كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثانية

اسئلة دورات محلولة

بنى جبرية١

جامعة طرطوس　　　امتحان الفصل الأول　　　المادة: البنى الجبرية (1)

كلية العلوم　　　السنة الثانية– رياضيات　　　اسم الطالب:

قسم الرياضيات　　　المدة : ساعتان　　　الدرجة العظمى: 90درجة

****

السؤال الأول: (30درجة)

1- لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة $N\times N$ بالشكل التالي:
$\forall(a,b),(c,d)\in N\times N \quad a+d=b+c \iff (a,b)R(c,d)$ ، برهن أن R علاقة تكافؤ و عين صف تكافؤ العنصر $(7,8)$.

السؤال الثاني: (30درجة)

لتكن $(Q-\{0\},.)$ زمرة الأعداد الكسرية بالنسبة لعملية الضرب العادية ،أثبت أن مجموعة العناصر $H=\left\{\dfrac{1+2n}{1+2m}\in Q-\{0\}\ ;\ n\ ,m\in Z\right\}$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة $(Q-\{0\},.)$.

السؤال الثالث: (30درجة)

أثبت أن $(Z,*)$ زمرة تبديلية ، حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة و $(*)$ عملية جبرية معرفة على Z بالشكل التالي: $a*b=a+b-1\ ;\ \forall\ a\ ,b\in Z$ و $(+)$ هي عملية الجمع العادية المعرفة في Z.

************************انتهت الأسئلة************************

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2025/2/17/

الرطوبس

المادة

سلم التصحيح لمقرر البنى الجبرية (1) الطلاب سنة ... بإثبات

لا ثنائي الفصل الأول . العام الدراسي ٢٠٠٠ - ٢٠٠٢ م

س1 (30 درجة)

أولاً: إثبات أن R علاقة تكافؤ على المجموعة: $N \times N$

1- R علاقة انعكاسية لأنه: (5)

$\forall (a,b) \in N \times N : a+b=b+a \Leftrightarrow (a,b)R(a,b)$

2- R علاقة تناظرية لأنه: (4)

$(a,b),(c,d) \in N \times N ; (a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c \Leftrightarrow$
$b+c=a+d \Leftrightarrow c+b=d+a \Leftrightarrow (c,d)R(a,b)$

3- R علاقة متعدية لأنه: (1)

$\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in N \times N ; (a,b)R(c,d) \text{ and } (c,d)R(e,f) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a+d=b+c)① \text{ and } (c+f=d+e)②$
$a+d+c+f=b+c+d+e$ (بجمع ① و ②) $\Leftrightarrow a+f=b+e$ (5)
$\Leftrightarrow (a,b)R(e,f)$

من (1) و (2) و (3) نجد أن R علاقة تكافؤ على المجموعة $N \times N$ (2)

ثانياً: إيجاد صف تكافؤ العنصر $(7,8)$: (4)

$\overline{(7,8)} = \{(a,b) \in N \times N ; (7,8)R(a,b)\}$
$= \{(a,b) \in N \times N ; 7+b=8+a\}$ (2)
$= \{(a,b) \in N \times N ; b=a+1\}$
$= \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7),(7,8),\dots\}$

س2 (30 درجة)

إثبات أن H ... [illegible]

[illegible]

$H \subseteq G$ ... [illegible]

$x, y \in H$ ، $x = \frac{1+2n}{1+2m}$ و $y = \frac{1+2n'}{1+2m'}$

$xy = \frac{1+2n}{1+2m} \cdot \frac{1+2n'}{1+2m'} = \frac{1+2(n+n'+2nn')}{1+2(m+m'+2mm')} = \frac{1+2n''}{1+2m''} \in H$ (10)

لأن: $n'' = n+n'+2nn' \in \mathbb{Z}$

$m'' = m+m'+2mm' \in \mathbb{Z}$

ثانياً (10)

$x \in H, x = \frac{1+2n}{1+2m}$; $x^{-1} = \frac{1+2m}{1+2n} \in H$, $n,m \in \mathbb{Z}$

(5) من (1)، (2)، (3) نجد أن H زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$

سؤال 3: (30 درجة)

إثبات أن $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبديلية.

(5) 1- العملية * مغلقة على عناصر $\mathbb{Z}$ لأنه: $\forall a,b \in \mathbb{Z}: a*b = a+b-1 \in \mathbb{Z}$

(5) 2- * تجميعية على عناصر $\mathbb{Z}$ لأنه: $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}: (a*b)*c = (a+b-1)*c = (a+b-1)+c-1$

$= a+(b+c-1)-1 = a*(b+c-1) = a*(b*c)$

(5) 4- العملية * تبديلية على عناصر $\mathbb{Z}$ لأنه: $\forall a,b \in \mathbb{Z}: a*b = a+b-1 = b+a-1 = b*a$

(5) 5- وجود العنصر الحيادي: إن العنصر $e = 1 \in \mathbb{Z}$ هو العنصر الحيادي للعملية (*) لأن $e = 1 \in \mathbb{Z}$ وكذلك فإنه

$\forall a \in \mathbb{Z}: a*e = a*1 = a+1-1 = a \wedge e*a = 1*a = 1+a-1 = a$

(5) 6- وجود العنصر النظير: من أجل كل عنصر a من $\mathbb{Z}$ يوجد نظير للعنصر a لأنه يوجد $a' = 2-a \in \mathbb{Z}$ ومنه

$a*a' = a*(2-a) = a+2-a-1 = 1$

$a'*a = (2-a)*a = 2-a+a-1 = 1$

(4) من (1)، (2)، (3)، (4)، (5)، (6) نجد أن $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبديلية.

ملاحظة: ... التصحيح ... الأسئلة الواردة ...

جامعة طرطوس — امتحان الفصل الثاني — المادة: البنى الجبرية (1)

كلية العلوم — السنة الثانية – رياضيات — المدة: ساعتان

****

السؤال الأول: (50درجة)

أولاً: وضح المفاهيم التالية:

الزمرة المنتهية ، رتبة الزمرة ، رتبة العنصر في زمرة ما ، العلاقة العكسية ، الزمرة الجزئية.

ثانياً: ليكن التبديل التالي: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ، والمطلوب:

1- اذكر اسم الزمرة التي ينتمي إليها α ورتبتها **2-** اكتب α على شكل جداء أدوار طولها 2 وبين نوع هذا التبديل **3-** أوجد α^{-1} ودرجته.

ثالثاً: إذا كانت $A = \{1,2,3,\dots,16\}$ وكانت R علاقة معرفة على المجموعة A بالشكل التالي:

$xRy \Leftrightarrow$ باقي قسمة x على 4 يساوي باقي قسمة y على 4 بحيث أن : $(x, y \in A)$

والمطلوب:

1- أثبت أن R علاقة تكافؤ على A.

2- أوجد صفوف تكافؤ العلاقة R.

السؤال الثاني: (40 درجة)

أولاً: لتكن $(G,*)$ زمرة تبديلية ما، ولتكن $(H,*)$ زمرة جزئية منها، ولتكن:

$$S(H) = \{x \in G;\ \ x * x \in H\}$$

برهن أن $(S(H),*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$.

ثانياً: لتكن المجموعة: $G_7 = \{a + b\sqrt{7}\ \ : a, b \in Z\}$ والمطلوب أثبت أن $(G_7 ,+)$ تشكل زمرة تبديلية حيث العملية + هي عملية الجمع العادي.

انتهت الأسئلة

مع التمنيات بالنجاح و التوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في 204/7/24

جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة البنى الجبرية (1) الطلاب سنة أولى
لامتحان الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤ م

حسم: (50 درجة)

أولاً: ١- الزمرة المنتهية: لتكن $(G,*)$ زمرة ما. ندعو الزمرة $(G,*)$ زمرة منتهية إذا وفقط إذا كانت G تحوي عدد منته من العناصر المختلفة بعضها عن بعض. (4)

٢- رتبة الزمرة: لتكن $(G,*)$ زمرة ما. نرمز لرتبة الزمرة G بالرمز $O(G)$ ونعرفها بأنها عدد عناصر الزمرة G المختلفة بعضها عن بعض فإذا كانت G زمرة منتهية وعدد عناصرها $|G| = n < \infty$ عندئذ يكون $O(G) = |G| = n$ (4)
وفي حال كانت G زمرة غير منتهية نكتب $O(G) = \infty$

٣- رتبة العنصر في زمرة ما: إذا كانت $(G,*)$ زمرة ما و a عنصر ليكن ما من G. ندعو أصغر عدد صحيح موجب n يحقق من أجله العلاقة: $a^n = e$ برتبة العنصر a في الزمرة G ونرمز لها بالرمز $O(a)$ ونكتب في هذه الحالة $O(a) = n$ (4)
وفي حال لم يوجد العدد n الذي من أجله تحققت العلاقة السابقة نقول إن رتبة العنصر a لا نهائية ونكتب $O(a) = \infty$

٤- العلاقة العكسية: لتكن R علاقة ثنائية من A إلى B حيث A و B مجموعتين غير خاليتين. نعرف العلاقة العكسية للعلاقة R ونرمز لها بالرمز R^{-1} بأنها علاقة من B إلى A والتي تضم جميع الثنائيات (b,a) من $B \times A$ بحيث أن $(a,b) \in R$ أي أن: (4)

$$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A : (a,b) \in R\}$$

٥- الزمرة الجزئية: لتكن $(G,*)$ زمرة ما و H مجموعة جزئية غير خالية من G أي $H \subseteq G$ و $H \neq \phi$. ندعو $(H,*)$ زمرة جزئية من G إذا كانت $(H,*)$ زمرة. (3)

(2)

ثانياً: ١- عدد التباديل S_{10} (2) ورتبتها هي: $10! = 10 \times 9 \times \cdots \times 2 \times 1 = 3628800$

$\alpha = (1\ 3\ 5\ 7\ 9)(2\ 4\ 6\ 8\ 10)$
$= (1\ 9)(1\ 7)(1\ 5)(1\ 3)(2\ 10)(2\ 8)(2\ 6)(2\ 4)$ (2)

٢- ... زوجي لأن عدد الدورات الثنائية 2 والتي لتشكيلها التبديل ... عدد ثلاث جداء أدوار طولها 2 هو عدد زوجي وهو 8 (2)

2

(2)

$d^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ (2) ، و درجته هي 10

ثالثاً . نلاحظ أنه $\forall x \in A$ فإن باقي قسمة x على 4 هو أحد الأعداد التالية : 0 , 1 , 2 , 3

-1 R علاقة تكافؤ على المجموعة A :

أ . R انعكاسية : لأنه $\forall x \in A$ فإن باقي قسمة x على 4 يساوي باقي قسمة x على 4 , بالتالي فإن $x R x$. (3)

ب . R تناظرية : لأنه $/ x , y \in A ; x R y \Leftrightarrow$ باقي قسمة x على 4 يساوي باقي قسمة y على 4 $\Leftrightarrow$ باقي قسمة y على 4 يساوي باقي قسمة x على 4 $\Leftrightarrow y R x$ (4)

ج . R متعدية : لأنه $/ x , y , z \in A ; (x R y \wedge y R z) \Leftrightarrow$ باقي قسمة x على 4 يساوي باقي قسمة y على 4 $\wedge$ باقي قسمة y على 4 يساوي باقي قسمة z على 4 $\Leftrightarrow$ باقي قسمة x على 4 يساوي باقي قسمة z على 4 $\Leftrightarrow x R z$ (5)

R انعكاسية و تناظرية و متعدية و بالتالي فهي علاقة تكافؤ على A . (2)

-2 إيجاد صفوف تكافؤ العلاقة R :

$[1] = \bar{1} = \{x ; x \in A \wedge x R 1\} = \{$ باقي قسمة x على 4 يساوي باقي قسمة 1 على 4 $\}$ (1)

$= \{1 , 5 , 9 , 13\}$

$[2] = \bar{2} = \{x ; x \in A \wedge x R 2\} = \{$ باقي قسمة x على 4 يساوي باقي قسمة 2 على 4 $\}$ (1)

$= \{2 , 6 , 10 , 14\}$

$[3] = \bar{3} = \{x ; x \in A \wedge x R 3\} = \{$ باقي قسمة x على 4 يساوي باقي قسمة 3 على 4 $\}$ (1)

$= \{3 , 7 , 11 , 15\}$

$[4] = \bar{4} = \{x ; x \in A \wedge x R 4\} = \{$ باقي قسمة x على 4 يساوي باقي قسمة 4 على 4 $\}$ (1)

$= \{4 , 8 , 12 , 16\}$

س 2 : (40 درجة)

أولاً : برهان أن $(S(H) , *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G , *)$

-1 إن : $S(H) \subseteq G$ حسب تعريف $S(H)$, كذلك بما أن $(G , *)$ زمرة , بالتالي يوجد فيها عنصر حيادي , وليكن e , بالتالي e هو العنصر الحيادي في $(H , *)$ لأن $(H , *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G , *)$, وبما أن (1)

3

$\forall x, y \in S(H) \Rightarrow x, y \in G;\ x*x \in H \wedge y*y \in H$ (حسب تعريف S(H))

ولنبرهن أن $x*y \in S(H)$

لدينا $(x*y)*(x*y) = x*(y*x)*y = x*(x*y)*y$ لأن (H,*) زمرة

$= (x*x)*(y*y) \in H$

وبالتالي $x*y \in S(H)$ حيث $x*y \in G$ لأن G زمرة

- $\forall x \in S(H)$ ولنبرهن أن $x^{-1} \in S(H)$

(حسب تعريف S(H)) $x \in S(H) \Rightarrow x*x \in H;\ x \in G$

لأن H زمرة $\Rightarrow (x*x)^{-1} \in H$

ولكن $(x*x)^{-1} = x^{-1}*x^{-1}$ وبالتالي

$x^{-1}*x^{-1} \in H$

$x^{-1} \in S(H);\ x^{-1} \in G$

من (1) و (2) و (3) نجد أن $(S(H),*)$ زمرة جزئية من (G,*)

ثانياً: إثبات أن $(G_7,+)$ زمرة تبديلية

أ: من الواضح أن $G_7 \neq \phi$ حسب تعريفها

ب: العملية + مغلقة على عناصر G_7 لأنه:

$\forall a_1+b_1\sqrt{7}, a_2+b_2\sqrt{7} \in G_7;\ a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$(a_1+b_1\sqrt{7})+(a_2+b_2\sqrt{7}) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{7} \in G_7$

لأن $(\mathbb{Z},+)$ زمرة

ج- العملية (+) تجميعية على عناصر G_7 لأنه

$\forall a_1+b_1\sqrt{7}, a_2+b_2\sqrt{7}, a_3+b_3\sqrt{7} \in G_7,\ a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 \in \mathbb{Z}$

$(a_1+b_1\sqrt{7})+(a_2+b_2\sqrt{7})]+(a_3+b_3\sqrt{7}) = [(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{7}]+a_3+b_3\sqrt{7}$

$(a_1+b_1\sqrt{7})+(a_2+ ((b_1+b_2)+b_3)\sqrt{7}$

$= ((a_1+a_2)+a_3)+((b_1+b_2)+b_3)\sqrt{7}$

$= (a_1+(a_2+a_3))+(b_1+(b_2+b_3))\sqrt{7}$

$= (a_1+b_1\sqrt{7})+[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)\sqrt{7}]$

$= (a_1+b_1\sqrt{7})+[(a_2+b_2\sqrt{7})+(a_3+b_3\sqrt{7})]$

د- إن العنصر $0+0\sqrt{7} \in G_7$ حيث $0 \in \mathbb{Z}$ هو العنصر الحيادي في G_7 بالنسبة للعملية + لأنه

$\forall a+b\sqrt{7} \in G_7 \Rightarrow (a+b\sqrt{7})+(0+0\sqrt{7}) = (a+0)+(b+0)\sqrt{7}$

$= a+b\sqrt{7}$

$(0+0\sqrt{7})+(a+b\sqrt{7}) = (0+a)+(0+b)\sqrt{7} = a+b\sqrt{7}$

ثالثاً: وجود العنصر النظير في G_7 بالنسبة للعملية (+):

من أجل أي عنصر $a+b\sqrt{7} \in G_7$ فإن العنصر $-a-b\sqrt{7}$ هو نظير العنصر $a+b\sqrt{7}$ في G_7 لأنه من جهة أولى فإن:

$a, b \in Z \Rightarrow -a, -b \in Z$ (لأن $(Z,+)$ زمرة) $\Rightarrow$

$-a-b\sqrt{7} \in G_7$

ومن جهة أخرى فإن:

$(a+b\sqrt{7})+(-a-b\sqrt{7}) = (a+(-a))+(b+(-b))\sqrt{7} = 0+0\sqrt{7}$

$(-a-b\sqrt{7})+(a+b\sqrt{7}) = ((-a)+a)+((-b)+b)\sqrt{7} = 0+0\sqrt{7}$

من (١) و(٢) و(٣) و(٤) و(٥) نستنتج أن $(G_7,+)$ زمرة وهي تبديلية لأنه:

$\forall\ a_1+b_1\sqrt{7},\ a_2+b_2\sqrt{7} \in G_7\ ;\ a_1, a_2, b_1, b_2 \in Z$

$(a_1+b_1\sqrt{7})+(a_2+b_2\sqrt{7}) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{7}$

$= (a_2+a_1)+(b_2+b_1)\sqrt{7} = (a_2+b_2\sqrt{7})+(a_1+b_1\sqrt{7})$

ملاحظة: يجمع الطالب الدرجات الواردة في سلم التصحيح لحل $(Z,+)$ زمرة تبديلية أو أي طريقة صحيحة يأخذ الطالب عليها الدرجة نفسها المحددة لها في سلم التصحيح

طرطوس في ٢٤/٧/٢٠٠٢م

مدرس المادة: د. عائشة علي إبراهيم

جامعة طرطوس　　　امتحان الفصل الأول　　　المادة: البنى الجبرية (1)
كلية العلوم　　　السنة الثانية – رياضيات　　　المدة: ساعتان
****

السؤال الأول: (30 درجة)

الطلب الأول :

أولاً: عرف العلاقة القطرية وأعط مثال عليها.

ثانياً: عرف تجزئة مجموعة ما غير خالية A وأعط مثال عليها.

ثالثاً: لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة Z بالشكل التالي:

$aRb \Leftrightarrow a^2 - b^2 = a - b; \quad \forall a, b \in Z$ ، والمطلوب:

أثبت أن R علاقة تكافؤ على Z ، ثم أوجد صف تكافؤ العنصر $a \in Z$ ثم العنصر 7.

الطلب الثاني: لتكن $(G,*)$ زمرة ما ولنعرف المجموعة H بالشكل التالي:

$H = \{a : a \in G \quad and \quad a * x = x * a \quad ; \forall x \in G\}$ والمطلوب أثبت أن: $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$.

السؤال الثاني: (30درجة)

أولاً: عرف باختصار S_3 ،ثم أوجد جدول كايلي لهذه الزمرة واستنتج منه ما هو e ومقلوب كل عنصر من عناصرها.

