كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثانية

اسئلة دوراات محلولة

تبولوجيا ١

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تبولوجيا 1	اسم الطالب:
كلية العلوم	الدورة الفصلية الأولى – سنة ثانية رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	العام الدراسي 2024-2025م	الدرجة: 90

السؤال الأول: (55 درجة)

1) عرّف **خمسة** مفاهيم مما يلي:

قطر المجموعة– قاعدة التبولوجيا – النقطة المنعزلة لمجموعة– المجموعة الكثيفة في كل مكان –داخلية مجموعة –الكرة المفتوحة في الفضاء المتري – النقطة اللاصقة لمجموعة.

2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة الآتية: $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \quad \{7,9\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = \{1,7,8,9\}$ وأوجد كلاً من $\acute{A}$، $ex(A)$، $\bar{A}$، $bd(A)$، $V(A)$ ، $Is(A)$، $\dot{A}$.
4. هل المجموعة $C = \{1,2\}$ كثيفة في A.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \quad \{5,7\} \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ تشكل قاعدة لـ τ.
6. أعطِ مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعطِ مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

السؤال الثاني: (35 درجة)

1) أثبت صحّة **إحدى** القضيتين التاليتين:

1. إنّ أيّة كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة، في أي فضاء متري (E, d).
2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E, τ) عندئذٍ تتحقق المساواة $\bar{A} = \acute{A} \cup A$.

2) لنأخذ في الفضاء المتري $(\mathbb{R}, |.|)$ الفضاء الجزئي $(]-3,12], |.|)$، ولتكن $B =]-2,2[$ والمطلوب:

1. أوجد $\bar{B}$ و $\acute{B}$ في الفضاء الجزئي $(]-3,12], |.|)$.
2. أثبت أن الفضاء المتري $(\mathbb{R}, |.|)$ فضاء تام.

3) عيّن شكل الكرات المغلقة في الفضاء المتري المنقطع (E, d) مع الشرح، ثمّ أعطِ مثالاً يبيّن أنّه ليس بالضرورة كل مجاورة لنقطة هي جوار لهذه النقطة في الفضاء المتري المنقطع (E, d).

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

A to Z

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تبولوجيا 1 لطلاب السنة الثانية رياضيات

الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2024-2025م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (55 درجة)

1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:

قطر المجموعة– قاعدة التبولوجيا – النقطة المنعزلة لمجموعة– المجموعة الكثيفة في كل مكان –داخلية مجموعة –الكرة المفتوحة في الفضاء المتري – النقطة اللاصقة لمجموعة. **(3 درجات لكل تعريف يتم اختياره)، المجموع 15 درجة.**

2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة الآتية: $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \quad \{7,9\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = \{1,7,8,9\}$ وأوجد كلاً من $\dot{A}$ ،$ex(A)$، $\bar{A}$ ،$bd(A)$ ، $V(A)$ ،$Is(A)$ ،$\acute{A}$.
4. هل المجموعة $C = \{1,2\}$ كثيفة في A.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \quad \{5,7\} \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ تشكل قاعدة لـ τ.
6. أعطِ مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعطِ مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

الحل:

1. **(9 درجات)**

- من تعريف τ نجد $\emptyset \in \tau$

$$\{7,9\} \subseteq \mathbb{N} \Longrightarrow \mathbb{N} \in \tau$$

بالتالي الشرط الأول محقق.

- لنثبت أنه أياً كان $T, G \in \tau$ فإن $T \cap G \in \tau$.

نميز حالتين:

الحالة الأولى : $T = \emptyset$ أو $G = \emptyset$ أو كلاهما، عندئذ نجد $T \cap G = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية : $T \neq \emptyset$ و $G \neq \emptyset$ عندئذ

$$T \in \tau \Longrightarrow T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{7,9\} \subseteq T$$
$$G \in \tau \Longrightarrow G \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \{7,9\} \subseteq G$$

عندئذ $\{7,9\} \subseteq T \cap G$ & $T \cap G \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ بالتالي $T \cap G \in \tau$

- لتكن لدينا الأسرة $\{G_i ; i \in I\} \subseteq \tau$ ولنثبت أن $\cup_{i \in I} G_i \in \tau$

A to Z

إذا كانت $G_i = \emptyset$ أيا كان $i \in I$ فإن $\bigcup_{i\in I} G_i = \emptyset \in \tau$

إذا كانت أحد عناصر الأسرة $\{G_i; i \in I\}$ لا يساوي الخالية وليكن $G_{i_0} \neq \emptyset$ بالتالي $\{7,9\} \subseteq G_{i_0}$ عندئذ

$$\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{7,9\} \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} G_i \in \tau$$

من تحقق الشروط السابقة نجد أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.

2. $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{7,9\} \cap F = \emptyset\} \cup \{\mathbb{N}\}$ **(2 درجات)**

3. $\acute{A}$: أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $A \Longleftarrow \acute{A} = A$ **(3 درجات)**

$ex(A)$: أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $\mathbb{N}\backslash A \Longleftarrow ex(A) = \emptyset$ (3 درجات)

$\bar{A}$: أصغر مجموعة مغلقة تحوي $A \Longleftarrow \bar{A} = \mathbb{N}$ **(3 درجات)**

$bd(A)$: $bd(A) = \bar{A}\backslash\acute{A} = \mathbb{N}\backslash A$ (3 درجات)

$V(A)$: (3 درجات)

$$V(A) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{1,7,8,9\} \subseteq v\}$$

$Is(A), \acute{A}$ (6 درجات)

$$\bar{A} = \acute{A} \cup A \Longrightarrow \mathbb{N} = \acute{A} \cup \{1,7,8,9\} \Longrightarrow \mathbb{N}\backslash\{1,7,8,9\} \subseteq \acute{A}$$

لندرس نقاط A

$$x = 1 \Longrightarrow V(1) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{1,7,9\} \subseteq v\}$$
$$\forall v \in V(1) \Longrightarrow \{1,7,9\} \subseteq v \cap A$$
$$\Longrightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{1\}$$
$$\Longrightarrow 1 \notin Is(A), 1 \in \acute{A}$$
$$x = 7 \Longrightarrow V(7) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{7,9\} \subseteq v\}$$
$$\forall v \in V(7) \Longrightarrow \{7,9\} \subseteq v \cap A$$
$$\Longrightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{7\}$$
$$\Longrightarrow 7 \notin Is(A), 7 \in \acute{A}$$
$$x = 8 \Longrightarrow V(8) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{7,8,9\} \subseteq v\}$$
$$\forall v \in V(8) \Longrightarrow \{7,8,9\} \subseteq v \cap A$$
$$\Longrightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{8\}$$
$$\Longrightarrow 8 \notin Is(A), 8 \in \acute{A}$$
$$x = 9 \Longrightarrow V(9) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{7,9\} \subseteq v\}$$
$$\forall v \in V(9) \Longrightarrow \{7,9\} \subseteq v \cap A$$
$$\Longrightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{9\}$$
$$\Longrightarrow 9 \notin Is(A), 9 \in \acute{A}$$

ومنه نجد $\acute{A} = \mathbb{N}, Is(A) = \emptyset$

4. تكون C كثيفة في A إذا تحققت العلاقة $A \subseteq \bar{C}$

$$\bar{C} = C \Longrightarrow A \nsubseteq \bar{C}$$

بالتالي C ليست كثيفة في A. **(2 درجات)**

5. **(2 درجات)**

تكون β قاعدة لـ τ إذا تحقق ما يلي:

- $\beta \subseteq \tau$
- $\forall\ T \in \tau \Longrightarrow T = \bigcup_{B_l\in\beta} B_l$

الشرط الأول غير محقق لأنه توجد المجموعة $\beta \subseteq \{5,7\}$ ولكن $\{5,7\} \notin \tau$،

وكذلك الشرط الثاني غير محقق لأنه توجد مثلاً المجموعة المفتوحة $\{7,9\}$ لا يمكن كتابتها على شكل اجتماع لعناصر من الأسرة β.

6. $\tau_1 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \quad \{1,7,9\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$\tau_1 \subseteq \tau$

بالتالي τ_1 أضعف من τ . **(2 درجات)**

(توجد أمثلة كثيرة)

7. $\tau_2 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \quad \{9\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$\tau \subseteq \tau_2$

بالتالي τ_2 أقوى من τ . **(2 درجات)**

السؤال الثاني: (35 درجة)

1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين: **(12 درجة للقضية المختارة)**

1. إنّ أيّة كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة، في أي فضاء متري (E,d).
2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E,τ) عندئذٍ تتحقق المساواة $\bar{A} = \acute{A} \cup A$.

2) لنأخذ في الفضاء المتري $(\mathbb{R}, |.|)$ الفضاء الجزئي $(]-3,12], |.|)$، ولتكن $B =]-2,2[$ والمطلوب:

1. أوجد $\bar{B}$ و $\acute{B}$ في الفضاء الجزئي $(]-3,12], |.|)$.
2. أثبت أن الفضاء المتري $(\mathbb{R}, |.|)$ فضاء تام.

الحل: 1. **(6 درجات)**

- $\bar{B}_{]-3,12]} = \bar{B}_{\mathbb{R}} \cap]-3,12] = [-2,2] \cap]-3,12] = [-2,2]$
- $\acute{B}_{]-3,12]} = \acute{B}_{\mathbb{R}} \cap]-3,12]$

إيجاد $\acute{B}_{\mathbb{R}}$:

من العلاقة $\bar{B}_{\mathbb{R}} = \acute{B}_{\mathbb{R}} \cup B$ نجد $\acute{B}_{\mathbb{R}} = \bar{B}_{\mathbb{R}} \cup]-2,2[= [-2,2]$ وبالتالي $\acute{B}_{\mathbb{R}} \in \{-2,2\}$، والآن لندرس نقاط B

لتكن $x \in B$ نقطة كيفية ولتكن $N(x,\rho)$ كرة مفتوحة كيفية في $(\mathbb{R}, |.|)$ مركزها x أي

$N(x,\rho) =]x-\rho, x+\rho[\Rightarrow N(x,\rho) \cap B =]x-\rho, x+\rho[\cap]-2,2[$

إن $]x-\rho, x+\rho[\cap]-2,2[$ أي $x \in]-2,2[$ أي أن هذين المجالين متقاطعين ونعلم أن ناتج تقاطع مجالين مفتوحين هو مجال مفتوح

ومنه $N(x,\rho) \cap B$ مجموعة غير منتهية من نقاط B.

