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{N_i! (g_i - N_i)!}$

$$\ln x! \approx x \ln x \quad (1)$$

$$\ln W_{F-D} = \sum_i [g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - g_i \ln (g_i - N_i) + N_i \ln (g_i - N_i)]$$

$$d \ln W_{F-D} = \sum_i \frac{\partial \ln W}{\partial N_i} dN_i = \sum_i \ln \frac{g_i - N_i}{N_i} dN_i \quad (5)$$

وبالتعويض في (2) لتوزيع الإحصائي

$$d \ln W + \alpha dN + \beta dU = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} dN = \sum_i dN_i \\ dU = \sum_i \epsilon_i dN_i \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\sum_i \left(\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} + \alpha + \beta \epsilon_i \right) dN_i = 0$$

$$\ln \frac{g_i - N_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \epsilon_i) \Rightarrow N_i = \frac{g_i}{e^{-(\alpha + \beta \epsilon_i)} + 1} \quad (5)$$

وهذه معادلة توزيع (F-D) للحالة الإحصائية

• وبذلك تكونت معيارية توزيع إيسويب

$$\alpha = \frac{\epsilon_f}{kT} \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

$$\Rightarrow N = \frac{g}{e^{\frac{\epsilon_f - \epsilon_0}{kT}} + 1} \quad (2)$$

نلاحظ أنه لجعل معيارية توزيع إيسويب معيارية معيارية في حالة
 انطالات السالبة ($\epsilon_0 \gg \epsilon_f - \epsilon_0 \gg kT$)، وبذلك $\frac{\epsilon_f}{kT} \gg 1$ (2)
 لذلك العاصفي معيار السالبة

$$N_{B-E} = \frac{g}{e^{\frac{\epsilon_0}{kT}}} = g e^{-\frac{\epsilon_0}{kT}} \quad (1)$$

حالات التوزيع الماكروية هي التي تحقق الشرط (2) $n_i > 1$
 وحسب عدد الحالات الميكروية المتوافقة لكل حالة توزيع ماكروية ممكنة
 في توزيع (عبارة التوزيع الماكروية لعزيم - درالسه)

$$W_{F-D} = \prod_i \frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!} \quad \text{أو} \quad U = \sum_i n_i \epsilon_i \quad (3)$$

والحالات (3,0) و (0,3) غير ممكنات لأن شرط تحقيق (3)

الحالة الماكروية
 (2,1)

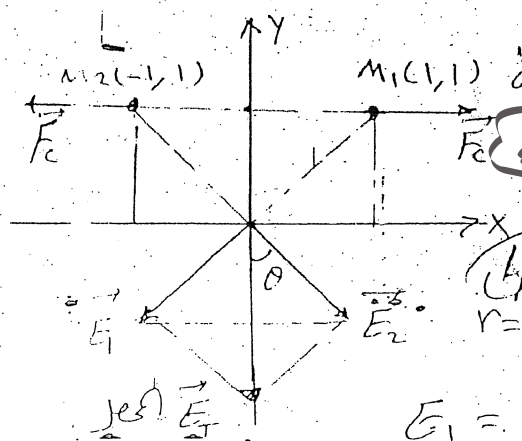
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حالة } n_1, g_1 \\ \text{حالة } n_2, g_2 \end{array} \right\} \Rightarrow W = \frac{2!}{2!(2-2)!} \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2 \left\{ \begin{array}{c} \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow U_{(2,1)} = 2\epsilon_0 + 1(2\epsilon_0) = 4\epsilon_0 \quad (5)$$

$$(1,2) \left\{ \begin{array}{l} \text{حالة } n_1, g_1 \\ \text{حالة } n_2, g_2 \end{array} \right\} \Rightarrow W = \frac{2!}{1!(2-1)!} \frac{2!}{2!(2-2)!} = 2 \left\{ \begin{array}{c} \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow U_{(1,2)} = \epsilon_0 + 2(2\epsilon_0) = 5\epsilon_0 \quad (5)$$

(2) الحالة الماكروية (2,1) هي الحالة ذات الطاقة الأقل (1,2)



4. قوة كولوم هي قوة تنافر بين شحنتين نقطيتين q_1, q_2 تفصل بينهما مسافة r في الفراغ تعطى بالعلاقة:

$$F_c = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-6} \cdot 10^{-6}}{(2)^2} = \frac{9}{4} \cdot 10^{-3} \text{ N} \quad (2)$$