ثانياً: عرف رتبة زمرة ما G ،ثم أوجد رتبة الزمرة S_3 ، ثم اذكر ما هي درجة كل عنصر من عناصرها.

ثالثاً: عرف رتبة عنصر ما a من زمرة ما $(G,*)$ ، ثم أوجد رتبة كل عنصر من عناصر الزمرة S_3.

السؤال الثالث: (30 درجة)

برهن ما يلي:

1- إن اجتماع أسرة من الزمر الجزئية في زمرة ما ليس من الضروري أن يكون زمرة جزئية من هذه الزمرة.

2- إن الزمرة $(\overline{Z_n}^*, \otimes)$ ليست زمرة في الحالة العامة.

3- - مقلوب (نظير) أي عنصر a في زمرة جزئية ما $(H,*)$ من زمرة ما $(G,*)$ هو نفسه مقلوب (نظير) a في الزمرة $(G,*)$.

4- يوجد للمعادلة $a * x = b$ حل وحيد في الزمرة $(G,*)$ من أجل كل a و b من G.
****

انتهت الأسئلة

مع التمنيات بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2024/2/5م

1

سلم التصحيح لمادة البنى الجبرية (1) الطلاب سنة ... لدفعة الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤

السؤال الأول: (30 درجة)

الطلب: الطلب الأول:

أولاً: إذا كانت A مجموعة غير خالية عندئذ نعرف العلاقة المطابقة R على A بالشكل التالي

$R=\{(a,a); a\in A\}\subseteq A\times A$ (1)

مثال عن العلاقة المطابقة: $A=\{5,10,25\}$ ... $R=\{(5,5),(10,10),(25,25)\}\subseteq A\times A$

ثانياً: لتكن $\{T_i\}_{i\in I}$ أسرة من المجموعات الجزئية من المجموعة A غير الخالية، نقول عن T أنها تجزئة للمجموعة A إذا تحقق:

1- ... $T_i=T_j$ أو $T_i\cap T_j=\emptyset$

2- $A=\bigcup_{i\in I} T_i$

3- $T_i\neq\emptyset ; \forall i\in I$

ونسمي عناصر T عناصر التجزئة T

مثال عن التجزئة: لتكن $A=\{5,8,11,14,20\}$ عندئذ تكون أسرة المجموعات $T=\{T_1,T_2,T_3\}=\{\{5,11\},\{8\},\{14,20\}\}$ تجزئة للمجموعة A لأن:

$A\neq\emptyset$ (1)

1- $T_1\cap T_2=\emptyset, T_1\cap T_3=\emptyset, T_2\cap T_3=\emptyset$

2-

3- $T_1\cup T_2\cup T_3=\{5,11\}\cup\{8\}\cup\{14,20\}=\{5,11,8,14,20\}=A$

$T_i\neq\emptyset, i=1,2,3$

ثالثاً: لتكن R علاقة معرفة على Z

أولاً: R انعكاسية لأنه: (3)

$a\in Z \Rightarrow aRa \Leftrightarrow a^2-a^2=a-a$

ثانياً: R متناظرة لأنه (1)

$\forall a,b\in Z; aRb \Leftrightarrow a^2-b^2=a-b$

$\Leftrightarrow b^2-a^2=b-a \Leftrightarrow bRa$

ثالثاً: R متعدية لأنه:

$\forall a,b,c\in Z, (aRb \wedge bRc) \Leftrightarrow (a^2-b^2=a-b)\wedge(b^2-c^2=b-c)$

$\Leftrightarrow a^2-b^2+b^2-c^2=a-b+b-c \Leftrightarrow a^2-c^2=a-c \Leftrightarrow aRc$

وعليه R انعكاسية ... تكافؤ ...

لكل عنصر a من $\mathbb{Z}$:

$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} ; a R b\} = \{b \in \mathbb{Z} ; a^2 - b^2 = a - b\}$

$= \{b \in \mathbb{Z} ; (a-b)(a+b) = a-b\} = \{b \in \mathbb{Z} ; a+b = 1\}$

$= \{b \in \mathbb{Z} ; b = 1-a\} = \{a, 1-a\}$

$\bar{7} = \{7, 1-7\} = \{7, -6\}$

الطلب الثاني: برهان أن $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

أولاً: من تعريف H نلاحظ أن H مجموعة جزئية من G أي أن $H \subseteq G$

كذلك نبرهن أن e العنصر الحيادي في الزمرة G ينتمي إلى H لأنه

$\forall x \in G, \; x * e = e * x$

وبالتالي $H \neq \phi$

أي أن: $\phi \neq H \subseteq G$

ثانياً: من أجل أن نبرهن أن H مغلقة بالنسبة للعملية، نبرهن أن $a * b \in H$

علماً أن $a, b \in H$ وبالتالي $\forall x \in G, \; x * a = a * x \wedge x * b = b * x$

لدينا $(a * b) * x = a * (b * x) = a * (x * b) = (a * x) * b$

$= (x * a) * b = x * (a * b) \Rightarrow a * b \in H$

ثالثاً: من أجل أي عنصر a من H نبرهن أن $a^{-1} \in H$

علماً أن a من H $\Leftarrow$ $a * x = x * a ; \forall x \in G$

لدينا $a^{-1} * x = a^{-1} * x * e = a^{-1} * x * a * a^{-1} = a^{-1} * a * x * a^{-1} = x * a^{-1} \Rightarrow a^{-1} \in H$

من أولاً، ثانياً، ثالثاً نجد أن $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

السؤال الثالث: (... 3 ...)

أولاً: S_3 هي زمرة التباديل للمجموعة $A = \{1, 2, 3\}$، أي مجموعة عناصرها التطبيقات التقابلية من A إلى A

$\alpha \in S_3$ ... α تقابل من A إلى A

$\alpha(i) = j, \; \forall i \in A, \; i, j = 1, 2, 3$

ونكتب α بالشكل المناسب كما يلي:

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) \end{pmatrix}$

جدول كايلي للزمرة S_3 هو:

$\circ$	$x_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$x_2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$x_3 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$x_4 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$x_5 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$x_6 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$
$x_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$x_2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	x_2	x_1	x_5	x_6	x_3	x_4
$x_3 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	x_3	x_6	x_1	x_5	x_4	x_2
$x_4 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3
$x_5 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	x_5	x_4	x_2	x_3	x_6	x_1
$x_6 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	x_6	x_3	x_4	x_2	x_1	x_5

$\boxed{2}$

الحل: أن $C = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = x_1$ (1

في كل عنصر من S_3 نضع تمثيل الجدول التالي:

العنصر	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
المعكوس	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_5

يا رتبة الزمرة $(G,*)$: إذا كانت G ... منتهية ... عدد عناصرها ... n

... عدد عناصر الزمرة G ونرمز لها بالرمز $O(G)$

$O(G) = n < \infty$ ونكتب

(3) أما إذا كانت الزمرة G غير منتهية أي عدد عناصرها ... نقول

إن رتبة الزمرة لا نهائية ونكتب $O(G) = \infty$ (6)

$O(S_3) = 6$

... كل عنصر من عناصر S_3 ...

(7) $O(a)$ ونرمز بالرمز ... لكن ... العنصر a ... $(G,*)$ ... العنصر ...

... e العنصر المحايد ... $= e$

... العنصر a له رتبة لا نهائية ونكتب $O(a) = \infty$

إيجاد $O(x_1)$

إيجاد $O(x_2)$:

$x_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = e \Rightarrow O(x_1) = 1$

(2) إيجاد $O(x_3)$:

$\neq e$, $x_2^2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = e \Rightarrow O(x_2) = 2$

إيجاد $O(x_4)$:

$\neq e$, $x_3^2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = e \Rightarrow O(x_3) = 2$

$\neq e$, $x_4^2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = e \Rightarrow O(x_4) = 2$

إيجاد $O(x_5)$

$x_5 \neq e$, $x_5^2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} \neq e$

$x_5^3 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = e \Rightarrow O(x_5) = 3$

إيجاد $O(x_6)$:

$x_6 \neq e$, $x_6^2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} \neq e$

$x_6^3 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = e \Rightarrow O(x_6) = 3$

السؤال الثالث: (30 درجة)

أ) ... الزمرة $(Z,+)$ الزمرتين الجزئيتين $(3Z,+)$ و $(7Z,+)$

(ع) ...

$3Z = \{0, \mp 3, \mp 6, \mp 9, \dots\}$

$7Z = \{0, \mp 7, \mp 14, \dots\}$

فإن: $(3Z \cup 7Z, +)$ ... ليست زمرة جزئية من $(Z,+)$ لأن

$3Z \cup 7Z = \{0, \mp 3, \mp 6, \mp 7, \mp 9, \mp 12, \mp 14, \dots\}$

$3, 7 \in 3Z \cup 7Z$ ...

$3+7=10 \notin 3\mathbb{Z}\cup 7\mathbb{Z}$

ع أسرة من الزمر الجزئية هنا زمرة ما ليس من الضروري أن يكون زمرة جزئية من هذه الزمرة

عندنا $n=4$ فإن $(\bar{Z}_4^*, \otimes)$ والجدول كالتالي لها هو:

$\otimes$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

ليست زمرة لأن العنصر $\bar{2}\in \bar{Z}_4$ ليس له مقلوب بالنسبة العملية $\otimes$ وبالتالي لا يوجد لكل عنصر من $\bar{Z}_4^*$ مقلوب بالنسبة العملية $\otimes$ كذلك فإن $\bar{2}\otimes\bar{2}=\bar{4}=\bar{0}\notin \bar{Z}_4^*$ أي أن $\otimes$ ليست مغلقة في عناصر $\bar{Z}_4^*$ على الرغم من أن $\otimes$ تجميعية على عناصر $\bar{Z}_4^*$ ويوجد عنصر محايد بالنسبة لـ $\otimes$ في $\bar{Z}_4$ هو $\bar{1}=e$

أما من أجل $n=5$ فإن الثنائية $(\bar{Z}_5^*, \otimes)$ والجدول التالي لها هو:

$\otimes$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

فإنها تشكل زمرة لأن $\otimes$ مغلقة وتجميعية على عناصر $\bar{Z}_5^*$ ويوجد عنصر محايد في $\bar{Z}_5^*$ بالنسبة لـ $\otimes$ هو $\bar{1}=e$ ويوجد لكل عنصر من $\bar{Z}_5^*$ مقلوب كما هو موضح في الجدول التالي:

العنصر	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
المقلوب	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$

إذاً $(\bar{Z}_n^*, \otimes)$ ليست زمرة في الحالة العامة

نفرض أن e العنصر الحيادي في الزمرة $(G,*)$

نفرض أن a' هو مقلوب (نظير) العنصر a في H

و a'' = = = = في G

عندئذ يكون: $a*a'=a'*a=e$ وبالتالي:

$a*a''=a''*a=e$

$$a*a'=a*a'' \Rightarrow a'=a''$$

لدينا $a*x=b \Rightarrow \underbrace{a^{-1}*a}_{e}*x=a^{-1}*b \Rightarrow x=a^{-1}*b\in G$

نضرب طرفي المعادلة من اليمين بمقلوب a وهو a^{-1}

والمعادلة $a*x=b$ حلها في G وحيد لأنه لو فرضنا أن x' و x'' حلان للمعادلة $a*x=b$ وبالتالي فإن:

$a*x'=b$

$a*x''=b$ وبالتالي: $a*x'=a*x'' \Rightarrow x'=x''$

ملاحظة: جميع الأسئلة والتمارين الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل والمهم أن تعطى العلامة المخصصة لأي سلم التصحيح

طرطوس في ٥/٢/٢٠٢٤م

مدرس المقرر: د. عائشة علي صالح

مدرسة مقرر طبقاً للأصل صالحة

د. عائشة

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان الفصل الثاني
السنة الثانية_ رياضيات
المدة : ساعتان

المادة: البنى الجبرية (1)
اسم الطالب:
الدرجة العظمى: 90درجة

****

السؤال الأول: (30درجة)

1- لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة $N \times N$ بالشكل التالي:
$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c \quad \forall (a,b),(c,d) \in N \times N$ ، برهن أن R علاقة تكافؤ و عين صف تكافؤ العنصر $(7,8)$.

السؤال الثاني: (30درجة)

لتكن $(Q-\{0\},.)$ زمرة الأعداد الكسرية بالنسبة لعملية الضرب العادية ،أثبت أن مجموعة العناصر $H=\left\{\frac{1+2n}{1+2m} \in Q-\{0\} : n ,m \in Z\right\}$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة $(Q-\{0\},.)$.

السؤال الثالث: (30درجة)

أثبت أن $(Z,*)$ زمرة تبديلية ، حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة و $(*)$ عملية جبرية معرفة على Z بالشكل التالي: $a*b=a+b-1 \ , \ \forall a,b \in Z$ و $(+)$ هي عملية الجمع العادية المعرفة في Z.

*************************انتهت الأسئلة*************************

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2023/8/2م

جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة البنى الجبرية (1) لطلاب السنة / لامتحان الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠٢٢ – ٢٠٢٣

س1: (30 درجة)

الحل:

1- (R علاقة انعكاسية لأنه:

$\forall (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : a+b=b+a \Leftrightarrow (a,b)R(a,b)$

2- R علاقة تناظرية لأنه

$\forall (a,b)\wedge(c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\ (a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c \Leftrightarrow$
$b+c=a+d \Leftrightarrow c+b=d+a \Leftrightarrow (c,d)R(a,b)$

3- R علاقة متعدية لأنه

$\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} ; (a,b)R(c,d)\ \&\ (c,d)R(e,f)$
$\Leftrightarrow a+d=b+c\ \&\ c+f=d+e \Leftrightarrow$
$a+d+c+f=b+c+d+e \Leftrightarrow a+f=b+e \Leftrightarrow (a,b)R(e,f)$

من (1) و (2) و (3) نجد أن R علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

إيجاد صف تكافؤ العنصر $(7,8)$

$\overline{(7,8)} = \{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} ; (7,8)R(a,b)\}$
$= \{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, 7+b=8+a\} = \{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, b=a+1\}$
$= \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7),(7,8),\dots\}$

س2: (30 درجة)

الحل:

1- $H \subseteq \mathbb{Q}-\{0\}$ حسب تعريف H وكذلك فإن $1 \in H$ عنصر الحياد بالنسبة لعملية الضرب في $\mathbb{Q}-\{0\}$ لأن:

$e = 1 = \dfrac{1+2\cdot 0}{1+2\cdot 0}$ نفرض أن $n=m=0$ وبالتالي $H \neq \phi$

أي أن $\phi \neq H \subseteq \mathbb{Q}-\{0\}$

ج:

$\forall x,y \in H ,\ x=\dfrac{1+2n}{1+2m}\ \&\ y=\dfrac{1+2n'}{1+2m'}$

$x\cdot y = \dfrac{1+2n}{1+2m}\cdot\dfrac{1+2n'}{1+2m'} = \dfrac{1+2(n+n'+2nn')}{1+2(m+m'+2mm')} = \dfrac{1+2n''}{1+2m''} \in H$

لأن،

$n'' = n+n'+2nn' \in \mathbb{Z}$
$m'' = m+m'+2mm' \in \mathbb{Z}$

$\forall x \in H ; x = \frac{1+2n}{1+2m} \Rightarrow x^{-1} = \frac{1+2m}{1+2n} \in H ; n, m \in \mathbb{Z}$ (7) يتبع

من (1) و(2) و(3) يثبت أن H زمرة جزئية في الزمرة $(\mathbb{Q}-\{0\}, .)$

س٣: (٣ درجات)

الحل: نثبت أن $(\mathbb{Z}, *)$ تحقق شروط الزمرة التبديلية

١) واضح أن $\mathbb{Z} \neq \phi$

٢) $(*)$ مغلقة على عناصر $\mathbb{Z}$ لأن

$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a * b = a + b - 1 \in \mathbb{Z}$

٣) $(*)$ تجميعية على عناصر $\mathbb{Z}$ لأنه:

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad (a * b) * c = (a + b - 1) * c = (a + b - 1) + c - 1$

$= a + (b + c - 1) - 1 = a * (b + c - 1)$

$= a * (b * c)$

٤) العملية $(*)$ تبديلية على عناصر $\mathbb{Z}$ لأنه

$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a * b = a + b - 1 = b + a - 1 = b * a$

٥) إن العدد $1 \in \mathbb{Z}$ هو العنصر الحيادي في $\mathbb{Z}$ بالنسبة للعملية $*$ لأن 1 عنصر $\mathbb{Z}$

وكذلك نجد أن : $\forall a \in \mathbb{Z}$ و

$a * 1 = a + 1 - 1 = a = 1 + a - 1 = 1 * a$

٦) وجود العنصر النظير: $\forall a \in \mathbb{Z}$ فإن العدد $a' = 2 - a$ هو النظير للعدد a لأنه موجود أولاً فإن $a' \in \mathbb{Z}$

وثانياً فإن:

$a * a' = a * (2 - a) = a + 2 - a - 1 = 1$

و $a' * a = (2 - a) * a = 2 - a + a - 1 = 1$

من (1) و(2) و(3) و(4) و(5) و(6) نجد أن $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبديلية

ملاحظة: جميع التمارين السابقة لها أكثر من طريقة للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة الموجودة لها في سلم التصحيح

مدرس المقرر: د. عائشة صباغ

طرطوس في ٢/٨/٢٠٢٣

الجمهورية العربية السورية   امتحان البنى الجبرية (1)   المدة: ساعتان
جامعة طرطوس   لطلاب السنة الثانية –رياضيات   الدرجة العظمى:90درجة
كلية العلوم   الفصل الأول   اسم الطالب:

****

السؤال الأول: (30درجة)

لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة Q^* بالشكل التالي:

$aRb \Leftrightarrow a+\frac{1}{2a}=b+\frac{1}{2b};\quad \forall a,b\in Q^*$ ، والمطلوب:

1- ما هي المجموعة Q^* واكتب هذه المجموعة بشكل رياضي ؟

2- أثبت أن R علاقة تكافؤ على Q^* ، ثم أوجد صف تكافؤ العنصر $a\in Q^*$ ثم العنصر 5.

السؤال الثاني: (30درجة)

برهن صحة القضايا التالية:

1- العنصر الأصغري والعنصر الأعظمي في مجموعة الأجزاء $P(\Omega)$ لمجموعة ما غير خالية Ω بالنسبة لعلاقة الترتيب $\subseteq$ المعرفة على $P(\Omega)$ ،هما وعلى الترتيب العنصران: ϕ و Ω.

2- العنصر الحيادي في زمرة ما هو نفسه العنصر الحيادي في أي زمرة جزئية منها.

3- يوجد للمعادلة $x*a=b$ حل وحيد في الزمرة $(G,*)$ من أجل كل a و b من G.

4- لتكن $(G,*)$ زمرة ما و $a_1,a_2,a_3,a_4\in G$ عندئذ فإن :

$$(a_1*a_2*a_3*a_4)^{-1}=a_4^{-1}*a_3^{-1}*a_2^{-1}*a_1^{-1}$$

السؤال الثالث: (30درجة)

أولاً: عرف رتبة العنصر في زمرة ما ،ثم أوجد رتبة كل من العنصرين $\bar{4}$، $\bar{7}$ في الزمرة $(\bar{Z}_7,\oplus)$ ثم أثبت أن هذه الزمرة دورية.

