كلية **العلوم**

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

مكتبة A to Z للخدمات الجامعية

اسئلة دورات محلولة

نظرية القياس

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

الجمهورية العربية السورية		امتحان نظرية القياس		المدة: ساعتان
جامعة طرطوس		لطلاب السنة الثالثة–رياضيات		الدرجة العظمى:90
كلية العلوم		الفصل الأول		اسم الطالب:

السؤال الأول: (60درجة)

***أولاً*: أكمل العبارات التالية:**

1- الجبر التام في مجموعة ما غير خالية X مغلق بالنسبة لعمليتي .... و ....

2- اذا كان (X, M, μ) فضاء قياس فإن D ....و μ ....

3- إن الجبر التام الأصغري $\sigma(G)$ إن وجد فهو ....

4- الفضاء الاحتمالي (X, D, μ) هو فضاء منته لأن:..........

5- إذا كان (X, M, μ) فضاء قياس تام عندئذ فإن أي مجموعة μ – همولة هي ....و ....

***ثانياً*: أثبت صحة مايلي:**

1- إن صف المجموعات المنتهية من مجموعة الأعداد الحقيقية هو حلقة فيها ولكنه ليس جبراً ولا جبراً تاماً فيها.

2- تقاطع أسرة غير خالية من الجبور في مجموعة ما غير خالية X هو جبر فيها.

3- المجموعتان X و ϕ مجموعتان قيوستان من أجل أي قياس خارجي μ^* معرف على $P(X)$.

4- كل دالة قياس معرفة على $P(X)$، حيث X مجموعة ما غير خالية ،هي دالة قياس خارجي على $P(X)$.

السؤال الثاني: (30 درجة)

ليكن (X, D, μ) فضاء قياس و $\mu_1(A) = \sqrt[3]{\mu(A)} \;\; ; \forall A \in D$ والمطلوب هل μ_1 يحقق مايلي

1- $\mu_1(\phi) = 0$ ،		2- $\mu_1(A) \le \mu_1(B) \;\; ; A, B \in D \;\; and \; A \subseteq B$

3- $\mu_1(A \cup B) \le \mu_1(A) + \mu_1(B) \;\; ; \forall A, B \in D$

**************************انتهت الأسئلة**************************

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق
أ.م. د. عائدة صائمة

طرطوس في 2025/3/6م

1

جامعة طرطوس

كلية العلوم

سلم التصحيح لمقرر نظرية القياس لطلاب س٣ :
لامتحان الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠٢٤-٢٠٢٥م

س١ : (60 درجة)

أولاً :
١- الاجتماع المعدود والمتممة . 4
٢- D جبر تام في X و μ دالة قياس موجب على D 4
٣- وحيد دوماً. 4
٤- لأن : $\mu(X) = 1 < +\infty$ 4
٥- مجموعة μ-قيوسة وقياسها معدوم 4

ثانياً :
١- بفرض D صف المجموعات المنتهية في $\mathbb{R}$ عندئذٍ فإن D حلقة في $\mathbb{R}$ لأن اجتماع مجموعتين منتهيتين من $\mathbb{R}$ هو مجموعة منتهية من $\mathbb{R}$ وكذلك فإن فرق مجموعتين منتهيتين من $\mathbb{R}$ هو مجموعة منتهية من $\mathbb{R}$ أي أنه : 6

$$\forall A,B \in D \Rightarrow A\cup B \in D \wedge A-B \in D$$

ولكن الحلقة D ليست جبراً ولا جبراً تاماً في $\mathbb{R}$ لأن : Φ مجموعة منتهية ولذلك $\Phi \in D$ ولكن $\overline{\Phi} = \mathbb{R} \notin D$ لأن $\mathbb{R}$ ليست مجموعة منتهية وبالتالي D ليست مغلقة بالنسبة لعملية التتميم . 4

٢- لتكن $\{E_i\}_{i\in I}$ أسرة غير خالية من الجبور في المجموعة غير الخالية X ولنرمز بـ $E=\bigcap_{i\in I} E_i$ ولنبرهن أن E جبر في X . 1

أ : بما أن E_i جبر في X من أجل كل $i\in I$ وبالتالي $E_i \neq \{\Phi\}$
$\Rightarrow E=\bigcap_{i\in I} E_i \neq \{\Phi\}$ 1

ب : بما أن E_i جبر في X من أجل كل $i\in I$ $\Rightarrow$ $X,\Phi\in E_i$ من أجل كل $i\in I$ وبالتالي $X,\Phi \in E = \bigcap_{i\in I} E_i$ 2

ج : E مغلقة بالنسبة للاجتماع المنته أي لنبرهن أنه :

$$\forall A,B\in E=\bigcap_{i\in I} E_i \Rightarrow A\cup B \in E = \bigcap_{i\in I} E_i$$ 2

لدينا $A,B \in E=\bigcap_{i\in I} E_i \Rightarrow A,B\in E_i \,;\, \forall i\in I \Rightarrow$

$A\cup B\in E_i \;;\; \forall i\in I$ (لأن E_i جبر في X) $\Rightarrow A\cup B\in E=\bigcap_{i\in I}E_i$

ثالثاً: E مغلقة بالنسبة لعملية التتميم أي لنبرهن أنه:

$\forall A\in E=\bigcap_{i\in I}E_i \Rightarrow \bar{A}\in E=\bigcap_{i\in I}E_i$

لدينا $A\in E=\bigcap_{i\in I}E_i \Rightarrow A\in E_i \;;\; \forall i\in I$

$\Rightarrow \bar{A}\in E_i \;;\; \forall i\in I$ (لأن E_i جبر في X) $\Rightarrow \bar{A}\in E=\bigcap_{i\in I}E_i$

من (أ) و (ب) و (ج) نجد أن $E=\bigcap_{i\in I}E_i$ جبر في X.

3- المجموعة ϕ مجموعة قيوسة بالنسبة للقياس الخارجي μ^* المعرف على $P(X)$ حيث X مجموعة ما غير خالية لأنها تحقق:

$\mu^*(T\cap\phi)+\mu^*(T\cap\bar{\phi})=\mu^*(\phi)+\mu^*(T\cap X) \;;\; \forall T\subseteq X$

$=\underbrace{\mu^*(\phi)}_{0}+\mu^*(T)=\mu^*(T)$

أي أنها تحقق الشرط: مجموعة الاختبار $\forall T\subseteq X$,

$\mu^*(T)=\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap\bar{A}) \quad (*)$ مع $A=\phi$

كذلك فإن $\bar{\phi}=X$ مجموعة قيوسة بالنسبة لـ μ^* لأنها تحقق نفس الشرط $(*)$

4- لنكن μ دالة قياس على $P(X)$ ولنبرهن أن μ قياس خارجي على $P(X)$:

بما أن μ قياس على $P(X)$ وبالتالي فهي تحقق:

أ- μ دالة مجموعة على $P(X)$

ثانياً: $\mu(A)\geq 0$ وذلك $\forall A\in P(X)$ و $\mu(\phi)=0$

ثالثاً: خاصة التزايد: إذا كانت $A,B\in P(X)$ بحيث أن $A\subseteq B$ فإن:

$\mu(A)\leq\mu(B)$

رابعاً: خاصة تحت الجمعية التامة، لتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر $P(X)$

عندئذ فإن: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$

أي أن μ يحقق جميع شروط القياس الخارجي وبالتالي فهو قياس خارجي على $P(X)$.

س٤: (30 درجة)

أ: $\mu_1(\phi) = \sqrt[3]{\mu(\phi)} = \sqrt[3]{0} = 0$ (١٠)

ب: عندما $A \subseteq B$ حيث $A, B \in D$ فإن:

$\mu(A) \le \mu(B) \Rightarrow \sqrt[3]{\mu(A)} \le \sqrt[3]{\mu(B)} \Rightarrow \mu_1(A) \le \mu_1(B)$ (١٠)

ج: بما أن μ قياس على D وبالتالي:

$\forall A, B \in D \Rightarrow \mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B) \Rightarrow$ (5)

$\mu_1(A \cup B) = \sqrt[3]{\mu(A \cup B)} \le \sqrt[3]{\mu(A) + \mu(B)} \le \sqrt[3]{\mu(A)} + \sqrt[3]{\mu(B)} = \mu_1(A) + \mu_1(B)$

إذاً، (5)

$\mu_1(A \cup B) \le \mu_1(A) + \mu_1(B)$

ملاحظة: جميع التمارين والأسئلة الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

طرطوس في ٦/٣/٢٠٢٥م

مدرسة المقرر: أ.م.د. عائدة علي صالحة

... المجموعات المنتهية في $\mathbb{R}$ فإن D حلقة في $\mathbb{R}$

لأن اجتماع مجموعتين منتهيتين من $\mathbb{R}$ مجموعة منتهية من $\mathbb{R}$ كذلك فإن تقاطع مجموعتين منتهيتين من $\mathbb{R}$ مجموعة منتهية من $\mathbb{R}$ أي أنه:

(4) /2

$$\forall A, B \in D \Rightarrow A\cup B \in D \wedge A\cap B \in D$$

(2) ولكن الحلقة D ليست جبراً ولا جبراً تاماً في $\mathbb{R}$ لأن:

ϕ مجموعة منتهية وهي من D ولكن $\bar{\phi} = \mathbb{R} \notin D$ لأن $\mathbb{R}$ ليست مجموعة منتهية وبالتالي D ليست مغلقة بالنسبة لعملية التتميم

3/ لتكن $\{E_i\}_{i\in I}$ أسرة غير خالية من الجبور في المجموعة غير الخالية X ولنرمز

(1) $E = \bigcap_{i\in I} E_i$ ولنثبت أن E جبر في X

(1) بما أن E_i جبر في X من أجل كل $i\in I$ وبالتالي $\bigcap_{i\in I} E_i \neq \{\phi\} \Leftarrow E_i \neq \{\phi\}$

بما أن $X \in E_i$ من أجل كل $i\in I$ ، $\phi \in E_i$ من أجل كل $i\in I$

(2) وبالتالي $X, \phi \in E = \bigcap_{i\in I} E_i$

E مغلقة بالنسبة للاجتماع المنتهي أي لنبرهن أن:

(2) $$\forall A, B \in E = \bigcap_{i\in I} E_i \Rightarrow A\cup B \in E = \bigcap_{i\in I} E_i$$

$$A, B \in E = \bigcap_{i\in I} E_i \Rightarrow A, B \in E_i ;\ \forall i\in I \Rightarrow$$

$A\cup B \in E_i ;\ \forall i \in I$ (لأن E_i جبر في X) $\Rightarrow A\cup B \in \bigcap_{i\in I} E_i$

E مغلقة بالنسبة لعملية التتميم أي لنبرهن أن:

(2) $$\forall A \in E = \bigcap_{i\in I} E_i \Rightarrow \bar{A} \in E = \bigcap_{i\in I} E_i$$

$\mu^*(T\cap\phi)+\mu^*(T\cap\bar{\phi})=\mu^*(\phi)+\mu^*(T\cap X)$ $\forall$

$=\mu^*(\phi)+\mu^*(T)=\mu^*(T)$

أي أنها تحقق الشرط

من تعريف الاعتبار $\forall T\subseteq X$

(*) $\mu^*(T)=\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap\bar{A})$ $\forall T\subseteq X$

كذلك فإن $A=\phi$ و

الشرط (*) $\bar{\phi}=X$ مجموعة قابلة للقياس بالنسبة ل μ^* لأنها تحقق

٤- لتكن μ دالة قياس على $P(X)$ ولنثبت أن μ قياس خارجي على $P(X)$:

بما أن μ قياس على $P(X)$ وبالتالي فهي تحقق:

١. μ دالة مجموعة على $P(X)$

٢. $\mu(A)\geq 0$ وذلك $\forall A\in P(X)$ ، $\mu(\phi)=0$

٣. خاصية التزايد: إذا كانت $A,B\subset P(X)$ و $A\subset B$ فإن $\mu(A)\leq\mu(B)$

٤. خاصية تحت الجمع التامة: لتكن (A_i) متتالية من عناصر $P(X)$ عندئذ فإن: $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$

٥) أي أن μ تحقق جميع شروط القياس الخارجي وبالتالي μ قياس خارجي على $P(X)$

٦- لا اجتماع عدود للمجموعات مغلقة في X المجموعة بورلية أي أنه إذا كانت $(A_n)_{n\geq 1}$ متتالية من المجموعات المغلقة من عناصر المجموعة غير الخالية X عندئذ فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ عنصر في B_X أي أنها مجموعة بورلية لأنه:

$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n\cup\dots=\bar{\bar{A}}_1\cup\bar{\bar{A}}_2\cup\dots\cup\bar{\bar{A}}_n\cup\dots$

$=\overline{(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\dots\cap\bar{A}_n\cap\dots)}\subset B_X$ (B_X جبر تام في X) لأن

B_X

تابع : (٤٥ درجة)

السؤال الثاني : الأول (أ) (٪) :

الفرض : μ^* قياس خارجي على $P(X)$ ، $\mu = \mu^*|_{M^*}$ مقصور μ^* على M^*

M^* جبر تام في X

(ب) المطلوب : μ قياس على M^*

ب) القياس μ تام

البرهان : برهان (أ) :

6 أ : $\forall A \in M^*$; $\mu(A) = \mu^*(A) \geq 0$ أي أن μ دالة موجبة غير سالبة كذلك

$\mu(\phi) = \mu^*(\phi) = 0$

خاصية الجمع القابل : لتكن إذاً (A_i) متتالية عناصر M^* المنفصلة مثنى مثنى وبالاستفادة من

5 المبرهنة (إذا كان μ^* قياس خارجي على $P(X)$ و (A_i) متتالية من عناصر $M^* \subseteq P(X)$ المنفصلة مثنى مثنى عندئذٍ

فإن : $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

والدالة μ تحقق خاصية الجمع القابل

ينتج (١) ، (٢) عن أن $\mu = \mu^*|_{M^*}$ قياس على M^*

برهان (ب) : يجب أن نثبت أن : $\mu = \mu^*|_{M^*}$ قياس تام فلنفرض مجموعة كيفية

$X \supseteq A$ بحيث أن A مجموعة الـ μ مهملة أي أن $\exists B \in M^* , A \subseteq B$ و $\mu(B) = \mu^*(B) = 0$

لنثبت أن A مجموعة الـ μ^* مقيسة أي أن $A \in M^*$ أي يجب أن

4 A تحقق الشرط : $\forall T \subseteq X$; $\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \bar{A})$

لدينا $T \cap A \subseteq A \subseteq B \Rightarrow$

$0 \leq \mu^*(T \cap A) \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(B) = 0$ (I)

$\Rightarrow \mu^*(T \cap A) = 0$

من جهة أخرى لدينا :

$T \supseteq T \cap \bar{A}$

$\Rightarrow \mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap \bar{A})$ (II)

نجمع (I) و (II) طرفاً لطرف فنجد أن :