وبمراعاة الاختيار الكيفي للكرة المفتوحة تكون $x \in \acute{B}_{\mathbb{R}}$، وبما أن x كيفية فإن كل نقاط B هي نقاط تراكم لها.

$\acute{B}_{\mathbb{R}} = B \cap \{-2,2\} = [-2,2] \Rightarrow \acute{B}_{]-3,12]} = [-2,2] \cap]-3,12] = [-2,2]$

2. **(5 درجات)**

ليكن (u_n) متتالية أساسية كيفية من نقاط الفضاء $(\mathbb{R}, |.|)$ ولنبين أنها متقاربة فيه إلى إحدى نقاطه.

بما أن (u_n) متتالية أساسية فبحسب النتيجة " إن أية متتالية أساسية في أي فضاء متري هي متتالية محدودة " بالتالي المتتالية (u_n) محدودة، ونعلم أن أية متتالية محدودة في $\mathbb{R}$ تملك متتالية جزئية متقاربة، أي توجد متتالية جزئية من (u_n) مثل (u_{n_k}) بحيث المتتالية الجزئية (u_{n_k}) متقاربة في $(\mathbb{R}, |.|)$ من نقطة مثل u_0 وبحسب النتيجة " إذا كانت (u_n) متتالية أساسية و(u_{n_k}) متتالية جزئية منها بحيث أن (u_{n_k}) متقاربة في (E,d) من u_0 فإن المتتالية الأساسية (u_n) تتقارب في (E,d) من u_0 أيضاً " نجد أن متقاربة في من u_0 .

وبمراعاة الاختيار الكيفي للمتتالية (u_n) الأساسية في $(\mathbb{R}, |.|)$ يكون الفضاء $(\mathbb{R}, |.|)$ تام.

3) تعيين شكل الكرات المغلقة في الفضاء المتري المنقطع (**6 درجات**)

المثال (**6 درجات**)

في الفضاء المتري المنقطع $(\mathbb{N}, d)$ المجموعة $A = \{3, 7\}$ هي مجموعة مفتوحة في هذا الفضاء لأنها اجتماع لكرتين مفتوحتين $A = N\left(3, \frac{1}{2}\right) \cup N\left(7, \frac{1}{2}\right)$ ومنه تكون A مجاورة لكل نقطة من نقاطها،(المجموعة المفتوحة مجاورة لكل نقطه من نقاطها) أي A مجاورة لـ $x = 3$

الجوار لـ $x = 3$ هو كرة مفتوحة مركزها 3 ومن المعلوم أن الكرات المفتوحة في الفضاء المتري المنقطع شكلها

$$N(3, \rho) = \begin{cases} \emptyset & ; \rho = 0 \\ \{3\}; & 0 < \rho \leq 1 \\ \mathbb{N}; & \rho > 1 \end{cases}$$

فنلاحظ مهما $\rho \geq 0$ فإن $A \neq N(3, \rho)$ أي A ليس جوار لـ 3 في الفضاء $(\mathbb{N}, d)$ المنقطع.

ملاحظة

بعض التمارين تُحل بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحل تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

A to Z

جامعة طرطوس | امتحان مقرر تبولوجيا 1 | اسم الطالب:

كلية العلوم | سنة ثانية رياضيات | المدة: ساعتان

قسم الرياضيات | الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2023–2024 م | الدرجة: 90

السؤال الأول: (60 درجة)

1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:

نقطة التراكم في مجموعة – المجموعة الكثيفة في كل مكان – خارجية مجموعة– النقطة المنعزلة لمجموعة – البعد بين مجموعتين – قاعدة التبولوجيا –الكرة المغلقة في الفضاء المتري.

2) نعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ الأسرة الآتية: $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ;\ ]1,5[\subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{R}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{R}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = [-2,7[$ و أوجد كلاً من $\mathring{A}$، $ex(A)$، $\bar{A}$، $d(A)$، $V(A)$، $Is(A)$، $\hat{A}$.
4. هل المجموعة A كثيفة في المجموعة $C =]5,13]$.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ;\ [0,5] \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ تشكل قاعدة لـ τ.
6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

السؤال الثاني: (30 درجة)

1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين:

1. إذا كان (E,d) فضاءً متريّاً تاماً و (X,d) فضاءً متريّاً جزئياً منه عندئذ يكون الفضاء الجزئي (X,d) تاماً إذا وفقط إذا كانت المجموعة X مغلقة في الفضاء الكلي (E,d).
2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E,τ) عندئذٍ تتحقق المساواة $\bar{A} = \hat{A} \cup A$.

2) ليكن $(\mathbb{R}^3, d)$ الفضاء المتري الإقليدي ، والمطلوب:

a. تحقق أنّ الفضاء الجزئي (X,d) فضاء تام أم لا، حيث

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3\}$$

b. أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{2}{n}, \frac{-n}{2n-1}, -2\right)$ محدودة في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$.

3) عيّن شكل الكرات المفتوحة في الفضاء المتري المنقطع (E,d) مع الشرح.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

مكتبة A to Z

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تبولوجيا1 لطلاب السنة الثانية رياضيات

الفصل الثاني– العام الدراسي 2023–2024م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (60 درجة)

1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:

نقطة التراكم في مجموعة – المجموعة الكثيفة في كل مكان – خارجية مجموعة– النقطة المنعزلة لمجموعة – البعد بين مجموعتين – قاعدة التبولوجيا –الكرة المغلقة في الفضاء المتري.(**ثلاث درجات لكل تعريف يتم اختياره**) .**المجموع 15 درجات**

2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{R}$ الأسرة الآتية: $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; \quad]1,5[\subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{R}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{R}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = [-2,7[$ و أوجد كلاً من $\mathring{A}$ ،$ex(A)$، $\bar{A}$ ،$bd(A)$، $V(A)$ ، $Is(A)$، $\acute{A}$.
4. هل المجموعة A كثيفة في المجموعة $C =]5,13]$.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; \quad [0,5] \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ تشكل قاعدة لـ τ.
6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

الحل:

1. **(9 درجات)**

- من تعريف τ نجد $\emptyset \in \tau$

$$]1,5[\subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \in \tau$$

بالتالي الشرط الأول محقق.

- لنثبت أنّه أيّاً كان $T, G \in \tau$ فإنّ $T \cap G \in \tau$.

نميز حالتين:

مكتبة A to Z

الحالة الأولى : $T = \emptyset$ أو $G = \emptyset$ أو كلاهما، عندئذ نجد $T \cap G = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية : $T \neq \emptyset$ و $G \neq \emptyset$ عندئذ

$$T \in \tau \Rightarrow T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; \quad]1,5[\subseteq T$$
$$G \in \tau \Rightarrow G \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; \quad]1,5[\subseteq G$$

عندئذ $]1,5[\subseteq T \cap G$ & $T \cap G \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

بالتالي $T \cap G \in \tau$

- لتكن لدينا الأسرة $\{G_i ; i \in I\} \subseteq \tau$ ولنثبت أن $\cup_{i \in I} G_i \in \tau$

نميز حالتين:

الحالة الأولى: إذا كانت $G_i = \emptyset$ أيا كان $i \in I$ فإنّ $\cup_{i \in I} G_i = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية: إذا كانت أحد عناصر الأسرة $\{G_i ; i \in I\}$ لا يساوي الخالية وليكن $G_{i_0} \neq \emptyset$ بالتالي $]1,5[\subseteq G_{i_0}$ عندئذ

$$]1,5[\subseteq \cup_{i \in I} G_i \Rightarrow \cup_{i \in I} G_i \in \tau ; \quad \cup_{i \in I} G_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R});$$

من تحقق الشروط السابقة نجد أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{R}$.

2. $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; \quad]1,5[\cap F = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$ **(3 درجات)**

3. $\underline{\mathring{A}}$: أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $A \Leftarrow \mathring{A} = A$ **(3 درجات)**

$\underline{ex(A)}$: أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $\mathbb{R}\backslash A \Leftarrow ex(A) = \emptyset$ **(3 درجات)**

$\underline{\bar{A}}$: أصغر مجموعة مغلقة تحوي $A \Leftarrow \bar{A} = \mathbb{R}$ **(3 درجات)**

$\underline{bd(A)}$: $bd(A) = \bar{A}\backslash\mathring{A} = \mathbb{R}\backslash A$ **(3 درجات)**

$\underline{V(A)}$: **(3 درجات)**

$$V(A) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \quad [-2,7[\subseteq v\}$$

$\underline{Is(A), \acute{A}}$. **(6 درجات)**

$$\bar{A} = \acute{A} \cup A \Rightarrow \mathbb{R} = \acute{A} \cup A$$

لندرس نقاط A

$$\forall x \in A \Rightarrow V(x) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \{x\} \cup]1,5[\subseteq v\}$$
$$\forall v \in V(x) \Rightarrow \{x\} \cup]1,5[\subseteq v \cap A \neq \emptyset, \{x\}$$
$$\Rightarrow x \notin Is(A) \ , x \in \acute{A}$$

ومنه نجد $Is(A) = \emptyset$, $\acute{A} = \mathbb{R}$

4. تكون A كثيفة في C إذا تحققت العلاقة $C \subseteq \bar{A}$

ولدينا $\bar{A} = \mathbb{R}$ بالتالي A كثيفة في C. **(3 درجات)**

5. **(3 درجات)**

تكون β قاعدة لـ τ إذا تحقق ما يلي:

- $\beta \subseteq \tau$

A to Z مكتبة

- $\forall\ T \in \tau \Longrightarrow T = \cup_{B_i \in \beta} B_i$

الشرط الثاني غير محقق لأنه توجد مثلاً المجموعة $]1,7[$ تنتمي للتبولوجيا τ ولكن لا يمكن كتابتها على شكل اجتماع لعناصر من الأسرة β.