بعد اشتراك الشحنتين في المسافة $r = \sqrt{2}$ فإن:

$$E_1 = E_2 = k \frac{q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-6}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{9}{2} \cdot 10^3 \text{ V/m} \quad (2)$$

وبشكل متساوي $\theta = 45^\circ$ وبالتالي تكون القوة المحصلة

$$E_T = 2E_1 \cos \theta = 2 \cdot \frac{9}{2} \cdot 10^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot 10^3 \text{ V/m} \quad (2)$$

5 Z : 1 - و اوستر ایزاد است - معرف

10

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau} \text{div} \vec{E} d\tau$$

مساحت

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau} \text{div} \vec{E} d\tau = \iiint_{\tau} \rho d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\tau} \rho d\tau$$

پتانسیل

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

فردال لپلاس

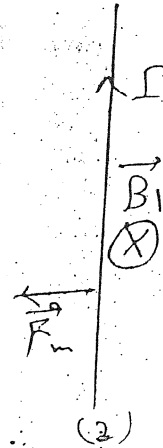
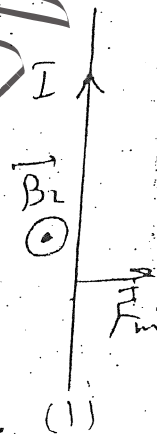
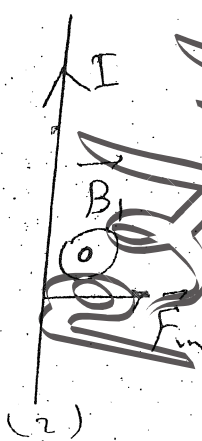
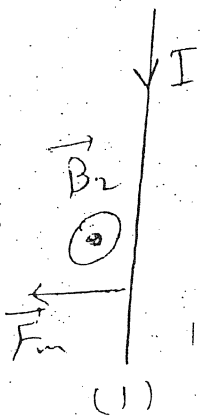
$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

و با این $\vec{E} = -\text{grad} V$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 V = 0 \iff \rho = 0$$

و با این $\vec{E} = -\text{grad} V$



آنتناریت

مختلف

الکترون

واحد

أحد أهم أساليب تقدير الاحتمالات
 لطالب - لجنة المناهج الرياضية
 الفصل الثاني - نظام 2011 - 2012

1: لدينا كتاب الاحتمال لرفوف

(20)

$$\omega(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \quad (1) \quad ; \quad p+q=1$$

p احتمال ظهور حافة في رافوف ما n مرة من أصل N مرة
 q احتمال عدم الظهور في رافوف $(N-n)$ مرة من أصل N مرة
 فبذلك N تعداد زوايا العينة لعملة كيرفيم المتكافئة مع n

التي $n \gg N$ وهذا يوافق $p \ll 1$ (5)

• التوزيع المتعدد $n \gg N$ يُسمى التوزيع

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)(N-n)!}{n!(N-n)!}$$

$$\approx \frac{N \cdot N \cdot N \dots N}{n!} = \frac{N^n}{n!} \quad (2)$$

• التوزيع المتعدد $(p \ll 1 \Leftrightarrow n \gg N)$

$$\ln q^{N-n} = \ln (1-p)^{N-n} = (N-n) \ln(1-p) \approx N \ln(1-p) \approx -NP$$

$$q^{N-n} \approx e^{-NP} \quad (3)$$

• بتقريب (2) و (3) نجد

$$\omega(n) \approx \frac{N^n}{n!} \cdot p^n \cdot e^{-NP}$$

$$\approx \frac{(NP)^n}{n!} e^{-NP} \quad ; \quad \begin{cases} a = NP \\ x = n \end{cases} \quad (5)$$

$$\omega(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}$$

هناك كتاب بواشوا

$$\bar{X} = a$$

2 : معطيات : $(M-B)$: عدد الجزيئات الحرة في النظام

15

$$W = N! \prod_{i=1}^M \frac{g_i^{N_i}}{N_i!} \quad (3)$$

$$\ln W = \ln N! + \sum_i (N_i \ln g_i - \ln N_i!) \quad (2)$$

بافتراض أن $\ln N! \approx N \ln N - N$ (تقريب ستيرلينج)