$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \bar{A})$

وبالتالي $A \in M^*$ ، وبما أن $A \subseteq B$

4 $\mu(A) = \mu^*(A) = 0 \Leftarrow 0 \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(B) = 0$

وبالتالي المجموعة A مجموعة μ-متوسسة وقياسها معدوم

إذاً كل مجموعة μ-الجزئية من X وجدنا أنها مجموعة μ-متوسسة وقياسها معدوم وبالتالي $\mu^*|_{M^*} = \mu$ قياس تام. 3

القسم الثاني (ثانياً):

١- $\mu_1(\phi) = \sqrt[3]{\mu(\phi)} = \sqrt[3]{0} = 0$ 5

٢- عندما $A \subseteq B$ حيث $A, B \in D$ فإن:

$\mu(A) \le \mu(B) \Rightarrow \sqrt[3]{\mu(A)} \le \sqrt[3]{\mu(B)} \Rightarrow \mu_1(A) \le \mu_1(B)$ 5

٣- بما أن μ قياس على D وبالتالي:

$\forall A, B \in D \Rightarrow \mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B) \Rightarrow$

$\sqrt[3]{\mu(A) + \mu(B)} \le \sqrt[3]{\mu(A)} + \sqrt[3]{\mu(B)} = \mu_1(A) + \mu_1(B)$ 4

إذاً:

$\mu_1(A \cup B) = \sqrt[3]{\mu(A \cup B)} \le \sqrt[3]{\mu(A) + \mu(B)}$

$\mu_1(A \cup B) \le \mu_1(A) + \mu_1(B)$

ملاحظة: جميع التمارين والأسئلة الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل ووضعنا أقرب الحلول الصحيحة في سلم التصحيح

طرطوس في ١٦/٧/٢٠٢٤

مدرس المقرر: د. عائشة صابح

د. عائشة صابح

2الجمهورية العربية السورية　　امتحان نظرية القياس　　المدة: ساعتان
جامعة طرطوس　　لطلاب السنة الثالثة ــ رياضيات　　الدرجة العظمى:90
كلية العلوم　　الفصل الأول　　اسم الطالب:

السؤال الأول: (35درجة)

لتكن X مجموعة ما غير منتهية، ولتكن $\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{R}$ دالة مجموعة معرفة بالشكل التالي:

المعرفة بالشكل التالي: $\mu^*(A)=\begin{cases} \sqrt{n} \; ; & A \text{ مجموعة منتهية وعدد عناصرها } n \\ +\infty \; ; & A \text{ مجموعة غير منتهية} \end{cases}$. تحقق من

أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$ ؟ ثم تحقق من أن μ^* دالة قياس على $P(X)$ ؟ ماذا تستنتج ؟

السؤال الثاني: (35درجة)

1- عرف الجبر ، الجبر التام واستنتج ما هو الفرق بينهما.

2- ليكن F جبراً تاماً في X، ولتكن $A \subseteq X$ ولنعرف الصف: $F_1 = \{A \cap B; \;\; B \in F\}$، تحقق من أن F_1 جبر تام في A.

السؤال الثالث: (20درجة)

1- عرف كلاً من المفاهيم التالية: القياس ، القياس التام ، عملية تميم القياسات ؟

2- اذكر خاصتين من خواص القياس ؟

****************************انتهت الأسئلة**************************

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق
د. عائدة صائمة

طرطوس في /2024/2/21م

س

٣م

سلم التصحيح [illegible] الفصل الأول [illegible] ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤

س ١: (5 درجة)

الحل: لنتحقق أن μ^* [illegible] $P(X)$.

أ: نلاحظ أن $\forall A \in P(X)$ ، $\mu^*(A) \geq 0$ أي أن μ^* دالة [illegible] غير سالبة.

ب: $\mu^*(\phi) = 0$ [illegible] ϕ مجموعة منتهية وعدد عناصرها [illegible]

ج: خاصة [illegible] التامة. لتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر $P(X)$ ولنثبت أن $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

نناقش هنا الحالات: **الحالة الأولى:** $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة منتهية وعدد عناصرها n وبالتالي $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sqrt{n}$ وبما أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة منتهية وبالتالي فإن المجموعات $A_1, A_2, \dots$ تحوي عدد منته من المجموعات المنتهية ولتكن $A_1, A_2, \dots, A_k$ [illegible] على الترتيب $n_1, n_2, \dots, n_k$ أما المجموعات الباقية [illegible] فهي مجموعات خالية وبالتالي:

$$\mu^*(A_i) = \sqrt{n_i} \; ; \; i = 1, 2, \dots, k$$

$$\mu^*(A_i) = \mu^*(\phi) = 0 \; ; \; i = k+1, k+2, \dots$$

[illegible] لدينا:

لأن

$$n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_k + 0 + 0 + \dots$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$$

وبالتالي:

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{n_1 + n_2 + \dots + n_k + 0 + \dots}$$

$$\leq \sqrt{n_1} + \sqrt{n_2} + \dots + \sqrt{n_k} + 0 + \dots = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

وعليه $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sqrt{n}$ ، وبالتالي فإن:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

الحالة الثانية: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة غير منتهية وبالتالي $\infty = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ وبما أن هذا الاتحاد [illegible] مجموعة واحدة على الأقل غير منتهية في المجموعات $A_1, A_2, \dots$ ولتكن A_{i_0} عندئذ فإن $\mu^*(A_{i_0}) = \infty$ ويكون لدينا:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{\infty} \mu^*(A_i) + \underbrace{\mu^*(A_{i_0})}_{\infty}$$

وبالتالي فإن:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

٣- جميع المجموعات $A_1, A_2, \ldots$ منتهية ولكن عددها غير منتهٍ وعدد عناصرها على الترتيب $n_1, n_2, \ldots$ وبالتالي فإن

$$\mu^*(A_i) = \sqrt{n_i} \geq 0 \; ; \; i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{n_i} = \infty$$

إذاً:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

وفي جميع الحالات فإن خاصية شبه الجمعية التامة محققة

٤- خاصية التزايد: إذا كانت A_1 و A_2 في $P(X)$ بحيث أن $A_1 \subseteq A_2$ لابد أن $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$

نناقش هنا حالتين

الحالة الأولى: A_2 منتهية وعدد عناصرها n_2 وبالتالي $\mu^*(A_2) = \sqrt{n_2}$

وبما أن A_2 منتهية فإن A_1 منتهية أيضاً وعدد عناصرها n_1

عندئذ فإن $\mu^*(A_1) = \sqrt{n_1}$

وبما أن $n_1 \leq n_2$ (لأن $A_1 \subseteq A_2$) وبالتالي فإن $\sqrt{n_1} \leq \sqrt{n_2}$

إذاً: $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$

الحالة الثانية: A_2 مجموعة غير منتهية و $\mu^*(A_2) = \infty$ ويكون لدينا احتمالات:

الاحتمال الأول: A_1 مجموعة منتهية وعدد عناصرها n_1 وبالتالي $\mu^*(A_1) = \sqrt{n_1} < \infty$ وبالتالي فإن $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$

الاحتمال الثاني: A_1 مجموعة غير منتهية ويكون لدينا $\mu^*(A_1) = \infty$

$$\Rightarrow \mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$$

وفي جميع الحالات فإن خاصية التزايد محققة

من (1) و (2) و (3) و (4) نجد أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$

التحقق فيما إذا كانت μ^* دالة قياس على $P(X)$.

خاصية الجمعية التامة: هي تتحقق هل أن μ^* تحقق هذه الخاصية بأخذ مثال لمجموعتين من المجموعات المنتهية من المجموعة $P(X)$ ولتكن A_1 و A_2 حيث $A_1 \cap A_2 = \phi$ وعدد عناصر كل منهما على الترتيب n_1 و n_2 عندئذ فإن

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \sqrt{n_1 + n_2} \neq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) = \sqrt{n_1} + \sqrt{n_2}$$

وبالتالي μ^* لا تحقق خاصية الجمعية التامة إذاً μ^* ليست دالة قياس على $P(X)$

وبالتالي نستنتج أنه ليست كل دالة قياس خارجي هي دالة قياس

تمت الحالة ...

حل (

الطلب الأول

أولاً: تعريف الجبر: لتكن X مجموعة ما غير خالية، نرمز لـ E مجموعة أجزاء X جبراً بـ X إذا حققت الشروط التالية:

1- $\phi, X \in E$ ، 2- $\forall A \in E \Rightarrow \bar{A} \in E$ ، 3- $A, B \in E \Rightarrow A \cup B \in E$

أي أن E مغلق بالنسبة لعمليات الاجتماع المنتهية والمتممة و ϕ و X عنصران من E.

ثانياً: تعريف الجبر التام (σ-جبر): لتكن X مجموعة ما غير خالية، نرمز لـ F صف من أجزاء X أنها جبر تام على X إذا تحققت الشروط التالية:

1- $\phi, X \in F$ ، 2- $\forall A \in F \Rightarrow \bar{A} \in F$

3- من أجل أي متتالية غير منتهية $(A_i)_{i \geq 1}$ من عناصر F يكون $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

أي أن F مغلق بالنسبة للاجتماع العدود والمتممة.

ثالثاً: الفرق بينهما: إن كلاً من الجبر والجبر التام مغلق بالنسبة لعملية المتممة وإن ϕ و X عنصران مشتركان في كل منهما، وإن الجبر التام مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع العدود وبالتالي مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي بينما الجبر يكون مغلقاً بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي، ولا يكون بالضرورة مغلقاً بالنسبة لعملية الاجتماع العدود.

الطلب الثاني: التحقق من أن F_1 جبر تام في A.

1- ϕ, A عنصران من F_1 لأن:

بما أن F جبر تام في X وبالتالي X, ϕ عنصران من F إذاً حسب تعريف F_1 فإن:

$$\phi = A \cap \phi \in F_1$$

$$A = A \cap X \in F_1$$

وبالتالي $A \in F_1$ ومنه $F_1 \neq \{\phi\}$

2- الانغلاق بالنسبة لعملية المتممة:

$\forall A \cap B \in F_1$ ولنبرهن أن $\overline{A \cap B} \in F_1$

لدينا $A \cap B \in F_1 \Rightarrow B \in F \Rightarrow \bar{B} \in F$ (لأن F جبر تام في X)

حسب تعريف F_1

وبالتالي يكون:

$$\overline{A \cap B} = A - (A \cap B) = A \cap \overline{(A \cap B)} = A \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap \bar{B} \in F_1$$

وبالتالي F_1 مغلق بالنسبة لعملية المتممة.

3- الانغلاق بالنسبة للاجتماع العدود:

لتكن إذاً $(A \cap B_i)_i$ متتالية كيفية من عناصر F_1 ولنبرهن أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i) \in F_1$

بما أن $(A \cap B_i)_i$ متتالية من عناصر F_1 وبالتالي حسب تعريف F_1 فإن $(B_i)_i$ متتالية من عناصر F وبالتالي $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in F$ لأن F جبر تام في X

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap B_i) = A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \in F_1$$

بالتالي F_1 مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود

(1) و (2) و (3) تعني أن F_1 جبر تام في A

سؤال 3: (20 درجة)

الطلب الأول: تعريف القياس: لتكن X مجموعة ما غير خالية و D جبر تام معرّف على X ندعو كل دالة مجموعة

$$\mu : D \to \bar{R}^+ , \quad A \to \mu(A), \forall A \in D$$

تحقق الشرطين:

1- $\mu(\phi)=0$ 2- من أجل أية متتالية $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ من عناصر D المنفصلة مثنى مثنى فإن: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$ (خاصة الجمعية التامة)

قياساً على D

تعريف القياس التام: ليكن (X, D, μ) فضاء قياسي. ندعو القياس μ قياساً تاماً إذا كانت كل مجموعة جزئية من مجموعة مهملة μ-قيوسة.

و بشكل رياضي نكتب:

B مجموعة μ-قيوسة $\Leftarrow$ B مجموعة μ-مهملة و $\forall B$ $\Longleftrightarrow$ μ قياس تام

عملية تتميم القياسات: هو إجراء يتم من خلاله الحصول على قياس تام انطلاقاً من قياس مفروض.

الطلب الثاني: 1- خاصة الجمعية: إذا كان (X, D, μ) فضاء القياس μ وكانت $(A_i)_{i=1}^{n}$ متتالية منتهية من المجموعات القيوسة من D وغير المتقاطعة عندئذٍ فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)$$

2- خاصة تحت الجمعية التامة: إذا كان (X, D, μ) فضاء القياس μ وكانت $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ متتالية من المجموعات القيوسة في D بالنسبة لـ μ عندئذٍ فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$$

ملاحظة (1): لجميع التعاريف الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح.

ملاحظة (2): في الطلب (2) من السؤال الثالث توجد خواص أخرى للقياس غير مذكورة في سلم التصحيح وإذا ذكرها الطالب يأخذ علامة هذا الطلب كاملاً.

طرطوس في 1/2/2024

د. عائشة صباغ

مدرسة المقرر: د. عائشة صباغ

صورة طبق الأصل

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم الثانية

امتحان نظرية القياس
لطلاب السنة الثالثة–رياضيات
الفصل الثاني

المدة: ساعتان
الدرجة :90درجة
اسم الطالب:

السؤال الأول: (40 درجة)

أولاً: لتكن $X = \mathbb{N}$ ولنعرف على $P(X)$ تابع مجموعة μ^* معرف بالشكل التالي:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & ; \quad A = \Phi \\ 1 & ; \quad A \neq \Phi \end{cases}$$

والمطلوب تحقق من أن μ^* قياس خارجي .

ثانياً: برهن أن تقاطع أي أسرة غير خالية من الجبور في مجموعة ما غير خالية X هو جبر فيها .

السؤال الثاني: (50 درجة)

1- وضح مفهوم التعابير والرموز الرياضية التالية :القياس ، القياس التام ، عملية تميم القياسات ، الفضاء القابل للقياس ، $\sigma(G)$ ، B_R ، المجموعة الوحيدة العنصر ، المجموعة العدودة.

2- ليكن (X, M, μ) فضاء قياس برهن أن الصف:

$\overline{M} = \{E \subseteq X \ : E = A \cup B;\ A \in M$ and A مجموعة μ- مقيسة $\wedge$ B مجموعة μ- مهملة$\}$

جبر تام في X يحوي صف المجموعات الهمولة بالنسبة لـ μ.