6. $\tau_1 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\ ;\quad]0,6] \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$\tau_1 \subseteq \tau$

بالتالي τ_1 أضعف من τ . **(3 درجات)**

(توجد أمثلة كثيرة)

7. $\tau_2 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\quad [2,4[\subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$\tau \subseteq \tau_2$

بالتالي τ_2 أقوى من τ . **(3 درجات)**

السؤال الثاني: (30 درجة)

1) أثبت صحة **إحدى** القضيتين التاليتين:

1. إذا كان (E,d) فضاءً متريّاً تاماً و (X,d) فضاءً متريّاً جزئياً منه عندئذ يكون الفضاء الجزئي (X,d) تاماً إذا وفقط إذا كانت المجموعة X مغلقة في الفضاء الكلي (E,d).

2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E,τ) عندئذ تتحقق المساواة $\bar{A} = \acute{A} \cup A$.

2) ليكن $(\mathbb{R}^3,d)$ الفضاء المتري الإقليدي ، والمطلوب:

a. تحقق أنّ الفضاء الجزئي (X,d) فضاء تام أم لا، حيث

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3\}$$

b. أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{2}{n}, \frac{-n}{2n-1}, -2\right)$ محدودة في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3,d)$.

3) عيّن شكل الكرات المفتوحة في الفضاء المتري المنقطع (E,d) مع الشرح.

الحل:

1) **(10 درجات للقضية المختارة)**

2) a. **(8 درجات)**

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3\}$$
$$\Longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 > 3\} \cup$$
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 < 3$$

نأخذ

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 < 3\}$$

وهي كرة مفتوحة في $(\mathbb{R}^3,d)$ مركزها $(-3,0,1)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$ فهي مجموعة مفتوحة (لأنّ كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة)

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 > 3\}$$

A to Z مكتبة

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2\backslash D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 3\}$$

وهي كرة مغلقة في $(\mathbb{R}^3, d)$ مركزها $(-3,0,1)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$ فهي مجموعة مغلقة (لأنّ كل كرة مغلقة هي مجموعة مغلقة) وبالتالي D مجموعة مفتوحة.

إذاً $\mathbb{R}^2\backslash X$ مجموعة مفتوحة لأنها اجتماع مجموعتين مفتوحتين ومنه X مجموعة مغلقة.

ومنه (X,d) تام حسب المبرهنة ((إذا كان (E,d) فضاء تام و (X,d) فضاء جزئي من (E,d) عندئذ يكون (X,d) تام إذا وفقط إذا كانت X مغلقة في الفضاء الكلي (E,d))).

b. (6 درجات)

تكون المتتالية u_n متقاربة في الفضاء الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$ إذا كانت متتالية كل مسقط متقاربة في $(\mathbb{R}, |.|)$، ولدينا $\lim_{n\to\infty} u_n = \left(0, \frac{-1}{2}, -2\right)$ $\Leftarrow$ المتتالية u_n متقاربة في $(\mathbb{R}^3, d)$ $\Leftarrow$ المتتالية u_n محدودة في $(\mathbb{R}^3, d)$، لأن كل متتالية متقاربة محدودة.

3) تعيين شكل الكرات المفتوحة في الفضاء المتري المنقطع **(6 درجات)**

ملاحظة

بعض التمارين تُحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

مكتبة A to Z

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تبولوجيا 1	اسم الطالب:
كلية العلوم	سنة ثانية رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2023-2024م	الدرجة: 90

السؤال الأول: (55 درجة)

1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:

النقطة المنعزلة لمجموعة – المجموعة الكثيفة – النقطة الجبهية لمجموعة– النقطة اللاصقة لمجموعة – البعد بين مجموعتين– قاعدة التبولوجيا –سطح الكرة في الفضاء المتري.

2) نعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ الأسرة الآتية: $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\,;\quad]-2,7] \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{R}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{R},\tau)$.
3. خذ المجموعة $A = [-4,1]$ و أوجد كلاً من $\dot{A}$، $ex(A)$، $\bar{A}$، $bd(A)$، $V(A)$ ، $Is(A)$، $\hat{A}$.
4. هل المجموعة $C =]8,13[$ كثيفة في كل مكان.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\,;\quad [2,7[\subseteq B\}$ تشكل قاعدة لـ τ.
6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

السؤال الثاني: (35 درجة)

1) أثبت صحة **إحدى** القضيتين التاليتين:

1. إنّ أيّة كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة، في أي فضاء متري (E,d).
2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E,τ) وكانت $\{G_i\ ;\ i \in I\}$ أسرة جميع المجموعات المفتوحة في (E,τ) والتي كل منها تحقق العلاقة $G_i \subseteq A \quad \forall\, i \in I$ عندئذٍ تتحقق المساواة $\hat{A} = \bigcup_{i\in I} G_i$.

2) ليكن $(\mathbb{R}^2,d)$ الفضاء المتري الإقليدي، والمطلوب:

a. تحقق أنّ الفضاء الجزئي (X,d) فضاء تام أم لا، حيث

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ (x+2)^2 + y^2 = 1\}\cup\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$$

b. أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{4}{n+2}\,,\frac{-n}{-3n+1}\right)$ محدودة في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^2,d)$.

3) عيّن شكل الكرات المغلقة في الفضاء المتري المنقطع (E,d) مع الشرح، ثمّ أعطِ مثال يبين أنّه ليس بالضرورة كل مجاورة لنقطة هي جوار لهذه النقطة في الفضاء المتري المنقطع (E,d).

---انتهت الأسئلة---

طرطوس 2024/1/29 تمنياتي بالتوفيق والنجاح مدرس المقرر : د. بشرى دراج

Bashar Zoray

جامعة طرطوس　　كلية العلوم　　قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تبولوجيا 1 لطلاب السنة الثانية رياضيات

الفصل الأول– العام الدراسي 2023–2024م

الدرجة: تسعون

مكتبة A to Z

السؤال الأول: (55 درجة)

1) عرّف **خمسة** مفاهيم مما يلي:

النقطة المنعزلة لمجموعة – المجموعة الكثيفة – النقطة الجبهية لمجموعة– النقطة اللاصقة لمجموعة – البعد بين مجموعتين– قاعدة التبولوجيا –سطح الكرة في الفضاء المتري.(**درجتان لكل تعريف يتم اختياره**) .**المجموع 10 درجات**

2) نعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ الأسرة الآتية: $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; \quad]-2,7] \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{R}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{R}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = [-4,1]$ و أوجد كلاً من $\mathring{A}$، $ex(A)$، $\bar{A}$، $bd(A)$، $V(A)$ ، $Is(A)$، $\acute{A}$.
4. هل المجموعة $C =]8,13[$ كثيفة في كل مكان.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; \quad]2,7[\subseteq B\}$ تشكل قاعدة لـ τ.
6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

الحلّ:

1. **(9 درجات)**

- من تعريف τ نجد $\emptyset \in \tau$

$$]-2,7] \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \in \tau$$

بالتالي الشرط الأول محقق.

- لنثبت أنّه أيّاً كان $T, G \in \tau$ فإنّ $T \cap G \in \tau$.

نميز حالتين:

الحالة الأولى : $T = \emptyset$ أو $G = \emptyset$ أو كلاهما، عندئذ نجد $T \cap G = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية : $T \neq \emptyset$ و $G \neq \emptyset$ عندئذ

$$T \in \tau \Rightarrow T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; \quad]-2,7] \subseteq T$$
$$G \in \tau \Rightarrow G \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; \quad]-2,7] \subseteq G$$

عندئذ $T \cap G \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ & $]-2,7] \subseteq T \cap G$

بالتالي $T \cap G \in \tau$

- لتكن لدينا الأسرة $\{G_i; i \in I\} \subseteq \tau$ ولنثبت أن $\cup_{i\in I} G_i \in \tau$

نميز حالتين:

الحالة الأولى: إذا كانت $G_i = \emptyset$ أيا كان $i \in I$ فإنّ $\cup_{i\in I} G_i = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية: إذا كانت أحد عناصر الأسرة $\{G_i; i \in I\}$ لا يساوي الخالية وليكن $G_{i_o} \neq \emptyset$ بالتالي $]-2,7] \subseteq G_{i_o}$ عندئذ

$$\cup_{i\in I} G_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \quad]-2,7] \subseteq \cup_{i\in I} G_i \Rightarrow \cup_{i\in I} G_i \in \tau$$

من تحقق الشروط السابقة نجد أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{R}$.

2. $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; \quad]-2,7] \cap F = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$ **(3 درجات)**

3. $\mathring{A}$: أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $A \Leftarrow \mathring{A} = \emptyset$ **(3 درجات)**

ex(A) : أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $\mathbb{R}\backslash A \Leftarrow ex(A) = \emptyset$ **(3 درجات)**

$\bar{A}$: أصغر مجموعة مغلقة تحوي $A \Leftarrow \bar{A} = \mathbb{R}$ **(3 درجات)**

bd(A) : $bd(A) = \bar{A}\backslash\mathring{A} = \mathbb{R}\backslash\emptyset = \mathbb{R}$ **(3 درجات)**

V(A) : **(3 درجات)**

$$V(A) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \quad [-4,7] \subseteq v\}$$

Is(A), Á. **(6 درجات)**

$$\bar{A} = \acute{A} \cup A \Rightarrow \mathbb{R} = \acute{A} \cup A$$

لندرس نقاط A

$$\forall x \in A \Rightarrow V(x) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); \{x\} \cup]-2,7] \subseteq v\}$$
$$\forall v \in V(x) \Rightarrow \{x\} \cup]-2,1] \subseteq v \cap A \neq \emptyset, \{x\}$$
$$\Rightarrow x \notin Is(A), x \in \acute{A}$$

ومنه نجد $\acute{A} = \mathbb{R}, Is(A) = \emptyset$

4. تكون C كثيفة في كل مكان إذا تحققت العلاقة $\bar{C} = \mathbb{R}$

ولدينا $\bar{C} = C$ بالتالي C ليست كثيفة في كل مكان. **(3 درجات)**

5. **(3 درجات)**

تكون β قاعدة لـ τ إذا تحقق ما يلي:

- $\beta \subseteq \tau$

A to Z مكتبة

- $\forall\ T \in \tau \implies T = \cup_{B_i \in \beta} B_i$

الشرط الأول غير محقق لأنه توجد مثلاً المجموعة $]0,7[$ تنتمي للأسرة β ولكن لا تنتمي للتبولوجيا τ.