$$\ln W = N \ln N - N + \sum_i (N_i \ln g_i - N_i \ln N_i + N_i) \quad (2)$$

$$\ln W = \sum_i \ln W \, dN_i$$

$$= \sum_i (\ln g_i - \ln N_i - \frac{N_i}{N} + 1) dN_i$$

$$= \sum_i \ln \frac{g_i}{N_i} dN_i \quad (2)$$

$$(2) \quad \delta \ln W + \alpha \delta N + \beta \delta U = 0$$

$$(\ln \frac{g_i}{N_i} + \alpha + \beta \epsilon_i) dN_i = 0 \quad (2) \quad \delta N = \sum dN_i$$

$$\ln \frac{g_i}{N_i} = -(\alpha + \beta \epsilon_i) \Rightarrow \frac{g_i}{N_i} = e^{\alpha + \beta \epsilon_i} \quad (2)$$

$$= \frac{\sum N_i \epsilon_i}{\sum N_i} = \frac{\sum g_i e^{\alpha - \frac{\epsilon_i}{kT}} \epsilon_i}{\sum g_i e^{\alpha - \frac{\epsilon_i}{kT}}} = \frac{\sum g_i \epsilon_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}}{Z} \quad (6) \quad 15$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{kT^2} \sum g_i \epsilon_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}} \quad ; \quad Z = \sum g_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}$$

$$\sum g_i \epsilon_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}} = kT^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_V$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{kT^2}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_V \Rightarrow \bar{\epsilon} = kT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V \quad (8)$$

$$\phi = \frac{(N+M-1)!}{N!(M-1)!} = \frac{(2+2-1)!}{2!(2-1)!} = 3$$
 عدد الحالات الممكنة 3

$$I_{AB} = N! \prod_{i=1}^N \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$
 توزيع ماكسويل-بولتزمان

$$0) \Rightarrow W = 2! \left(\frac{2^2}{2!} \frac{2^0}{0!} \right) = 4$$

$$U(2,0) = 2\epsilon_0$$
 Diagrams:

AB	AB
BA	BA

$$1) \Rightarrow W = 2! \left(\frac{2^1}{1!} \frac{2^1}{1!} \right) = 8$$

$$U(1,1) = 3\epsilon_0$$
 Diagrams:

BA	AB	BA	BA
AB	BA	AB	AB

$$2) \Rightarrow W = 2! \left(\frac{2^0}{0!} \frac{2^2}{2!} \right) = 4$$

$$U(0,2) = 4\epsilon_0$$
 Diagrams:

AB	AB	AB
AB	AB	AB

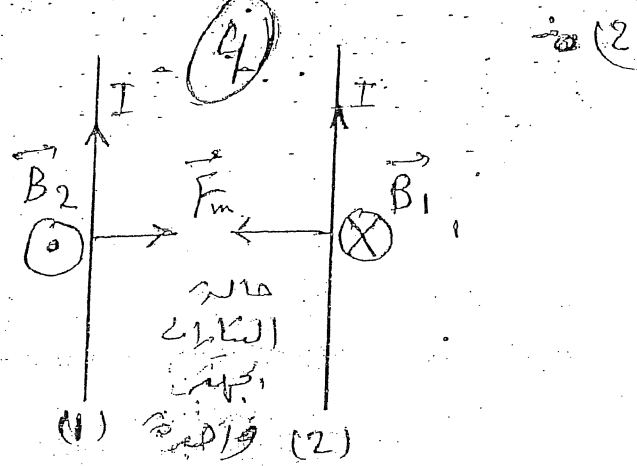
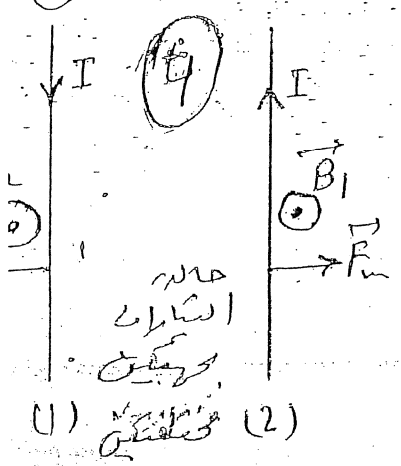
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div } \vec{E} \, d\tau$$
 Theorem of Gauss

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, d\tau = \iiint_V \text{div } \vec{E} \, d\tau$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$



اسم الطالب:
الدرجة العظمى: ثمانون
مدة الامتحان: ساعتان

جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية: بطرطوس
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات لطلاب السنة الثانية رياضيات
من مقررات الفصل الثاني للعام الدراسي 2010 - 2011 (الدورة الصيفية)