3- ماهي أوجه التشابه والاختلاف بين القياس الموجب والقياس الخارجي؟

*************************انتهت الأسئلة*************************

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2023/7/16

جامعة [illegible]
كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس لطلاب م٣/
لامتحان الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠٢٢ - ٢٠٢٣

س١: (٤٠ درجة)

ج١/ نثبت أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$:

1. $\mu^*(A) \geq 0$ وذلك $\forall A \in P(X)$ حسب تعريف μ^*

2. كذلك فإن $\mu^*(\phi) = 0$ حسب تعريف μ^*

3. خاصية شبه الجمعية القابلة للعد: لتكن (A_i) متتابعة من $P(X)$ ، ولنبرهن أن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

نناقش هنا الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \phi$ ، وبالتالي فإن $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$ ، وأيضاً فإن كلاً من $A_i = \phi$ لكل $i = 1, 2, \dots$ وبالتالي $\mu^*(A_i) = 0$ لكل $i = 1, 2, \dots$

$$\Leftarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = 0$$

إذاً

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

الحالة الثانية: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \neq \phi$ عندئذ فإن $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$ ، ومن جهة أخرى فإن واحدة على الأقل من المجموعات $A_1, A_2, \dots$ ولتكن A_{i_0} بحيث أن $A_{i_0} \neq \phi$ وبالتالي $\mu^*(A_{i_0}) = 1$ ، ويكون لدينا:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \mu^*(A_{i_0}) + \sum_{i \neq i_0} \mu^*(A_i) \geq \mu^*(A_{i_0}) = 1$$

وبالتالي

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

ومن كلا الحالتين فإن

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

4. خاصية الرتابة: لتكن A ، B مجموعتين جزئيتين من $P(X)$ ولدينا $A \subseteq B$ ولنبرهن أن $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

نناقش هنا الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: $B = \phi \Leftarrow \mu^*(B) = 0$ و $A = \phi \Leftarrow \mu^*(A) = 0$ وبالتالي $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

الحالة الثانية: $B \neq \phi \Leftarrow \mu^*(B) = 1$ ، ويكون لدينا احتمالان:

الاحتمال الأول: $A = \phi \Leftarrow \mu^*(A) = 0$ ، ويكون لدينا $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

الاحتمال الثاني: $A \neq \phi \Leftarrow \mu^*(A) = 1$ ، ويكون لدينا $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

ومن جميع الحالات فإن μ^* تحقق خاصية الرتابة

من (3) ، (2) نجد أن μ^* قياس خارجي على $P(X)$.

ثانياً: لنفرض أن $(E_i)_{i\in I}$ أسرة غير خالية من الجبور في مجموعة ما غير خالية X ولنرمز لـ

(2) لتقاطع أسرة هذه الجبور في X: $E=\bigcap\limits_{i\in I} E_i$ ولنثبت أن E جبر في X.

نلاحظ أنه من أجل كل $i\in I$ فإن $E_i\neq\emptyset$ لأن E_i جبر في X، وبالتالي

(1) $\forall i\in I$ و $X\in E_i \Leftarrow X\in\bigcap\limits_{i\in I}E_i=E \Leftarrow E=\bigcap\limits_{i\in I}E_i\neq\emptyset$

الآن لنحقق أن E يحقق شروط الجبر

أ) E_i جبر في X من أجل كل $i\in I \Leftarrow X,\emptyset\in E_i$ من أجل كل $i\in I$

$\Rightarrow X,\emptyset\in E=\bigcap\limits_{i\in I}E_i$

ب) E مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهية

$\forall A,B\in E=\bigcap\limits_{i\in I}E_i$ ولنثبت أن $A\cup B\in E=\bigcap\limits_{i\in I}E_i$

(1) $A,B\in E=\bigcap\limits_{i\in I}E_i \Rightarrow A,B\in E_i, \forall i\in I \Rightarrow$ (لأن E_i جبر في X) $\Rightarrow$

$A\cup B\in E_i, \forall i\in I \Rightarrow A\cup B\in E=\bigcap\limits_{i\in I}E_i$ $\Rightarrow$ E مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهية

ج) E مغلق بالنسبة لعملية المتممة: $\forall A\in E=\bigcap\limits_{i\in I}E_i$ ولنثبت أن $\bar{A}\in E=\bigcap\limits_{i\in I}E_i$

(4) (لأن E_i جبر في X) $A\in E=\bigcap E_i \Rightarrow A\in E_i, \forall i\in I \Rightarrow \bar{A}\in E_i, \forall i\in I$

$\Rightarrow \bar{A}\in E=\bigcap\limits_{i\in I}E_i \Rightarrow$ E مغلق بالنسبة لعملية المتممة

(2) مما سبق نجد أن $E=\bigcap\limits_{i\in I}E_i$ جبر في X

س٢: (عشرون درجة)

(4) أولاً: القياس: لتكن X مجموعة ما غير خالية، D جبر تام فيها. ندعو أي دالة مجموعة $\mu: D\longrightarrow \bar{R}^+$ غير سالبة وتحقق خاصية الجمعية التامة و $\mu(\emptyset)=0$ قياساً على D أو على X إذا لم نذكر D التابع.

(4) القياس التام: ليكن (X,F,μ) فضاء القياس μ. نقول عن القياس μ أنه قياس تام إذا كانت كل مجموعة جزئية من المجموعة مهملة بالنسبة لـ μ وندعو (X,F,μ) في هذه الحالة فضاء قياس تام.

(4) عملية تتميم القياسات: هو الإجراء الذي من خلاله نمدد أي قياس موجب والحصول نتيجة هذا التمديد على قياس تام.

(2) الفضاء القابل للقياس: هو الثنائية (X,F) حيث X مجموعة ما غير خالية و F جبر تام في X

(G)σ : ليكن G صف بوزطال من أجزاء مجموعة ما غير خالية X . إن σ(G) هو
جبر تام في X ويدعى الجبر التام المولد بالصف G وهو عبارة عن تقاطع
جميع الجبور التامة في X والتي تحوي G .

$B_{\mathbb{R}}$: ليكن $\mathbb{R}$ فضاء متري مزود بالمسافة العادية $d(x,y)=|x-y|$
حيث x و y من $\mathbb{R}$. عندئذ نسمي $B_{\mathbb{R}}$ الجبر بوريل في $\mathbb{R}$ أو الجبر الأكبر التام
المولد من المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$.

المجموعة الوحيدة العنصر : هي المجموعة المؤلفة من عنصر واحد ، مثلاً مثل $\{a\}$ ،

المجموعة المعدودة : نقول عن المجموعة غير المنتهية إنها مجموعة عدودة إذا كان بالإمكان
إيجاد تطابق تقابل $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \Omega$ بين مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ والمجموعة

ثانياً : ماهي صفة الجمعية التامة : إذا كانت (X,D,μ) فضاء القياس μ وكانت
$(A_i)_{i\geq1}$ متتالية من المجموعات القيوسة من D بالنسبة لـ μ عندئذ يكون :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

البرهان : لدينا $A_i \in D$ من أجل $i=1,2,\dots$ وبما أن D جبر تام من أجزاء X
وبالتالي يكون : $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in D$:

الآن لنبني المتتالية $(B_i)_{i\geq1}$ بالشكل التالي :

$$B_1 = A_1 ,\ B_2 = A_2 - A_1 ,\ B_3 = A_3 - (A_2 \cup A_1) , \dots$$

$$B_i = A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \quad , i \geq 2$$

نلاحظ أن $(B_i)_{i\geq1}$ متتالية عناصر من D القيوسة لأن $B_i \subseteq A_i$ من أجل
$i=1,2,$ وهي غير متقاطعة ، كذلك نلاحظ أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ وبالتالي فإن

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

لأن μ تحقق خاصة الجمعية التامة — لأن μ متزايد $B_i \subseteq A_i$

ثالثاً : نتحقق أن $\bar{M}$ هي جبر تام من أجزاء X :

أ) $\phi \in \bar{M}$ لأن $\phi = \phi \cup \phi$ حيث $\phi \in M$ لأن M جبر تام في X
و ϕ مجموعة μ المهملة لأن $\phi \subseteq \phi$ و $\mu(\phi)=0$

و لدينا أيضاً $X \in \bar{M}$ لأن : $X = X \cup \phi$ حيث $X \in M$ لأن M جبر تام في X
و ϕ مجموعة μ - المهملة

ب) $\bar{M}$ مغلقة بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود :

لتكن $(E_i)_{i\geq1} = (A_i \cup B_i)_{i\geq1}$ متتالية عناصر من $\bar{M}$ حيث $A_i \in M$ من أجل $i=1,2,\dots$
و $(B_i)_{i\geq1}$ متتالية من المجموعات μ - المهملة وذلك حسب تعريف $\bar{M}$
لنبرهن أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \bar{M}$

لما أن (B_i) متتالية من المجموعات المهملة، بالتالي يوجد:

$\exists C_i \in M ,\ B_i \subseteq C_i \ \&\ \mu(C_i) = 0 ;\ \forall i = 1, 2, \dots$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \ \&\ \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in M$ (لأن M جبر تام في X) $\&\ \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) = 0$

وبالتالي فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ مجموعة μ - مهملة.

لدينا $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cup B_i) = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \in \bar{M}$

لأن $\bigcup A_i \in M$ لأن M جبر تام و $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ مجموعة μ - مهملة

بالتالي $\bar{M}$ مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود.

(3) $\bar{M}$ مغلق بالنسبة لعملية الإتمام:

لتكن $E = A \cup B$ عنصر ليكن من $\bar{M}$ و لنبرهن أن $\bar{E} = \overline{A \cup B} \in \bar{M}$

لتكن $E = A \cup B \in \bar{M}$ وبالتالي حسب تعريف $\bar{M}$ فإن $A \in M$ و B مجموعة μ - مهملة، أي

$A \in M \ \&\ \exists C \in M ,\ B \subseteq C \ \&\ \mu(C) = 0$

لدينا $\bar{E} = \overline{A \cup B} = X - (A \cup B) = X \cap \overline{(A \cup B)} = (\bar{C} \cup C) \cap \overline{(A \cup B)} = (\bar{C} \cup C) \cap (\bar{A} \cap \bar{B})$

$= (\bar{C} \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cup (C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) = (\bar{C} \cap \bar{A}) \cup (C \cap \bar{A} \cap \bar{B})$

لأن $\bar{C} \cap \bar{A} \in M$ لأن A, C عنصران من M و $\bar{C} \subseteq \bar{B} \Leftarrow B \subseteq C$ أي أن $\bar{C} \cap \bar{B} = \bar{C}$

كذلك فإن $C \cap \bar{A} \cap \bar{B}$ مجموعة μ - مهملة لأن: M جبر تام في X

$\bar{C} \cup A = \bar{C} \cap \bar{A} \in M \Leftarrow$

$C \cap \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq C \ \&\ C \in M \ \&\ \mu(C) = 0$

بالتالي $\bar{E} \in \bar{M}$ و $\bar{M}$ مغلق بالنسبة لعملية الإتمام.

من (1) و (2) و (3) نجد أن $\bar{M}$ جبر تام في X

نفرض أن F صف المجموعات μ - المهملة في X، لنبرهن أن $F \subseteq \bar{M}$.

(2) $\Leftarrow A$ مجموعة μ - مهملة

$\forall A \in F \Rightarrow A = \phi \cup A ,\ \phi \in M \ \&$

$A \in \bar{M}$ ($\bar{M}$ ...) $\Rightarrow F \subseteq \bar{M}$

أي أن الجبر التام $\bar{M}$ يحوي صف المجموعات μ - المهملة في X.

رابعاً: إذا رمزنا بـ μ للقياس الموجب و بـ μ^* للقياس الخارجي فإن:

أوجه التشابه بين μ و μ^*: كلا هما دالة مجموعة معرفة غير سالبة في كل القياس بأن

(3) $\mu(\phi) = 0$ و $\mu^*(\phi) = 0$. كذلك فإن كلا القياسين يحققان خاصة تحت الجمعية التامة

وكلاً منهما دالة متزايدة.

أما أوجه الاختلاف فإن μ معرف على جبر تام في X بينما μ^* معرف على $P(X)$

1- μ يحقق خاصة الجمعية و خاصة الجمعية التامة بينما μ^* ليس من الضروري أن يحقق أي من الخاصتين.

2- كل قياس μ هو قياس خارجي حتماً و لكن ليس كل قياس خارجي μ^* هو قياس موجب في الحالة العامة.

ملاحظة: جميع الخطوات الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وضعها أقصر العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

طرطوس في ١٦/٧/٢٠٢٣

مدرسة المقرر: د. عائدة علي حمادة

الجمهورية العربية السورية امتحان نظرية القياس المدة: ساعتان
جامعة طرطوس لطلاب السنة الثالثة ـ رياضيات الدرجة العظمى:90
كلية العلوم الفصل الثاني اسم الطالب:

السؤال الأول: (45درجة)

أولاً: عرف أسرة المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي مفروض μ^*.

ثانياً: لتكن $X = R$ ولتكن $\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{R}^+$ دالة مجموعة معرفة بالشكل التالي:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} \sqrt[3]{n} & if \quad |A| = n \\ +\infty & if \quad A \text{ غير منتهية} \end{cases}$$

، حيث $|A|$ = عدد عناصر A إذا كانت A مجموعة منتهية ، والمطلوب تحقق من أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$ ؟

ثالثاً: ليكن (X, M, μ) فضاء قياس برهن أن الصف:

$\overline{M} = \{E \subseteq X \ : E = A \cup B;\ A \in M \ \ and\ A$ مجموعة μ ـ مقبولة $\wedge$ B مجموعة μ ـ المهملة$\}$

جبر تام في X يحوي صف المجموعات الهمولة بالنسبة لـ μ.

السؤال الثاني: (45 درجة)

أجب عن الأسئلة التالية:

أولاً: لتكن X مجموعة ما غير خالية وليكن $a \in X$، ولتكن $\mu : P(X) \longrightarrow \overline{R}^+$ دالة مجموعة معرفة بالشكل التالي:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 1 & ; \ a \in A \\ 0 & ; \ a \notin A \end{cases}$$

، والمطلوب تحقق من أن (X, M, μ) فضاء قياس ؟

ثانياً: اذكر كلاً من الخواص التالية: خاصة تحت الجمعية التامة ،خاصة الجمعية التامة وخاصة الجمعية التي يحققها القياس الموجب .

ثالثاً: لتكن F حلقة في X، ولتكن $A \subseteq X$ أثبت أن الصف: $F_1 = \{A \cap B;\ \ B \in F\}$، حلقة في A.

****************************انتهت الأسئلة**************************

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق
د. عائدة صائمة

طرطوس في 2022/7/3م

(1)

جامعة طرطوس

كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس لطلاب س٣ ر

لامتحان الفصل الثاني - العام الدراسي ٢٠٢١ - ٢٠٢٢

س1: (45 درجة)

أولاً: ندعو المجموعة $A \subseteq X$ مجموعة قابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي معروض μ^* معرف على مجموعة ما غير خالية، إذا حققت المجموعة A الشرط التالي:

$$\mu^*(T)=\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap \bar{A})\ ;\ \forall\, T\subseteq X$$ (5)

وندعو T مجموعة الاختبار.