6. $\tau_1 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\ ;\quad]-2,9] \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$\tau_1 \subseteq \tau$

بالتالي τ_1 أضعف من τ . **(3 درجات)**

(توجد أمثلة كثيرة)

7. $\tau_2 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\quad]3,7] \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$\tau \subseteq \tau_2$

بالتالي τ_2 أقوى من τ . **(3 درجات)**

السؤال الثاني: (35 درجة)

1) أثبت صحة **إحدى** القضيتين التاليتين:

1. إنّ أيّة كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة، في أي فضاء متري (E,d).
2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E,τ) وكانت $\{G_i\ ;\ i \in I\}$ أسرة جميع المجموعات المفتوحة في (E,τ) والتي كل منها تحقق العلاقة $G_i \subseteq A\ \ \forall\ i \in I$ عندئذٍ تتحقق المساواة $\mathring{A} = \cup_{i\in I} G_i$.

2) ليكن $(\mathbb{R}^2,d)$ الفضاء المتري الإقليدي، والمطلوب:

a. تحقق أنّ الفضاء الجزئي (X,d) فضاء تام أم لا، حيث

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ (x+2)^2 + y^2 = 1\}\cup\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \ x^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$$

b. أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{4}{n+2}\ ,\frac{-n}{-3n+1}\right)$ محدودة في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^2,d)$.

3) عيّن شكل الكرات المغلقة في الفضاء المتري المنقطع (E,d) مع الشرح، ثمّ أعطِ مثال يبين أنّه ليس بالضرورة كل مجاورة لنقطة هي جوار لهذه النقطة في الفضاء المتري المنقطع (E,d).

الحل:

1) (10 درجات للقضية المختارة)

2) a. **(10 درجات)**

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ (x+2)^2 + y^2 = 1\}\cup\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \ x^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$$

نأخذ

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ (x+2)^2 + y^2 = 1\}$$
$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \ x^2 + (y-3)^2 \leq 4\right\}$$
$$\implies \mathbb{R}^2 \backslash A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ (x+2)^2 + y^2 > 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ (x+2)^2 + y^2 < 1$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ (x+2)^2 + y^2 < 1\}$$

وهي كرة مفتوحة في $(\mathbb{R}^2,d)$ مركزها $(-2,0)$ ونصف قطرها 1 فهي مجموعة مفتوحة (لأنّ كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة)

مكتبة A to Z

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ (x+2)^2 + y^2 > 1\}$$
$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \backslash D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ (x+2)^2 + y^2 \leq 1\}$$

وهي كرة مغلقة في $(\mathbb{R}^2, d)$ مركزها $(-2,0)$ ونصف قطرها 1 فهي مجموعة مغلقة (لأنّ كل كرة مغلقة هي مجموعة مغلقة) وبالتالي D مجموعة مفتوحة.

إذاً $\mathbb{R}^2 \backslash A$ مجموعة مفتوحة لأنها اجتماع مجموعتين مفتوحتين ومنه A مجموعة مغلقة.

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2 + (y-3)^2 \leq 4\right\}$$

وهي كرة مغلقة في $(\mathbb{R}^2, d)$ مركزها $(0,3)$ ونصف قطرها 2 فهي مجموعة مغلقة.

وبالتالي X مجموعة مغلقة لأنها اجتماع مجموعتين مغلقتين، ومنه (X,d) تام حسب المبرهنة ((إذا كان (E,d) فضاء تام و (X,d) فضاء جزئي من (E,d) عندئذ يكون (X,d) تام إذا وفقط إذا كانت X مغلقة في الفضاء الكلي (E,d))).

b. **(5 درجات)**

تكون المتتالية u_n متقاربة في الفضاء الإقليدي $(\mathbb{R}^2, d)$ إذا كانت متتالية كل مسقط متقاربة في $(\mathbb{R}, |.|)$، ولدينا $\lim_{n\to\infty} u_n = \left(0, \frac{1}{3}\right)$ $\Longleftarrow$ المتتالية u_n متقاربة في $(\mathbb{R}^2, d)$ $\Longleftarrow$ المتتالية u_n محدودة في $(\mathbb{R}^2, d)$، لأن كل متتالية متقاربة محدودة.

3. تعيين شكل الكرات المغلقة في الفضاء المتري المنقطع (**5 درجات**)

المثال (5 درجات)

في الفضاء المتري المنقطع $(\mathbb{N}, d)$ المجموعة $A = \{2,6\}$ هي مجموعة مفتوحة في هذا الفضاء لأنها اجتماع لكرتين مفتوحتين $A = N\left(2, \frac{1}{2}\right) \cup N\left(6, \frac{1}{2}\right)$ ومنه تكون A مجاورة لكل نقطة من نقاطها،(المجموعة المفتوحة مجاورة لكل نقطه من نقاطها) أي A مجاورة لـ $x = 2$

الجوار لـ $x = 2$ هو كرة مفتوحة مركزها 2 ومن المعلوم أن الكرات المفتوحة في الفضاء المتري المنقطع شكلها

$$N(2,\rho) = \begin{cases} \emptyset & ;\rho = 0 \\ \{2\}; & 0 < \rho \leq 1 \\ \mathbb{N}; & \rho > 1 \end{cases}$$

فنلاحظ مهما $\rho \geq 0$ فإنّ $A \neq N(2,\rho)$ أي A ليس جوار لـ 2 في الفضاء $(\mathbb{N}, d)$ المنقطع.

ملاحظة

بعض التمارين تُحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

مكتبة A to Z

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تبولوجيا 1 لطلاب السنة الثانية رياضيات

الدورة التكميلية– العام الدراسي 2022–2023م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (60 درجة)

1) عرّف **خمسة** مفاهيم مما يلي:

داخلية مجموعة – المجموعة الكثيفة – خارجية مجموعة– النقطة الجبهية لمجموعة – قطر المجموعة– قاعدة التبولوجيا –الكرة المغلقة في الفضاء المتري. (**ثلاث درجات لكل تعريف يتم اختياره**) .**المجموع 15 درجة**

2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة الآتية: $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \quad \{1,5,9\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = \{2,3,7\}$ و أوجد كلاً من $\mathring{A}$ ،$ex(A)$، $\bar{A}$ ،$bd(A)$ ،$V(A)$ ، $Is(A)$، $\acute{A}$.
4. هل المجموعة $C = \{1,4,7\}$ كثيفة في كل مكان.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \quad \{1,3,5\} \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ تشكل قاعدة لـ τ.
6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

الحلّ:

1. **(9 درجات)**

- من تعريف τ نجد $\emptyset \in \tau$

$$\{1,5,9\} \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N} \in \tau$$

بالتالي الشرط الأول محقق.

- لنثبت أنّه أيّاً كان $T, G \in \tau$ فإنّ $T \cap G \in \tau$.

نميز حالتين:

A to Z

الحالة الأولى : $T = \emptyset$ أو $G = \emptyset$ أو كلاهما، عندئذ نجد $T \cap G = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية : $T \neq \emptyset$ و $G \neq \emptyset$ عندئذ

$$T \in \tau \Rightarrow T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\ \{1,5,9\} \subseteq T$$
$$G \in \tau \Rightarrow G \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\ \{1,5,9\} \subseteq G$$

عندئذ $\{1,5,9\} \subseteq T \cap G$ & $T \cap G \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ بالتالي $T \cap G \in \tau$

- لتكن لدينا الأسرة $\{G_i; i \in I\} \subseteq \tau$ ولنثبت أن $\cup_{i\in I} G_i \in \tau$

إذا كانت $G_i = \emptyset$ أيا كان $i \in I$ فإنّ $\cup_{i\in I} G_i = \emptyset \in \tau$

إذا كانت أحد عناصر الأسرة $\{G_i; i \in I\}$ لا يساوي الخالية وليكن $G_{i_0} \neq \emptyset$ بالتالي $\{1,5,9\} \subseteq G_{i_0}$ عندئذ

$$\cup_{i\in I} G_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{1,5,9\} \subseteq \cup_{i\in I} G_i \Rightarrow \cup_{i\in I} G_i \in \tau$$

من تحقق الشروط السابقة نجد أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.

2. $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\ \{1,5,9\} \cap F = \emptyset\} \cup \{\mathbb{N}\}$ **(3 درجات)**

3. $\mathring{A}$: أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A $\Leftarrow \mathring{A} = \emptyset$ **(3 درجات)**

$ex(A)$: أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $\mathbb{N}\backslash A$ $\Leftarrow ex(A) = \mathbb{N}\backslash A$ **(3 درجات)**

$\bar{A}$: أصغر مجموعة مغلقة تحوي A $\Leftarrow \bar{A} = A$ **(3 درجات)**

$bd(A)$: $bd(A) = \bar{A}\backslash\mathring{A} = A\backslash\emptyset$ **(3 درجات)**

$V(A)$: **(3 درجات)**

$$V(A) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{2,3,7\} \subseteq v\}$$

$Is(A), \acute{A}$. **(6 درجات)**

$$\bar{A} = \acute{A} \cup A \Rightarrow A = \acute{A} \cup A$$

لندرس نقاط A

$$x = 2 \Rightarrow V(2) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{1,2,5,9\} \subseteq v\}$$
$$\exists\ v_2 = \{1,2,5,9\}\ ;\ v \cap A = \{2\}$$
$$\Rightarrow 2 \in Is(A), 2 \notin \acute{A}$$
$$x = 3 \Rightarrow V(3) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{1,3,5,9\} \subseteq v\}$$
$$\exists\ v_3 = \{1,3,5,9\}\ ;\ v \cap A = \{3\}$$
$$\Rightarrow 3 \in Is(A), 3 \notin \acute{A}$$
$$x = 7 \Rightarrow V(7) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{1,5,7,9\} \subseteq v\}$$
$$\exists\ v_7 = \{1,5,7,9\}\ ;\ v \cap A = \{7\}$$
$$\Rightarrow 7 \in Is(A), 7 \notin \acute{A}$$

ومنه نجد $\acute{A} = \emptyset, Is(A) = A$

4. تكون C كثيفة في كل مكان إذا تحققت العلاقة $\bar{C} = \mathbb{N}$

ولدينا $\bar{C} = \mathbb{N}$ بالتالي C كثيفة في كل مكان. (3 درجات)

5. **(3 درجات)**

A to Z

تكون β قاعدة لـ τ إذا تحقق ما يلي:

- $\beta \subseteq \tau$
- $\forall\ T \in \tau \Longrightarrow T = \cup_{B_i \in \beta} B_i$

الشرط الأول غير محقق لأنه توجد مثلاً المجموعة $\{1,3,5\}$ تنتمي للأسرة β ولكن لا تنتمي للتبولوجيا τ.