السؤال الأول إذا علمت أن تابع كثافة توزيع مكسويل للسرعة المطلقة في الإحداثيات الكروية يعطى بالعلاقة (20 درجة)

$$f(v^2) = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} v^2 e^{-\alpha v^2}, \quad \alpha = \frac{m}{2kT}$$

1- أوجد تابع كثافة التوزيع السابق بدلالة الاندفاع المطلق $f(p^2)$ حيث $\vec{p} = m\vec{v}$

2- أوجد تابع كثافة التوزيع السابق بدلالة الطاقة $f(\varepsilon)$ علماً أن $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$

3- أوجد القيمة الوسطى لطاقة جزيء واحد $\bar{\varepsilon}$ اعتماداً على $f(\varepsilon)$

4- بفرض $\bar{\varepsilon} = N\bar{\varepsilon}$ الطاقة الوسطى لـ N جسيم، استنتج من المعادلة العامة للغازات

المثالية معادلة برنولي (استفد من بواسون $\int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$)

السؤال الثاني استفد من شرط توحيد تابع كثافة جيبس في إيجاد تابع التحاص Z وبالتالي

(20 درجة) ψ بدلالة Z . ثم أوجد تابع تحاص N جزيء من الغاز المثالي Z_{id} بدلالة

متحولات الجملة وعبر عن الضغط P بدلالة Z_{id} ومن ثم بدلالة متحولات

الجملة (استفد من تكامل بواسون $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$)

السؤال الثالث توزع 3 جسيمات A, B, C على مستويين للطاقة $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ و $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$

متحاليين ودرجة تحالهما $g_1 = 2$ و $g_2 = 1$ والمطلوب (20 درجة)

1- أوجد عدد حالات التوزيع الماكروي وطاقة كل حالة

2- أوجد عدد حالات التوزيع الميكروي الموافقة لكل حالة توزيع ماكروي

3- أوجد الحالة الماكروية الأكثر احتمالاً ومثل حالاتها الميكروية الموافقة

السؤال الرابع 1- عرف الكمون الكهربائي لشحنة نقطية q في نقطة M تبعد عنها مسافة r

ثم استنتج الحقل الكهربائي $\vec{E}$ في هذا الموضع (20 درجة)

2- اكتب الصيغتين النظرية والرياضية لكل من دعوتي استوكس

واوستر اغرادسكي- غوص

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر
د محمد ابراهيم

طرطوس في 20 / 8 / 2011
مع أمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

(1)

أجوبة امتحان قسم الفيزياء للدراسات من الرياضيات

الدورة الثانية لعام 2010 / 2011

1: $\frac{1}{2}$ - بعد كاح، لوزة الاضغالي السطح، الخلية $\frac{1}{2}$ لوزة
 كاح، كثافة $f(v)$ كذا في v لوزة

$$dW(v) = f(v) dv$$

$$dW(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \quad (*)$$

$$P = m\vec{v} \Rightarrow d\vec{v} = \frac{d\vec{p}}{m}$$

$$dW(p) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{p^2}{m^2} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \frac{dp}{m}$$

$$= 4\pi \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} p^2 e^{-\frac{p^2}{2mkT}} dp$$

عند كاح، كثافة الطور $f(p)$

$$f(p) = 4\pi \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} p^2 e^{-\frac{p^2}{2mkT}}$$

(2) - الدورة لوزة كاح، الاضغالي $(*)$

$$dW(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

$$\epsilon = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}} \Rightarrow dv = \frac{d\epsilon}{\sqrt{2m\epsilon}}$$

$$dW(\epsilon) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{2\epsilon}{m} e^{-\frac{\epsilon}{kT}} \frac{d\epsilon}{\sqrt{2m\epsilon}}$$

$$= \frac{2\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} e^{-\frac{\epsilon}{kT}} d\epsilon$$

عند كاح، $f(\epsilon) = \frac{2\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} e^{-\frac{\epsilon}{kT}}$

(2)

3- اوسط حرکتی توان حرارتی (Average Kinetic Energy)

$$\bar{\epsilon} = \int_0^{\infty} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon \quad \Rightarrow \quad \text{اوسط حرکتی توان حرارتی}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \epsilon \sqrt{\epsilon} e^{-\frac{\epsilon}{kT}} d\epsilon$$

تبدیل متغیرات

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\epsilon} = x \\ \epsilon = x^2 \\ \epsilon \sqrt{\epsilon} = x^3 \\ d\epsilon = 2x dx \end{array} \right.$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{kT}} 2x dx$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{kT}} dx$$