ثانياً: لتكن $(G_1,*)$ ، و $(G_2,\perp)$ زمرتين ما و e_1 ، e_2 العنصرين الحياديين وعلى التوالي في هاتين الزمرتين ،ولنعرف على مجموعة الجداء الديكارتي:
$G_1\times G_2=\{(g_1,g_2):g_1\in G_1\ \&\ g_2\in G_2\}$ العملية الجبرية Δ بالشكل التالي:

$$(g_1,g_2)\ \Delta\ (g_1',g_2')=(g_1*g_1',g_2\perp g_2')\quad ;\forall\ (g_1,g_2)\ ,\ (g_1',g_2')\in G_1\times G_2$$

والمطلوب :

1. برهن أن: $(G_1\times G_2,\Delta)$ زمرة
2. عرف رتبة الزمرة ثم أوجد عدد عناصر الزمرة $(G_1\times G_2,\Delta)$ ،إذا كان $|G_1|=n_1$ و $|G_2|=n_2$
3. برهن أن: $(G_1\times\{e_2\},\Delta)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G_1\times G_2,\Delta)$.

***************************انتهت الأسئلة*************************

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق
د. عائدة صائمة

طرطوس في 2023/1/30م

جامعة طرطوس

كلية العلوم

سلم التصحيح لمقرر البنى الجبرية 1 لطلاب سنة

لامتحان الفصل الأول للعام الدراسي 2022 - 2023

س1: (30 درجة)

الحل: الطلب الأول: المجموعة Q^*: هي مجموعة الأعداد العادية (الكسرية) غير المعدومة (4)

ونعبر عنها رياضياً بالشكل التالي: $Q^* = \{\frac{a}{b},\ a, b \in Z^*\}$ (4)

الطلب الثاني: أولاً: إثبات أن R علاقة تكافؤ على Q^*:

(4) 1- R علاقة انعكاسية لأنه:

$\forall a \in Q^*: aRa \iff a + \frac{1}{2a} = a + \frac{1}{2a}$

(5) 2- R تناظرية لأنه:

$\forall a, b \in Q^*: aRb \iff a + \frac{1}{2a} = b + \frac{1}{2b} \iff b + \frac{1}{2b} = a + \frac{1}{2a}$

$\iff bRa$

(4) 3- R متعدية لأنه:

$\forall a, b, c \in Q^*, (aRb \wedge bRc) \iff (a + \frac{1}{2a} = b + \frac{1}{2b} \wedge b + \frac{1}{2b} = c + \frac{1}{2c})$

$\iff a + \frac{1}{2a} = c + \frac{1}{2c} \iff aRc$

(3) R انعكاسية وتناظرية ومتعدية وبالتالي فهي علاقة تكافؤ على Q^*

ثانياً: إيجاد صف تكافؤ العنصر $a \in Q^*$:

$\bar{a} = \{b \in Q^*; aRb\} = \{b \in Q^*; a + \frac{1}{2a} = b + \frac{1}{2b}\} = \{b \in Q^*, a - b = \frac{a-b}{2ab}\}$

$= \{b \in Q^*, a - b = \frac{1}{2b} - \frac{1}{2a}\} = \{b \in Q^*; b = a \text{ or } b = \frac{1}{2a}\}$ (3)

$= \{b \in Q^*; (a-b)(2ab-1) = 0\}$

وبنفس الطريقة وبوضع $a = 5$ في صف التكافؤ $\bar{a}$ نجد أن:

$\bar{a} = \{a, \frac{1}{2a}\}$

$\bar{5} = \{5, \frac{1}{2 \times 5}\} = \{5, \frac{1}{10}\}$ (1)

س2: (30 درجة)

برهان (1) إثبات العنصر ϕ هو العنصر الأصغري في $P(\Omega)$ بالنسبة لعلاقة الترتيب $\subseteq$ لأن: (4)

$B \subseteq \phi \Rightarrow B = \phi,\ \forall B \in P(\Omega)$

كذلك فإن العنصر Ω هو العنصر الأعظمي في $P(\Omega)$ بالنسبة لعلاقة الترتيب $\subseteq$ لأنه (4)

$\Omega \subseteq B \Rightarrow B = \Omega,\ \forall B \in P(\Omega)$

برهان (2): لتكن $(G, *)$ زمرة ما و $(H, *)$ زمرة جزئية منها ولنفرض e و e' العنصران الحياديان وعلى الترتيب في G و H ولنبرهن أن $e = e'$ (4)

من جهة أولى وبما أن e العنصر الحيادي في G فإن:

$e * e' = e',\ \forall e' \in H \subseteq G$ (1)

ومن جهة أخرى وبما أن e' العنصر الحيادي في H فإن:

$e' * e' = e'$ (2)

(3) من (1) و (2) نجد أن:

$e * e' = e' * e' \Rightarrow e = e'$

قانون الاختصار في الزمرة G

برهان (3): لدينا في الزمرة G

$x * a = b \Rightarrow x * \underbrace{a * a^{-1}}_{e} = b * a^{-1} \Rightarrow \boxed{x = b * a^{-1}}$

نضرب طرفي المعادلة بنظير a من اليمين

وهو حل المعادلة في G وهذا الحل وحيد لأنه: (3)

لنفرض x' و x'' حلين للمعادلة بفرض e العنصر الحيادي في الزمرة G

محققات لهذه المعادلة $x * a = b$ فنجد أن هذين الحلين أي:

2

$$\left.\begin{array}{l} x' \star a = b \\ x'' \star a = b \end{array}\right\} \Rightarrow x' \star a = x'' \star a \Rightarrow x' = x''$$

حسب قانون الاختزال في الزمرة G (4)

برهان (4): نفرض e العنصر الحيادي في الزمرة G فإنه من جهة أولى لدينا:

$$(a_1 \star a_2 \star a_3 \star a_4) \star (a_4^{-1} \star a_3^{-1} \star a_2^{-1} \star a_1^{-1}) = a_1 \star a_2 \star a_3 \star \underbrace{a_4 \star a_4^{-1}}_{e} \star a_3^{-1} \star a_2^{-1} \star a_1^{-1}$$

$$= a_1 \star a_2 \star \underbrace{a_3 \star a_3^{-1}}_{e} \star a_2^{-1} \star a_1^{-1} = a_1 \star \underbrace{a_2 \star a_2^{-1}}_{e} \star a_1^{-1} = a_1 \star a_1^{-1} = e$$ (4)

ومن جهة ثانية لدينا:

$$(a_4^{-1} \star a_3^{-1} \star a_2^{-1} \star a_1^{-1}) \star (a_1 \star a_2 \star a_3 \star a_4) = a_4^{-1} \star a_3^{-1} \star a_2^{-1} \star \underbrace{a_1^{-1} \star a_1}_{e} \star a_2 \star a_3 \star a_4$$

$$= a_4^{-1} \star a_3^{-1} \star \underbrace{a_2^{-1} \star a_2}_{e} \star a_3 \star a_4 = a_4^{-1} \star \underbrace{a_3^{-1} \star a_3}_{e} \star a_4 = a_4^{-1} \star a_4 = e$$ (4)

وبالتالي نجد أن:

$$(a_1 \star a_2 \star a_3 \star a_4)^{-1} = a_4^{-1} \star a_3^{-1} \star a_2^{-1} \star a_1^{-1}$$

سؤال ٢: (30 درجة)

الحل: أولاً: تعريف رتبة عنصر في زمرة ما: لتكن $(G, \star)$ زمرة ما و a عنصراً ما في G و e العنصر الحيادي في الزمرة G. ندعو أصغر عدد صحيح موجب n تتحقق لأجله العلاقة $a^n = e$ رتبة العنصر a في الزمرة G ونرمز لها بالرمز $O(a)$ ونكتب $O(a) = n$ وفي حال لم يوجد مثل هذا العدد n قلنا إن رتبة العنصر a في الزمرة G غير منتهية وكتبنا $O(a) = \infty$ (5)

حساب $O(\bar{4})$ و $O(\bar{7})$ في الزمرة $(\bar{Z}_7, \oplus)$ حيث العنصر الحيادي في هذه الزمرة هو $\bar{0}$

إن: $O(\bar{4}) = 7$ لأن: (2)

$$7 . \bar{4} = \bar{4} \oplus \bar{4} \oplus \bar{4} \oplus \bar{4} \oplus \bar{4} \oplus \bar{4} \oplus \bar{4} = \overline{4+4+4+4+4+4+4} = \overline{28} = \bar{0}$$

كذلك نجد أن $O(\bar{7}) = 1$ لأن: $1 . \bar{7} = \bar{7} = \bar{0}$ (1)

إثبات أن الزمرة $(\bar{Z}_7, \oplus)$ دورية:

إن الزمرة $(\bar{Z}_7, \oplus)$ دورية مولدة بالعنصر $\bar{1}$ أي $\bar{Z}_7 = (\bar{1})$ لأن:

$$1.\bar{1} = \bar{1} \neq \bar{0},\ 2.\bar{1} = \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{2} \neq \bar{0},\ 3.\bar{1} = \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{3} \neq \bar{0}$$

$$4.\bar{1} = \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{4} \neq \bar{0},\ 5.\bar{1} = \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{5} \neq \bar{0}$$

$$6.\bar{1} = \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{6} \neq \bar{0}$$ (4)

$$7.\bar{1} = \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{7} = \bar{0} \Rightarrow O(\bar{1}) = 7 = O(\bar{Z}_7)$$

$$\Rightarrow (\bar{1}) = \{1.\bar{1}, 2.\bar{1}, 3.\bar{1}, 4.\bar{1}, 5.\bar{1}, 6.\bar{1}, 7.\bar{1}\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$$

$$= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\} = \bar{Z}_7$$

ثانياً: أولاً: برهان أن $(G_1 \times G_2, \Delta)$ زمرة

أ: إن $G_1 \times G_2 \neq \Phi$ لأن $(e_1, e_2) \in G_1 \times G_2$

لأن G_1 زمرة و G_2 زمرة

٢: Δ مغلقة على عناصر $G_1 \times G_2$ لأنه:

$\forall (g_1,g_2),(g'_1,g'_2) \in G_1\times G_2 \Rightarrow$

$(g_1,g_2)\Delta(g'_1,g'_2) = (g_1 * g'_1, g_2 \perp g'_2) \in G_1\times G_2$

لأن * مغلقة على عناصر G_1 لأن G_1 زمرة و ⊥ مغلقة على عناصر G_2 لأن G_2 زمرة

٣: Δ تجميعية على عناصر $G_1\times G_2$ لأنه:

$\forall (g_1,g_2),(g'_1,g'_2),(g''_1,g''_2)\in G_1\times G_2$:

لدينا $(g_1,g_2)\Delta[(g'_1,g'_2)\Delta(g''_1,g''_2)] = (g_1,g_2)\Delta[(g'_1 * g''_1, g'_2 \perp g''_2)]$

$= (g_1*(g'_1*g''_1), g_2\perp(g'_2\perp g''_2)) = ((g_1*g'_1)*g''_1, (g_2\perp g'_2)\perp g''_2)$

$= (g_1*g'_1, g_2\perp g'_2)\Delta(g''_1,g''_2) = [(g_1,g_2)\Delta(g'_1,g'_2)]\Delta(g''_1,g''_2)$

٤: وجود العنصر الحيادي: إن العنصر $e=(e_1,e_2)$ هو العنصر الحيادي في $G_1\times G_2$ بالنسبة للعملية Δ لأنه من جهة أولى فإن: $e=(e_1,e_2)\in G_1\times G_2$ ومن جهة ثانية فإنه:

$\forall (g_1,g_2)\in G_1\times G_2 \Rightarrow (g_1,g_2)\Delta(e_1,e_2)=(g_1*e_1, g_2\perp e_2)=(g_1,g_2)$

$(e_1,e_2)\Delta(g_1,g_2)=(e_1*g_1, e_2\perp g_2)=(g_1,g_2)$

٥: وجود العنصر النظير: من أجل كل عنصر $(g_1,g_2)\in G_1\times G_2$ يوجد له عنصر نظير هو $(g_1,g_2)^{-1}=(g_1^{-1},g_2^{-1})$ لأنه من جهة أولى فإن:

$(g_1,g_2)^{-1}=(g_1^{-1},g_2^{-1})\in G_1\times G_2$ لأن G_1 زمرة و G_2 زمرة

ومن جهة أخرى فإن: $(g_1,g_2)\Delta(g_1^{-1},g_2^{-1}) = (g_1*g_1^{-1}, g_2\perp g_2^{-1})=(e_1,e_2)$

$(g_1^{-1},g_2^{-1})\Delta(g_1,g_2)=(g_1^{-1}*g_1, g_2^{-1}\perp g_2)=(e_1,e_2)$

من (١) و(٢") و(٣") و(٤") و(٥") نجد أن $(G_1\times G_2,\Delta)$ زمرة

ثانياً: تعريف رتبة الزمرة: إذا كانت $(G,*)$ زمرة ما عندئذ ندعو عدد عناصر هذه الزمرة $|G|$ برتبة هذه الزمرة ونرمز لها بالرمز $O(G)$ ونكتب $O(G)=|G|$ وفي حال كانت $|G|<\infty$ قلنا إن الزمرة منتهية وعدا ذلك نقول إن الزمرة غير منتهية ونرمز لها $O(G)=\infty$

عدد عناصر الزمرة $G_1\times G_2$ هو:

$|G_1\times G_2|=|G_1|\times|G_2|=n_1\times n_2$

ثالثاً: إثبات أن $(G_1\times\{e_2\},\Delta)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G_1\times G_2,\Delta)$.

أ: حسب تعريف $G_1\times\{e_2\}=\{(g_1,e_2); g_1\in G_1 \;\&\; e_2\in\{e_2\}\subseteq G_2\}$ فإن $G_1\times\{e_2\}$ مجموعة جزئية من $G_1\times G_2$ أي أن

$G_1\times\{e_2\}\subseteq G_1\times G_2$

ومن جهة أخرى فإن $(e_1,e_2)\in G_1\times\{e_2\}$ وبالتالي $G_1\times\{e_2\}\neq\phi$

أي أن: $\emptyset\neq G_1\times\{e_2\}\subseteq G_1\times G_2$

ب:

$\forall (g_1,e_2),(g'_1,e_2)\in G_1\times\{e_2\} \Rightarrow (g_1,e_2)\Delta(g'_1,e_2)^{-1}=$

$$(g_1, e_2)\,\Delta\,(g_1^{-1}, e_2^{-1}) = (g_1 * g_1^{-1}, e_2 \perp e_2^{-1})$$

$$= (g_1 * g_1^{-1}, e_2) \in G_1 \times G_2$$ (لأن كلاً من G_1، G_2 زمرة)

من (أ) و(ب) و(ج) نجد أن $(G_1 \times \{e_2\}, \Delta)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G_1 \times G_2, \Delta)$

ملاحظة: جميع التمارين والأسئلة الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تحقق العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

طرطوس في 2023/1/25

مدرسة المقرر: د. عائشة علي صالحة

جامعة طرطوس امتحان الفصل الثاني المادة: البنى الجبرية (1)
كلية العلوم السنة الثانية – رياضيات المدة: ساعتان
****

السؤال الأول: (40 درجة)

أولاً: وضح المفاهيم التالية:

$P(X)$ حيث X مجموعة ما غير خالية ، رتبة الزمرة ، رتبة العنصر في زمرة ما ، الزمرة الدورية ورتبتها ، الزمرة الجزئية.

ثانياً: برهن أن علاقة الاحتواء $\subseteq$ المعرفة على $P(X)$ حيث X مجموعة ما غير خالية هي علاقة ترتيب جزئي ،بينما العلاقة $\leq$ المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N هي علاقة ترتيب كلي .

السؤال الثاني: (25درجة)

لتكن $(G,*)$ زمرة تبديلية ما، ولتكن $(H,*)$زمرة جزئية منها، ولتكن:

$$S(H)=\{x\in G;\ \ x*x\in H\}$$

برهن أن $(S(H),*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$.

السؤال الثالث: (25درجة)

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً ولتكن $G_n=\{a+b\sqrt{n}\ \ :a,b\in Z\}$والمطلوب أثبت أن $(G_n,+)$تشكل زمرة تبديلية حيث العملية + هي عملية الجمع العادي.

**************************انتهت الأسئلة **************************

مع التمنيات بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2022/7/27م

جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم لتصحيح مادة البنى الجبرية (1) لطلاب سنة أولى رياضيات الفصل الثاني للعام الدراسي 2021 - 2022م

س1: (30 درجة)

أولاً: 1- $P(X)$ حيث X مجموعة ما غير خالية، هي مجموعة أجزاء المجموعة غير الخالية X وهي المجموعة المؤلفة من جميع المجموعات الجزئية من X أي:

$$P(X) = \{A \; ; \; A \subseteq X\}$$

2- رتبة الزمرة: لتكن $(G, *)$ زمرة ما، نرمز لرتبة الزمرة G بـ $O(G)$ ونعرفها بأنها عدد عناصر الزمرة G المختلفة بعضها عن بعض، فإذا كانت G زمرة منتهية وعدد عناصرها $|G| = n$ عندئذ نكتب: $O(G) = |G| = n$ وفي حال كانت G زمرة غير منتهية نكتب: $O(G) = \infty$

3- رتبة العنصر في زمرة ما: إذا كانت $(G, *)$ زمرة ما و e عنصرها الحيادي و a عنصر كيفي من G. ندعو أصغر عدد صحيح موجب n تتحقق من أجله العلاقة: $a^n = e$ برتبة العنصر a في الزمرة G ونرمز لها بالرمز $O(a)$ ونكتب في هذه الحالة $O(a) = n$

وفي حال لم يوجد العدد n الذي من أجله تتحقق العلاقة السابقة نقول إن رتبة العنصر a لانهائية ونكتب: $O(a) = \infty$

4- الزمرة الدورية ورتبتها:

ندعو الزمرة $(G, *)$ زمرة دورية إذا وجد عنصر ما a من G بحيث يكون:

$$G = (a) = \{a^n \; ; \; n \in \mathbb{Z}\}$$

وندعو a في هذه الحالة العنصر المولد للزمرة الدورية G وفي حال كانت $O(a) = n < \infty$ عندئذ فإن $O(a) = O(G) = n$

وفي حال كانت $O(a) = \infty$ عندئذ فإن: $O(a) = O(G) = \infty$

أي أنه للزمرة الدورية والعنصر المولد لها نفس الرتبة

5- الزمرة الجزئية: لتكن $(G, *)$ زمرة ما و H مجموعة جزئية غير خالية من G. ندعو $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$ إذا كانت $(H, *)$ زمرة.

ثانياً: أ: برهان أن علاقة الاحتواء $\subseteq$ المعرفة على $P(X)$ ، حيث X مجموعة ما غير خالية ، هي علاقة ترتيب جزئي.