6. $\tau_1 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\quad \{1,2,5,9\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$\tau_1 \subseteq \tau$

بالتالي τ_1 أضعف من τ . **(3 درجات)**

(توجد أمثلة كثيرة)

7. $\tau_2 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\quad \{5\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$\tau \subseteq \tau_2$

بالتالي τ_2 أقوى من τ . **(3 درجات)**

السؤال الثاني: (30 درجة)

1) أثبت صحة **إحدى** القضيتين التاليتين:

1. إذا كان (E,d) فضاءً متريّاً و (X,d) فضاءً متريّاً جزئياً منه و A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء الجزئي (X,d) عندئذٍ تكون A مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (X,d) إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مغلقة في الفضاء (E,d) مثل F بحيث يكون $A = F \cap X$.
2. لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E,τ) عندئذ تكون المجموعة A كثيفة في كل مكان في (E,τ) إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي: $\forall\ T \in \tau\backslash\{\emptyset\} \qquad A \cap T \neq \emptyset$

2) ليكن $(\mathbb{R}^3,d)$ الفضاء المتري الإقليدي ، والمطلوب:

a. تحقق أنّ الفضاء الجزئي (X,d) فضاء تام أم لا، حيث

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad x^2 + y^2 + (z+1)^2 \geq 9\ \}$$

b. أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{2}{n+2}, 5, \frac{1-2n}{2n+1}\right)$ محدودة في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3,d)$.

الحلّ:

1) (12 درجات للقضية)

2) a. **(10 درجات)**

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad x^2 + y^2 + (z+1)^2 \geq 9\ \}$$
$$\Longrightarrow \mathbb{R}^3\backslash X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad x^2 + y^2 + (z+1)^2 < 9\}$$

وهي كرة مفتوحة في $(\mathbb{R}^3,d)$ مركزها $(0,0,-1)$ ونصف قطرها 3 فهي مجموعة مفتوحة (لأنّ كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة)، بالتالي X مغلقة في $\mathbb{R}^3$

ومنه (X,d) تام حسب المبرهنة ((إذا كان (E,d) فضاء تام و (X,d) فضاء جزئي من (E,d) عندئذ يكون (X,d) تام إذا وفقط إذا كانت X مغلقة في الفضاء الكلي (E,d))).

A to Z

b. **(8 درجات)**

تكون المتتالية u_n متقاربة في الفضاء الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$ إذا كانت متتالية كل مسقط متقاربة في $(\mathbb{R}, |.|)$، ولدينا $\lim_{n\to\infty} u_n = (0{,}5\ , -1)$ المتتالية u_n متقاربة في $(\mathbb{R}^3, d)$ $\Longleftarrow$ المتتالية u_n محدودة في $(\mathbb{R}^3, d)$، لأن كل متتالية متقاربة محدودة.

---------- **ملاحظة** ----------

بعض التمارين تُحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر تبولوجيا 1
سنة ثانية رياضيات
الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2022-2023م

اسم الطالب:
المدة: ساعتان
الدرجة: 90

السؤال الأول: (60 درجة)

1) عرّف خمسة مفاهيم مما يلي:

نقطة التراكم في مجموعة – المجموعة الكثيفة – خارجية مجموعة– النقطة اللاصقة لمجموعة – قطر المجموعة– قاعدة التبولوجيا – الكرة المفتوحة في الفضاء المتري.

2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة الآتية: $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\quad \{2,7\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = \{2,3,7\}$ و أوجد كلاً من $\acute{A}$، $ex(A)$، $\bar{A}$، $bd(A)$، $V(A)$، $Is(A)$، $\dot{A}$.
4. هل المجموعة $C = \{1,4,13\}$ كثيفة في كل مكان.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\quad \{2,4,7\} \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ تشكّل قاعدة لـ τ.
6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

السؤال الثاني: (30 درجة)

1) أثبت صحة إحدى القضيتين التاليتين:

1. إذا كان (E,d) فضاءً متريّاً و (X,d) فضاءً متريّاً جزئياً منه و A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء الجزئي (X,d) عندئذٍ تكون A مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي (X,d) إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة في الفضاء (E,d) مثل G بحيث يكون $A = G \cap X$.
2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E,τ) عندئذٍ تتحقق المساواة $\bar{A} = \acute{A} \cup A$.

2) ليكن $(\mathbb{R}^3, d)$ الفضاء المتري الإقليدي ، والمطلوب:

a. تحقق أنّ الفضاء الجزئي (X,d) فضاء تام أم لا، حيث
$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$
b. أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{2}{n}, \frac{1-n}{2n+1}, 1\right)$ محدودة في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

A to Z

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تبولوجيا1 لطلاب السنة الثانية رياضيات

الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2022-2023م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (60 درجة)

1) عرّف **خمسة** مفاهيم مما يلي:

نقطة التراكم في مجموعة – المجموعة الكثيفة – خارجية مجموعة– النقطة اللاصقة لمجموعة – قطر المجموعة– قاعدة التبولوجيا – الكرة المفتوحة في الفضاء المتري. **(ثلاث درجات لكل تعريف يتم اختياره) .المجموع 15 درجة**

2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة الآتية: $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\quad \{2,7\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = \{2,3,7\}$ و أوجد كلاً من $\mathring{A}$ ،$ex(A)$، $\bar{A}$ ،$bd(A)$ ، $V(A)$ ،$Is(A)$، $\acute{A}$.
4. هل المجموعة $C = \{1,4,13\}$ كثيفة في كل مكان.
5. هل الأسرة $\beta = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\quad \{2,4,7\} \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ تشكل قاعدة لـ τ.
6. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
7. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

الحلّ:

1. **(9 درجات)**

- من تعريف τ نجد $\emptyset \in \tau$

$$\{2,7\} \subseteq \mathbb{N} \Longrightarrow \mathbb{N} \in \tau$$

بالتالي الشرط الأول محقق.

- لنثبت أنّه أيّاً كان $T, G \in \tau$ فإنّ $T \cap G \in \tau$.

نميز حالتين:

A to Z

الحالة الأولى : $T = \emptyset$ أو $G = \emptyset$ أو كلاهما، عندئذ نجد $T \cap G = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية : $T \neq \emptyset$ و $G \neq \emptyset$ عندئذ

$$T \in \tau \Rightarrow T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \; ; \; \{2,7\} \subseteq T$$
$$G \in \tau \Rightarrow G \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \; ; \; \{2,7\} \subseteq G$$

عندئذ $\{2,7\} \subseteq T \cap G \; \& \; T \cap G \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ بالتالي $T \cap G \in \tau$

- لتكن لدينا الأسرة $\{G_i; i \in I\} \subseteq \tau$ ولنثبت أن $\cup_{i\in I} G_i \in \tau$

إذا كانت $G_i = \emptyset$ أيا كان $i \in I$ فإنّ $\cup_{i\in I} G_i = \emptyset \in \tau$

إذا كانت أحد عناصر الأسرة $\{G_i; i \in I\}$ لا يساوي الخالية وليكن $G_{i_0} \neq \emptyset$ بالتالي $\{2,7\} \subseteq G_{i_0}$ عندئذ

$$\cup_{i\in I} G_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \; \{2,7\} \subseteq \cup_{i\in I} G_i \Rightarrow \cup_{i\in I} G_i \in \tau$$

من تحقق الشروط السابقة نجد أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.

2. $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \; ; \quad \{2,7\} \cap F = \emptyset\} \cup \{\mathbb{N}\}$ **(3 درجات)**

3. $\underline{\mathring{A}}$: أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $A \Leftarrow \mathring{A} = A$ **(3 درجات)**

$\underline{ex(A)}$: أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $\mathbb{N}\backslash A \Leftarrow ex(A) = \emptyset$ **(3 درجات)**

$\underline{\bar{A}}$: أصغر مجموعة مغلقة تحوي $A \Leftarrow \bar{A} = \mathbb{N}$ **(3 درجات)**

$\underline{bd(A)}$: $bd(A) = \bar{A}\backslash\mathring{A} = \mathbb{N}\backslash A$ **(3 درجات)**

$\underline{V(A)}$: **(3 درجات)**

$$V(A) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \; \{2,3,7\} \subseteq v \}$$

$\underline{Is(A), \acute{A}}$. **(6 درجات)**

$$\bar{A} = \acute{A} \cup A \Rightarrow \mathbb{N} = \acute{A} \cup \{2,3,7\} \Rightarrow \mathbb{N}\backslash\{2,3,7\} \subseteq \acute{A}$$

لندرس نقاط A

$$x = 2 \Rightarrow V(2) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \; \{2,7\} \subseteq v \}$$
$$\forall v \in V(2) \Rightarrow \{2,7\} \subseteq v \cap A$$
$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{2\}$$
$$\Rightarrow 2 \notin Is(A), 2 \in \acute{A}$$
$$x = 3 \Rightarrow V(3) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \; \{2,3,7\} \subseteq v \}$$
$$\forall v \in V(3) \Rightarrow \{2,7\} \subseteq v \cap A$$
$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{3\}$$
$$\Rightarrow 3 \notin Is(A), 3 \in \acute{A}$$
$$x = 7 \Rightarrow V(7) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N}); \; \{2,7\} \subseteq v \}$$
$$\forall v \in V(7) \Rightarrow \{2,7\} \subseteq v \cap A$$
$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{7\}$$
$$\Rightarrow 7 \notin Is(A), 7 \in \acute{A}$$

ومنه نجد $\acute{A} = \mathbb{N}, Is(A) = \emptyset$

4. تكون C كثيفة في كل مكان إذا تحققت العلاقة $\bar{C} = \mathbb{N}$

A to Z

$$\bar{C} = C \Rightarrow \bar{C} \neq \mathbb{N}$$

بالتالي C ليست كثيفة في كل مكان. **(3 درجات)**

5. **(3 درجات)**

تكون β قاعدة لـ τ إذا تحقق ما يلي:

- $\beta \subseteq \tau$
- $\forall\ T \in \tau \Rightarrow T = \bigcup_{B_i \in \beta} B_i$

الشرط الثاني غير محقق لأنه توجد مثلاً المجموعة المفتوحة $\{2,3,7\}$ لا يمكن كتابتها على شكل اجتماع لعناصر من الأسرة β.