ثانياً: نتحقق من أن μ^* قياس خارجي على $P(X)$:

أ: نلاحظ أن $\mu^*(A)\geq 0\ \forall A\in P(X)$ وذلك حسب تعريف μ^* أي أن μ^* دالة موجبة غير سالبة (2)

ب: $\mu^*(\phi)=0$ لأن ϕ مجموعة منتهية وعدد عناصرها مساوٍ للصفر (2)

ج: خاصة تحت الجمعية التامة: لتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر $P(X)$، لنبرهن أن: (1)

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$$

توجد هنا حالتان:

الحالة الأولى: $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ مجموعة منتهية وعدد عناصرها n أي أن $\left|\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right|=n$ وبالتالي فإن: $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sqrt[3]{n}$ وبما أن $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ مجموعة منتهية وبالتالي فإن المجموعات $A_1,A_2,\dots$ تحوي عدد منتهٍ من المجموعات المنتهية ولتكن $A_1,A_2,\dots,A_k$ وعدد عناصر كل منها على الترتيب: $n_1,n_2,\dots,n_k$

أما المجموعات الباقية من هذه المجموعات فهي مجموعات خالية أي أن: $A_i=\phi\ ;\ i=k+1,k+2,\dots$ وبالتالي: (3)

$$\mu^*(A_i)=\sqrt[3]{n_i}\ ;\ i=1,2,\dots,k$$

و

$$\mu^*(A_i)=\mu^*(\phi)=0\ ;\ i=k+1,k+2,\dots$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right|\leq|A_1|+|A_2|+\dots+|A_k|+|A_{k+1}|+|A_{k+2}|+\dots$$

$$\leq n_1+n_2+\dots+n_k+0+0+\dots$$

$$\Rightarrow n\leq n_1+n_2+\dots+n_k+0+0+\dots$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{n}\leq\sqrt[3]{n_1+n_2+\dots+n_k}+\sqrt[3]{0}+\sqrt[3]{0}+\dots$$

$$\leq\sqrt[3]{n_1}+\sqrt[3]{n_2}+\dots+\sqrt[3]{n_k}$$

$$\leq\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt[3]{n_i}=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$$

وبما أن: $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sqrt[3]{n_i}$ وبالتالي فإن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$$ (3)

الحالة الثانية: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة غير منتهية وبالتالي $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \infty$

نناقش هنا احتمالين:

الاحتمال الأول: توجد مجموعة واحدة على الأقل غير منتهية من المجموعات $A_1, A_2, \dots$ ولتكن A_{i_0} عندئذ فإن $\mu^*(A_{i_0}) = \infty$ ويكون لدينا:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{\infty} \mu^*(A_i) + \underbrace{\mu^*(A_{i_0})}_{\infty} = \infty$$

وبالتالي فإن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

الاحتمال الثاني: جميع المجموعات $A_1, A_2, \dots$ منتهية ولكن عددها غير منتهٍ وعدد عناصر كل منها وعلى التوالي $n_1, n_2, \dots$ وبالتالي فإن:

$$\mu^*(A_i) = \sqrt[3]{n_i} \ge 0 ; \ i = 1, 2, \dots \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt[3]{n_i} = \infty$$

إذاً:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

وفي جميع الحالات فإن خاصية تحت الجمعية التامة محققة

٤: خاصية التزايد: إذا كانت A_1 و A_2 من $P(X)$ بحيث أن $A_1 \subseteq A_2$ ولندلل أن $\mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2)$

نناقش هنا حالتين:

الحالة الأولى: A_2 مجموعة منتهية وعدد عناصرها n_2 وبالتالي: $\mu^*(A_2) = \sqrt[3]{n_2}$

وبما أن A_2 مجموعة منتهية وبالتالي A_1 مجموعة منتهية ولنفرض أن عدد عناصرها n_1 عندئذ فإن $\mu^*(A_1) = \sqrt[3]{n_1}$

وبما أن $n_1 \le n_2$ (لأن $A_1 \subseteq A_2$) وبالتالي فإن $\sqrt[3]{n_1} \le \sqrt[3]{n_2}$

إذاً: $\mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2)$

الحالة الثانية: A_2 مجموعة غير منتهية و $\mu^*(A_2) = \infty$ ويكون لدينا احتمالان:

الاحتمال الأول: A_1 مجموعة منتهية وعدد عناصرها n_1 وبالتالي: $\mu^*(A_1) = \sqrt[3]{n_1} < \infty$ وبالتالي فإن: $\mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2)$

الاحتمال الثاني: A_1 مجموعة غير منتهية ويكون لدينا: $\mu^*(A_1) = \infty$

$$\Rightarrow \mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2)$$

وفي جميع الحالات فإن خاصية التزايد محققة

من (1) و (2) و (3) و (4) نجد أن μ^* قياس خارجي على $P(X)$

ثالثاً: نتحقق أن $\overline{M}$ يحقق شروط الجبر التام:

أ: $\phi \in \overline{M}$ لأن: $\phi = \phi \cup \phi$ حيث $\phi \in M$ لأن M جبر تام

و ϕ مجموعة μ- المهملة لأن : $\phi \subseteq \phi$ و $\mu(\phi)=0$

كذلك فإن $X \in \bar{M}$ لأن: $X = X \cup \phi$ حيث $X \in M$ لأن M جبر تام في X
و ϕ مجموعة μ- المهملة.

ثانياً: $\bar{M}$ مغلقة بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود:

لتكن $(E_i)_{i\geq 1} = (A_i \cup B_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر $\bar{M}$ حيث $A_i \in M$ من أجل $i=1,2,\dots$
و $(B_i)_{i\geq 1}$ متتالية من المجموعات μ- المهملة وذلك حسب تعريف $\bar{M}$ ولنثبت أن
$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \bar{M}$

بما أن $(B_i)_{i\geq 1}$ متتالية من المجموعات μ- المهملة وبالتالي فإن:

$\exists C_i \in M ; B_i \subseteq C_i$ و $\mu(C_i)=0 ; \forall i=1,2,\dots$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ و $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in M$ (لأن M جبر تام في X) و $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i)=0$

وبالتالي فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ مجموعة μ- المهملة.

لدينا $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cup B_i) = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \in \bar{M}$

لأن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in M$ لأن M جبر تام و $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ مجموعة μ- المهملة.

وبالتالي $\bar{M}$ مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود.

ثالثاً: $\bar{M}$ مغلق بالنسبة لعملية الإتمام:

لتكن $E = A \cup B$ عنصراً كيفياً من $\bar{M}$ ولنبرهن أن $\bar{E} = \overline{A \cup B} \in \bar{M}$

بما أن $E = A \cup B \in \bar{M}$ وبالتالي حسب تعريف $\bar{M}$ فإن $A \in M$ و B
مجموعة μ- المهملة وبالتالي:

$A \in M$ و $\exists C \in M ; B \subseteq C$ و $\mu(C)=0$

لدينا $\bar{E} = \overline{A \cup B} = X - (A \cup B) = X \cap (\overline{A \cup B}) = (\bar{C} \cup C) \cap (\overline{A \cup B})$

$= (\bar{C} \cup C) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = (\bar{C} \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cup (C \cap \bar{A} \cap \bar{B})$

$= (\bar{C} \cap \bar{A}) \cup (C \cap \bar{A} \cap \bar{B})$

إن $\bar{C} \cap \bar{A} \in M$ لأن:

$B \cap \bar{C} = \bar{C} \Leftarrow \bar{C} \subseteq \bar{B} \Leftarrow B \subseteq C$

A و C عنصران من M و M جبر تام في X $\Leftarrow$

$\overline{C \cup A} = \bar{C} \cap \bar{A} \in M$

كذلك فإن $C \cap \bar{A} \cap \bar{B}$ مجموعة μ- المهملة لأن:

$C \cap \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq C$ و $C \in M$ و $\mu(C)=0$

وبالتالي $\bar{E} \in \bar{M}$ و $\bar{M}$ مغلق بالنسبة لعملية الإتمام

من (1) و (2) و (3) نجد أن $\bar{M}$ جبر تام في X

نفرض أن F صف المجموعات μ- المهملة في X ولنبرهن أن
$F \subseteq \bar{M}$:

$\Leftarrow$ A مجموعة μ-قابلة للقياس $\forall A \in F \Rightarrow A = \phi \cup A ; \phi \in M$ و

(1) $A \in \bar{M}$ (حسب تعريف $\bar{M}$) $\Rightarrow F \subseteq \bar{M}$

أي أن الجبر التام $\bar{M}$ يحوي صنف المجموعات μ-القابلة للقياس في X

س: (45 درجة)

أولاً: لنتحقق أن μ دالة قياس:

(1) إن μ دالة مجموعة غير سالبة لأن: (3)

$\mu(A) \geq 0 ; \forall A \in P(X)$ وذلك حسب تعريف μ

(2) $\mu(\phi) = 0$ لأنه عندما $A = \phi$ فإن $a \notin A$ (3)

(3) خاصة الجمعية التامة: لتكن $(A_i)_{i \geq 1}$ متتالية من عناصر $P(X)$ غير متقاطعة

ولنبرهن أن

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (2)$$

نناقش هنا حالتين: (1)

أ: الحالة الأولى: $a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$

وبما أن $a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ والمجموعات $A_1, A_2, \ldots$ غير متقاطعة وبالتالي فإن a تنتمي

لواحدة فقط من هذه المجموعات ولتكن A_{i_0} أي أن:

$\Rightarrow$ $a \in A_{i_0}$ و $a \notin A_i ; i = 1, 2, \ldots$ و $i \neq i_0$ (2)

$\mu(A_{i_0}) = 1$ و $\mu(A_i) = 0 ; i = 1, 2, \ldots$ و $i \neq i_0$

لدينا $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{\infty} \mu(A_i)}_{=0} + \underbrace{\mu(A_{i_0})}_{1} = 1$

ولكن: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$ وبالتالي (2)

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

ب: الحالة الثانية: (1) $a \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$ و

$a \notin A_i ; i = 1, 2, \ldots$ وبالتالي فإن $\mu(A_i) = 0 ; i = 1, 2, \ldots$

لدينا $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0$ (2)

وبالتالي فإن: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

وفي كلا الحالتين فإن خاصة الجمعية التامة محققة. (2)

من (1) و (2) و (3) نجد أن μ دالة قياس على $P(X)$ وبالتالي

$(X, P(X), \mu)$ فضاء قياس (1)

ثانياً: ١- خاصية تحت الجمعية التامة: إذا كان (X, D, μ) فضاء القياس μ وكانت (A_i) متتالية من عناصر D المقوسة عندئذ فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$ (5)

٢- خاصية الجمعية التامة: إذا كان (X, D, μ) فضاء القياس μ وكانت (A_i) متتالية من عناصر D المقوسة غير المتقاطعة عندئذ فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$ (5)

٣- خاصية الجمعية: إذا كان (X, D, μ) فضاء القياس μ وكانت $(A_i)_{i=1}^{n}$ متتالية من عناصر D المقوسة غير المتقاطعة عندئذ فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$ (5)

ثالثاً: نتحقق أن F_1 يحقق شروط الحلقة:

١: $F_1 \ne \{\phi\}$ لأنه بما أن $F \ne \{\phi\}$ لأنها حلقة وبالتالي: $\Rightarrow F_1 \ne \{\phi\}$ (حسب تعريف F_1 ، $\exists B \in F ; A \cap B \in F_1$) (1)

٢: F_1 مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي:

$\forall E_1 = A \cap B_1 , E_2 = A \cap B_2 \in F_1$ ؛ $B_1, B_2 \in F$ (حسب تعريف F_1)

لدينا $E_1 \cup E_2 = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) = A \cap (\underbrace{B_1 \cup B_2}_{\in F}) \in F_1$ لأن F حلقة في X (4)

وبالتالي F_1 مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي.

٣: F_1 مغلق بالنسبة لعملية الفرق: (4)

$\forall E_1 = A \cap B_1 , E_2 = A \cap B_2 \in F_1$ ؛ $B_1, B_2 \in F$ (حسب تعريف F_1)

لدينا $E_1 - E_2 = (A \cap B_1) - (A \cap B_2) = A \cap (\underbrace{B_1 - B_2}_{\in F}) \in F_1$ لأن F حلقة في X

وبالتالي F_1 مغلق بالنسبة لعملية الفرق.

من (1) و (2) و (3) نجد أن: (2)

F_1 حلقة في A

ملاحظة: جميع التمارين الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل والصحيح تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

طرطوس في ١٧/٣/٢٠٢٠

مدرس المقرر: د. عائشة علي صافية

الجمهورية العربية السورية امتحان نظرية القياس المدة: ساعتان
جامعة طرطوس لطلاب السنة الثالثة ـ رياضيات الدرجة العظمى:90
كلية العلوم الفصل الأول اسم الطالب:

السؤال الأول: (50 درجة)

أولاً: عرف أسرة المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي مفروض μ^*.

ثانياً: لتكن $X = N$ ولتكن $\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{R}$ دالة مجموعة معرفة بالشكل التالي:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & ; \quad A = \phi \\ 1 & ; \quad A \neq \phi \end{cases}$$ والمطلوب

1. تحقق من أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$ ؟
2. أوجد أسرة المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لـ μ^* ؟

ثالثاً: برهن أن تقاطع أي أسرة غير خالية من الحلقات في مجموعة غير خالية X هي حلقة فيها.

السؤال الثاني: (40 درجة)

أجب عن الأسئلة التالية:

أولاً: وضح مفهوم التعابير والرموز الرياضية التالية: الفضاء القابل للقياس، $\sigma(G)$، القياس التام، B_R، τ قياس على الصف D.

ثانياً: اذكر خاصة تحت الجمعية التامة التي يحققها القياس الموجب وبرهن عليها.

****************************انتهت الأسئلة**

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق
د. عائدة صائمة

طرطوس في 2022/2/10م

جامعة طرطوس

كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس لطلاب سنة ٣ ر

لامتحان الفصل الأول - العام الدراسي ٢٠٢١ - ٢٠٢٢

س١: (50 درجة)

الحل:

أولاً: ندعو المجموعة $A \subseteq X$ مجموعة قابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي مفروض μ^* على مجموعة ما غير خالية X. إذا حققت المجموعة A أحد الشرطين التاليين

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \bar{A})$$

وذلك $T \subseteq X$ مجموعة الاختبار.