أ: العلاقة $\subseteq$ انعكاسية لأنه:

$$\forall A \in P(X) \Rightarrow A \subseteq A$$

ب: العلاقة $\subseteq$ تخالفية لأنه:

$$\forall A, B \in P(X) \; ; \; A \subseteq B \;\&\; B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

ج: العلاقة $\subseteq$ متعدية لأنه:

$$\forall A, B, C \in P(X) \; ; \; A \subseteq B \;\&\; B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

من (أ) و (ب) و (ج) نجد أن العلاقة $\subseteq$ هي علاقة ترتيب على $P(X)$.
وهي علاقة ترتيب جزئي لأنه إذا أخذنا $X = \{1, 2\}$ عندئذ فإن:

$$P(X) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

فإذا كانت $X = \{1, 2\}$ و $A = \{1\}, B = \{2\}$ عندئذ فإن $A \subseteq X$ وكذلك $A \nsubseteq B$
إذاً ليست جميع عناصر $P(X)$ مرتبة وفق علاقة الترتيب $\subseteq$ وبالتالي فهي علاقة ترتيب جزئي.

ج: برهان أن العلاقة $\leq$ المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ هي علاقة ترتيب كلي.

أ: العلاقة $\leq$ انعكاسية لأنه:

$$\forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq a$$

ب: العلاقة $\leq$ تخالفية لأنه:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \; ; \; a \leq b \;\&\; b \leq a \Rightarrow a = b$$

ج: العلاقة متعدية لأنه:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \; ; \; a \leq b \;\&\; b \leq c \Rightarrow a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

من (أ) و (ب) و (ج) نجد أن العلاقة $\leq$ هي علاقة ترتيب على $\mathbb{N}$
وهي علاقة ترتيب كلي لأنه: من أجل أي عنصرين a و b من $\mathbb{N}$ فإنه إما $a \leq b$ أو $b \leq a$.
أي أن أي عنصرين من $\mathbb{N}$ مرتبان وفق علاقة الترتيب $\leq$

س٢: (30 درجة)

برهان أن $(S(H), *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

أ: من تعريف $S(H)$ نلاحظ أنها مجموعة جزئية من G أي أن $S(H) \subseteq G$
من جهة أخرى بما أن $(G,*)$ زمرة وبالتالي يوجد فيها عنصر حيادي وليكن e
وبما أن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ وبالتالي $e \in H$

$\Rightarrow e * e \in H$ (لأن $(H,*)$ زمرة) $\Rightarrow e \in S(H) \Rightarrow S(H) \neq \phi$

أي أن $\phi \neq S(H) \subseteq G$

ب: $\forall x, y \in S(H)$ ولنثبت أن $x * y \in S(H)$

بما أن $x, y \in S(H) \Leftarrow$

$x * x \in H$ + $y * y \in H$

$(x*y)*(x*y) = x*(y*x)*y = x*(x*y)*y = (x*x)*(y*y) \in H$ لدينا

وبالتالي $x * y \in S(H)$

ج: $\forall x \in S(H)$ ولنثبت أن $x^{-1} \in S(H)$

بما أن $x \in S(H) \Leftarrow x * x \in H \Leftarrow (x*x)^{-1} \in H$ لأن $(H,*)$ زمرة

ولكن $(x*x)^{-1} = x^{-1} * x^{-1}$ وبالتالي $x^{-1} * x^{-1} \in H$

$\Rightarrow x^{-1} \in S(H)$

من (أ) و(ب) و(ج) نجد أن $(S(H),*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$

س٣: (30 درجة)

برهان أن $(G_n, +)$ زمرة تبديلية

أ: من الواضح أن $G_n \neq \phi$ حسب تعريفها

العملية + مغلقة على عناصر G_n لأنه:

$\forall a_1 + b_1\sqrt{n}, a_2 + b_2\sqrt{n} \in G_n ; a_1, b_1, a_2, b_2 \in Z \Rightarrow$

$(a_1 + b_1\sqrt{n}) + (a_2 + b_2\sqrt{n}) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\in Z} + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{\in Z}\sqrt{n} \in G_n$

لأن $(Z, +)$ زمرة

٣: العملية (+) تجميعية على عناصر G_n لأنه:

$\forall a_1 + b_1\sqrt{n}, a_2 + b_2\sqrt{n}, a_3 + b_3\sqrt{n} \in G_n ; a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$

$[(a_1 + b_1\sqrt{n}) + (a_2 + b_2\sqrt{n})] + (a_3 + b_3\sqrt{n}) = [(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{n}] + a_3 + b_3\sqrt{n}$

$= ((a_1 + a_2) + a_3) + ((b_1 + b_2) + b_3)\sqrt{n}$

$= (a_1 + (a_2 + a_3)) + (b_1 + (b_2 + b_3))\sqrt{n}$

$= (a_1 + b_1\sqrt{n}) + [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)\sqrt{n}]$

$= (a_1+b_1\sqrt{n}) + [(a_2+b_2\sqrt{3}) + (a_3+b_3\sqrt{n})]$

ج: إن العنصر $0+0\sqrt{n}\in G_n$ حيث $0\in Z$ هو العنصر الحيادي في G_n بالنسبة لعملية (+) لأنه:

$\forall a+b\sqrt{n}\in G_n \Rightarrow$

$(a+b\sqrt{n})+(0+0\sqrt{n}) = (a+0)+(b+0)\sqrt{n} = a+b\sqrt{n}$

$(0+0\sqrt{n})+(a+b\sqrt{n}) = (0+a)+(0+b)\sqrt{n} = a+b\sqrt{n}$

د: وجود العنصر النظير: مهما أي عنصر $a+b\sqrt{n}\in G_n$ فإن العنصر $-a-b\sqrt{n}$ هو النظير للعنصر $a+b\sqrt{n}$ في G_n بالنسبة للعملية (+) لأنه من جهة أولى فإن:

$\Rightarrow$ (لأن $(Z,+)$ زمرة)

$a,b\in Z \Rightarrow -a,-b\in Z$

ومن جهة أخرى فإن:

$-a-b\sqrt{n}\in G_n$

$(a+b\sqrt{n})+(-a-b\sqrt{n}) = (a+(-a))+(b+(-b))\sqrt{n} = 0+0\sqrt{n}$

$(-a-b\sqrt{n})+(a+b\sqrt{n}) = ((-a)+a)+((-b)+b)\sqrt{n} = 0+0\sqrt{n}$

من (1)، (2)، (3")، (4")، (5") ينتج أن $(G_n,+)$ زمرة

تبديلية لأنه:

$\forall a_1+b_1\sqrt{n},\ a_2+b_2\sqrt{n}\in G_n$:

$(a_1+b_1\sqrt{n})+(a_2+b_2\sqrt{n}) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{n}$

$= (a_2+a_1)+(b_2+b_1)\sqrt{n} = (a_2+b_2\sqrt{n})+(a_1+b_1\sqrt{n})$

لأن $(Z,+)$ زمرة تبديلية

ملاحظة: جميع التمارين الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية لحلها وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

طرطوس في ٢٠٢٣/٧/٢٧

مدرسة المقرر: د. عائشة علي صالحة

جامعة طرطوس — امتحان الفصل الأول — المادة: بنى جبرية (1)

كلية العلوم — السنة الثانية– رياضيات — اسم الطالب:

****

السؤال الأول (30درجة)

أولاً: إذا كانت R علاقة ترتيب معرفة على المجموعة غير الخالية X فبرهن أن العلاقة العكسية R^{-1} هي علاقة ترتيب على X.

ثانياً: عرف العنصر الأول (الأصغر) والعنصر الأصغري في مجموعة ما A ، ثم أعط مثالاً عن كل منهما.

ثالثاً: عرف كلاً من الانقلاب و التبديل الزوجي والتبديل الفردي وأعط مثالاً عددياً عن كل منها.

السؤال الثاني: (30 درجة)

لتكن لدينا المجموعة $G=\{\ (a,b)\ \ ;a\in Q^{*} and\ b\in Q\}$ ولنعرف على المجموعة G العملية الجبرية T بالشكل التالي: $(a,b)\mathrm{T}(c,d)=(ac,bc+d)\ \ ;\forall(a,b),(c,d)\in G$ ، والمطلوب:

1. أثبت أن (G,T) زمرة.
2. أثبت أن مجموعة العناصر $H=\{(1,b)\ \ ;b\in Q\}$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة (G,T).

السؤال الثالث: (30درجة)

إذا كانت (S_3,o) زمرة التباديل للمجموعة : $A=\{1,2,3\}$ وكانت : (H,o) زمرة جزئية منها ،حيث:

$$H=\left\{x_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\ ,\ x_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\ ,\ x_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}$$

والمطلوب:

1- اكتب عناصر الزمرة S_3 ثم أوجد رتبتها.

2- أوجد مولدات الزمرة الجزئية H ، ثم أثبت أن H زمرة جزئية دورية وأوجد رتبتها.

2- عرف المجموعة M_R بشكل عام ، ثم أوجد M_R للزمرة الجزئية H في الزمرة S_3.

****************************انتهت الأسئلة************************

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس 2022/2/6م

جامعة طرابلس
كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة البنى الجبرية (1) لطلاب

لامتحانات الفصل الأول - العام الدراسي 2021 - 2022 م

س١: (٣٠ درجة)

الحل:

أولاً: الفرض: $R = \{(x,y) ; x\in X \wedge y\in X\}$ علاقة ترتيب على X ، $X \neq \phi$ (1)

المطلوب: $R^{-1} = \{(y,x) ; (x,y)\in R\}$ علاقة ترتيب على X (1)

البرهان: نتحقق أن R^{-1} يحقق شروط علاقة الترتيب.

1- R^{-1} انعكاسية لأنه: (2)

$$\forall x\in X \Rightarrow xRx \Rightarrow xR^{-1}x \Rightarrow (x,x)\in R^{-1}$$

2- R^{-1} تخالفية لأنه: (3)

$$\forall x,y\in X + \text{if } (x,y)\wedge(y,x)\in R \Rightarrow x=y$$

وبالتالي فإن:

$$(y,x)\wedge(x,y)\in R^{-1} \Rightarrow y=x$$

3- R^{-1} متعدية لأنه:

$$\forall x,y,z\in X \wedge (x,y)\wedge(y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R \quad (4)$$

وبالتالي فإن:

$$(z,y)\wedge(y,x)\in R^{-1} \Rightarrow (z,x)\in R^{-1}$$

مما سبق نجد أن R^{-1} انعكاسية وتخالفية ومتعدية وبالتالي فهي علاقة ترتيب على X. (1)

ثانياً: تعريف العنصر الأول (الأصغر): لتكن A مجموعة مرتبة بالعلاقة R ندعو العنصر $a\in A$ عنصراً أول في A إذا كان: (2)

$$aRx \ ; \ \forall x\in A$$

مثال: العنصر $a=0$ هو العنصر الأول في مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة Z^+ المرتبة بالعلاقة $\leq$ لأن: (1)

$$0\leq x \ ; \ \forall x\in Z^+$$

تعريف العنصر الأصغري: لتكن A مجموعة مرتبة بالعلاقة R. ندعو العنصر $b\in A$ عنصراً أصغرياً في A إذا كان:

$$xRb \Rightarrow x=b \ ; \ \forall x\in A$$

ب) إن $b = 0$ عنصر أصغري في مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة Z^+ المرتبة بالعلاقة $\le$ لأنه : $\forall x \in Z^+ ;\ x \le 0 \Rightarrow x = 0$

ثالثاً: تعريف الانقلاب: الانقلاب هو دورة طولها 2 أي أن الانقلاب هو تبديل يبادل بين عنصرين فقط a, b ويترك بقية العناصر ثابتة دون تغيير. 3

مثال : 1

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 4)$$

تعريف التبديل الزوجي : نقول عن التبديل $\alpha \in S_n$ أنه تبديلاً زوجياً إذا كان بالإمكان كتابته على شكل جداء عدد زوجي من الانقلابات. 3

مثال : 1

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 2\ 6\ 5) = (1\ 5)(1\ 6)(1\ 2)(1\ 4)$$

α تبديل زوجي لأنه أمكن كتابته على شكل جداء أربع انقلابات

تعريف التبديل الفردي : نقول عن التبديل $\alpha \in S_n$ أنه تبديلاً فردياً إذا كان بالإمكان كتابته على شكل جداء عدد فردي من الانقلابات. 3

مثال : 1

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 5\ 3) = (1\ 3)(1\ 5)(1\ 4)$$

α تبديل فردي لأنه أمكن كتابته على شكل جداء ثلاث انقلابات

س2 : (30 درجة) الحل :

أولاً: برهان أن (G, T) زمرة :

نتحقق أن (G, T) يحقق شروط الزمرة .

1: إن $G \neq \phi$ لأن: $(1,0) \in Q^* \times Q$ وبالتالي $(1,0) \in G$.

2: (T) مغلقة على عناصر G لأنه : 3

$$\forall (a,b),(c,d) \in G : (a,b)T(c,d) = (\underbrace{ac}_{\in Q^*}, \underbrace{bc+d}_{\in Q}) \in G$$

3: (T) تجميعية على عناصر G :

$\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in G$: ولنبرهن أن : 3

$$(a,b)T[(c,d)T(e,f)] = [(a,b)T(c,d)]T(e,f)$$

$$A_1 = (a,b)T[(c,d)T(e,f)] = (a,b)T(ce, de+f)$$

$$= (ace, bce+de+f)$$

$$\text{ب}_2 = [(a,b)T(c,d)]T(e,f) = (ac, bc+d)T(e,f)$$
$$= (ace, (bc+d)e+f) = (ace, bce+de+f)$$

نلاحظ أن

$$(a,b)T[(c,d)T(e,f)] = [(a,b)T(c,d)]T(e,f)$$

وبالتالي T تجميعية على عناصر G .

٤: وجود العنصر الحيادي في G بالنسبة لـ T :

إن العنصر $(1,0)$ هو العنصر الحيادي في G بالنسبة لـ (T) لأنه من جهة أولى فإن: $(1,0)\in G$ ومن جهة أخرى فإن:

$$\forall (a,b)\in G : (a,b)T(1,0) = (a.1, b.1+0) = (a,b)$$
$$(1,0)T(a,b) = (1.a, 0.a+b) = (a,b)$$

٥: وجود العنصر النظير في G بالنسبة لـ T : من أجل أي عنصر $\ni(a,b)$

فإن العنصر $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$ هو نظير هذا العنصر بالنسبة لـ T في G :

لأنه من جهة أولى فإن: $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)\in \mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}$ وبالتالي $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)\in G$

ومن جهة أخرى فإن:

$$(a,b)T\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}.a, b.\frac{1}{a}+\left(-\frac{b}{a}\right)\right) = (1,0)$$
$$\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)T(a,b) = \left(\frac{1}{a}.a, -\frac{b}{a}.a+b\right) = (1,0)$$

نجد من $(1'')$ و $(2'')$ و $(3'')$ و $(4'')$ و $(5'')$ أن (G,T) زمرة .

ثانياً: برهان أن (H,T) زمرة جزئية من الزمرة (G,T)

أ: نلاحظ من تعريف H أن $H\subseteq G$ وأن

$(1,0)\in H$ أي أن $H\neq\phi$

وبالتالي $\phi\neq H\subseteq G$

ب: لنتحقق الآن أن H تحقق شروط الزمرة الجزئية:

أولاً:

$$\forall (1,b),(1,d)\in H : (1,b)T(1,d) =$$
$$(1.1, b.1+d) = (1, b+d)\in H$$

ثانياً: من أجل أي عنصر $(1,b)$ من H فإن

$$(1,b)^{-1} = \left(\frac{1}{1}, -\frac{b}{1}\right) = (1,-b)\in H$$

من (أ) و (ب) نجد أن (H,T) :

4

حل ٣: (١٠ درجة)

الطلب الأول: عناصر الزمرة S_3 هي:

$$S_3 = \left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

8

$O(S_3) = |S_3| = 6$ 4

الطلب الثاني: إيجاد مولدات الزمرة الجزئية H:

من أجل العنصر $x_1 \in H$ فإن $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = x_1$ وهو العنصر الحيادي في.

من أجل العنصر $x_2 \in H$ فإن:

$x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq e$

$x_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = x_3 \neq e$

$x_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$ إذاً

$O(x_2) = 3 = O(H)$ 3

وبالتالي فإن:

$H = (x_2) = \{ x_2, x_2^2, x_2^3 \} = \{ x_2, x_3, x_1 \}$

أي أن العنصر x_2 مولد للزمرة الجزئية H

أما من أجل العنصر $x_3 \in H$ فإن:

$x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq e$

$x_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = x_2 \neq e$

$x_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$ ⇐ 3

$O(x_3) = 3 = O(H)$ وبالتالي فإن:

$H = (x_3) = \{ x_3, x_3^2, x_3^3 \} = \{ x_3, x_2, x_1 \}$ إذاً العنصر x_3 مولد للزمرة الجزئية H

وبالتالي مولدات الزمرة الجزئية H هي: $\{ x_2, x_3 \}$ 1

إثبات أن H زمرة جزئية دورية: وجدنا مما سبق أن:

$H = (x_2) = \{ x_1, x_2, x_3 \} \Rightarrow$ 2 H زمرة جزئية دورية مولدة بالعنصر x_2

ووجدنا أن

$O(H) = 3$ 2

السؤال الثالث: تعريف المجموعة M_R: إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة ما G نستطيع تكوين المجموعة لجميع المرافقات اليمينية لـ H في G بالرمز M_R ونعرفها بالشكل:

$M_R = \{ H * a ; a \in G \}$

إيجاد M_R للزمرة الجزئية H في الزمرة S_3:

من أجل $x_1 = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix} \in S_3$ حيث $x_1 \in H$ فإن:

$H \circ x_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix} \right\} = H = \{ x_1 , x_2 , x_3 \}$

من أجل $x_2 \ni S_3$ حيث $x_2 \ni H$ فإن:

$H \circ x_2 = H$

كذلك من أجل $x_3 \ni S_3$ حيث $x_3 \ni H$ فإن:

$H \circ x_3 = H$

الآن من أجل $x_4 \in S_3$ حيث $x_4 \notin H$ فإن:

$H \circ x_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&3&2 \end{pmatrix} \right\} = \{ x_4 , x_5 , x_6 \}$

وكذلك من أجل $x_5 \in S_3$ حيث $x_5 \notin H$ فإن:

$H \circ x_4 = H \circ x_5$

وأيضاً من أجل $x_6 \in S_3$ حيث $x_6 \notin H$ فإن:

$H \circ x_4 = H \circ x_5 = H \circ x_6$.

لذلك نتوقف عند $H \circ x_4$

نلاحظ أن: $H \circ x_1 \cup H \circ x_4 = S_3$

$H \circ x_1 \cap H \circ x_4 = \phi$ و

وبالتالي فإن: $M_R = \{ H \circ x_1 , H \circ x_4 \}$.