6. $\tau_1 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\quad \{1,2,7\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$$\tau_1 \subseteq \tau$$

بالتالي τ_1 أضعف من τ . **(3 درجات)**

(توجد أمثلة كثيرة)

7. $\tau_2 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\quad \{2\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$$\tau \subseteq \tau_2$$

بالتالي τ_2 أقوى من τ . **(3 درجات)**

السؤال الثاني: (30 درجة)

1) أثبت صحة **إحدى** القضيتين التاليتين: **(12 درجة)**

1. إذا كان (E,d) فضاءً متريّاً و (X,d) فضاءً متريّاً جزئياً منه و A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء الجزئي (X,d) عندئذٍ تكون A مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي (X,d) إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مفتوحة في الفضاء (E,d) مثل G بحيث يكون $A = G \cap X$.
2. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E,τ) عندئذٍ تتحقق المساواة $\bar{A} = \acute{A} \cup A$.

2) ليكن $(\mathbb{R}^3,d)$ الفضاء المتري الإقليدي ، والمطلوب:

a. تحقق أنّ الفضاء الجزئي (X,d) فضاء تام أم لا، حيث

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

b. أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{2}{n}, \frac{1-n}{2n+1}, 1\right)$ محدودة في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3,d)$.

الحلّ: a. **(10 درجات)**

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad x^2+y^2+z^2 = 1\}$$
$$\Rightarrow \mathbb{R}^3 \backslash X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad x^2+y^2+z^2 < 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad x^2+y^2+z^2 > 1\}$$

نفرض $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\quad x^2+y^2+z^2 < 1\}$

وهي كرة مفتوحة في $(\mathbb{R}^3,d)$ مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها 1 فهي مجموعة مفتوحة (لأنّ كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة).

A to Z

وبفرض $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2+y^2+z^2 > 1\}$

نلاحظ بأنّ $\mathbb{R}^2 \backslash B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ وهي كرة مغلقة في $(\mathbb{R}^3, d)$ مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها 1 فهي مجموعة مغلقة بالتالي B مجموعة مفتوحة .

ومنه أصبح $\mathbb{R}^3 \backslash X = A \cup B$ مجموعة مفتوحة لأنها اجتماع لمجموعتين مفتوحتين بالتالي X مغلقة في $\mathbb{R}^3$

وبالتالي (X,d) تام حسب المبرهنة ((إذا كان (E,d) فضاء تام و (X,d) فضاء جزئي من (E,d) عندئذ يكون (X,d) تام إذا وفقط إذا كانت X مغلقة في الفضاء الكلي (E,d))).

b. (8 درجات)

تكون المتتالية u_n متقاربة في الفضاء الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$ إذا كانت متتالية كل مسقط متقاربة في $(\mathbb{R}, |.|)$، ولدينا

$\lim_{n\to\infty} u_n = \left(0, -\frac{1}{2}, 1\right) \Leftarrow$ المتتالية u_n متقاربة في $(\mathbb{R}^3, d) \Leftarrow$ المتتالية u_n محدودة في $(\mathbb{R}^3, d)$، لأن كل متتالية متقاربة محدودة.

---------- **ملاحظة** ----------

بعض التمارين تُحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

A to Z

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تبولوجيا 1	اسم الطالب:
كلية العلوم	الدورة الفصلية الأولى – سنة ثانية رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	العام الدراسي 2022-2023م	الدرجة: 90

السؤال الأول: (55 درجة)

1) عرّف **خمسة** مفاهيم مما يلي:

قطر المجموعة– قاعدة التبولوجيا – النقطة المنعزلة لمجموعة– المجموعة الكثيفة في كل مكان –داخلية مجموعة –سطح الكرة في الفضاء المتري – النقطة اللاصقة لمجموعة.

2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة الآتية: $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \quad \{1,6,8\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = \{1,2,7\}$ وأوجد كلاً من $\mathring{A}$ ،$ex(A)$، $\bar{A}$ ،$bd(A)$ ،$V(A)$ ، $Is(A)$، $\acute{A}$.
4. هل المجموعة $B = \{2,7,12\}$ كثيفة في $A = \{1,2,7\}$.
5. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
6. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

السؤال الثاني: (35 درجة)

1) أثبت صحة **قضيتين فقط** من القضايا التالية:

1. إذا كان (E,d) فضاءً متريا و(X,d) فضاءً متريا جزئياً منه و A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء الجزئي (X,d) عندئذٍ تكون A مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (X,d) إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مغلقة في الفضاء (E,d) مثل F بحيث يكون $A = F \cap X$.
2. لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E,τ) عندئذ تكون المجموعة A كثيفة في كل مكان في (E,τ) إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي: $\forall T \in \tau\backslash\{\emptyset\} \quad A \cap T \neq \emptyset$
3. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E,τ) عندئذٍ تتحقق المساواة $\bar{A} = \acute{A} \cup A$.

2) لنأخذ في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^2, d)$ المجموعة الآتية :

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 = 4\}$$

والمطلوب: تحقق أنّ الفضاء الجزئي (X,d) فضاء تام أم لا.

3) في الفضاء المتري ليس بالضرورة كل مجاورة لنقطة هي جوار لهذه النقطة، وضح ذلك بمثال.

انتهت الأسئلة

طرطوس في 2023/1/23 — مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح — مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تبولوجيا 1 لطلاب السنة الثانية رياضيات

الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2022–2023م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (55 درجة)

1) عرّف **خمسة** مفاهيم مما يلي:

قطر المجموعة– قاعدة التبولوجيا – النقطة المنعزلة لمجموعة– المجموعة الكثيفة في كل مكان –داخلية مجموعة –سطح الكرة في الفضاء المتري – النقطة اللاصقة لمجموعة.(**ثلاث درجات لكل تعريف يتم اختياره**) .**المجموع 15 درجة**

2) نعرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة الآتية: $\tau = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \quad \{1,6,8\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب:

1. أثبت أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.
2. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.
3. خذ المجموعة $A = \{1,2,7\}$ وأوجد كلاً من $\mathring{A}$، $ex(A)$، $\bar{A}$، $bd(A)$، $V(A)$ ، $Is(A)$، $\acute{A}$.
4. هل المجموعة $B = \{2,7,12\}$ كثيفة في $A = \{1,2,7\}$.
5. أعط مثال لتبولوجيا أضعف من τ غير التبولوجيا الضعيفة.
6. أعط مثال لتبولوجيا أقوى من τ غير التبولوجيا القوية.

الحلّ:

1. **(7 درجات)**

- من تعريف τ نجد $\emptyset \in \tau$

$$\{1,6,8\} \subseteq \mathbb{N} \Longrightarrow \mathbb{N} \in \tau$$

بالتالي الشرط الأول محقق.

- لنثبت أنّه أيّاً كان $T, G \in \tau$ فإنّ $T \cap G \in \tau$.

نميز حالتين:

الحالة الأولى : $T = \emptyset$ أو $G = \emptyset$ أو كلاهما، عندئذ نجد $T \cap G = \emptyset \in \tau$

الحالة الثانية : $T \neq \emptyset$ و $G \neq \emptyset$ عندئذ

$$T \in \tau \Rightarrow T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\ \{1,6,8\} \subseteq T$$
$$G \in \tau \Rightarrow G \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\ \{1,6,8\} \subseteq G$$

عندئذ $\{1,6,8\} \subseteq T \cap G$ & $T \cap G \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ بالتالي $T \cap G \in \tau$

- لتكن لدينا الأسرة $\{G_i; i \in I\} \subseteq \tau$ ولنثبت أن $\cup_{i\in I} G_i \in \tau$

إذا كانت $G_i = \emptyset$ أيا كان $i \in I$ فإنّ $\cup_{i\in I} G_i = \emptyset \in \tau$

إذا كانت أحد عناصر الأسرة $\{G_i; i \in I\}$ لايساوي الخالية وليكن $G_{i_0} \neq \emptyset$ بالتالي $\{1,6,8\} \subseteq G_{i_0}$ عندئذ

$$\cup_{i\in I} G_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{1,6,8\} \subseteq \cup_{i\in I} G_i \Rightarrow \cup_{i\in I} G_i \in \tau$$

من تحقق الشروط السابقة نجد أن الأسرة τ تعرّف تبولوجيا على $\mathbb{N}$.