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \bar{A})$$

ونرمز لأسرة جميع المجموعات القابلة للقياس بالنسبة ل μ^* ب M^*. (8)

ثانياً: الطلب الأول: نتحقق أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$

أ: $\mu^*(A) \geq 0$ وذلك $\forall A \in P(X)$ حسب تعريف μ^* (3)

ب: كذلك فإن $\mu^*(\phi) = 0$ حسب تعريف μ^*. (3)

ج: خاصة نصف الجمعية التامة: لتكن (A_i) متتالية من عناصر $P(X)$ ولنبرهن أن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \quad (2)$$

نناقش هنا الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \phi$ وبالتالي فإن $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$ وكذلك فإن كلاً من $A_i = \phi$ من أجل $i = 1, 2, \ldots$ وبالتالي $\mu^*(A_i) = 0$ من أجل $i = 1, 2, \ldots$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = 0$$

(4)

إذاً:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

الحالة الثانية: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \neq \phi$ عندئذ توجد مجموعة واحدة على الأقل من المجموعات $A_1, A_2, \ldots$ ولتكن A_{i_0} حيث أن $A_{i_0} \neq \phi$ و $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$ و $\mu^*(A_{i_0}) = 1$

وبالتالي:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \mu^*(A_{i_0}) + \sum_{i \neq i_0} \mu^*(A_i) \geq \mu^*(A_{i_0}) = 1$$

أي أن

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \quad (5)$$

وفي كلا الحالتين فإن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

خاصية التزايد: لتكن A , B مجموعتين ما في $P(X)$ ولتكن $A \subseteq B$، لنبرهن أن:
$\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (2)

نناقش هنا الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: $B = \phi \Rightarrow \mu^*(B) = 0$ و $A = \phi \Rightarrow \mu^*(A) = 0$ (2)
وبالتالي $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

الحالة الثانية: $B \neq \phi \Rightarrow \mu^*(B) = 1$ ويكون لدينا احتمالان:

الاحتمال الأول: $A = \phi \Rightarrow \mu^*(A) = 0$ ويكون لدينا $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (2)

الاحتمال الثاني: $A \neq \phi \Rightarrow \mu^*(A) = 1$ ويكون لدينا: $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

وفي جميع الحالات فإن μ^* يحقق خاصية التزايد.

مما (1') و (2'') و (3'') نجد أن μ^* قياس خارجي على $P(X)$ (N)

الطلب الثاني: $A \subseteq N$ قابلة للقياس بالنسبة لـ μ^* إذا وفقط إذا كان:
$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \bar{A}) \; ; \; \forall T \subseteq N$ (1)

من أجل $A \subseteq N$ نناقش الحالتين التاليتين:

أ: $A = \phi \Rightarrow \mu^*(A) = 0 \Rightarrow \mu^*(T \cap A) = \mu^*(A) = 0$

كذلك فإن $\bar{A} = \bar{\phi} = N \Rightarrow \mu^*(T \cap \bar{A}) = \mu^*(T \cap N) = \mu^*(T)$

إذاً $\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \bar{A}) = 0 + \mu^*(T \cap N) = \mu^*(T)$

وبالتالي $\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \bar{A})$ (2)

وبالتالي $A = \phi$ ومنه ϕ و N مجموعتان قابلتان للقياس بالنسبة لـ μ^*

ب: إذا كانت $A \notin \{\phi, N\}$ عندئذ نختار T بحيث يكون:
$T \cap A \neq \phi$ و $T \cap \bar{A} \neq \phi$ وفي هذه الحالة يكون لدينا:

$\mu^*(T \cap A) = 1$ و $\mu^*(T \cap \bar{A}) = 1 \Rightarrow \mu^*(T) < \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \bar{A})$

أي أن A مجموعة غير قابلة للقياس بالنسبة لـ μ^* في هذه الحالة (2)

وأسرة المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لـ μ^* هي $\{\phi, N\}$ (2)

ثالثاً: لتكن $\{D_i ; i \in I\}$ أسرة غير خالية من الحلقات في مجموعة ما غير خالية X ولنرمز بـ D لتقاطع أسرة هذه الحلقات في X أي:

$D = \bigcap_{i \in I} D_i$ ، لنبرهن أن D حلقة في X . (2)

نلاحظ أنه من أجل كل $i \in I$ فإن $D_i \neq \phi$ لأن D_i حلقة في X وبالتالي:

$D = \bigcap_{i \in I} D_i \neq \phi$ (2)

الآن لنتحقق أن D تحقق شروط الحلقة:

$\forall A,B \in D = \bigcap_{i\in I} D_i \Rightarrow A,B \in D_i ;\forall i \in I \Rightarrow$

لأن D_i حلقة في X $\Rightarrow$

$A\cup B \in D_i ;\forall i\in I$

D مغلقة بالنسبة للاجتماع المنتهي

$A\cup B \in \bigcap_{i\in I} D_i = D \Rightarrow$

$\forall A,B \in D=\bigcap_{i\in I} D_i \Rightarrow A,B\in D_i ;\forall i\in I\Rightarrow$

لأن D_i حلقة في X $\Rightarrow$

$A-B\in D_i ;\forall i\in I$

D مغلقة بالنسبة للفرق النسبي

$A-B \in \bigcap_{i\in I} D_i = D \Rightarrow$

مما سبق نجد أن

$D=\bigcap_{i\in I} D_i$ حلقة في X

س : (٤٥ درجة)

أولاً : أ- الفضاء القابل للقياس : هو الثنائية (X,F) حيث X مجموعة ما غير خالية و F جبر تام في X .

ب : $\sigma(G)$: ليكن G صف غير خال من أجزاء مجموعة ما غير خالية X . إن $\sigma(G)$ هو جبر تام في X وندعوه الجبر التام المولد بالصف G وهو عبارة عن تقاطع جميع الجبور التامة في X والتي تحوي G .

ج : القياس التام : ليكن (X,D,μ) فضاء قياس. ندعو القياس μ قياساً تاماً إذا كانت كل مجموعة جزئية من مجموعة مهملة مقيسة

د : $B_{\mathbb{R}}$: ليكن $\mathbb{R}$ فضاء متري حقيقي مزود بالمسافة العادية : $d(x,y)=|x-y|$ حيث x و y من $\mathbb{R}$ عندئذ فإن $B_{\mathbb{R}}$ هو جبر بوريل في $\mathbb{R}$ وهو الجبر التام المولد من أسرة المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$.

هـ : τ قياس على الصف D : إذا كان D صف من أجزاء مجموعة ما غير خالية X (حلقة - جبر) بحيث أن $\phi \in D$ عندئذ ندعو الدالة المجموعية $\tau : D \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ بقياس على الصف D إذا حققت τ ما يلي :

١- $\tau(\phi)=0$

٢ : من أجل أية متتالية (A_i) من عناصر D غير المتقاطعة إذا كانت $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in D$ عندئذ فإن : $\tau(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i)$

٣ : $\tau(A)\geq 0$ وذلك $A \in D$

٤) خاصية تحت الجمعية التامة: إذا كان (X, D, μ) فضاء القياس μ وكانت $(A_i)_i$ متتالية من المجموعات المقيسة في D بالنسبة لـ μ عندئذ فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

البرهان: لدينا $A_i \in D$ من أجل $i = 1, 2, \ldots$ وبما أن D جبر تام في X

وبالتالي فإن: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in D$

الآن لنبني المتتالية $(B_i)_i$ بالشكل التالي:

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 - A_1$, $B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2) \ldots$

وكما نلاحظ فإن $(B_i)_i$ متتالية من عناصر D المقيسة لأن $B_i = A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$; $i \geq 2$ من أجل $i = 1, 2, \ldots$ وهي غير متقاطعة وكذلك فإن: $B_i \subseteq A_i$

وبالتالي:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

لأن μ متزايد

ملاحظة هامة: جميع التمارين الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل والمهم أن تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

طرطوس في 10/2/2022

مدرسة المقرر: د. عائشة علي صالح

الجمهورية العربية السورية | امتحان نظرية القياس | المدة: ساعتان
جامعة طرطوس | لطلاب السنة الثالثة ـ رياضيات | الدرجة العظمى: 90
كلية العلوم | الفصل الثاني | اسم الطالب:

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: عرف أسرة المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي مفروض μ^*.

ثانياً: لتكن $X = N$ ولتكن $\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{R}$ دالة مجموعة معرفة بالشكل التالي:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & ; \quad A = \phi \\ 1 & ; \quad A \neq \phi \end{cases}$$ والمطلوب

1. تحقق من أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$ ؟
2. أوجد أسرة المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لـ μ^* ؟

ثالثاً: برهن أن تقاطع أي أسرة غير خالية من الحلقات في مجموعة غير خالية X هو حلقة فيها .

السؤال الثاني: (45 درجة)

أجب عن الأسئلة التالية:

أولاً: وضح مفهوم التعابير والرموز الرياضية التالية : الفضاء القابل للقياس ، $\sigma(G)$ ، القياس التام ، B_R ، τ قياس على الصف D .

ثانياً: اذكر خاصة تحت الجمعية التامة التي يحققها القياس الموجب وبرهن عليها.

ثالثاً: برهن أن المجموعة $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n^n, n^n + \frac{1}{n+1} \right[$ مجموعة بوريلية في R ، ثم احسب قياسها حسب قياس لوبيغ.

*****************************انتهت الأسئلة*****************************

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق
د. عائدة صائمة

طرطوس في 2021/7/26م

1

جامعة طرابلس
كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس لطلاب مستوى
لامتحان الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠٢٠ - ٢٠٢١م

س١ : (45 درجة)

أولاً: نقول إن المجموعة $A \subseteq X$ مجموعة قابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي معرف μ^* على مجموعة ما غير خالية X إذا حققت المجموعة A أحد الشرطين التاليين:

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \bar{A})$$

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \bar{A})$$

ولكل $T \subseteq X$ مجموعة ما. هنا ونرمز لأسرة جميع المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لـ μ^* بـ M^* 5

ثانياً: المطلوب الأول: نتحقق من أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$:

أ: $\mu^*(A) \geq 0$ ولكل $A \in P(X)$ حسب تعريف μ^* 2

ب: كذلك فإن $\mu^*(\phi) = 0$ حسب تعريف μ^* 2

ج: خاصية تحت الجمعية التامة: لتكن $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر $P(X)$ ولنثبت أن

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$ 2

نناقش هنا الحالتان الكليتان:

الحالة الأولى: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \phi$ بالتالي فإن $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$ وكذلك فإن $A_i = \phi$ من أجل $i = 1, 2, \dots$ وبالتالي $\mu^*(A_i) = 0$ من أجل $i = 1, 2, \dots$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = 0$

إذاً:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$ 4

الحالة الثانية: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \neq \phi$ عندئذ توجد مجموعة واحدة على الأقل من المجموعات $A_1, A_2, \dots$ ولتكن A_{i_0} بحيث أن $A_{i_0} \neq \phi$ و $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$ و $\mu^*(A_{i_0}) = 1$ وبالتالي:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \mu^*(A_{i_0}) + \sum_{i \neq i_0} \mu^*(A_i) \geq \mu^*(A_{i_0}) = 1$$

أي أن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$ 5

وفي كلا الحالتين فإن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

3- خاصية التزايد: لتكن A و B مجموعتين من $P(X)$ ولتكن $A \subseteq B$ ولنبرهن أن $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

نناقش هنا الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: $\mu^*(B)=0 \Leftarrow B=\phi$ و $\mu^*(A)=0 \Leftarrow A=\phi$

وبالتالي $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

الحالة الثانية: $\mu^*(B)=1 \Leftarrow B \neq \phi$ ويكون لدينا احتمالات:

الاحتمال الأول: $\mu^*(A)=0 \Leftarrow A=\phi$ ويكون لدينا: $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

الاحتمال الثاني: $\mu^*(A)=1 \Leftarrow A \neq \phi$ ويكون لدينا: $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

وفي جميع الحالات فإن μ^* يحقق خاصية التزايد.

من (1) و (2) و (3) نجد أن μ^* قياس خارجي على $P(X)$

الطلب الثاني:

$A \subseteq \mathbb{N}$ قابلة للقياس بالنسبة لـ μ^* إذا وفقط إذا كان:

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T\cap A) + \mu^*(T\cap \bar{A}) \ ; \ \forall T \subseteq \mathbb{N}$$

من أجل $A \subseteq \mathbb{N}$ نناقش الحالتين التاليتين:

أ) $A=\phi$: $\mu^*(A)=0 \Leftarrow \mu^*(T\cap A)=\mu^*(A)=0$

كذلك فإن: $\bar{A}=\bar{\phi}=\mathbb{N} \Leftarrow \mu^*(T\cap\bar{A})=\mu^*(T\cap \mathbb{N})=\mu^*(T)$

إذاً:

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap\bar{A}) = 0+\mu^*(T\cap\mathbb{N})=\mu^*(T)$$

وبالتالي $A=\phi$ ومتممتها $\mathbb{N}$ مجموعتان قابلتان للقياس بالنسبة لـ μ^*

ب) إذا كانت $A \notin \{\phi, \mathbb{N}\}$ عندئذ نختار T بحيث يكون $T\cap A \neq \phi$, $T\cap\bar{A}\neq\phi$ وفي هذه الحالة يكون لدينا:

$\mu^*(T\cap A)=1$ و $\mu^*(T\cap\bar{A})=1 \Leftarrow$

$\mu^*(T) < \mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap\bar{A})$ أي أن A مجموعة غير قابلة للقياس بالنسبة لـ μ^* في هذه الحالة

وأسرة المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لـ μ^* هي: $\{\phi, \mathbb{N}\}$

ثانياً: لنفرض أن $\{D_i\}_{i\in I}$ أسرة غير خالية من الحلقات في مجموعة غير خالية X ولتكن D تقاطع أسرة هذه الحلقات في X أي $D=\bigcap_{i\in I} D_i$ ولنبرهن أن D حلقة في X:

بما أن X ملقة في D_i لذا $D_i \neq \phi$ فإن $i \in I$ من مبرهنة سابقة لكل ... وبالتالي:

$$D = \bigcap_{i \in I} D_i \neq \phi$$

2) الآن لنتحقق أن D تحقق شروط الحلقة:

أ) 2

$\forall A, B \in D = \bigcap_{i \in I} D_i \Rightarrow A, B \in D_i \; ; \forall i \in I \Rightarrow$

$A \cup B \in D_i \; ; \forall i \in I$. X ملقة في D_i لذا $\Rightarrow$

$A \cup B \in \bigcap_{i \in I} D_i = D \Rightarrow$ D مغلقة بالنسبة للاجتماع المنتهي

ب) 2

$\forall A, B \in D = \bigcap_{i \in I} D_i \Rightarrow A, B \in D_i \; ; \forall i \in I \Rightarrow$

$A - B \in D_i \; ; \forall i \in I$ X ملقة في D_i لذا $\Rightarrow$

$A - B \in \bigcap_{i \in I} D_i = D \Rightarrow$ D مغلقة بالنسبة للفرق النسبي

مما سبق نجد أن $D = \bigcap_{i \in I} D_i$ ملقة في X

س : (45 درجة)

أولاً: 1- الفضاء القابل للقياس: هو الثنائية (X, F) حيث X مجموعة ما غير خالية و F جبر تام في X.

4

2: $\sigma(G)$: ليكن G صف غير خالٍ من أجزاء مجموعة ما غير خالية X. إن $\sigma(G)$ هو جبر تام في X وندعوه الجبر التام المولد بالصف G وهو عبارة عن تقاطع جميع الجبور التامة في X والتي تحوي G.

5

3: القياس التام: ليكن (X, D, μ) فضاء قياس. ندعو القياس μ قياساً تاماً إذا كانت كل مجموعة μ- المهملة هي مجموعة μ- متوسطة.

4: B_{IR} : ليكن IR فضاء متري حقيقي مزود بالمسافة العادية:

$d(x, y) = |x - y|$ حيث x و y من IR

6

عندئذ فإن B_{IR} هو جبر بوريل في IR هو الجبر التام المولد من أسرة المجموعات المفتوحة في IR.