ملاحظة: جميع التمارين والأسئلة الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

طرطوس ٢٠٢٢/٢/١٦

مدرس المقرر: د. عائشة صابحة

الجمهورية العربية السورية	**امتحان بنى جبرية 2**	**المدة ساعتان**
جامعة طرطوس	**لطلاب السنة الثانية- رياضيات**	**الدرجة العظمى: 90 درجة**
كلية العلوم	**الدورة الفصلية الثانية**	**اسم الطالب:**

السؤال الأول: (30 درجة) **1-** عرف العنصر الجامد ، ثم برهن أنه إذا كانت $(A,+,.)$ منطقة تكاملية و a , b عنصرين من A بحيث إن $a^5 = b^5 \quad \& \quad a^7 = b^7$ فإن $a = b$.

2- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، ولتكن $C(R) = \{a \in R \mid ax = xa \quad \forall x \in R\}$. بين أن $C(R)$ حلقة جزئية من $(R,+,.)$.

السؤال الثاني: (30 درجة) **1-** عرف حلقة المثاليات الرئيسية، ثم برهن أنه إذا كان f هومومورفيزم لحلقة ما $(A,+,.)$ في حلقة ما $(B,T,*)$، فإن $(Kerf,+,.)$ مثالية من الحلقة $(A,+,.)$.

2- لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، ولتكن $(A,+,.)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,.)$، ولتكن I مثالية من R. بين أن:

$$A/(A \cap I) \cong (A+I)/I$$

السؤال الثالث: (30 درجة) **1-** لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية عنصر الوحدة فيها 1. برهن أن:

$$char(R) = n > 0 \Leftrightarrow n \text{ أصغر عدد صحيح موجب يحقق } n.1 = 0$$

2- عرف القاسم المشترك الأعظم d لعنصرين $a \neq 0, b \neq 0$ من حلقة تبديلية واحدية $(A,+,.)$، ثم بين أنه إذا كان ε عنصر قابل للقلب في $(A,+,.)$ فإن $d.\varepsilon$ قاسم مشترك أعظم للعنصرين a , b.

3- لتكن $(A,+,.)$ حلقة اقليدية، وليكن $a \neq 0$ و $b \neq 0$ عنصرين من A . إذا كان a قاسماً لـ b في A ، وإذا كان $\varphi(a) = \varphi(b)$ ، فبين أن a و b شريكان في A .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم   2021-8-8

علياء

[30] السؤال الأول

3

أ] * نعرف a من حلقة $(R,+,.)$ يسمى عنصراً جامداً إذا كان $a^2=a$

*ب) إذا كان $a=0$ ، فإن:

$$a=0 \Rightarrow a^5=0 \Rightarrow b^5=0 \Rightarrow b=0$$

(لأن A منطقة تكاملية)

$$\Rightarrow a=b=0$$

3

ب) إذا كان $a\neq0$ ، وبما أن:

$$a^7=b^7 \Rightarrow a^5.a^2=b^5.b^2 \Rightarrow a^5.a^2=a^5 b^2$$

($a^5=b^5$ فرضاً)

$$\Rightarrow a^5(a^2-b^2)=0$$

4

وبما أن $(A,+,.)$ منطقة تكاملية، و $a\neq0$ فإن $a^5\neq0$ ، وبالتالي:

$$a^2-b^2=0 \Rightarrow a^2=b^2 \Rightarrow (a^2)^3=(b^2)^3$$

$$\Rightarrow a^6=b^6 \quad (1)$$

5

وبما أن: (من (1))

$$a^7=b^7 \Rightarrow a^6.a=b^6.b \Rightarrow a^6.a=a^6.b$$

$$\Rightarrow a^6(a-b)=0$$

وبما أن $(A,+,.)$ منطقة تكاملية و $a\neq0$ فإن $a^6\neq0$ ، ومنه:

$$a-b=0 \Rightarrow a=b$$

٢) واضح أن $C(R)\subseteq R$ ، وكذلك $C(R)\neq\emptyset$ لأن $0x=x0$

3 من أجل كل x من R ، وبالتالي $0\in C(R)$.

ب) $\forall a_1,a_2\in C(R) \Rightarrow a_1x=xa_1 \;\&\; a_2x=xa_2 \quad \forall x\in R$

$$\Rightarrow (a_1-a_2)x=a_1x-a_2x=xa_1-xa_2=x(a_1-a_2)$$

$$\Rightarrow a_1-a_2\in C(R)$$

6

جـ) $\forall a_1,a_2\in C(R) \Rightarrow a_1x=xa_1 \;\&\; a_2x=xa_2 \quad \forall x\in R$

$$\Rightarrow (a_1.a_2)x=a_1(a_2x)=a_1(xa_2)=(a_1x)a_2$$

$$=(xa_1)a_2=x(a_1a_2) \Rightarrow a_1a_2\in C(R)$$

من (٢) و(ب) و(جـ) نجد أن $C(R)$ حلقة جزئية من $(R,+,.)$.

6

١) * إذا كانت $(A,+,\cdot)$ حلقة تبديلية ذات عنصر محايد فإننا نقول عن الحلقة $(A,+,\cdot)$ إنها حلقة مثاليات رئيسية إذا، وفقط إذا، كانت كل مثالية في الحلقة $(A,+,\cdot)$ مثالية رئيسية فيها. 3

٢) واضح أن $Kerf \subseteq A$ و $Kerf \neq \phi$ لأن $f(0)=0'$ ، وبالتالي $0\in Kerf$ 3

أ) $\forall x,y \in Kerf \Rightarrow f(x)=f(y)=0'$

$\Rightarrow f(x-y)=f(x)\top f(y)=0'\top 0'=0' \Rightarrow x-y\in Kerf$

ب) $\forall a\in A, x\in Kerf \Rightarrow f(ax)=f(a)*f(x)$

$= f(a)*0'=0' \Rightarrow ax\in Kerf$ 6

$f(xa)=f(x)*f(a)=0'*f(a)=0' \Rightarrow xa\in Kerf$

من (٢) و(أ) و(ب) نجد أن $Kerf$ مثالية في الحلقة $(A,+,\cdot)$.

٣) لنعرف التطبيق:

$f: A \longrightarrow (A+I)/I$

بالشكل:

$f(x)=x+I \quad \forall x\in A$

أ) $\forall x_1,x_2\in A \Rightarrow f(x_1+x_2)=(x_1+x_2)+I=(x_1+I)+(x_2+I)$

$= f(x_1)+f(x_2)$

ب) $\forall x_1,x_2\in A \Rightarrow f(x_1.x_2)=x_1.x_2+I=(x_1+I)(x_2+I)$ 3

$= f(x_1).f(x_2)$

ج) ليكن y عنصراً من $A+I$ فإنه يكتب بالشكل:

$y=a_1+b \;;\; a_1\in A$ و $b\in I$ 3

$\Rightarrow f(a_1)=a_1+B=(a_1+B)+B=(a_1+B)+(b+B)$

$=(a_1+b)+I= y+I$

$\Rightarrow \forall y+I \in (A+I)/I \Rightarrow \exists a_1\in A \;;\; f(a_1)=y+I$

وبالتالي f غامر

د) إن $Kerf = A\cap I$ لأن

$\forall z\in Kerf \Rightarrow Kerf\subseteq A$ و $f(z)=B$ 2

$\Rightarrow z\in A$ و $z+I=I$

$\Rightarrow z\in A$ و $z\in I \Rightarrow z\in A\cap I$

$\Rightarrow Kerf \subseteq A\cap I \cdots (1)$

$\forall z \in A \cap I \Rightarrow z \in A$ و $z \in I$

$\Rightarrow z \in A$ و $z + I = I \Rightarrow z \in A$ و $f(z) = \bar{I}$

$\Rightarrow z \in Ker f \Rightarrow A \cap I \subseteq Ker f \quad \dots (2)$

من (1) و (2) نجد أن $Ker f = A \cap I$

من (أ) و(ب) و(ج) و(د) نجد أن f هومومورفيزم غامر من الحلقة $(A,+,.)$ إلى الحلقة $(A+I/I,+,.)$ نواته $A \cap I$، ومنه:

$$(A/A\cap I,+,.) \cong ((A+I)/I,+,.)$$

السؤال الثالث:

1) $\Leftarrow$) لنفرض أن $char(R)=n>0$ وبالتالي فإن $na=0$ من أجل كل a من $(R,+,.)$ ومنه $n1=0$. لنفرض الآن أنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث أن $0<m<n$ ويحقق $m.1=0$، ومنه:

$$ma = m(1.a) = (m.1)a = 0.a = 0 \quad \forall a \in R$$

وهذا تناقض مع كون $char(R)=n$، وبالتالي n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $n.1=0$

$\Rightarrow$) لنفرض أن n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $n.1=0$
من أجل كل عنصر a في $(R,+,.)$ فإن:

$$na = n(1.a) = (n.1)a = 0a = 0$$

ومنه $char(R)=n$.

2) * نقول إن d قاسم مشترك أعظم لـ a و b في A إذا تحقق:

1) d قاسم لـ a و b في A أي $b|a$ و $a|b$

2) إذا وجد قاسم مشترك آخر d' لـ a و b في A، فإن d' يقسم d في A

* d قاسم مشترك أعظم لـ a وبالتالي $a = cd \; ; c \in A$

$\Rightarrow a = c\varepsilon^{-1}\varepsilon d = (c\varepsilon^{-1})\varepsilon d \Rightarrow \varepsilon d \mid a$

وبنفس الطريقة نجد أن $\varepsilon d \mid b$

و d' قاسم مشترك أعظم آخر فإن $d' | d$ ومنه

$d = cd' \; ; c \in A \Rightarrow \varepsilon d = \varepsilon c d' = (\varepsilon c) d'$

$\Rightarrow d' \mid \varepsilon d \Rightarrow$ قاسم مشترك أعظم εd

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان البنى الجبرية (1)
لطلاب السنة الثانية–رياضيات
للدورة الأولى-2020-2021م

المدة: ساعتان
الدرجة العظمى: 90درجة
اسم الطالب:

****

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول: (30 درجة)

لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة Z بالشكل التالي:

$$xRy \Leftrightarrow 6|x-y \;;\; \forall x,y \in Z$$

والمطلوب:

1- أثبت أن R علاقة تكافؤ على Z، ماذا ندعو علاقة التكافؤ هذه .
2- أوجد صفوف تكافؤ هذه العلاقة.

السؤال الثاني: (30 درجة)

أثبت صحة ما يلي:

1. إذا كانت $(G,*)$ زمرة ما و H مجموعة جزئية غير خالية من G عندئذ فإن الشرط اللازم والكافي حتى تكون $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ هو:

$$1- \quad \forall a,b \in H \Rightarrow a*b \in H$$
$$2- \quad \forall a \in H \;\Rightarrow a^{-1} \in H$$

2. لتكن $(G,*)$ زمرة تبديلية ما، ولتكن $(H,*)$ زمرة جزئية منها، ولتكن:

$$S(H) = \{x \in G;\;\; x*x \in H\}$$

برهن أن $(S(H),*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$.

السؤال الثالث: (30درجة)

أولاً: أثبت أن الزمرة $\left(\overline{Z}_6,\oplus\right)$ زمرة تبديلية منتهية (استعن بجدول كايلي).

ثانياً: أوجد جميع مولدات الزمرة $\left(\overline{Z}_6,\oplus\right)$ واستنتج أنها زمرة دورية.

ثالثاً: أوجد رتبة كل من العنصرين $\overline{5}$ و $\overline{5}^{-1}$ في هذه الزمرة.

******************************انتهت الأسئلة******************************

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2021/2/7م

الجمهورية العربية السورية　　امتحان البنى الجبرية (١)　　المدة: ساعتان
جامعة طرطوس　　لطلاب السنة الثانية –رياضيات　الدرجة العظمى: ٩٠درجة
كلية العلوم　　الفصل الثاني　　اسم الطالب:

****

__السؤال الأول: (٣٠درجة)__

لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة $Z^+ \times Z^+$ بالشكل التالي:
$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c \quad \forall (a,b),(c,d) \in Z^+ \times Z^+$، أثبت أن R علاقة تكافؤ على $Z^+ \times Z^+$، ثم أوجد صفي تكافؤ العنصرين $(4,4)$ و $(4,6)$.

__السؤال الثاني: (٣٠درجة)__

__برهن صحة النظرية التالية:__

إذا كانت $(G,*)$ زمرة ما و H مجموعة جزئية غير خالية من G عندئذ فإن الشرط اللازم والكافي حتى تكون $(H,*)$زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ هو:
$a*b^{-1} \in H ; \forall a,b \in H$.

__السؤال الثالث: (٣٠درجة)__

__أولاً:__ لنعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ العملية الثنائية$(*)$ بالشكل التالي:
$\forall x,y \in R^+ : \ x*y=\frac{x \cdot y}{2}$ ، أثبت أن $(R^+,*)$زمرة تبديليه.

__ثانياً:__ إذا كانت $(G,\cdot)$زمرة ،حيث $G=\{\pm 1, \pm a, \pm a^2\}$ و $a^3=-1$،فأثبت أن الزمرة $(G,\cdot)$ دورية ، ثم اوجد جميع مولدات هذه الزمرة .

**********************انتهت الأسئلة**********************

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق
د. عائدة صائمة

طرطوس في ٢٠٢٠/٩/٢م

جامعة طرطوس

كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة البنى الجبرية (1) لطلاب السنة
للعام الدراسي 2019 - 2020 - فصل ثاني

س1: (30 درجة)

أولاً: إثبات أن R علاقة تكافؤ:

1- R علاقة انعكاسية لأنه: (4)

$\forall (a,b)\in Z^+\times Z^+ : a+b=b+a \Leftrightarrow (a,b)R(a,b)$

2- R علاقة تناظرية لأنه:

$\forall (a,b)\wedge(c,d)\in Z^+\times Z^+ ; (a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c \Leftrightarrow$ (2)

$b+c=a+d \Leftrightarrow c+b=d+a \Leftrightarrow (c,d)R(a,b)$

3- R علاقة متعدية لأنه:

$\forall (a,b),(c,d),(e,t)\in Z^+\times Z^+ ; (a,b)R(c,d)\wedge(c,d)R(e,t) \Leftrightarrow$ (8)

$\Leftrightarrow (a+d=b+c)\ (1)\ \wedge\ (c+t=d+e)\ (2) \Leftrightarrow$

$a+d+c+t=b+c+d+e$ (بجمع 1 و 2) $\Leftrightarrow a+t=b+e$ (2)

$\Leftrightarrow (a,b)R(e,t)$

8 من (1), (2) و (3) نجد أن R علاقة تكافؤ على $Z^+\times Z^+$

ثانياً: إيجاد صفوف التكافؤ: (4)

$\overline{(4,4)}=\{(a,b)\in Z^+\times Z^+ ; (4,4)R(a,b)\}$

$=\{(a,b)\in Z^+\times Z^+ ; 4+b=4+a\}$

$=\{(a,b)\in Z^+\times Z^+ ; a=b\}=\{(a,a)\in Z^+\times Z^+\}$ (1)

$=\{(a,b)\in Z^+\times Z^+ ; \ldots\}$

$=\{(4,4),(1,1),(2,2),(3,3),\ldots\}$ (4)

$\overline{(4,6)}=\{(a,b)\in Z^+\times Z^+ ; (4,6)R(a,b)\}$

$=\{(a,b)\in Z^+\times Z^+ ; 4+b=6+a\}$

$=\{(a,b)\in Z^+\times Z^+ ; b=a+2\}$

$=\{(a,b)\in Z^+\times Z^+ ; \ldots\}$ (1)

$=\{(4,6),(5,7),(1,3),(2,4),\ldots\}$

س2: (30 درجة):

أولاً: لزوم الشرط: الفرض: (H,*) زمرة جزئية من الزمرة (G,*) (4)

الطلب: تحقق الشرط: $\forall a,b\in H ; a*b^{-1}\in H$ (4)

2

البرهان: $\forall a, b \in H$ وبما أن $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$
$\Rightarrow b^{-1} \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$

ثانياً: كفاية الشرط: الفرض: تحقق الشرط:
$\forall a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$

الطلب: $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$.

البرهان: أ) (حسب الشرط)
$\forall a \in H \subseteq G \Rightarrow a * a^{-1} = e \in H$

بفرض e العنصر الحيادي في الزمرة $(G, *)$.

وبالتالي: $a, e \in H$ إذاً حسب الشرطين:
أي أنه: $a^{-1} = e * a^{-1} \in H$

ب) حسب القسم الأول (أ) من هذا البرهان
$\forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

حسب الشرط
$\forall a, b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$

من (أ) و(ب) نجد أن
$\Rightarrow a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H$
$(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$.

س3: (30 درجة)

أولاً:
إثبات أن $(R^+, *)$ زمرة تبديلية

أ: نتحقق أولاً أن $(R^+, *)$ تحقق شروط الزمرة:

أ: $(*)$ مغلقة على عناصر R^+ لأنه:
$$\forall x, y \in R^+ ; x * y = \frac{x \cdot y}{2} \in R^+$$

ب: $(*)$ تجميعية على عناصر R^+ لأنه،
$$\forall x, y, z \ ; x * (y * z) = x * \left(\frac{y \cdot z}{2}\right) = \frac{x \cdot \left(\frac{y \cdot z}{2}\right)}{2} = \frac{x \cdot y \cdot z}{4}$$
و
$$(x * y) * z = \left(\frac{x \cdot y}{2}\right) * z = \frac{\frac{x \cdot y}{2} \cdot z}{2} = \frac{x \cdot y \cdot z}{4}$$

وبالتالي:
$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

ج: وجود العنصر الحيادي: إن العنصر $e = 2$ هو العنصر الحيادي في R^+ بالنسبة للعملية $(*)$ لأن $e \in R^+$ ومن جهة أخرى بأن:
$$\forall x \in R^+ ; \quad x * 2 = \frac{x \cdot 2}{2} = x = \frac{2 \cdot x}{2} = 2 * x$$

د: وجود العنصر النظير: من أجل كل عنصر x من R^+ فإن العنصر $x^{-1} = \frac{4}{x}$ هو نظير x بالنسبة للعملية

من جهة أولى فإن: $x^{-1} = \frac{4}{x} \in \mathbb{R}^+$ ومن جهة أخرى فإن:

$x * x^{-1} = x * \frac{4}{x} = \frac{x\cdot\frac{4}{x}}{2} = 2$ و $x^{-1} * x = \frac{4}{x} * x = \frac{\frac{4}{x}x}{2} = 2$ 1

من $(1')$، $(2')$، $(3')$ و $(4')$ نجد أن $(\mathbb{R}^+,*)$ زمرة.

ب ، الزمرة $(\mathbb{R}^+,*)$ تبديلية لأن: 2

$$\forall x,y\in \mathbb{R}^+ : x*y = \frac{x\cdot y}{2} = \frac{y\cdot x}{2} = y*x$$

ثانياً: إثبات أن الزمرة G دورية: من أجل ذلك لنأخذ a من G ولنبرهن أن: $G=(a)$.