2. $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ;\ \ \{1,6,8\} \cap F = \emptyset\} \cup \{\mathbb{N}\}$ **(3 درجات)**

3. $\underline{\mathring{A}}$: أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A $\quad \mathring{A} = \emptyset \Leftarrow A$ **(3 درجات)**

$\underline{ex(A)}$: أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في $\mathbb{N}\backslash A$ $\quad ex(A) = \emptyset \Leftarrow \mathbb{N}\backslash A$ **(3 درجات)**

$\underline{\bar{A}}$: أصغر مجموعة مغلقة تحوي A $\quad \bar{A} = \mathbb{N} \Leftarrow A$ **(3 درجات)**

$\underline{bd(A)}$: $bd(A) = \bar{A}\backslash\mathring{A} = \mathbb{N}\backslash\emptyset = \mathbb{N}$ **(3 درجات)**

$\underline{V(A)}$: **(3 درجات)**

$$V(A) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{1,2,6,7,8\} \subseteq v\ \}$$

$\underline{Is(A), \acute{A}}$. **(6 درجات)**

$$\bar{A} = \acute{A} \cup A \Rightarrow \mathbb{N} = \acute{A} \cup \{1,6,8\} \Rightarrow \mathbb{N}\backslash\{1,6,8\} \subseteq \acute{A}$$

لندرس نقاط A

$$x = 1 \Rightarrow V(1) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{1,6,8\} \subseteq v\ \}$$
$$\exists v_1 = \{1,6,8\};\ v_1 \cap A = \{1\} \Rightarrow 1 \in Is(A), 1 \notin \acute{A}$$
$$x = 2 \Rightarrow V(2) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{1,2,6,8\} \subseteq v\ \}$$
$$\forall v \in V(2) \Rightarrow \{1,2\} \subseteq v \cap A$$
$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{2\}$$
$$\Rightarrow 2 \notin Is(A), 2 \in \acute{A}$$
$$x = 7 \Rightarrow V(7) = \{v \in \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \{1,6,7,8\} \subseteq v\ \}$$
$$\forall v \in V(7) \Rightarrow \{1,7\} \subseteq v \cap A$$
$$\Rightarrow v \cap A \neq \emptyset, \{7\}$$
$$\Rightarrow 7 \notin Is(A), 7 \in \acute{A}$$

ومنه نجد $\acute{A} = \mathbb{N}\backslash\{1\}, Is(A) = \{1\}$

4. تكون B كثيفة في A إذا تحققت العلاقة $A \subseteq \bar{B}$

$$\bar{B} = B \Rightarrow A \nsubseteq \bar{B}$$

بالتالي B ليست كثيفة في A . **(3 درجات)**

5. $\tau_1 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \quad \{1,6,8,9\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$\tau_1 \subseteq \tau$

بالتالي τ_1 أضعف من τ . **(3 درجات)**

(توجد أمثلة كثيرة)

6. $\tau_2 = \{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) ; \quad \{1,6\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$

$\tau \subseteq \tau_2$

بالتالي τ_2 أقوى من τ . **(3 درجات)**

السؤال الثاني: (35 درجة)

1) أثبت صحة **قضيتين فقط** من القضايا التالية:(**10 درجات لكلّ قضية**)

1. إذا كان (E,d) فضاءً متريّاً و (X,d) فضاءً متريّاً جزئياً منه و A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء الجزئي (X,d) عندئذٍ تكون A مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (X,d) إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مغلقة في الفضاء (E,d) مثل F بحيث يكون $A = F \cap X$.
2. لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E,τ) عندئذ تكون المجموعة A كثيفة في كل مكان في (E,τ) إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي: $\forall T \in \tau\backslash\{\emptyset\} \quad A \cap T \neq \emptyset$
3. إذا كانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء التبولوجي (E,τ) عندئذٍ تتحقق المساواة $\bar{A} = \acute{A} \cup A$.

2) لنأخذ في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^2,d)$ المجموعة الآتية :

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 = 4\}$$

والمطلوب: تحقق أنّ الفضاء الجزئي (X,d) فضاء تام أم لا.

الحلّ: **(10 درجات)**

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 = 4\}$$
$$\Rightarrow \mathbb{R}^2\backslash X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 > 4\}$$

نفرض $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 < 4\}$

وهي كرة مفتوحة في $(\mathbb{R}^2,d)$ مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 2 فهي مجموعة مفتوحة (لأنّ كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة).

وبفرض $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 > 4\}$

نلاحظ بأنّ $\mathbb{R}^2\backslash B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$ وهي كرة مغلقة في $(\mathbb{R}^2,d)$ مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 2 فهي مجموعة مغلقة بالتالي B مجموعة مفتوحة .

ومنه أصبح $\mathbb{R}^2\backslash X = A \cup B$ مجموعة مفتوحة لأنها اجتماع لمجموعتين مفتوحتين بالتالي X مغلقة في $\mathbb{R}^2$ وبالتالي (X,d) تام حسب المبرهنة ((إذا كان (E,d) فضاء تام و (X,d) فضاء جزئي من (E,d) عندئذ يكون (X,d) تام إذا وفقط إذا كانت X مغلقة في الفضاء الكلي (E,d))).

3) في الفضاء المتري ليس بالضرورة كل مجاورة لنقطة هي جوار لهذه النقطة، وضح ذلك بمثال.

الحلّ: **(5 درجات)**

نأخذ مثلاً: في الفضاء المتري المنقطع $(\mathbb{N}, d)$. المجموعة $A = \{4, 5\}$ هي مجموعة مفتوحة في هذا الفضاء لأنها اجتماع لكرتين مفتوحتين $A = N\left(4, \frac{1}{2}\right) \cup N\left(5, \frac{1}{2}\right)$ ومنه تكون A مجاورة لكل نقطة من نقاطها،(المجموعة المفتوحة مجاورة لكل نقطه من نقاطها) أي A مجاورة لـ $x = 4$

الجوار لـ $x = 4$ هو كرة مفتوحة مركزها 4 ومن المعلوم أن الكرات المفتوحة في الفضاء المتري المنقطع شكلها

$$N(4, \rho) = \begin{cases} \emptyset & ; \rho = 0 \\ \{4\}; & 0 < \rho \leq 1 \\ \mathbb{N}; & \rho > 1 \end{cases}$$

فنلاحظ مهما $\rho \geq 0$ فإنّ $A \neq N(4, \rho)$ أي A ليس جوار لـ 4 في الفضاء $(\mathbb{N}, d)$ المنقطع.

ملاحظة

طرطوس: 2023/1/23م

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تبولوجيا 1	اسم الطالب:
كلية العلوم	سنة ثانية رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2021-2022	الدرجة: 90

السؤال الأول: (55 د)

1) عرّف **ستة** مفاهيم مما يلي:

التبولوجيا القوية- المجموعة المفتوحة – قاعدة التبولوجيا- النقطة المنعزلة لمجموعة- النقطة اللاصقة لمجموعة- المجموعة الكثيفة في كل مكان –خارجية مجموعة –الكرة المفتوحة في الفضاء المتري.

2) نعرّف على المجموعة $E = \{1,2,3,4, \dots, 10\}$ التبولوجيا الآتية :

$$\tau = \{E, \emptyset, \{1,3,5, \dots, 9\}, \{2,4, \dots, 10\}\}$$

والمطلوب:

1. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي الناتج.
2. خذ المجموعة $A = \{1,2,4\}$ وعين كلاً من $\hat{A}$ ، $ex(A)$، $\bar{A}$، $bd(A)$، $Is(A)$، $\acute{A}$.
3. لتكن لدينا الأسرة $\tau^* = \{T \in \mathcal{P}(E);\ \{1,2\} \subseteq T\} \cup \{\emptyset\}$ والمطلوب أثبت أنّ τ^* تبولوجيا معرفة على E ثم تحقق أنّ التبولوجيتين τ و τ^* غير متقارنتين.

السؤال الثاني: (35 د)

1) أثبت صحة **إحدى** القضيتين التاليتين:

1. إذا كان (E,d) فضاءً متريّاً و (X,d) فضاءً متريّاً جزئياً منه عندئذٍ يكون الفضاء (X,d) تاماً إذا وفقط إذا كانت المجموعة X مغلقة في الفضاء الكلي (E,d).
2. لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء تبولوجي (E,τ) عندئذ تكون المجموعة A كثيفة في كل مكان في (E,τ) إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي:

$$A \cap T \neq \emptyset \qquad \forall T \in \tau \backslash \{\emptyset\}$$

2) لنأخذ في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3,d)$ المجموعة الآتية :

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \geq 16\}$$

والمطلوب تحقق أنّ الفضاء الجزئي (X,d) فضاء تام أم لا.

3) أثبت أن المتتالية $u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{2n+1}\right)$ محدودة في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^2,d)$.

---انتهت الأسئلة---

طرطوس في 2022/7/4

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

سلم تصحيح امتحان دورة تبولوجيا 1/1

سؤال الأول:

1) 6 درجات لكل تعريف. (18 درجة)

2) (37 درجة)

$$\tau = \{E, \phi, \{1,3,5,\dots,9\}, \{2,4,\dots,10\}\}$$

* $\overline{A}$: أصغر مجموعة مغلقة في (E,τ) تحوي A $\Leftarrow \overline{A} = E$

* A°: هي أكبر مجموعة مفتوحة في (E,τ) محتواة في A $\Leftarrow A^\circ = \phi$

* $bd\,A = \overline{A} \setminus A^\circ = E \setminus \phi = E$

* $\overline{A} = A' \cup A \Rightarrow E = A' \cup \{1,2,4\}$ $\Leftarrow$ لأنك تبحث نقاط A.

$A' \supseteq \{3,5,6,7,8,9,10\}$

من أجل $x=4$ يكون

$$V(4) = \{\vartheta \in p(E) ; \{2,4,6,8,10\} \subseteq \vartheta\}$$

$$\forall \vartheta \in V(4) \Rightarrow \{2,4\} \subseteq \vartheta \cap A \Rightarrow \vartheta \cap A \neq \phi, \{4\} \Leftarrow \boxed{4 \in A'}$$

من أجل $x=2$ يكون

$$V(2) = \{\vartheta \subset p(E) ; \{2,4,6,8,10\} \subseteq \vartheta\}$$

$$\forall \vartheta \in V(2) \Rightarrow \{2,4\} \subseteq \vartheta \cap A \Rightarrow \vartheta \cap A \neq \phi, \{2\} \Leftarrow \boxed{2 \in A'}$$

من أجل $x=1$ يكون

$$V(1) = \{\vartheta \in p(E) ; \{1,3,5,7,9\} \subseteq \vartheta\}$$

نعطي مجاورة

حيث $\vartheta_0 = \{1,3,5,7,9\}$

$\vartheta_0 \cap A = \{1\} \Rightarrow 1 \notin A' \Rightarrow \boxed{1 \in Is\,A}$

لأن

$$A' = \{1,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$Is\,A = \{1\}$$

$$\tau^* = \{T \in p(E) ; \{1,2\} \subseteq T\} \cup \{\phi\}$$

3) نتحقق من شروط التبولوجيا:

* لدينا $\phi \in \tau^*$ و $\{1,2\} \in p(E)$ $\Leftarrow \{1,2\} \subseteq E$ $\Leftarrow$ الشرط المعطى محقق لدينا $E \in \tau^*$ $\phi \in \tau^*$

* لنبين أن $T, G \in \tau^*$ و لنبين أن $T \cap G \in \tau^*$

① إذا كان $T = \phi$ أو $G = \phi$ $\Leftarrow$

④ إذا كان $G \neq \emptyset$, $T \neq \emptyset \Rightarrow T$ من تعريف τ^* نجد

$$\left.\begin{array}{l} T \in p(E) \ \& \ \{1,2\} \subseteq T \\ G \in p(E) \ \& \ \{1,2\} \subseteq G \end{array}\right\} \Rightarrow \{1,2\} \subseteq T \cap G$$
$$\Rightarrow T \cap G \in \tau^*$$

الشرط الثاني محقق.