5: Z قياس على الصف D : إذا كان D صف من أجزاء مجموعة ما غير خالية X (ملقة - جبر) بحيث أن $\phi \in D$ عندئذ ندعو دالة المجموعة $Z : D \longrightarrow \bar{R}^+$ بقياس على الصف D إذا حققت Z ما يلي:

1- $Z(\phi) = 0$

أي: من أجل أي متتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ من عناصر D غير المتقاطعة إذا كان $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in D$ عندئذ فإن:

$$\tau\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i)$$

وكذلك $\tau(A) \geq 0 \quad \forall A \in D$

3 ن

6

ثانياً: خاصة تحت الجمعية التامة: إذا كان (X, D, μ) فضاء القياس μ وكانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من المجموعات القيوسة في D بالنسبة لـ μ عندئذ فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

7

البرهان: لدينا: $A_i \in D$ من أجل $i = 1, 2, \ldots$ وبما أن D جبر تام في X وبالتالي فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in D$

ندخل المتتالية $(B_i)_{i\geq 1}$ بالشكل:

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 - A_1, \quad B_2 = A_3 - (A_1 \cup A_2) \ldots$$

2

$$B_i = A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \quad ; \quad i \geq 2$$

ونلاحظ فإن $(B_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر D القيوسة لأن $B_i \subseteq A_i$ من أجل $i = 1, 2, \ldots$ وهي غير متقاطعة ولكن فإن:

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ وبالتالي

2

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

لأن μ متزايد

ثالثاً: لدينا $\left[n^n, n^n + \frac{1}{n+1}\right]$ مجال مغلق من $\mathbb{R}$ وبالتالي فهو مجموعة بوريلية أي عنصر من $B_{\mathbb{R}}$ وبما أن $B_{\mathbb{R}}$ جبر تام وبالتالي فإنه مغلق بالنسبة للاجتماع المعدود أي $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n^n, n^n + \frac{1}{n+1}\right]$ عنصر من $B_{\mathbb{R}}$

3

أي أن $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n^n, n^n + \frac{1}{n+1}\right]$ مجموعة بوريلية في $\mathbb{R}$

حساب قياس A وفق قياس لوبيغ:

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n^n, n^n + \frac{1}{n+1}\right]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\left[n^n, n^n + \frac{1}{n+1}\right]\right)$$

2

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^n + \frac{1}{n+1} - n^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$$

2) لأن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ متباعدة بالمقارنة مع المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

ملاحظة هامة: جميع التمارين الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح.

طرطوس في ٢٦/٧/٢٠٢١

مدرسة المقرر: د. عائشة علي صالحة

الجمهورية العربية السورية　　امتحان نظرية القياس　　المدة: ساعتان
جامعة طرطوس　　لطلاب السنة الثالثة–رياضيات　　الدرجة العظمى:90
كلية العلوم　　الفصل الأول　　اسم الطالب:

السؤال الأول: (35درجة)

1- عرف المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي مفروض μ^*.

2- لتكن X مجموعة ما غير منتهية، ولتكن $\mu^*: P(X) \longrightarrow \overline{R}$ دالة مجموعة معرفة بالشكل التالي: المعرفة بالشكل التالي:

$$\mu^*(A)=\begin{cases} \sqrt{n} \;;\; n & \text{مجموعة منتهية وعدد عناصرها } A \\ +\infty \;; & \text{مجموعة غير منتهية } A \end{cases}.$$

تحقق من أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$ ؟ ثم تحقق من أن μ^* دالة قياس على $P(X)$ ؟ ماذا تستنتج ؟

السؤال الثاني: (35درجة)

1- عرف الجبر ، الجبر التام واستنتج ما هو الفرق بينهما.

2- ليكن F جبراً تاماً في X، ولتكن $A \subseteq X$ ولنعرف الصف: $F_1 = \{A \cap B;\; B \in F\}$،
تحقق من أن F_1 جبر تام في A.

السؤال الثالث: (20درجة)

1- عرف كلاً من المفاهيم التالية: القياس ، القياس التام ، عملية تميم القياسات ؟

2- اذكر خاصتين من خواص القياس ؟

*************************انتهت الأسئلة*************************

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق
د. عائدة صائمة

طرطوس في 2021/2/11م

جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم تصحيح مادة نظرية القياس لطلاب س٣ /
للفصل ~~الثاني~~ الأول للعام الدراسي ٢٠٢٠ - ٢٠٢١

س١ : (5 درجة)

الطلب الأول: ندعو المجموعة $A \subseteq X$ مجموعة قابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي معروف μ^* معرف على مجموعة ما ولتكن X ، إذا حققت المجموعة A الشرط التالي:

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \bar{A}) \quad ; \forall T \subseteq X$$

وندعو T مجموعة الاختبار. 5

الطلب الثاني: أولاً: التحقق من أن μ^* قياس خارجي على $P(X)$:

أ) نلاحظ أن: $\mu^*(A) \geq 0 \; ; \forall A \in P(X)$ حسب تعريف μ^* أي أن μ^* دالة موجبة غير سالبة 2

ب) $\mu^*(\phi) = 0$ لأن ϕ مجموعة منتهية وعدد عناصرها مساوٍ للصفر

٣) خاصية تحت الجمعية التالية: ليكن $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر $P(X)$ ، ولنبرهن أن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \quad (1)$$

نناقش هنا حالتان: الحالة الأولى: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة منتهية وعدد عناصرها n وبالتالي فإن $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sqrt{n}$ وبما أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة منتهية وبالتالي فإن المجموعات $A_1, A_2, \dots$ تحوي عدد منتهٍ من المجموعات المنتهية ولتكن $A_1, A_2, \dots, A_k$ عدد عناصر كل منها على الترتيب: $n_1, n_2, \dots, n_k$ والمجموعات الباقية من هذه المجموعات هي مجموعات خالية وبالتالي فإن:

$$\mu^*(A_i) = \sqrt{n_i} \quad ; i = 1, 2, \dots, k$$

$$\mu^*(A_i) = \mu^*(\phi) = 0 \quad ; i = k+1, k+2, \dots$$

من جهة أخرى لدينا:

$$n \leq n_1 + n_2 + \dots + n_k + 0 + \dots$$

لأن

$$\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$$

وبالتالي:

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{n_1 + n_2 + \dots + n_k + 0 + \dots}$$
$$\leq \sqrt{n_1} + \sqrt{n_2} + \dots + \sqrt{n_k} + 0 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{n_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

وبما أن $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sqrt{n}$ وبالتالي فإن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \quad 2$$

الحالة الثانية: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة غير منتهية وبالتالي $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \infty$

ونناقش هنا احتمالات:

الاحتمال الأول: توجد مجموعة واحدة على الأقل غير منتهية من المجموعات $A_1, A_2, \dots$ ولتكن A_{i_0} عندئذ فإن: $\mu^*(A_{i_0}) = \infty$ ويكون لدينا:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0}}^{\infty}\mu^*(A_i) + \underbrace{\mu^*(A_{i_0})}_{=\infty} = \infty$$

وبالتالي فإن: $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$

الاحتمال الثاني: جميع المجموعات $A_1, A_2, \dots$ منتهية ولكن عددها غير منتهٍ وعدد عناصرها على الترتيب $n_1, n_2, \dots$ وبالتالي فإن:

$$\mu^*(A_i) = \sqrt{n_i} \ge 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{n_i} = \infty \quad (!)$$

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$$

أي في جميع الحالات فإن خاصية تحت الجمعية التامة محققة *

4) خاصية التزايد: إذا كانت A_1 و A_2 من $P(X)$ بحيث أن $A_1 \subseteq A_2$ لنبرهن أن $\mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2)$

نناقش هنا حالتين:

الحالة الأولى: A_2 مجموعة منتهية وعدد عناصرها n_2 وبالتالي $\mu^*(A_2) = \sqrt{n_2}$

وبما أن A_2 مجموعة منتهية وبالتالي A_1 منتهية ولنفرض أن عدد عناصرها n_1 عندئذ فإن: $\mu^*(A_1) = \sqrt{n_1}$

وبما أن $n_1 \le n_2$ (لأن $A_1 \subseteq A_2$) وبالتالي فإن: $\sqrt{n_1} \le \sqrt{n_2}$

إذاً: $\mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2)$

الحالة الثانية: A_2 مجموعة غير منتهية و $\mu^*(A_2) = \infty$ ويكون لدينا احتمالان:

الاحتمال الأول: A_1 مجموعة منتهية وعدد عناصرها n_1 وبالتالي: $\mu^*(A_1) = \sqrt{n_1} < \infty$

وبالتالي فإن: $\mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2)$

الاحتمال الثاني: A_1 مجموعة غير منتهية ويكون لدينا $\mu^*(A_1) = \infty$

$$\Rightarrow \mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2)$$

وفي جميع الحالات فإن خاصية التزايد محققة

من (1) و (2) و (3) و (4) نجد أن μ^* قياس خارجي على $P(X)$

: التحقق فيما إذا كانت μ^* دالة قياس على $P(X)$.

الإجابة الجبرية التامة : حتى نتحقق من أن μ^* تحقق هذه الخاصية نأخذ متتالية منتهية من المجموعات المنتهية وغير المتقاطعة من $P(X)$ ولتكن A_1 , A_2 حيث $A_1 \cap A_2 = \phi$ وعدد عناصر كل منهما على الترتيب n_1 و n_2 عندئذ فإن :

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \sqrt{n_1 + n_2} \neq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) = \sqrt{n_1} + \sqrt{n_2}$$ 4

وبالتالي μ^* لا تحقق خاصة الجمعية التامة إذاً μ^* ليست دالة قياس على $P(X)$ 2

ثالثاً: نستنتج أنه ليست كل دالة قياس خارجي هي دالة قياس في الحالة العامة 2

س ١ (15 درجة)

المطلب الأول : أولاً: تعريف الجبر : لتكن X مجموعة ما غير خالية ، ندعو الصف غير الخالي E من أجزاء X جبراً في X إذا حقق الشروط التالية :

$1- \forall A, B \in E \Rightarrow A \cup B \in E$ ، $2- \forall A \in E \Rightarrow \bar{A} \in E$

$3- \phi , X \in E$

أي أن E مغلق بالنسبة للاجتماع المنتهي والمتممة و ϕ و X عنصران من E 1.5

ثانياً: تعريف الجبر التام : لتكن X مجموعة ما غير خالية ، ندعو الصف غير الخالي F من أجزاء X جبراً تاماً في X إذا تحققت الشروط التالية :

$1- \phi , X \in F$ ، $2- \forall A \in F \Rightarrow \bar{A} \in F$

من أجل أية متتالية غير منتهية (A_i) من عناصر F فإن :

$3- \bigcup\limits_{i}^{\infty} A_i \in F$

أي أن F مغلق بالنسبة للاجتماع المعدود والمتممة و ϕ , X عنصران من F 1.5

ثالثاً: الفرق بينهما : إن كلاً من الجبر والجبر التام مغلق بالنسبة لعملية المتممة و العنصران X و ϕ عنصران منهما ولكن الجبر التام مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود وبالتالي فهو مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي بينما الجبر يكون مغلقاً بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي ولكن ليس من الضروري أن يكون مغلقاً بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود . 3

المطلب الثاني : التحقق من أن F_1 جبر تام في A

1- ϕ و A عنصران من F_1 لأنه :

بما أن F جبر تام في X وبالتالي X و ϕ عنصران من F إذاً حسب تعريف F_1 فإن ،

$$\phi = A \cap \phi \in F_1$$

$$A = A \cap X \in F_1$$ 3

كذلك بما أن $A \in F_1$ وبالتالي $F_1 \neq \{\phi\}$

٢: مغلق بالنسبة لعملية المتممة:

$\forall A\cap B \in F_1$ ولنبرهن أن $\overline{A\cap B}\in F_1$

لدينا $A\cap B\in F_1 \xRightarrow{\text{حسب تعريف } F_1} B\in F \Rightarrow \overline{B}\in F$ (لأن F جبر تام في X)

وبالتالي:

$$\overline{A\cap B} = A-(A\cap B) = A\cap(\overline{A\cap B}) = A\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$$

$$=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B}) = A\cap\overline{B}\in F_1$$

وبالتالي F_1 مغلق بالنسبة لعملية المتممة. 2

٣: الانغلاق بالنسبة للاجتماع المعدود:

لتكن $(A\cap B_i)_{i=1}^{\infty}$ متتالية كيفية من عناصر F_1 ولنبرهن أن: $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap B_i)\in F_1$

بما أن $(A\cap B_i)_{i=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر F_1 وبالتالي حسب تعريف F_1 فإن 2

$(B_i)_{i=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر F وبالتالي $\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\in F$ لأن F جبر تام في X

إذاً: 2

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap B_i) = A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)\in F_1$$

وبالتالي F_1 مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود

من (1) و (2) و (3) نجد أن F_1 جبر تام في A 1

س٣: (20 درجة)

الطلب الأول: تعريف القياس: لتكن X مجموعة ما غير خالية و D جبر تام فيها ندعو كل دالة مجموعة:

$$\mu: D \longrightarrow \overline{R}^+$$
$$A \longrightarrow \mu(A);\ \forall A\in D$$

تحقق الخاصتين: ١- $\mu(\phi)=0$

٢- من أجل أية متتالية $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ من عناصر D المنفصلة مثنى مثنى فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$$

(خاصة الجمعية التامة) μ قياساً على D 6

تعريف القياس التام: ليكن (X, D, μ) فضاء قياس. ندعو القياس μ قياساً تاماً إذا كانت كل مجموعة جزئية من مجموعة μ-مهملة هي مجموعة μ-مقيوسة. 4

وبشكل رياضي نكتب:

μ قياس تام $\Leftrightarrow$ B مجموعة جزئية كيفية من μ-مهملة $\Rightarrow$ B مجموعة μ-مقيوسة

عملية تتميم القياسات: هو إجراء يتم من خلاله الحصول على قياس تام من قياس مفروض ما. 4

الطلب الثامن: ١- خاصية الجمعية: إذا كان (X, D, μ) فضاء القياس μ وكانت $(A_i)_{i=1}^{n}$ متتالية منتهية من المجموعات القيوسة من D وغير المتقاطعة عندئذ فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

٢- خاصية تحت الجمعية التامة: إذا كان (X, D, μ) فضاء القياس μ وكانت $(A_i)_{i=1}$ متتالية من المجموعات القيوسة في D بالنسبة لـ μ عندئذ فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

3

ملاحظة (١): جميع التعاريف الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

ملاحظة (٢): في الطلب ٢ من السؤال الثالث توجد خواص أخرى للقياس غير مذكورة في سلم التصحيح وإذا ذكرها الطالب يأخذ علامة هذا الطلب كاملاً.