لدينا $O(G)=6$ ولنحسب القوى المختلفة لـ a:

$a^1=a,\ a^2=a^2,\ a^3=-1,\ a^4=a^3\cdot a=-a,\ a^5=a^3\cdot a^2=-a^2,$

$a^6=a^3\cdot a^3=(-1)(-1)=1 \Rightarrow O(a)=+6$ 5

إذاً $O(a)=O(G)=6$ وبالتالي G دورية مولدة بالعنصر a أي:

$$G=(a)=\{a,+a^2,-1,-a,-a^2,+1=e\}$$

لحساب المولدات الأخرى للزمرة الدورية G:

$1\in G$ ولنحسب القوى المختلفة لـ 1: 1

$1^1=1,\ 1^2=1,\dots,1^k=1\ ;\ \forall k\in \mathbb{N} \Rightarrow O(1)=1\neq O(G)$

وبالتالي العنصر 1 ليس مولداً لـ G.

$-a\in G$ ولنحسب $O(-a)$:

$(-a)^1=-a,\ (-a)^2=a^2,\ (-a)^3=-a^3=1 \Rightarrow O(-a)=3$ 1

إذاً: $O(-a)=3\neq O(G)$ و $-a$ ليس مولداً لـ G

$-1\in G$ ولنحسب $O(-1)$:

$(-1)^1=-1,\ (-1)^2=1 \Rightarrow O(-1)=2\neq O(G)=6$

وبالتالي -1 ليس مولداً لـ G. 1

$a^2\in G$ ولنحسب $O(a^2)$:

$(a^2)^1=a^2,\ (a^2)^2=a^4=a^3a=-a,\ (a^2)^3=a^6=(a^3)^2=1$ 1

إذاً: $O(a^2)=3\neq O(G)=6$ والعنصر a^2 ليس مولداً لـ G.

$-a^2\in G$ ولنحسب $O(-a^2)$

$(-a^2)^1=-a^2,\ (-a^2)^2=a^4=a^3\cdot a=-a$

$(-a^2)^3=-a^6=-(a^3)^2=-1,\ (-a^2)^4=a^8=a^3\cdot a^3\cdot a^2=a^2$ 2

$$(-a^2)^5 = -a^{10} = -(a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a) \overset{\boxed{4}}{=} a$$

$$(-a^2)^6 = a^{12} = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = 1 \Rightarrow O(-a^2) = 6$$

إذاً: $O(-a^2) = O(G) = 6$ و $(-a^2)$ مولدة للزمرة G

وبالتالي مولدات الزمرة الدورية G هي: $\{a, -a^2\}$ 2

ملاحظة: جميع التمارين الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

طرطوس في ٢/٩/٢٠٢٠

مدرس المقرر: د. عائدة علي صافية

جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان الفصل الأول — المادة: بنى جبرية (1)

السنة الثانية– رياضيات — اسم الطالب:

****

<u>السؤال الأول: (22 درجة)</u>

أكمل العبارات التالية:

1-التبديل المطابق في S_9 هو ---------- ، 2-عدد التباديل الفردية في الزمرة S_7 هو----------، 3- رتبة الزمرة الدورية تساوي-----------، 4 -إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة دورية G عندئذ فإن H ------، 5- $(abcd)^{-1} = -----$ ، 6- تعرف رتبة العنصر a من الزمرة $(G,+)$ بأنها-------، 7-إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة ما G عندئذ فإن $x * H = H * x \ ;\forall x \in G$ إذا كانت----------، 8- إذا كانت $G = (a) \ ;a \in G$ و $O(G) = 12$ عندئذ فإن عناصر G هي ----------، 9- النظام الجبري $\left({S_3}/_{H}, \circ\right)$ يكون زمرة قسمة إذا تحقق الشرط:---------- .

<u>السؤال الثاني: (48 درجة)</u>

<u>أولاً:</u> لتكن S علاقة ثنائية معرفة على المجموعة $R \times R$ بالشكل التالي: $\forall (x_1, y_1),(x_2, y_2) \in R \times R \quad (x_1, y_1)S(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1.y_1 = x_2.y_2$ ، أثبت أن S علاقة تكافؤ على $R \times R$ ، ثم أوجد صفي تكافؤ العنصرين $(-3,\frac{5}{6})$ و $(8,8)$.

<u>ثانياً:</u> لتكن $(G,*)$ و $(G',\perp)$ زمرتان و e و e' وعلى التوالي العنصرين الحيادين في هاتين الزمرتين ،وليكن $f: G \to G'$ هومومرفيزم والمطلوب أثبت أن:1- $f(e) = e'$ ، 2- $(\ker f,*)$ زمرة جزئية ناظمية من الزمرة $(G,*)$.

<u>ثالثاً:</u> إذا كانت $(H,*)$ زمرة جزئية من زمرة ما $(G,*)$ و x ، y عنصران من G والمطلوب أثبت أن:1- $\forall x \in G$ فإن $x \in x * H$. 2- إما $x * H = y * H$ أو $x * H \cap y * H = \phi$.

<u>السؤال الثالث (20 درجة)</u>

لتكن $(G,*)$ زمرة ما و e عنصرها الحيادي وليكن b عنصراً ما من G.
ولنعرف على G العملية الجبرية T بالشكل التالي: $\forall x, y \in G \quad x \mathrm{T} y = x * b * y$:

1- أثبت أن النظام الجبري (G,T) زمرة.

2- أثبت أن التطبيق $f:(G,*) \to (G,\mathrm{T})$ المعرف بالشكل التالي: $\forall x \in G \quad f(x) = x * b^{-1}$ أيزومرفيزم زمر.

*************************انتهت الأسئلة*************************

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس 2020/2/2م

سلم تصحيح مادة البنى الجبرية (١) لطلاب سنة ١

لامتحان الفصل الأول ٢٠١٩ - ٢٠٢٠

س١: (22 درجة)

١- $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{pmatrix}$ ٢- 6 ٣- $\frac{7!}{2}=\frac{5040}{2}=2520$ (3) (3)

٤- H دورية (2) ٥- $a^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$ (2) ٦- أصغر عدد صحيح موجب n (3) يتحقق من أجله العلاقة $n.a=e$ حيث e العنصر الحيادي في الزمرة $(G,+)$.

٧- G تبديلية أو H ناظمية (1) ٨- $a^0=e, a^1, a^2, a^3, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}$ (3)

٩- H زمرة جزئية ناظمية في الزمرة S_3 (2)

س٢: (48 درجة)

أولاً: برهان أن S علاقة تكافؤ على $R\times R$

أ: S انعكاسية لأنه:

$\forall (x,y)\in R\times R : (x,y)\, S\, (x,y) \Longleftrightarrow x.y = x.y$ (4)

ب: S تناظرية لأنه:

$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in R\times R ; (x_1,y_1)\, S\, (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1.y_1 = x_2.y_2 \Leftrightarrow$

$x_2.y_2 = x_1.y_1 \Leftrightarrow (x_2,y_2)\, S\, (x_1,y_1)$ (5)

ج: S متعدية لأنه:

$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\wedge(x_3,y_3)\in R\times R ;$

$((x_1,y_1)\, S\, (x_2,y_2))\wedge((x_2,y_2)\, S\, (x_3,y_3)) \Longleftrightarrow$

$(x_1.y_1 = x_2.y_2)\wedge(x_2.y_2 = x_3.y_3) \Leftrightarrow x_1.y_1 = x_3.y_3$

$\Leftrightarrow (x_1,y_1)\, S\, (x_3,y_3)$ (8)

وبالتالي العلاقة S انعكاسية وتناظرية ومتعدية وبالتالي فهي علاقة تكافؤ على $R\times R$ (٨)

إيجاد صنف التكافؤ:

$\overline{\left(\frac{5}{6},-3\right)} = \{(x,y)\in R\times R ; \frac{5}{6}\cdot -3 = x.y\}$ (1)

$=\{(x,y)\in R\times R ; -\frac{15}{6} = x.y\}$

$=\{(\frac{5}{6},-3),(-\frac{5}{6},3),(-\frac{15}{6},1),(\frac{15}{6},-1),(-1,\frac{15}{6}),(1,-\frac{15}{6}),$

$(-3,\frac{5}{6}),(3,-\frac{5}{6}),(\frac{1}{6},-15),(-\frac{1}{6},15),(15,-\frac{1}{6}),(-15,\frac{1}{6}),$

$(\frac{15}{2},-\frac{1}{3}),(-\frac{15}{2},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},-\frac{15}{2}),(-\frac{1}{3},\frac{15}{2}),(-\frac{1}{2},\frac{15}{3}),(\frac{1}{2},-\frac{15}{3}),$

$(\frac{5}{2},-\frac{3}{3}),(-\frac{5}{2},\frac{3}{3}),(-\frac{3}{3},\frac{5}{2}),(\frac{3}{3},-\frac{5}{2}),(-\frac{5}{3},\frac{3}{2}),$

$(\frac{5}{3},-\frac{3}{2}),(-\frac{3}{2},\frac{5}{3}),(\frac{3}{2},-\frac{5}{3})\}$

(1)

$\overline{(8,8)} = \{(x,y)\in R\times R ; 8\cdot 8 = x\cdot y\} = \{(x,y)\in R\times R , 64 = x\cdot y\}$
$= \{(8,8),(-8,-8),(64,1),(-64,-1),(1,64),(-1,-64),$
$(2,32),(-2,32),(32,2),(-32,-2),(16,4),(-16,-4),(4,16),$
$(-4,-16)\}$

إثبات (1):

$\forall g\in G \Rightarrow f(g)\perp e' = f(g) = f(g*e) = f(g)\perp f(e)$

$\Rightarrow f(e) = e'$

إثبات (2): لنثبت أولاً أن $ker(f)$ زمرة جزئية من G .

1) إثبات $ker(f) \subseteq G$ حسب تعريفه.

وبما أن $f(e)=e' \Leftarrow e\in ker(f)$ إذاً $ker(f) \neq \phi$

وبالتالي $\phi \neq ker(f) \subseteq G$

2) $\forall x,y \in ker(f)$, لنثبت أن $x*y^{-1} \in ker(f)$

لدينا $x,y\in ker(f) \Rightarrow f(x)=f(y)=e'$

$f(x*y^{-1}) = f(x)\perp f(y^{-1}) = f(x)\perp (f(y))^{-1} = e'\perp e'^{-1} = e'\perp e' = e'$

$\Rightarrow x*y^{-1}\in ker(f)$

من 1) و 2) نجد أن $ker(f)$ زمرة جزئية من G .

ثانياً: لنثبت أن الزمرة الجزئية $ker(f)$ ناظمية في G أي لنثبت أنه

$\forall g\in G : g^{-1}*ker(f)*g \subseteq ker(f)$

$\forall x_2 \in g^{-1}*ker(f)*g \Rightarrow x_2 = g^{-1}*x_1*g ; x_1\in ker(f)$

وبما أن $x_1 \in ker(f)$ وبالتالي: $f(x_1)=e'$

$\Rightarrow f(x_2) = f(g^{-1}*x_1*g) = f(g^{-1})\perp f(x_1)\perp f(g)$

$= [f(g)]^{-1}\perp e'\perp f(g) = [f(g)]^{-1}\perp f(g) = e' \Rightarrow$

$x_2\in ker(f) \Rightarrow g^{-1}*ker(f)*g \subseteq ker(f)$

وبالتالي $ker(f)$ زمرة جزئية ناظمية في G

ثالثاً: إثبات (1): $x\in x*H$ لأنه: $x = x*e \in x*H$ حيث $e\in H$ (لأن H زمرة جزئية في G ويرمز e للعنصر الحيادي في G).

إثبات (2): إذا فرضنا أن $x*H \cap y*H \neq \phi$ وبالتالي يوجد عنصر واحد على الأقل a بحيث أن

$a \in x*H \cap y*H$

$\Rightarrow a\in x*H \;\&\; a\in y*H \Rightarrow a = x*h_1 \;\&\; a = y*h_2 ; h_1,h_2\in H$

$\Rightarrow x*h_1 = y*h_2 \Rightarrow x = y*h_2*h_1^{-1} \Rightarrow x*H = y*\underbrace{(h_2*h_1^{-1})}_{\in H}*H$

$= y*H$

أي: $x*H = y*H$

(تمرين) الأول: إثبات أن (G,T) زمرة

١- نلاحظ أن $G \neq \emptyset$ لأن $e \in G$ العنصر (1)

٢- T مغلقة على عناصر G لأنه:

$$\forall x,y \in G : xTy = x*b*y \in G$$

(لأن $(G,*)$ زمرة) (2)

٣- T تجميعية على عناصر G أي لنبرهن أنه: (4)

$$\forall x,y,z \in G : (xTy)Tz = xT(yTz)$$

لدينا $(xTy)Tz = (x*b*y)Tz = (x*b*y)*b*z$

$= x*b*(y*b*z) = xT(y*b*z) = xT(yTz)$

وبالتالي T تجميعية على عناصر G

٤- يوجد في G عنصر حيادي بالنسبة لـ T هو b^{-1} حيث $b^{-1} \in G$ لأن b^{-1} مقلوب b بالنسبة لـ $*$ و $(G,*)$ زمرة ومعاينة أولاً فإن: (2)

$$\forall x \in G : xTb^{-1} = x*b*b^{-1} = x*e = x$$

$$b^{-1}Tx = b^{-1}*b*x = e*x = x$$

٥- من أجل كل عنصر x من G فإن العنصر $x' = (b*x*b)^{-1} = b^{-1}*x^{-1}*b^{-1}$ هو مقلوب x بالنسبة لـ T لأنه $x' \in G$ ومعاينة أولاً فإن:

$$x'Tx = (b*x*b)^{-1}Tx = (b*x*b)^{-1}*b*x = b^{-1}*x^{-1}*b^{-1}*b*x = b^{-1}*x^{-1}*x = b^{-1}$$ (2)

$$xTx' = xT(b*x*b)^{-1} = x*b*b^{-1}*x^{-1}*b^{-1} = x*x^{-1}*b^{-1} = b^{-1}$$

من 1) و 2) و 3) و 4) و 5) نجد أن (G,T) زمرة (1)

الطلب الثاني: f أيزومورفيزم: ١- f هومومورفيزم: يجب أن نثبت أن:

$$\forall x,y \in G : f(x*y) = f(x)Tf(y)$$ (4)

لدينا $f(x*y) = (x*y)*b^{-1}$

$f(x)Tf(y) = (x*b^{-1})T(y*b^{-1}) = (x*b^{-1})*b*(y*b^{-1})$

$= x*(b^{-1}*b)*y*b^{-1} = (x*y)*b^{-1}$

$\Rightarrow f(x*y) = f(x)Tf(y) \Rightarrow$ f هومومورفيزم

٢- f متباين لأنه: (2)

إذا $f(x) = f(y) \Rightarrow x*b^{-1} = y*b^{-1} \Rightarrow x = y$

٣- f غامر لأنه: (1)

$\forall x \in G \Rightarrow \exists x*b \in G ;\ x = x*b*b^{-1} = f(x*b)$

f هومومورفيزم ومتباين وغامر وبالتالي f أيزومورفيزم (1)

ملاحظة: لجميع التمارين الواردة في سلم التصحيح أي أكثر طريقة رياضية للحل وصحيحة تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

طرطوس في 2/2/2020

مدرس المقرر: د. عائشة [illegible]

الجمهورية العربية السورية امتحان البنى الجبرية(1) المدة: ساعتان
جامعة طرطوس لطلاب السنة الثانية –رياضيات الدرجة العظمى: 90درجة
كلية العلوم الدورة الثالثة للعام الدراسي 2018-2019 اسم الطالب:

****

السؤال الأول: (30 درجة)

لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة Z بالشكل التالي:

$$xRy \Leftrightarrow 5|x-y \;\; ; \;\; \forall x,y\in Z$$

والمطلوب:

1- أثبت أن R علاقة تكافؤ على Z ، ماذا ندعو علاقة التكافؤ هذه ؟.

2- أوجد صفوف تكافؤ هذه العلاقة.

السؤال الثاني: (30 درجة)

أثبت صحة ما يلي:

1. إذا كانت $(G,*)$ زمرة ما و H مجموعة جزئية غير خالية من G عندئذ فإن الشرط اللازم والكافي حتى تكون $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ هو: $a*b^{-1}\in H;\forall a,b\in H$.

2. لتكن $(G,*)$ زمرة ما ، ولتكن $\{(A_\alpha \;,\; *)\}_{\alpha\in I}$ أسرة غير خالية من الزمر الجزئية الناظمية من هذه الزمرة والمطلوب برهن أن الزمرة الجزئية $\left(D=\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \,,*\right)$ زمرة جزئية ناظمية من الزمرة $(G,*)$.

السؤال الثالث: (30درجة)

أولاً : أثبت أن $(\overline{Z}_7^*,\otimes)$ زمرة تبديلية منتهية (استعن بجدول كايلي).

ثانياً : أوجد جميع مولدات الزمرة $(\overline{Z}_7^*,\otimes)$ و استنتج أنها زمرة دورية.

ثالثاً : أوجد رتبة كل من العنصرين $\overline{4}$ و $\overline{4}^{-1}$ في هذه الزمرة.

*********************انتهت الأسئلة**************************

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2019/8/6م

مدرس المقرر
د. نائدة صباغة

①

جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة البنى الجبرية (1) لطلاب سنة ...

للدورة الثالثة للعام الدراسي ٢٠١٨ - ٢٠١٩

س1: (30 درجة): لتكن R علاقة ثنائية معرفة على المجموعة Z بالشكل:

$$xRy \Leftrightarrow 5|x-y \; ; \forall x,y\in Z$$

والمطلوب: أ: أثبت أن R علاقة تكافؤ على Z، وماذا ندعو علاقة ال...

ب: أوجد صفوف تكافؤ هذه العلاقة.

الحل: الطلب الأول: إثبات أن R علاقة تكافؤ على Z:

(5) أولاً: R انعكاسية لأنه:

$$\forall x \in Z: 5|x-x \Leftrightarrow 5|0 \Leftrightarrow xRx$$

(5) ثانياً: R تناظرية لأن:

$$\forall x, y \in Z; xRy \Leftrightarrow 5|x-y \Leftrightarrow 5|(y-x) \Leftrightarrow yRx$$

ثالثاً: R متعدية لأنه:

$$\forall x, y, z \in Z; (xRy)\wedge(yRz) \Leftrightarrow$$

$$(5|x-y)\wedge(5|y-z) \Rightarrow (5|(x-y)+(y-z)) \Leftrightarrow$$ (6)

$$5|x-z \Leftrightarrow xRz$$

(2) R انعكاسية وتناظرية ومتعدية فهي علاقة تكافؤ على Z.