⑤ لنأخذ $\{G_i \ ; \ i \in I\} \subseteq \tau^*$ ولنبرهن أن $\bigcup_{i \in I} G_i$

ⓐ إذا كان $\forall i \in I$ $G_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i = \emptyset \in \tau^*$

ⓑ إذا وجد عنصر واحد (على الأقل) من الأسرة $\{G_i \ ; \ i \in I\}$ مثل G_{i_0} بحيث $G_{i_0} \neq \emptyset \Rightarrow$ من تعريف τ^* نجد:

$$G_{i_0} \in p(E) \ \& \ \{1,2\} \subseteq G_{i_0} \Rightarrow \{1,2\} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$$
$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in p(E) \ \& \ \{1,2\} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau^*$$

والشرط الثالث محقق.

$\Rightarrow$ من الشروط الثلاثة نجد أن (E, τ^*) فضاء تبولوجي.

العلاقة بين τ و τ^*:

$\tau \not\subseteq \tau^*$ لأنه توجد المجموعة المفتوحة $\{1,3,5,7,9\} \in \tau$ و لكن $\{1,3,5,7,9\} \notin \tau^*$

* $\tau^* \not\subseteq \tau$ لأنه توجد مثلاً المجموعة المفتوحة $\{1,2,5\} \in \tau^*$ بحيث أن $\{1,2,5\} \notin \tau$

وبالتالي التبولوجيتين غير متقارنتين.

السؤال الثاني:

① 15 درجة لإثبات القضية.

② $\mathbb{R}^3 \setminus X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 < 16\}$ 10/

تمثل كرة مفتوحة في $(\mathbb{R}^3, d)$ أي مجموعة مفتوحة فيه $\Rightarrow$ متممتها مجموعة مغلقة $\Rightarrow X$ مغلقة في $(\mathbb{R}^3, d)$ علماً أن $(\mathbb{R}^3, d)$ تام $\Rightarrow (X, d)$ تام.

حسب المبرهنة: إذا كان (E, d) فضاءً متريّاً تاماً و كان (X, d) فضاءً جزئياً فيه عندئذٍ يكون الفضاء الجزئي (X, d) تاماً إذا وفقط إذا كانت المجموعة X مغلقة في الفضاء الكلي

---

③ $A = \{(1, \frac{1}{3}), (\frac{1}{2}, \frac{2}{5}), \dots\}$ مجموعة فيها $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{n}{2n+1})$

لنبرهن أن A محتواة في كرة مغلقة.

لنأخذ الكرة المغلقة

$$B((0,0), 2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \leq 2\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 4\}$$

(10 ⇐)

② $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{n} < 1}$ ✓ / $\frac{n}{2n+1} < 1 \Rightarrow \boxed{\frac{n^2}{(2n+1)^2} < 1}$

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تبولوجيا 1	اسم الطالب:
كلية العلوم	الدورة الفصلية الأولى – سنة ثانية رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	العام الدراسي 2021-2022	الدرجة: 90

السؤال الأول: (55 د)

1) عرّف **ستة** مفاهيم مما يلي:

التبولوجيا القوية- المجموعة المفتوحة – قطر المجموعة- نقطة التراكم في مجموعة- النقطة اللاصقة لمجموعة- المجموعة الكثيفة في كل مكان –داخلية مجموعة –الكرة المغلقة في الفضاء المتري.

2) نعرّف على المجموعة $E=\{1,2,3,4\}$ التبولوجيا الآتية: $\tau=\{E,\emptyset,\{1,3\},\{4\},\{1,3,4\}\}$ والمطلوب:

1. عيّن أسرة المجموعات المغلقة $\mathcal{F}$ في الفضاء التبولوجي الناتج.
2. خذ المجموعة $A=\{1,2,3\}$ وعين كلاً من $\mathring{A}$، $ex(A)$، $\bar{A}$، $bd(A)$، $Is(A)$، $\acute{A}$.
3. هل الأسرة $\beta=\{\emptyset,\{1,3\},\{4\}\}$ قاعدة لـ τ أم لا، ولماذا.
4. لتكن لدينا الأسرة $\tau^*=\{T\in P(E);2\in T\}\cup\{\emptyset\}$ والمطلوب أثبت أنّ τ^* تبولوجيا معرفة على E ثم تحقق أنّ التبولوجيتين τ و τ^* غير متقارنتين.

السؤال الثاني: (35 د)

1) أثبت صحة **إحدى** القضيتين التاليتين:

1. إذا كان (E,d) فضاءً متريّاً و (X,d) فضاءً متريّاً جزئياً منه عندئذٍ يكون الفضاء الجزئي (X,d) تاماً إذا وفقط إذا كانت المجموعة X مغلقة في الفضاء الكلي (E,d).
2. إذا كان $f:(E,\tau)\longrightarrow(X,\tau^*)$ تابعاً كيفياً وكانت $x_0\in E$ نقطة مفروضة عندئذ يكون التابع f مستمر عند x_0 إذا وفقط إذا كان من أجل كلّ مجاورة V لـ $f(x_0)$ في (X,τ^*) توجد مجاورة U لـ x_0 في (E,τ) بحيث يكون $f(U)\subseteq V$.

2) لنأخذ في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3,d)$ المجموعة الآتية :

$$X=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2\geq 25\}$$

والمطلوب تحقق أنّ الفضاء الجزئي (X,d) فضاء تام أم لا.

3) تحقق أنّ المجموعة $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;1\leq x^2+y^2\leq 4\}$ هي مجموعة محدودة في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^2,d)$.

---انتهت الأسئلة---

طرطوس في 2022/1/23

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

السؤال الأول: (حل تصحيحي لبوعبيد) /17
دورة 2021-2022
3 درجات لكل تعريف.

(4 درجات) $f = \{E, \phi, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{2\}\}$ ①

② $bdA = \{2\}$, $\overline{A} = A$, $ex(A) = \{4\}$, $A^\circ = \{1,3\}$

(3 درجات لكل واحد) $A' = A$, $Is(A) = \phi$

③ تكون β قاعدة لـ τ إذا تحقق الشرطين (5 درجات)

① $\beta \subset \tau$ و $\forall T \in \tau$; $T = \bigcup_{\beta_i \in \beta} \beta_i$

β ليست قاعدة لأن الشرط الثاني غير محقق $E \neq \bigcup_{\beta_i \in \beta} \beta_i$

④ (1) $\phi \in \tau^*$ من تعريف الأسرة τ^* و $E \in \tau^* \Leftarrow 2 \in E$

الشرط الأول محقق

(2) لبرهن أن $T \cap G \in \tau^*$ إذا كانت $T, G \in \tau^*$

(a) إذا كانت $T = \phi$ أو $G = \phi \Leftarrow T \cap G = \phi \in \tau^*$

(b) إذا كان $T \neq \phi$ و $G \neq \phi \Leftarrow 2 \in T$ و $2 \in G \Leftarrow 2 \in T \cap G$

وبما أن $T \cap G \in \wp(E)$ $\Leftarrow T \cap G \in \tau^*$

فالشرط الثاني محقق.

(3) ليكن $\{G_i ; i \in I\} \subset \tau^*$ ولبرهن أن $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau^*$

(a) إذا كان $G_i = \phi \in \tau \Leftarrow \bigcup_{i \in I} G_i = \phi \in \tau$ $\forall i \in I$

(b) إذا وجد عنصر واحد على الأقل من الأسرة $\{G_i ; i \in I\}$ وليكن G_{i_0}

$G_{i_0} \in \wp(E)$ و $2 \in G_{i_0} \Rightarrow 2 \in \bigcup G_i$ و $\bigcup G_i \in \wp(E) \Rightarrow \bigcup G_i \in \tau^*$

فالشرط الثالث محقق.

$\Leftarrow$ من الشروط الثلاثة نجد أن τ^* تعرف طوبولوجيا على E.

(*) مقارنة τ و τ^*

τ ليست طوبولوجيا لأنها لا تحوي العنصر $\{1,3\}$ من τ وليست τ^* لأنها لا تحوي $\{2\}$ من τ^*

نلاحظ أن $\tau \not\subset \tau^*$ و $\tau^* \not\subset \tau$ وبالتالي $\tau \neq \tau^*$

لذلك تكون الطوبولوجيتين غير متقارنتين.

(15 درجات للطلب 4)

التمرين الثاني:

1) 15 درجة لإثبات الطبيعة.

2) نلاحظ أن

$$\mathbb{R}^3 \setminus X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 < 25\}$$
$$= N((2,1,3),5)$$

إذا $\mathbb{R}^3 \setminus X$ كرة مفتوحة $\Leftarrow$ هي مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}^3, d)$

وبالتالي X مغلقة في الفضاء المتري $(\mathbb{R}^3, d)$ التام لذلك حسب المبرهنة (إذا كان (E,d) فضاء متري تام وكان (X,d) فضاء متري جزئي منه عندئذ يكون الفضاء الجزئي (X,d) تاما إذا وفقط إذا كانت المجموعة X مغلقة في الفضاء الكلي (E,d) $\Leftarrow$ الفضاء الجزئي (X,d) تام.

3) يكون A محدودة إذا وفقط إذا وجدت كرة مغلقة في (E,d) بحيث $A \subseteq B(a,\rho)$

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2+y^2 \leq 4\} = B((0,0),2)$

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2+y^2 \geq 1\}$

نأخذ متممة F: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2+y^2 < 1\} = N((0,0),1)$

$\Rightarrow A = B((0,0),2) \setminus N((0,0),1) \subseteq B((0,0),2)$

$\Leftarrow A$ محدودة.

(10 درجات يكون من التطبيق 1 و 2)

مكتبة

مكتبة A TO Z

فرع 1
تجمع الكليات(كلية العلوم)

فرع 2
الكورنيش الشرقي جانب MTN

طباعة محاضرات ـ قرطاسية

Mob:0931 497 960