٢٠٢٤/٢/١١

~~٢٠٢٤/٢/١١~~ طرطوس في

مدرس المقرر: د. عائدة علي صالح

د. عائدة صالح

الجمهورية العربية السورية　　امتحان نظرية القياس　　المدة: ساعتان
جامعة طرطوس　　لطلاب السنة الثالثة–رياضيات　　الدرجة العظمى: ٩٠
كلية العلوم　　الدورة الثانية　　اسم الطالب:

السؤال الأول: (٣٥درجة)

١ـ عرف المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي مفروض μ^*.

٢ـ لتكن X مجموعة ما غير منتهية، ولتكن $\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{R}$ دالة مجموعة معرفة بالشكل التالي: $\mu^*(A) = \begin{cases} \sqrt{n} \ ; & n \text{ مجموعة منتهية عدد عناصرها } A \\ +\infty \ ; & A \text{ مجموعة غير منتهية} \end{cases}$ ، والمطلوب تحقق من أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$ ؟ ثم تحقق فيما إذا كانت μ^* دالة قياس على $P(X)$ ؟ ماذا تستنتج ؟

السؤال الثاني: (٣٥درجة)

١ـ عرف الجبر ، الجبر التام واستنتج ما هو الفرق بينهما.

٢ـ ليكن F جبراً تاماً في X ، ولتكن $A \subseteq X$ ولنعرف الصف: $F_1 = \{A \cap B;\ \ B \in F\}$ ، تحقق من أن F_1 جبر تام في A .

السؤال الثالث: (٢٠درجة)

١ـ عرف كلاً من المفاهيم التالية: القياس ، القياس التام ، عملية تميم القياسات ؟

٢ـ اذكر خاصتين من خواص القياس ؟

**************************انتهت الأسئلة**************************

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في ٢٠٢٠/٨/٣٠م

1

جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم تصحيح مادة نظرية القياس لطلاب السنة الرابعة
للفصل الثاني للعام الدراسي 2019 - 2020

س1 : (35 درجة)

الطلب الأول: ندعو المجموعة $A \subseteq X$ مجموعة قابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي معروف μ^* معرف على مجموعة ما غير خالية X. إذا حققت المجموعة A الشرط التالي:

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \bar{A}) \; ; \; \forall T \subseteq X$$

وندعو T مجموعة الاختبار. 6

الطلب الثاني: أولاً: لنتحقق أن μ^* قياس خارجي على $P(X)$:

1) نلاحظ أن: $\mu^*(A) \geq 0 \; ; \; \forall A \in P(X)$ حسب تعريف μ^* أي أن μ^* دالة موجبة غير سالبة. 2

2) $\mu^*(\phi) = 0$ لأن ϕ مجموعة منتهية وعدد عناصرها مساوٍ للصفر

3) خاصية تحت الجمعية التامة: لتكن $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر $P(X)$ ولنبرهن أن: 1

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

نناقش هنا حالتان: الحالة الأولى: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة منتهية وعدد عناصرها n وبالتالي فإن $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sqrt{n}$ وبما أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة منتهية وبالتالي فإن المجموعات $A_1, A_2, \ldots$ تحوي عدد منته من المجموعات المنتهية ولتكن $A_1, A_2, \ldots, A_k$ عدد عناصر كل منها على الترتيب: $n_1, n_2, \ldots, n_k$ والمجموعات الباقية من هذه المجموعات هي مجموعات خالية وبالتالي فإن:

$$\mu^*(A_i) = \sqrt{n_i} \; ; \; i = 1, 2, \ldots, k$$

$$\mu^*(A_i) = \mu^*(\phi) = 0 \; ; \; i = k+1, k+2, \ldots$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$n \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_k + 0 + \cdots$$ 2

لأن:

$$|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$$

وبالتالي:

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{n_1 + n_2 + \cdots + n_k + 0 + \cdots}$$

$$\leq \sqrt{n_1} + \sqrt{n_2} + \cdots + \sqrt{n_k} + 0 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{n_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

وبما أن $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sqrt{n}$ وبالتالي فإن:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$ 2

1

الحالة الثانية: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة غير منتهية وبالتالي $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \infty$

ونناقش هنا احتمالات:

الاحتمال الأول: توجد مجموعة واحدة على الأقل غير منتهية من المجموعات $A_1, A_2, \ldots$ ولتكن A_{i_0} عندئذ فإن: $\mu^*(A_{i_0}) = \infty$ ويكون لدينا:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{\infty} \mu^*(A_i) + \underbrace{\mu^*(A_{i_0})}_{=\infty} = \infty$$

2

وبالتالي فإن: $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

الاحتمال الثاني: جميع المجموعات $A_1, A_2, \ldots$ منتهية ولكن عددها غير منته وعدد عناصرها على الترتيب $n_1, n_2, \ldots$ وبالتالي فإن:

$$\mu^*(A_i) = \sqrt{n_i} \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{n_i} = \infty$$

إذاً

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

2

أي في جميع الحالات فإن خاصية تحت الجمعية التامة محققة.

٤) خاصية التزايد: إذا كانت A_1 و A_2 من $P(X)$ بحيث أن $A_1 \subseteq A_2$ لنبرهن أن $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$

1

نناقش هنا حالتين:

الحالة الأولى: A_2 مجموعة منتهية وعدد عناصرها n_2 وبالتالي $\mu^*(A_2) = \sqrt{n_2}$

وبما أن A_2 مجموعة منتهية وبالتالي A_1 منتهية ولنفرض أن عدد عناصرها n_1 عندئذ فإن: $\mu^*(A_1) = \sqrt{n_1}$

2

وبما أن $n_1 \leq n_2$ (لأن $A_1 \subseteq A_2$) وبالتالي فإن: $\sqrt{n_1} \leq \sqrt{n_2}$

إذاً $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$

1

الحالة الثانية: A_2 مجموعة غير منتهية و $\mu^*(A_2) = \infty$ ويكون لدينا احتمالان:

الاحتمال الأول: A_1 مجموعة منتهية وعدد عناصرها n_1 وبالتالي: $\mu^*(A_1) = \sqrt{n_1} < \infty$

1

وبالتالي فإن: $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$

الاحتمال الثاني: A_1 مجموعة غير منتهية ويكون لدينا $\mu^*(A_1) = \infty$

1

$$\Rightarrow \mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$$

وفي جميع الحالات فإن خاصية التزايد محققة.

من (١) و (٢) و (٣) و (٤) نجد أن μ^* قياس خارجي على $P(X)$

1

ثانياً: التحقق فيما إذا كانت μ^* دالة قياس على $P(X)$.

خاصية الجمعية التامة: حتى نتحقق من أن μ^* تحقق هذه الخاصية نأخذ متتالية منتهية من المجموعات المنتهية وغير المتقاطعة من $P(X)$ ولتكن A_1 و A_2 حيث $A_1 \cap A_2 = \phi$ وعدد عناصر كل منهما على الترتيب n_1 و n_2 عندئذ فإن:

4

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \sqrt{n_1 + n_2} \neq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) = \sqrt{n_1} + \sqrt{n_2}$$

2 وبالتالي μ^* لا تحقق خاصة الجمعية التامة إذاً μ^* ليست دالة قياس على $P(X)$

ثالثاً: نستنتج أنه ليست كل دالة قياس خارجي هي دالة قياس في الحالة العامة

2

س 1: (15 درجة)

الطلب الأول: أولاً: تعريف الجبر: لتكن X مجموعة ما غير خالية، ندعو الصف غير الخالي E من أجزاء X جبراً في X إذا حقق الشروط التالية:

$1-\ \forall A, B \in E \Rightarrow A \cup B \in E$ ، $2-\ \forall A \in E \Rightarrow \bar{A} \in E$

10

$3-\ \phi, X \in E$

أي أن E مغلق بالنسبة للاجتماع المنتهي والمتممة و ϕ و X عنصران من E

ثانياً: تعريف الجبر التام: لتكن X مجموعة ما غير خالية، ندعو الصف غير الخالي F من أجزاء X جبراً تاماً في X إذا تحققت الشروط التالية:

10

$1-\ \phi, X \in F$ ، $2-\ \forall A \in F \Rightarrow \bar{A} \in F$

من أجل أية متتالية غير منتهية (A_i) من عناصر F فإن:

$3-\ \bigcup_{i}^{\infty} A_i \in F$

أي أن F مغلق بالنسبة للاجتماع المعدود والمتممة و ϕ و X عنصران من F

ثالثاً: الفرق بينهما: إن كلاً من الجبر والجبر التام مغلقة بالنسبة لعملية المتممة و العنصران X و ϕ عنصران منها ولكن الجبر التام مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود وبالتالي فهو مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي بينما الجبر يكون مغلقاً بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي ولكن ليس من الضروري أن يكون مغلقاً بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود.

3

الطلب الثاني: التحقق من أن F_1 جبر تام في A.

أ: ϕ و A عنصران من F_1 لأنه:

بما أن F جبر تام في X وبالتالي X و ϕ عنصران من F إذاً: حسب تعريف F_1 فإن،

$$\phi = A \cap \phi \in F_1$$

3

$$A = A \cap X \in F_1$$

كذلك بما أن $A \in F_1$ وبالتالي $F_1 \neq \{\phi\}$

٢: البرهان بالنسبة لعملية المتممة:

ولنبرهن أن $\forall A \cap B \in F_1$ 	$\overline{A \cap B} \in F_1$

لدينا $A \cap B \in F_1 \Rightarrow B \in F \Rightarrow \overline{B} \in F$ (لأن F جبر تام في X)

حسب تعريف F_1

وبالتالي:

$$\overline{A \cap B} = A - (A \cap B) = A \cap \overline{(A \cap B)} = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$$

$$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B} \in F_1$$

وبالتالي F_1 مغلق بالنسبة لعملية المتممة. 2

٣: البرهان بالنسبة للاجتماع المعدود:

لتكن $(A \cap B_i)_{i \in I}$ متتالية كيفية من عناصر F_1 ولنبرهن أن: $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap B_i) \in F_1$

بما أن $(A \cap B_i)_{i \in I}$ متتالية من عناصر F_1 وبالتالي حسب تعريف F_1 فإن

$(B_i)_{i \in I}$ متتالية من عناصر F وبالتالي $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in F$ لأن F جبر تام في X 2

إذاً:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap B_i) = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \in F_1$$ 2

وبالتالي F_1 مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود.

من (1)، (2) و(3) نجد أن F_1 جبر تام في A 1

س٣: (20 درجة)

الطلب الأول: تعريف القياس: لتكن X مجموعة ما غير خالية و D جبر تام يُدعى كل دالة مجموعة:

$$\mu : D \longrightarrow \overline{R}^+$$
$$A \longrightarrow \mu(A) ; \forall A \in D$$

تحقق الخاصتين: ١- $\mu(\phi) = 0$

٢- من أجل أية متتالية $(A_i)_{i \in I}$ من عناصر D المنفصلة مثنى مثنى فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$ (خاصة الجمعية التامة) 6

قياساً على D

تعريف القياس التام: ليكن (X, D, μ) فضاء قياس. ندعو القياس μ قياساً تاماً إذا كانت كل مجموعة μ-مهملة هي مجموعة μ-قيوسة. 4

وبشكل رياضي نكتب:

B مجموعة كيفية μ-مهملة $\Leftarrow$ B مجموعة μ-قيوسة $\Leftrightarrow$ μ قياس تام

عملية تقييم القياسات: هو إجراء يتم من خلاله الحصول على قياس تام من قياس مفروض ما. 4

المطلب الثاني: ١- خاصية الجمعية : إذا كان (X, D, μ) فضاء القياس μ

3 وكانت $(A_i)_{i=1}^{n}$ متتالية منتهية من المجموعات المقيوسة من D وغير المتقاطعة عندئذ فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

٢- خاصية تحت الجمعية التامة : إذا كان (X, D, μ) فضاء القياس μ وكانت $(A_i)_{i=1}$ متتالية من المجموعات المقيوسة في D بالنسبة لـ μ عندئذ فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

3

ملاحظة (١): جميع التعاريف الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

ملاحظة (٢): في المطلب 2 من السؤال الثالث يوجد خواص أخرى للقياس غير مذكورة في سلم التصحيح وإذا ذكرها الطالب يأخذ علامة هذا المطلب كاملاً.

طرطوس في ٢٠٢٠/٨/٢٠

مدرس المقرر: د. عائدة علي صايغة

ـة طرطوس
ـة العلـوم
سم الرياضيـات

امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٩ / ٢٠٢٠
المادة: نظرية القياس – السنة الثالثة رياضيات
العلامة: ٩٠درجة. المدة: ساعتان . اسم الطالب:

السؤال الأول (٢٥ درجة):

(أ) عرف الجبر التام على مجموعة غير خالية X .

(ب) لتكن المجموعة $X = \mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية .

المطلوب : (١) أكتب جبرين تامين على هذه المجموعة .

(٢) ما هو الجبر التام المولّد بالصفين $\mathcal{H}_1 = \{\mathbb{R}\}$ و $\mathcal{H}_2 = \{\phi, \mathbb{R}\}$.

السؤال الثاني (٢٤ درجة):

(أ) عرف جبر بوريل في $\mathbb{R}$ ، واذكر أربع صفوف مولّدة له.

(ب) ما المقصود بالمجموعات البوريلية في $\mathbb{R}$ ؟

(جـ) عين المجموعات البوريلية فيما يلي:

$$[0,1],\ [-3,5[,\ \ ]-\infty,0[,\ \mathbb{N},\ \mathbb{R},\ \phi.$$

السؤال الثالث (٢٣ درجة):

(أ) عرف كلاً من : المجموعة القيوسة – الدالة القيوسة ، مع ذكر مثالين عن كل واحدة.

(ب) أثبت أن الدوال التالية قيوسة على المجال $[0,1]$:

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \end{cases}.$$

السؤال الرابع (١٨ درجة):

لتكن الدالتين $\varphi, \psi : [+1, +10] \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفتين بالشكل:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 5 & ; \quad +1 \le x \le 3 \\ 3 & ; \quad 3 < x < +10 \\ 10 & ; \quad x = +10 \end{cases} \quad , \quad \psi(x) = \begin{cases} 5 & ; \ +1 \le x \le 3 \\ & \\ 6 & ; \quad 3 \le x \le +10 \end{cases}$$

احسب التكاملات :

(١) $\int_{[+1,+10]} \varphi \, d\lambda$ (٢) $\int_{[+1,+10]} \psi \, d\lambda$

(٣) $\int_{[+1,+10]} [\, 8\varphi + 4\psi \,] \, d\lambda$

حيث λ قياس لوبيغ في $\mathbb{R}$.

مع التمنيات بالتوفيق والنجاح
٦ / ٢ / ٢٠٢٠ .

مدرس المادة : د. إبراهيم إبراهيم

وس
لوم
ياضيات

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس
السنة الثالثة - رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٩ / ٢٠٢٠

السؤال الأول (٢٥ درجة):

(أ) نقول عن الصف $\mathcal{F}$ من $P(X)$ إنه يشكل جبراً تاماً على X إذا تحقق:

(ج ت١) $\Phi, X \in \mathcal{F}$.