ندعو علاقة التكافؤ هذه بعلاقة التوافق على Z بالقياس 5

الطلب الثاني: صفوف تكافؤ هذه العلاقة

$\bar{x} = \{y\in Z; xRy\} = \{y \in Z; 5|x-y\}$ (3)

$\bar{0} = \{y\in Z; 0Ry\} = \{y\in Z; 5|0-y\}$ (2)

$= \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$ (1)

$\bar{1} = \{y \in Z; 5|1-y\} = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$ (1)

$\bar{2} = \{y \in Z; 5|2-y\} = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$ (1)

$\bar{3} = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$ (1)

$\bar{4} = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$ (1)

س2: (30 درجة)

أثبت صحة ما يلي:

أ- إذا كانت $(G,*)$ زمرة ما و H مجموعة جزئية غير خالية من G عندئذ فإن الشرط اللازم والكافي حتى تكون $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ هو

$$a*b^{-1} \in H; \forall a,b \in H$$

ب- لتكن $(G,*)$ زمرة ما، ولتكن $\{(A_\alpha,*)\}_{\alpha\in I}$ أسرة غير خالية من الزمر الجزئية الناظمية من هذه الزمرة، والمطلوب برهن أن الزمرة الجزئية $(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha,*)$ زمرة جزئية ناظمية من الزمرة $(G,*)$

الحل: أولاً: (1) الشرط لازم: الفرض $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$

الطلب: تحقق الشرط: $\forall a,b\in H: a*b^{-1}\in H$

البرهان: $\forall a,b\in H$ وبما أن $(H,*)$ زمرة جزئية في الزمرة $(G,*)$

$\Rightarrow a^{-1}\in H \Rightarrow a*b^{-1}\in H$

8

كفاية الشرط: الفرض: تحقق الشرط: $\forall a,b\in H: a*b^{-1}\in H$

الطلب $(H,*)$ زمرة جزئية في الزمرة $(G,*)$.

البرهان (أ) (حسب الشرط) $a\in H\subseteq G \Rightarrow a*a^{-1}=e\in H$

حيث e العنصر الحيادي في الزمرة $(G,*)$

وبالتالي: $a,e\in H$; $a^{-1}=e*a^{-1}\in H$ (حسب الشرط)

أي أنه:

8

(ب):

$a\in H \Rightarrow a^{-1}\in H$ (حسب القسم الأول (أ) من البرهان)

$b\in H \Rightarrow b^{-1}\in H$ (حسب الشرط)

$a*(b^{-1})^{-1}=a*b\in H$.

من (أ) و (ب) نجد أن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$.

4

ثانياً: حتى نبرهن أن D زمرة جزئية ناظمية من الزمرة $(G,*)$ يجب أن نبرهن أن

$g^{-1}*D*g\subseteq D$; $\forall g\in G$

وبما أن $x\in g^{-1}*D*g \Rightarrow \exists d\in D$; $x=g^{-1}*d*g$

$d\in D=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$ وبالتالي فإن:

5

$d\in A_\alpha$; $\forall\alpha\in I$ ولكن $(A_\alpha,*)$ زمرة جزئية ناظمية من $(G,*)$ لكل α من I $\Leftarrow$

$g^{-1}*d*g\in A_\alpha$; $\forall\alpha\in I$

$\Rightarrow g^{-1}*d*g\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=D \Rightarrow x\in D$

5

$\Rightarrow g^{-1}*D*g\subseteq D$ وبالتالي الزمرة الجزئية $(D,*)$ زمرة جزئية ناظمية من الزمرة $(G,*)$.

سؤال: (30 درجة)

أولاً: أثبت أن $(Z_7^*,\otimes)$ زمرة تبديلية منتهية (المجموعة

ثانياً: أوجد جميع مولدات الزمرة $(Z_7^*,\otimes)$ ثم استنتج أنها زمرة دورية.

ثالثاً: كما يلي: أوجد رتبة كل من العنصرين $\bar{4}$ و $\bar{4}^{-1}$ في هذه الزمرة.

مدرس المقرر: د. عائشة صالحة

الحل : الطلب الأول : نوجد أولاً جدول كايلي للبنية الجبرية $(\bar{Z}_7^*, \otimes)$:

$\otimes$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

(5)

نلاحظ من الجدول أن :

أ : العملية $\otimes$ مغلقة على عناصر $\bar{Z}_7^*$ لأنه :

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \bar{Z}_7^* : \bar{x} \otimes \bar{y} \in \bar{Z}_7^*$ (2)

ب : العملية $\otimes$ تبديلية على عناصر $\bar{Z}_7^*$ لأنه :

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \bar{Z}_7^* : \bar{x} \otimes \bar{y} = \bar{y} \otimes \bar{x}$ (2)

ولأن عناصر مصفوفة جدول كايلي المتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية .

ج : العملية $\otimes$ تجميعية على عناصر $\bar{Z}_7^*$ لأنه :

$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \bar{Z}_7^* : (\bar{x} \otimes \bar{y}) \otimes \bar{z} = \bar{x} \otimes (\bar{y} \otimes \bar{z})$ (2)

د : من الجدول نلاحظ أن $e = \bar{1} \in \bar{Z}_7^*$ هو العنصر الحيادي في $\bar{Z}_7^*$ بالنسبة $\otimes$ وهو يحقق :

$\forall \bar{x} \in \bar{Z}_7^* : \bar{x} \otimes \bar{1} = \bar{x}$

هـ : لكل عنصر في $\bar{Z}_7^*$ مقلوب بالنسبة للعملية $\otimes$ كما في الجدول التالي :

العنصر	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
المقلوب	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$

(2)

وهو يحقق :

$\forall \bar{x} \in \bar{Z}_7^* \Rightarrow \exists \bar{x}^{-1} \in \bar{Z}_7^* : \bar{x} \otimes \bar{x}^{-1} = \bar{1}$

مما سبق نجد أن $(\bar{Z}_7^*, \otimes)$ زمرة تبديلية ومنتهية لأنه (1)

$o(\bar{Z}_7^*) = |\bar{Z}_7^*| = 6$ (1)

الطلب الثاني : لنبحث مولدات الزمرة $(\bar{Z}_7^*, \otimes)$:

لدينا $o(\bar{Z}_7^*) = 6$ (1) والعنصر الحيادي في هذه الزمرة هو $\bar{1}$:

(1) إن $\bar{1} \in \bar{Z}_7^*$ ليس مولداً لهذه الزمرة لأن : $o(\bar{1}) = 1 \neq o(\bar{Z}_7^*) = 6$

كذلك فإن $\bar{2} \in \bar{Z}_7^*$ ليس مولداً لهذه الزمرة لأن :

$\bar{2}^1 = \bar{2}, \bar{2}^2 = \bar{2} \otimes \bar{2} = \bar{4}, \bar{2}^3 = \bar{2} \otimes \bar{2} \otimes \bar{2} = \bar{8} = \bar{1} \Rightarrow$ (1)

$o(\bar{2}) = 3 \neq o(\bar{Z}_7^*) = 6$

أيضاً فإن $\bar{4} \in \bar{Z}_7^*$ ليس مولداً لها لأن :

$\bar{4}^1 = \bar{4}, \bar{4}^2 = \bar{4} \otimes \bar{4} = \bar{2}, \bar{4}^3 = \bar{4} \otimes \bar{4} \otimes \bar{4} = \bar{64} = \bar{1} \Rightarrow$ (1)

$o(\bar{4}) = 3 \neq o(\bar{Z}_7^*) = 6$

وكذلك فإن $\bar{6} \in \bar{Z}_7^*$ ليس مولداً لهذه الزمرة لأن :

$\bar{6}^1 = \bar{6}, \bar{6}^2 = \bar{6} \otimes \bar{6} = \bar{36} = \bar{1} \Rightarrow o(\bar{6}) = 2 \neq o(\bar{Z}_7^*) = 6$ (1)

مدرس المقرر : د. عائشة صلاحة

بينما $\bar{3} \in \bar{Z}_7^*$ مولداً لهذه الزمرة لأن:

$\bar{3},\ \bar{3}^2=\bar{2},\ \bar{3}^3=\bar{6},\ \bar{3}^4=\bar{4},\ \bar{3}^5=\bar{5},\ \bar{3}^6=\bar{1} \Rightarrow$ 2

$O(\bar{3}) = 6 = O(\bar{Z}_7^*)$

كذلك فإن: $\bar{5} \in \bar{Z}_7^*$ مولداً لهذه الزمرة لأن:

$\bar{5}^1=\bar{5},\ \bar{5}^2=\bar{4},\ \bar{5}^3=\bar{6},\ \bar{5}^4=\bar{2},\ \bar{5}^5=\bar{3},\ \bar{5}^6=\bar{1} \Rightarrow$ 2

$O(\bar{5}) = 6 = O(\bar{Z}_7^*)$

إذاً مولدات الزمرة $(\bar{Z}_7^*, \otimes)$ هي: $\{\bar{3}, \bar{5}\}$ 2

الزمرة $(\bar{Z}_7^*, \otimes)$ زمرة دورية لأن:

$O(\bar{3}) = 6 = O(\bar{Z}_7^*)$ 1

أو $\langle\bar{3}\rangle = \{\bar{3}^1, \bar{3}^2, \bar{3}^3, \bar{3}^4, \bar{3}^5, \bar{3}^6\} = \{\bar{3}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{1}\} = \bar{Z}_7^*$ 1

وبالتالي الزمرة $(\bar{Z}_7^*, \otimes)$ دورية مولدة بالعنصر $\bar{3}$.

<u>الطلب الثالث</u>: إن $O(\bar{4}) = 3$ لأن: 1

$\bar{4}^3 = \bar{4} \otimes \bar{4} \otimes \bar{4} = \overline{64} = \bar{1}$

حيث $\bar{1}$ هو العنصر الحيادي في الزمرة $(\bar{Z}_7^*, \otimes)$

وكذلك فإن $\bar{4}^{-1} = \bar{2}$ لأن $\bar{4} \otimes \bar{2} = \bar{8} = \bar{1}$

وبالتالي: $O(\bar{4}^{-1}) = O(\bar{2}) = 3$ لأن: 1

$\bar{2}^3 = \bar{2} \otimes \bar{2} \otimes \bar{2} = \bar{8} = \bar{1}$

ملاحظة: جميع الخطوات الواردة في سلم التصحيح إذا اتبع الطالب طريقة ثانية للحل وصحيحة تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

طرطوس في 2019/8/6

مدرس المقرر: د. عائشة صالحة

مدرس المقرر: د. عائشة صالحة

جامعة طرطوس　　　　امتحان الفصل الأول　　　　المادة: بنى جبرية (1)

كلية العلوم　　　　السنة الثانية- رياضيات　　　　اسم الطالب:

****

السؤال الأول: (20 درجة)

لتكن S علاقة ثنائية معرفة على المجموعة $R \times R$ بالشكل التالي:

$(a,b)S(c,d) \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2+d^2 \quad \forall (a,b),(c,d) \in R \times R$ ، أثبت أن S علاقة تكافؤ على $R \times R$ ، ثم أوجد صفي تكافؤ العنصرين $(-3,\frac{5}{6})$ و $(8,8)$.

السؤال الثاني: (25 درجة)

لتكن $(G,*)$ ، و $(H,\perp)$ زمرتين ما، ولنعرف على مجموعة الجداء الديكارتي: $G \times H = \{(g,h) : g \in G \,\&\, h \in H\}$ العملية الجبرية Δ بالشكل التالي:

$(g_1,h_1)\ \Delta\ (g_2,h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \perp h_2) \quad ;\forall\ (g_1,h_1)\ ,\ (g_2,h_2) \in G \times H$

والمطلوب :

1. برهن أن: $(G \times H, \Delta)$ زمرة .
2. أوجد عدد عناصر الزمرة $(G \times H, \Delta)$، إذا كان $|G| = n$ و $|H| = m$.
3. ما هو الشرط اللازم والكافي حتى تكون الزمرة $(G \times H, \Delta)$ تبديلية.

السؤال الثالث: (20 درجة)

أولاً: أوجد الزمرة الجزئية من الزمرة $(Z_{30}, \oplus)$ المولدة بالعنصر $\overline{25}$ ، ثم أوجد رتبة هذا العنصر.

ثانياً: لتكن $(Q^*, .)$ زمرة ،حيث $(.)$ عملية الضرب العادية ، وليكن التطبيق : $f: Q^* \to Q^*$ معرف بالشكل: $\forall x \in Q^* \; f(x) = |x|$ والمطلوب:

1. أثبت أن التطبيق f هومومرفيزم للزمرة $(Q^*, .)$ في نفسها.
2. أوجد $kerf$.

السؤال الرابع: (25 درجة)

إذا كانت $(S_3, \circ)$ زمرة التباديل للمجموعة $A = \{1,2,3\}$ ، وكانت $(H,\circ)$ زمرة جزئية من الزمرة S_3 ، حيث

$H = \left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ ، والمطلوب:

1. اذكر الشرط الذي يجب أن يحققه النظام الجبري $\left({}^{S_3}/_{H}, \circ \right)$ حتى يكون زمرة قسمة، ثم برهن هذا الشرط.
2. أوجد جميع عناصر زمرة القسمة ${}^{S_3}/_{H}$ ،ثم أثبت أن هذه الزمرة دورية.
3. أوجد $(S_3 : H)$.

***********************انتهت الأسئلة**********************

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس 2019/1/21

جامعة طرابلس
كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة البنى الجبرية (1)
لطلاب ... للفصل الأول
للعام الدراسي 2018-2019

السؤال الأول (20 درجة)

لتكن S علاقة ثنائية معرفة على المجموعة $R\times R$ بالشكل التالي:
$(a,b)\,S\,(c,d) \iff a^2+b^2=c^2+d^2 \;;\; \forall (a,b),(c,d)\in R\times R$ ، أثبت أن S
علاقة تكافؤ على $R\times R$ ثم أوجد صفي تكافؤ العنصرين $(\frac{5}{6},-3)$ و $(8,8)$

الحل: أولاً: S علاقة تكافؤ على $R\times R$:

1: S علاقة انعكاسية لأنه:
$\forall (a,b)\in R\times R : a^2+b^2=a^2+b^2 \iff (a,b)\,S\,(a,b)$ 3

2: S تناظرية لأنه:
$\forall (a,b),(c,d)\in R\times R + (a,b)\,S\,(c,d) \iff a^2+b^2=c^2+d^2 \iff$ 5
$c^2+d^2=a^2+b^2 \iff (c,d)\,S\,(a,b)$

3: S متعدية لأنه:
$\forall (a,b),(c,d),(f,g)\in R\times R : ((a,b)\,S\,(c,d)) + ((c,d)\,S\,(f,g)) \iff$
$(a^2+b^2=c^2+d^2) + (c^2+d^2=f^2+g^2) \iff a^2+b^2=c^2+d^2=f^2+g^2 \iff$ 6
$a^2+b^2 \iff f^2+g^2 \iff (a,b)\,S\,(f,g)$ 1

4: انعكاسية وتناظرية ومتعدية وبالتالي S علاقة تكافؤ على $R\times R$

ثانياً: إيجاد صفوف تكافؤ العنصرين $(\frac{5}{6},-3)$ ، $(8,8)$.

$\overline{(a,b)}=\{(c,d)\in R\times R ; (a,b)\,S\,(c,d)\}=\{(c,d)\in R\times R ; a^2+b^2=c^2+d^2\}$ 2

$\overline{(\frac{5}{6},-3)}=\{(c,d)\in R\times R ; (\frac{5}{6})^2+(-3)^2=c^2+d^2\}$

$=\{(\frac{5}{6},-3),(\frac{5}{6},3),(-\frac{5}{6},-3),(-\frac{5}{6},3),(3,\frac{5}{6}),(3,-\frac{5}{6}),$ 2
$(-3,-\frac{5}{6}),(-3,\frac{5}{6})\}$

$\overline{(8,8)}=\{(c,d)\in R\times R ; (8)^2+(8)^2=c^2+d^2\}=$ 1
$\{(8,8),(-8,-8),(-8,8),(8,-8)\}$

السؤال الثاني: (25 درجة)

لتكن $(G,*)$ و $(H,\perp)$ زمرتين ولنعرف على مجموعة الجداء الديكارتي $G\times H=\{(g,h): g\in G \;\&\; h\in H\}$ العملية الجبرية Δ بالشكل التالي:

$$(g_1,h_1)\Delta(g_2,h_2)=(g_1*g_2,h_1\perp h_2)\;;\;\forall (g_1,h_1),(g_2,h_2)\in G\times H$$

والمطلوب: أ: برهن أن $(G\times H,\Delta)$ زمرة. ب: أوجد عدد عناصر الزمرة $(G\times H,\Delta)$ إذا كانت $|G|=n$ و $|H|=m$. ج: ما هو الشرط اللازم والكافي حتى تكون الزمرة $(G\times H,\Delta)$ تبديلية.

الحل: الطلب الأول: $(G\times H,\Delta)$ زمرة:

أ: إن $G\times H\neq\phi$ لأن $G\neq\phi$ و $H\neq\phi$ (G و H زمرتان من الفرض)

ب: Δ مغلقة على عناصر $G\times H$ لأنه:

$$\forall (g_1,h_1),(g_2,h_2)\in G\times H: (g_1,h_1)\Delta(g_2,h_2)=(g_1*g_2,h_1\perp h_2)\in G\times H$$

3

ج: Δ تجميعية على عناصر $G\times H$ لأنه:

$\forall (g_1,h_1),(g_2,h_2),(g_3,h_3)\in G\times H:$

$$[(g_1,h_1)\Delta(g_2,h_2)]\Delta(g_3,h_3)=(g_1*g_2,h_1\perp h_2)\Delta(g_3,h_3)$$

$$=((g_1*g_2)*g_3,(h_1\perp h_2)\perp h_3)=(g_1*(g_2*g_3),h_1\perp(h_2\perp h_3))$$

$$=(g_1,h_1)\Delta(g_2*g_3,h_2\perp h_3)=(g_1,h_1)\Delta[(g_2,h_2)\Delta(g_3,h_3)]$$

3

د: وجود العنصر الحيادي في $G\times H$ بالنسبة للعملية Δ:

بفرض أن e_1 هو العنصر الحيادي في الزمرة $(G,*)$ و e_2 هو العنصر الحيادي في الزمرة $(H,\perp)$ فإن العنصر (e_1,e_2) 1 هو العنصر الحيادي في $G\times H$ بالنسبة لـ Δ لأنه من جهة أولى فإن: $(e_1,e_2)\in G\times H$ 1

ومن جهة أخرى فإنه:

$$\forall (g,h)\in G\times H: (g,h)\Delta(e_1,e_2)=(g*e_1,h\perp e_2)=(g,h)$$

$$(e_1,e_2)\Delta(g,h)=(e_1*g,e_2\perp h)=(g,h)$$

2

هـ: وجود العنصر النظير: من أجل أي عنصر (g,h) من $G\times H$ فإن العنصر: 1 $(g,h)^{-1}=(g^{-1},h^{-1})$ (حيث g^{-1} هو نظير العنصر g في G بالنسبة لـ $*$ و h^{-1} هو نظير العنصر h في H بالنسبة لـ $\perp$) هو نظير العنصر (g,h) في $G\times H$ بالنسبة للعملية Δ لأنه من جهة أولى فإن:

1 $(g^{-1},h^{-1})\in G\times H$

ومن جهة ثانية فإن: $(g,h)\Delta(g^{-1},h^{-1}) = (g*g^{-1}, h\perp h^{-1}) = (e_1,e_2)$ 2

$(g^{-1},h^{-1})\Delta(g,h) = (g^{-1}*g, h^{-1}\perp h) = (e_1,e_2)$

من (1) و(2) و(3) و(4) و(5) نجد أن $(G\times H,\Delta)$ زمرة. 1

الطلب الثاني: عدد عناصر الزمرة $G\times H$ هو:

$|G\times H| = n.m$ 4

الطلب الثالث: الشرط اللازم والكافي من تكون الزمرة $(G\times H,\Delta)$ تبديلية هو أن تكون كلاً من الزمرتين $(G,*)$ و $(H,\perp)$ تبديليتان 2 وبكلام آخر فإن: 4

$(g_1*g_2, h_1\perp h_2) = (g_2*g_1, h_2\perp h_1) \Leftrightarrow (g_1,h_1)\Delta(g_2,h_2) = (g_2,h_2)\Delta(g_1,h_1)$

السؤال الثالث: (20 درجة)

أولاً: أوجد الزمرة الجزئية من الزمرة $(\bar{Z}_{30},\oplus)$ المولدة بالعنصر $\bar{25}$، ثم أوجد رتبة هذا العنصر.