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{kT}} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

where $\alpha = \frac{1}{kT}$

تبدیل متغیرات
با استفاده از
فرمول

$$= \frac{3}{8} \sqrt{\pi (kT)^5}$$

$$= \frac{3}{8} \sqrt{\pi} (\sqrt{kT})^5$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi} (\sqrt{kT})^3} \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\pi} (\sqrt{kT})^5$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT$$

اوسط حرکتی توان حرارتی

4- مثال 2: اگر $\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} kT$ باشد، اوسط توان حرارتی را بیابید.

$$\bar{E} = N \bar{\epsilon}$$

$$= \frac{3}{2} N kT$$

و اما دانستن این امر بسیار آسان است

$$\bar{E} = \frac{3}{2} PV \quad \text{از معادله حالت } PV = NkT \quad \Rightarrow \quad \bar{E} = \frac{3}{2} NkT$$

$$\Rightarrow PV = NkT = \frac{2}{3} \bar{E}$$

این معادله را می توان به صورت دیگری نیز نوشت

3) $\psi(x) = \frac{\psi-H}{e^{\frac{H}{\sigma}}}$ 2c) ψ ليس تابع كثافة الاحوال لـ ψ

2d $H(x, a)$ و $\psi(\sigma, a)$ متعلقين بـ σ و a

بما استخدم شرط الترميز

$\int \psi(x) dx = 1$ مع حاصل التفاضل التام σ و a ثمة

نخرج $\psi(\sigma, a)$ خارج لـ σ و a لـ ψ لـ x متغير

$\frac{\psi}{e^{\frac{H}{\sigma}}} \int e^{-\frac{H}{\sigma}} dx = 1 \Rightarrow \frac{\psi}{e^{\frac{H}{\sigma}}} + \ln \int e^{-\frac{H}{\sigma}} dx = 0$

نضع $Z = \int e^{-\frac{H}{\sigma}} dx$ متغير $\psi = -\sigma \ln Z$

$Z = \frac{1}{\sigma} \int e^{-\frac{H}{\sigma}} dx$ من اجل ايجاد Z نستخدم

$H = \frac{p^2}{2m} + V = 0$ الطاقة حركية فقط (تجاهل V)

$Z_{id} = \frac{1}{\sigma} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2m\sigma}} dp \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{V(r)}{\sigma}} dr \right]$ (نفس $V(r)$ كما في $V(r)$)

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2m\sigma}} dp = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2m\sigma}} dp = \sqrt{2\pi m\sigma}$ الكم σ متغير

$Z_{id} = \frac{1}{\sigma} \left[4\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2m\sigma}} p^2 dp \right] \cdot V$ مع σ متغير

$Z_{id} = \frac{1}{\sigma} \left[4\pi \left(\frac{1}{4} \sqrt{\pi} (2m\sigma)^{3/2} \right) \cdot V \right] = \frac{1}{\sigma} (2\pi m\sigma)^{3/2} \cdot V$

هو ψ كما في N من σ و a و ψ مع σ متغير

$\psi(\sigma, a) = \psi(\sigma, a, a^2) \Rightarrow \psi = -\sigma \ln Z$

$\psi(\sigma, v) \equiv \psi(\sigma, a, a^2) \Rightarrow \psi = -\sigma \ln Z$

①

20

1- الكمية الكهربائية المستمرة q لها المجال الكهربائي
 لنفرض وصلة السلك فكمية q تحت تأثير فصل q من الأجزاء
 إلى المنطقة الحرة m إلى مصدر q من n
 حالة على وجه الخصوص، السلك q

$$V = \frac{\phi}{q_0} = \frac{k \frac{q q_0}{r}}{q_0} = k \frac{q}{r}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{q}{r} \right) = kq \frac{1}{r^2} = k \frac{q}{r^2}$$

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint (\text{rot } \vec{A})_n d\vec{r}$$

2- دعونا استعرض
 في حالة $\vec{A}$ متصلة متصلة
 في حالة $\vec{A}$ متصلة متصلة
 في حالة $\vec{A}$ متصلة متصلة

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iiint \text{div } \vec{A} dV$$

دعونا استعرض
 في حالة $\vec{A}$ متصلة متصلة
 في حالة $\vec{A}$ متصلة متصلة

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z



مع التهنئات



بالتوفيق والنجاح

مكتبة

A to Z

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z