ثانياً: لتكن $(Q^*,\cdot)$ زمرة، حيث (.) عملية الضرب العادية، وليكن التطبيق: $f: Q^*\longrightarrow Q^*$ معرف بالشكل: $f(x)=|x|;\ \forall x\in Q^*$ والمطلوب:

(1) أثبت أن التطبيق f هومومورفيزم للزمرة $(Q^*,\cdot)$ في نفسها (2) أوجد $\ker f$

الحل: أولاً: لنكتب عناصر الزمرة $\bar{Z}_{30}$:

$\bar{Z}_{30} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\dots,\bar{28},\bar{29}\}$

ولإيجاد الزمرة الجزئية $(\bar{25})$ من الزمرة $(\bar{Z}_{30},\oplus)$ نحسب قوى العنصر $\bar{25}$ مع العلم أن العنصر الحيادي في الزمرة هو $\bar{0}$ من أجل الوصول لرتبته حيث: $O(\bar{25}) = O((\bar{25}))$:

$\bar{25}\neq\bar{0},\ 2.\bar{25} = \bar{25}\oplus\bar{25} = \bar{50} = \bar{20}\neq\bar{0},\ 3.\bar{25} = \bar{25}\oplus\bar{25}\oplus\bar{25} = \bar{75} = \bar{15}\neq\bar{0}$

$5.\bar{25} = \bar{125} = \bar{5}\neq\bar{0},\ 6.\bar{25} = \bar{150} = \bar{0} \Rightarrow$

$O(\bar{25}) = 6 = O((\bar{25}))$ 3

ويكون لدينا:

$(\bar{25}) = \{\bar{25},\bar{20},\bar{15},\bar{10},\bar{5},\bar{0}\}$ 3

ثانياً: (1) f هومومورفيزم لأنه:

$\forall x,y\in Q^*: f(x.y) = |x.y| = |x|.|y| = f(x).f(y)$ 3

(2) إيجاد $\ker f$: 1

$\ker f = \{x\in Q^*: f(x)=1\} = \{x\in Q^*;\ |x|=1\} = \{-1,+1\}$

السؤال الرابع: (25 درجة)

إذا كانت $(S_3,\circ)$ زمرة التباديل للمجموعة $A=\{1,2,3\}$، وكانت $(H,\circ)$ زمرة جزئية من الزمرة S_3، حيث:

$H = \left\{x_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}$

والمطلوب:

أذكر الشرط الذي يجب أن يحققه النظام الجبري $(S_3/H , \circ)$ حتى يكون زمرة قسمة، ثم برهن هذا الشرط.

أوجد جميع عناصر زمرة القسمة S_3/H، ثم برهن أن هذه الزمرة دورية.

أوجد $(S_3 : H)$.

2

الحل: <u>الطلب الأول</u>: الشرط هو أن تكون الزمرة الجزئية H ناظمية في الزمرة S_3.

ولنثبت أن الزمرة الجزئية H ناظمية في S_3 يجب أن نبرهن الشرط التالي:

2

$\forall x_i \in S_3 : x_i \circ H \circ x_i^{-1} = H \; ; \; i = 1,2,\dots,6$ ومن أجل ذلك لنكتب عناصر الزمرة S_3:

1

$$S_3 = \left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&3&2 \end{pmatrix} \right\}$$

الآن بما أن x_1, x_2, x_3 من H وبالتالي فإن:

2 $x_i \circ H \circ x_i^{-1} = H \; ; \; i = 1,2,3$ (لأن H زمرة)

ومن أجل $x_4 \in S_3$ فإن:

1

$$x_4 \circ H \circ x_4^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix} \right\} = H$$

ومن أجل $x_5 \in S_3$ نجد أن:

1

$$x_5 \circ H \circ x_5^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix} \right\} = H$$

ومن أجل $x_6 \in S_3$ نجد أن:

1

$$x_6 \circ H \circ x_6^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&3&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&3&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&3&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&3&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&3&2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix} \right\} = H$$

مما سبق نجد أن الشرط:

2 $\forall x_i \in S_3 : x_i \circ H \circ x_i^{-1} = H \; ; \; i = 1,2,\dots,6$

محقق وبالتالي الزمرة الجزئية $(H,\circ)$ ناظمية في S_3.

الطلب الثاني: إن:

$S_3/H = \{ x_i \circ H \; ; \; x_i \in S_3 \}$ 2

الآن من أجل $x_1 = \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix} \in S_3$ حيث $x_1 \in H$ فإن:

$$x_1 \circ H = \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix} \right\}$$

2

من أجل $x_4 \in S_3$ حيث $x_4 \notin H$ نجد أن:

$$x_4 \circ H = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \right\} \quad (2)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} \right\} = \{x_4, x_6, x_5\}$$

نلاحظ أن:

$x_1 \circ H \cup x_4 \circ H = S_3$ (1) و $x_1 \circ H \cap x_4 \circ H = \phi$ (1)

وبالتالي:

$$S_3/H = \{x_1 \circ H, x_4 \circ H\} \quad (1)$$

كذلك فإن زمرة القسمة $(S_3/H, \circ)$ زمرة دورية مولدة بالعنصر $x_4 \circ H$ أي أن $S_3/H = (x_4 \circ H)$ وذلك لأنه بحساب القوى الموجبة للعنصر $x_4 \circ H$ نجد أن $(x_4 \circ H)^2 = (x_4 \circ H) \circ (x_4 \circ H) = (x_4 \circ x_4) \circ H$ ∧ $(x_4 \circ H)^1 = x_4 \circ H$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} \circ H = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} \circ H = x_1 \circ H$$

(حيث $x_1 \circ H$ العنصر المحايد في الزمرة S_3/H) (2)

وبالتالي:

$$O(S_3/H) = O(x_4 \circ H) = 2$$

الطلب الثالث: بما أن: $S_3/H = M_L$ وبالتالي فإن:

$\mathrm{card}\, M_L = 2 \Rightarrow (S_3 : H) = \mathrm{card}\, M_L = 2$ (2)

ملاحظة: جميع الأسئلة الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح.

طرطوس في ٢١/٨/٢٠١٩

مدرس المقرر: د. عائشة صباغة

جامعة طرطوس — امتحان الفصل الثاني — المادة: البنى الجبرية (1)

كلية العلوم — السنة الثانية- رياضيات — اسم الطالب: لمى ابراهيم

المدة : ساعتان — الدرجة العظمى: 90درجة

****

(15) **السؤال الأول: (15درجة)**

نقول عن علاقة R المعرفة على المجموعة غير الخالية X أنها دائرية فيما إذا حققت: $xRy \wedge yRz \Rightarrow zRx \ \forall \ x,y,z\in X$ ، برهن أنه إذا كانت R علاقة انعكاسية دائرية فإنها تكون علاقة تكافؤ وبالعكس كل علاقة تكافؤ هي علاقة دائرية.

(20) **السؤال الثاني: (20درجة)**

لنأخذ في S_8 التبديلين :

$\alpha=(1\ 3)(2\ 7)(4\ 5\ 6)(8) \quad , \quad \beta=(1\ 2\ 3\ 7)(6\ 4\ 8\ 5)$ والمطلوب:

1-عرف كلاً من S_8 والدور .2- اكتب $\alpha\circ\beta$.

(10) **السؤال الثالث: (10 درجات)**

أوجد رتبة العنصر (1) في الزمرة $(Z,+)$ ثم أثبت أن أي عنصر مختلف عن الصفر في هذه الزمرة يملك رتبة لانهائية.

(25) **السؤال الرابع: (25 درجة)**

لتكن $R_{2\times2}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} : a,b,c,d\in R\wedge(a.d-b.c)\neq0\right\}$ حيث $(R_{2\times2},\times)$ زمرة و$(\times)$ هي عملية ضرب المصفوفات أثبت أن مجموعة العناصر $H=\left\{\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix} : b\in R\right\}$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة $(R_{2\times2},\times)$.

(20) **السؤال الخامس: (20درجة)**

برهن أن $\left(G=\{x+y\sqrt[3]{3}+z\sqrt[3]{9} \ ; \ x,y,z\in Q\} \ ,+\right)$ زمرة تبديلية.

**********************انتهت الأسئلة**********************

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس 3/ 7/ 2018

جامعة طرطوس

كلية العلوم — سلم التصحيح لمادة البنى الجبرية (1)

لطلاب سنة [illegible] الفصل الثاني العام الدراسي 2017 - 2018 م

السؤال الأول: (15 درجة)

نقول عن علاقة R المعرفة على المجموعة غير الخالية X أنها دائرية فيما إذا حققت:

$\forall x,y,z \in X \;;\; xRy \wedge yRz \Rightarrow zRx$ برهن أنه إذا كانت R علاقة انعكاسية ودائرية فإنها تكون علاقة تكافؤ وبالعكس كل علاقة تكافؤ هي علاقة دائرية.

الحل: أولاً: الطلب R علاقة تكافؤ:

1) R انعكاسية من الفرض أي أنه من أجل $x \in X$ فإن xRx.

2) R تناظرية: بما أن R دائرية من الفرض فإنه لدينا:

$(xRy)\wedge(yRy) \Rightarrow yRx \;;\; \forall x,y \in X$ إذن R تناظرية

3) R متعدية: بما أن العلاقة R تناظرية ودائرية وبالتالي إذا كان لدينا $\forall x,y,z \in X$

$xRy \wedge yRz \Rightarrow zRx \Rightarrow xRz$

لأن R تناظرية. لأن العلاقة R دائرية.

وبالتالي R متعدية

مما سبق نجد أن R علاقة تكافؤ.

ثانياً بالعكس: الطلب: R علاقة دائرية:

بما أن R علاقة تكافؤ فإنها تكون انعكاسية وتناظرية ومتعدية أي أن:

$(xRy)\wedge(yRz) \Rightarrow xRz \Rightarrow zRx \;;\; \forall x,y,z \in X$

لأن R متعدية. لأن R تناظرية

أي أن R دائرية.

السؤال الثاني: (20 درجة)

ليكن في S_8 التبديلين:

$$\alpha = (1\,3)(2\,7)(4\,5\,6)(8)$$

$$\beta = (1\,2\,3\,7)(6\,4\,8\,5)$$

المطلوب: 1) عرف كلاً من S_8 والدورة. 2) اكتب $\alpha \circ \beta$.

الحل: 1) S_8 هي زمرة التباديل للمجموعة المنتهية $\{1,2,3,4,\dots,7,8\}$ وتحوي $8! = 40320$ عنصراً وأي تبديل α من S_8 له الشكل:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \alpha(4) & \alpha(5) & \alpha(6) & \alpha(7) & \alpha(8) \end{pmatrix}$$

الدورة: هي التبديل [illegible] من الشكل: $(a_1\, a_2 \dots a_m)$

[illegible] التبديل أي عنصر من العناصر التي يشملها التغيير ال

نفس العنصر بعد تطبيقه عدداً من المرات على التالي. (3)

$$\alpha\circ\beta = (1\,3)(2\,7)(4\,5\,6)(8)(1\,2\,3\,7)(6\,4\,8\,5) \quad (7)$$
$$= (1\,7\,3\,2)(4\,8\,6\,5)$$

السؤال الثالث: (10 درجات)

أوجد رتبة العنصر (1) في الزمرة $(Z,+)$ ثم أثبت أن أي عنصر يختلف عن الصفر في هذه الزمرة يملك رتبة لانهائية.

الحل: $1 \in Z$ ونعلم أن رتبة العنصر (1) هي أصغر عدد طبيعي n يحقق $n.1 = 0$

ولكن في الزمرة $(Z,+)$ فإن $n.1 \neq 0$ وبالتالي لا يوجد عدد طبيعي n يحقق

(5) الخاصية السابقة وبالتالي رتبة العنصر (1) غير منتهية.

وكذلك إذا كان $t \in Z$ حيث $t \neq 0$ (الصفر هو العنصر الحيادي في الزمرة $(Z,+)$)

فإنه له رتبة غير منتهية لأنه لا يوجد عدد $n \in Z^+$ بحيث يكون $nt = 0$ إلا الصفر نفسه. (5)

السؤال الرابع: (25 درجة)

لتكن $(R_{2\times2}, \times)$ زمرة حيث $R_{2\times2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a,b,c,d \in R \wedge (a.d - b.c) \neq 0 \right\}$

و $(\times)$ هي عملية ضرب المصفوفات، أثبت أن مجموعة العناصر

$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; b \in R \right\}$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة $(R_{2\times2}, \times)$.

الحل: أ) إن $H \subseteq R_{2\times2}$ ، $H \neq \phi$ لنبرهن أولاً: H مجموعة جزئية من المجموعة $R_{2\times2}$ (10)

حسب تعريف H مصفوفة أولى فإن: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$ أي أن $H \neq \phi$

ب) $\forall A,B \in H$ حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $a, b \in R$

لدينا $A \times B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a-b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H ; a-b \in R$ (12)

وبالتالي فإن $(H,\times)$ زمرة جزئية من الزمرة $(R_{2\times2}, \times)$ (3)

السؤال الخامس: (20 درجة)

برهن أن: $(G = \{ x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9} ; x,y,z \in Q \}, +)$ زمرة تبديلية.

الحل: أ) من الافتراض $G \neq \phi$ (1)

ب) $(+)$ مغلقة لأنه:

$\forall x', x'' \in G ; x' = x_1 + y_1\sqrt[3]{3} + z_1\sqrt[3]{9}$

$x'' = x_2 + y_2\sqrt[3]{3} + z_2\sqrt[3]{9}$ فإن:

$x' + x'' = [(x_1+x_2) + (y_1+y_2)\sqrt[3]{3} + (z_1+z_2)\sqrt[3]{9}] \in G$

$; (x_1+x_2) \in Q + (y_1+y_2) \in Q + (z_1+z_2) \in Q$ (3)

د: العملية (+) تجميعية على عناصر G لأنه:

$\forall x', x'', x''' \in G$ حيث أن: $x' = x_1 + y_1\sqrt[3]{3} + z_1\sqrt[3]{9}$; $x'' = x_2 + y_2\sqrt[3]{3} + z_2\sqrt[3]{9}$, $x''' = x_3 + y_3\sqrt[3]{3} + z_3\sqrt[3]{9}$;

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 \in Q$

فإن:

$(x' + x'') + x''' = [(x_1 + y_1\sqrt[3]{3} + z_1\sqrt[3]{9}) + (x_2 + y_2\sqrt[3]{3} + z_2\sqrt[3]{9})] +$

$(x_3 + y_3\sqrt[3]{3} + z_3\sqrt[3]{9}) = [(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt[3]{3} + (z_1 + z_2)\sqrt[3]{9}] +$

$(x_3 + y_3\sqrt[3]{3} + z_3\sqrt[3]{9}) = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3)\sqrt[3]{3} + (z_1 + z_2 + z_3)\sqrt[3]{9}$

ومن جهة أخرى لدينا:

$x' + (x'' + x''') = (x_1 + y_1\sqrt[3]{3} + z_1\sqrt[3]{9}) + [(x_2 + y_2\sqrt[3]{3} + z_2\sqrt[3]{9}) + (x_3 + y_3\sqrt[3]{3} + z_3\sqrt[3]{9})]$

$= (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3)\sqrt[3]{3} + (z_1 + z_2 + z_3)\sqrt[3]{9}$

وبما أن:

$(x' + x'') + x''' = x' + (x'' + x''')$; $\forall x', x'', x''' \in G$

وبالتالي العملية (+) تجميعية على عناصر G.

ر: العملية (+) تبديلية على عناصر G لأنه:

$\forall x', x'' \in G$; $x' = x_1 + y_1\sqrt[3]{3} + z_1\sqrt[3]{9}$, $x'' = x_2 + y_2\sqrt[3]{3} + z_2\sqrt[3]{9}$

$x' + x'' = (x_1 + y_1\sqrt[3]{3} + z_1\sqrt[3]{9}) + (x_2 + y_2\sqrt[3]{3} + z_2\sqrt[3]{9})$

$= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt[3]{3} + (z_1 + z_2)\sqrt[3]{9}$

$= (x_2 + x_1) + (y_2 + y_1)\sqrt[3]{3} + (z_2 + z_1)\sqrt[3]{9}$

$= (x_2 + y_2\sqrt[3]{3} + z_2\sqrt[3]{9}) + (x_1 + y_1\sqrt[3]{3} + z_1\sqrt[3]{9}) = x'' + x'$

حيث: $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \in Q$

هـ: إن الصفر $0 \in Q$; $0 = 0 + 0\sqrt[3]{3} + 0\sqrt[3]{9} = e$ هو العنصر المحايد

في G بالنسبة للعملية (+) لأنه من جهة أولى $e = 0 \in G$ ومن جهة أخرى فإن:

$x' + e = (x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9}) + (0 + 0\sqrt[3]{3} + 0\sqrt[3]{9}) =$

$(x + 0) + (y + 0)\sqrt[3]{3} + (z + 0)\sqrt[3]{9} = x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9} = e + x' = x'$

وذلك $\forall x' \in G$ حيث $x' = x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9}$ و $x, y, z \in Q$

و: وجود العنصر النظير:

$\forall x' = x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9} \in G$

فإن العنصر:

$x^* = (-x') = -(x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9})$

$= (-x) + (-y)\sqrt[3]{3} + (-z)\sqrt[3]{9} \in G$; $-x, -y, -z \in Q$

ومن جهة أخرى لدينا:

$x' + x^* = x' + (-x) = (x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9}) + (-x - y\sqrt[3]{3} - z\sqrt[3]{9})$

$= (x + (-x)) + (y + (-y))\sqrt[3]{3} + (z + (-z))\sqrt[3]{9} = 0 + 0\sqrt[3]{3} + 0\sqrt[3]{9} = e = x^* + x$

وبالتالي فإن العنصر $x^* \in G$ هو نظير العنصر $x' \in G$

من (أ) و(ب) و(ج) و(د) و(هـ) و(و) نجد أن $(G, *)$

زمرة تبديلية.

ملاحظة: جميع التمارين الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح.

طرطوس في ٣/٧/ ٢٠١٨

مدرسة المقرر: د. عائشة صالحة