(ج ت٢) إذا كان $A \in \mathcal{F}$ فإن $A^c \in \mathcal{F}$.

(ج ت٣) من أجل $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

(ب) (١) جبرين تامين على X: $\mathcal{F}_1 = \{\Phi, X\}$, $\mathcal{F}_2 = P(X)$ ،
(توجد أمثلة أخرى).

(ج)

$$\mathcal{F}_\sigma(\mathcal{H}_1) = \{\Phi, \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{F}_\sigma(\mathcal{H}_2) = \{\Phi, \mathbb{R}\} = \mathcal{H}_2 .$$

السؤال الثاني (٢٤ درجة):

(أ) جبر بوريل في $\mathbb{R}$ هو الجبر التام المولد بصف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ ونرمزه $\mathcal{B}_\mathbb{R}$.

صفوف مولدة:

$$J_1 = \{]a,b[\, : a,b \in \mathbb{R}\},$$

$$J_2 = \{[a,b] \, : a,b \in \mathbb{R}\},$$

$$J_3 = \{]a,b] \, : a,b \in \mathbb{R}\},$$

$$J_4 = \{[a,b[\, : a,b \in \mathbb{R}\}$$

(توجد صفوف أخرى عليه ذكرها).

(ب) المقصود بالمجموعات البوريلية: تلك المجموعات الموجودة في جبر بوريل $\mathcal{B}_\mathbb{R}$.

(ج) كل المجموعات المذكورة بورلية.

ل الثالث (٢٢ درجة):

١) نقول إن المجموعة E قيوسة وفق μ^* إذا كان:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\cap E^c) \quad ; \ \forall A\in P(X).$$

مثال: Φ و X (توجد مجموعات أخرى).

• نقول إن الدالة $f:E\longrightarrow\mathbb{R}$ قيوسة على المجموعة E إذا كانت المجموعة $E(f>c)$ قيوسة من أجل كل عدد حقيقي c.

(يمكن ذكر المجموعات $E(f\geq c)$ و $E(f<c)$ و $E(f\leq c)$).

مثال: الدالة الثابتة - الدالة المستمرة

(توجد أمثلة أخرى).

ب) الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[0,1]$ فهي قيوسة.

الدالة $g(x)$ قيوسة؛ لأنه من أجل كل عدد حقيقي c لدينا:

$$E(g>c) = \{x\in[0,1] : g(x)>c\}$$
$$= \begin{cases} [0,1] & ; \ c<0 \\ [0,1]\cap\mathbb{Q} & ; \ 0\leq c<1 \\ \Phi & ; \ c\geq 1 \end{cases}$$

حيث إن المجموعات $[0,1]$ و Φ و $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ قيوسة حسب لوبيغ.

السؤال الرابع (١٨ درجة):

(١)
$$\int_{[1,10]} \varphi\, d\lambda = 5\cdot\lambda([1,3]) + 3\cdot\lambda(]3,10[) + 10\cdot\lambda(\{10\})$$
$$= 5(2) + 3(7) + 10(0) = 31.$$

(٢)
$$\int_{[1,10]} \psi\, d\lambda = 5\cdot\lambda([1,3]) + 6\cdot\lambda(]3,10])$$
$$= 5(2) + 6(7) = 52.$$

(٣)
$$\int_{[1,10]} [8\varphi + 4\psi]\, d\lambda = 8\int_{[1,10]}\varphi\, d\lambda + 4\int_{[1,10]}\psi\, d\lambda$$
$$= 8(31) + 4(52) = 456$$

مدرس المادة د. إبراهيم إبراهيم

الجمهورية العربية السورية　　امتحان نظرية القياس　　المدة: ساعتان

جامعة طرطوس　　لطلاب السنة الثالثة–رياضيات　　الدرجة العظمى: ٩٠

كلية العلوم　　الدورة التكميلية　　اسم الطالب:

السؤال الأول: (٣٠ درجة)

١- عرف المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي مفروض μ^*.

٢- لتكن X مجموعة ما غير منتهية، ولتكن $\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{R}$ دالة مجموعة معرفة بالشكل التالي: المعرفة بالشكل التالي: $\mu^*(A)=\begin{cases} \sqrt{n} \; ; & n \text{ عدد عناصرها و منتهية } A \\ +\infty \; ; & \text{ غير منتهية } A \end{cases}$ **. تحقق من أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$ ثم تحقق من أن μ^* دالة قياس على $P(X)$؟ ماذا تستنتج ؟**

السؤال الثاني: (٣٠ درجة)

١- عرف الجبر ، الجبر التام واستنتج ما هو الفرق بينهما.

٢- ليكن F جبراً تاماً في X، ولتكن $A \subseteq X$ ولنعرف الصف: $F_1 = \{A \cap B; \;\; B \in F\}$، تحقق من أن F_1 جبر تام في A.

السؤال الثالث: (٣٠ درجة)

١. عرف قياس لوبيغ –ستيلجس .

٢. برهن أن المجموعة $A \subseteq R$ بوريلية ، ثم احسب قياسها ، حيث : $A = [a,b]$.

****************************انتهت الأسئلة****************************

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في ٢٠١٨/٨/٢٨

جامعة طرطوس

كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس لطلاب السنة

للدورة التكميلية للعام الدراسي 2017 - 2018

السؤال الأول: (30 درجة)

أ: عرف المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي μ^*.

ب: لتكن X مجموعة ما غير خالية، ولتكن $\mu^* : P(X) \longrightarrow \bar{R}$ دالة مجموعة معرفة بالشكل التالي:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{A منتهية وعدد عناصرها n} \\ +\infty & \text{A غير منتهية} \end{cases}$$

تحقق من أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$ ثم تحقق من أن μ^* دالة قياس على $P(X)$ ماذا تستنتج؟

الحل: الطلب الأول: ندعو المجموعة $A \subseteq X$ مجموعة قابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي μ^* معرف على مجموعة ما غير خالية X إذا حققت المجموعة A الشرط التالي: 5

$$\mu^*(T) = \mu^*(T\cap A) + \mu^*(T\cap \bar{A}) \;;\; \forall A \subseteq X$$

وندعو T مجموعة الاختبار.

الطلب الثاني: أولاً: μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$

2

أ: نلاحظ أن $\mu^*(A) \geq 0$ حسب تعريف μ^* وذلك $\forall A \in P(X)$

كذلك $\mu^*(\phi) = 0$ لأن ϕ مجموعة منتهية وعدد عناصرها يساوي الصفر

ب: خاصية تحت الجمعية التامة: لتكن $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر $P(X)$ ولنبرهن أن

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$ 1

لدينا حالتان:

الحالة الأولى: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة منتهية وعدد عناصرها n $\Leftarrow \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sqrt{n}$ وفي هذه الحالة فإن المجموعات $A_1, A_2, \ldots$ فيها عدد منته من المجموعات المنتهية ولتكن $A_1, A_2, \ldots, A_k$ وعدد عناصرها على الترتيب $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ويكون لدينا $\mu^*(A_i) = \sqrt{n_i}$ من أجل $i = 1, 2, \ldots, k$ أما المجموعات الباقية فهي مجموعات خالية وهي المجموعات $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots$ أي أن $(A_i)_{i=k+1}^{\infty}$ حيث $A_i = \phi$ ويكون لدينا $\mu^*(A_i) = \phi$ من أجل $i = k+1, \ldots$ وكذلك لدينا:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \mu^*(A_1) + \cdots + \mu^*(A_k) + \underbrace{\mu^*(A_{k+1})}_{0} + \cdots$$

$$= \sqrt{n_1} + \sqrt{n_2} + \cdots + \sqrt{n_k} + 0 + 0 + \cdots$$

$$= \sqrt{n_1} + \cdots + \sqrt{n_k}$$

3

ومن جهة أخرى لدينا: $\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$ وبالتالي:

$$m \le \sum_{i=1}^{\infty} m_i = m_1+m_2+\cdots+m_k$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \le \sqrt{n_1+n_2+\cdots+n_k} \le \sqrt{n_1}+\cdots+\sqrt{n_k} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

الحالة الثانية (٢): $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة غير منتهية وبالتالي $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \infty$ ولدينا هنا احتمالات :

أ: إحدى عناصر المتتالية $(A_i)_i$ على الأقل مجموعة غير منتهية ولتكن A_{i_0} وبالتالي فإن $\mu^*(A_{i_0}) = \infty$ ويكون لدينا في هذه الحالة :

$$\infty = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \underbrace{\mu^*(A_{i_0})}_{\infty} + \sum_{\substack{i \ne i_0 \\ i=1}}^{\infty} \mu^*(A_i) \ge \mu^*(A_{i_0}) = +\infty$$

ولكن $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \infty$ وبالتالي فإن (3)

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

ب: جميع المجموعات A_i منتهية و $i=1,2,\dots$ ولكن عددها لانهائي لنفرض أن عدد عناصر A_i هو n_i من أجل $i=1,2,\dots$ وبالتالي فإن : $\mu^*(A_i) = \sqrt{n_i} \ge 1$ من أجل $i=1,2,\dots$

ولكن عددها لانهائي فإن لدينا :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) + \cdots = \sqrt{n_1} + \sqrt{n_2} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{n_i} = \infty$$

وبالتالي (1)

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \infty \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

وفي جميع الحالات فإن :

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

٣: خاصة التزايد : لتكن $A_1, A_2 \in P(X)$ و $A_1 \subseteq A_2$ ولنبرهن أن $\mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2)$ (1)

من أجل ذلك لدينا الحالتان التاليتان :

الحالة الأولى: A_1 منتهية وعدد عناصرها هو n_1 ولدينا هنا احتمالان :

أ: A_2 منتهية وعدد عناصرها n_2 وبما أن $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow n_1 \le n_2$

$$\Rightarrow \sqrt{n_1} \le \sqrt{n_2} \Rightarrow \mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2) \quad (1)$$

ب: A_2 غير منتهية وبالتالي $\mu^*(A_2) = \infty \Rightarrow n_1 \le \infty \Rightarrow \mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2)$

الحالة الثانية: A_1 غير منتهية وبالتالي $\mu^*(A_1) = \infty$ وبما أن A_1 غير منتهية وبالتالي A_2 غير منتهية $\Rightarrow \mu^*(A_2) = \infty$

$$\mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2) \quad (1)$$

وفي كلا الحالتين

$$\mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2)$$

مما سبق نجد أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$.

ثانياً: μ^* دالة قياس على $P(X)$:

أ: بما أن μ^* قياس خارجي على $P(X)$ وبالتالي فإن $\mu^*(A) \ge 0$ (1) وذلك $\forall A \in P(X)$

وكذلك فإن $\mu^*(\emptyset) = 0$ (1)

ت: لنتحقق من أن μ^* يحقق الخاصة تامة الجمعية من أجل ذلك لنأخذ متتالية من عنصرين هما A_1 و A_2 من عناصر $P(X)$ بحيث $A_1 \cap A_2 = \Phi$ وحيث أن A_1, A_2 مجموعتين منتهيتين وعدد عناصر كل منهما n_1 و n_2 على الترتيب عندئذ فإن:

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \sqrt{n_1+n_2} \neq \sqrt{n_1}+\sqrt{n_2} = \mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)$$

لأن $\sqrt{n_1+n_2} < \sqrt{n_1}+\sqrt{n_2}$

وبالتالي μ^* لا يحقق الخاصة تامة الجمعية بشكل عام. إذاً μ^* ليست دالة قياس على $P(X)$.

ثالثاً: نستنتج مما سبق أنه ليس بالضرورة أن تكون كل دالة قياس خارجي هي دالة قياس

السؤال الثاني: (30 درجة):

عرف الجبر، الجبر التام واستنتج الفرق بينهما.

- ليكن F جبراً تاماً في X ولتكن $A \subseteq X$ ولنعرف الصف $F_1 = \{A \cap B ; B \in F\}$،
تحقق من أن F_1 جبر تام في A.

الحل: الطلب الأول: الجبر: لتكن X مجموعة ما غير خالية. ندعو الصف غير الخالي E من أجزاء X جبراً في X إذا كان:

1- $\phi, X \in E$

2- $\forall A,B \in E \Rightarrow A \cup B \in E$

3- $\forall A \in E \Rightarrow \bar{A} \in E$

الجبر التام: ندعو الصف غير الخالي F من أجزاء X، حيث X مجموعة ما غير خالية، جبراً تاماً في X إذا حقق الشروط التالية:

أ: من أجل أية متتالية $(A_i)_i$ من عناصر F فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ أي أن F مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود.

ب: من أجل أي مجموعة A من F فإن $\bar{A} \in F$ أي أن F مغلق بالنسبة لعملية الإتمام.

الفرق بين الجبر والجبر التام: إن الجبر التام مغلق بالنسبة لعملية الإتمام والاجتماع المعدود والذي يحوي ضمنياً الاجتماع المنتهي وبالتالي كل جبر تام في X هو جبر فيه. علماً بأن الجبر ليس مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود بشكل عام. وبالتالي ليس كل جبر في X هو جبراً تاماً فيه في الحالة العامة.

الطلب الثاني: F_1 جبر تام في A:

أ: $\phi \in F_1$ لأن: $\phi = A \cap \phi$

كذلك فإن $A \in F_1$ لأن $A = A \cap X$ و $X \in F$ و F جبر تام في X، $A \subseteq X$

وبما أن $A \in F_1$ وبالتالي $F_1 \neq \phi$ إذاً F_1 حيث تم ... من أجزاء A

ثانياً: F_1 مغلق بالنسبة لعملية الإتمام:

لنبرهن أن $\forall A\cap B \in F_1$; $\overline{A\cap B} \in F_1$

لدينا $\overline{A\cap B} = A-(A\cap B) = A\cap(\overline{A\cap B}) = A\cap(\bar{A}\cup\bar{B}) = (A\cap\bar{A})\cup(A\cap\bar{B})$

$= \phi\cup(A\cap\bar{B}) = A\cap\bar{B} \in F_1$ (لأن $\bar{B}\in F$ و F جبر تام)

إذاً F_1 مغلق بالنسبة لعملية الإتمام.

ثالثاً: F_1 مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود:

لتكن $(B_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر F عندئذ فإن $(A\cap B_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر F_1

لدينا $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap B_i) = A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right) \in F_1$

وبالتالي F_1 مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود. لأن F جبر تام في X.

إذاً من (1) و (2) و (3) نجد أن F_1 جبر تام في A.

السؤال الثالث: (30 درجة)

أ: عرف قياس لوبيغ ستيلجس.

ب: برهن أن المجموعة $A\subseteq\mathbb{R}$ بوريلية ثم احسب قياسها حيث $A=[a,b]$

الحل: الطلب الأول: قياس لوبيغ ستيلجس: هو القياس المعمم الناتج من تمديد القياس τ من $\mathcal{D}$ إلى أسرة مجموعات بورل في $\mathbb{R}$ B_R ونرمز له بالرمز μ_F حيث τ قياس على الحلقة $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}=\{D : D=\bigcup_{i=1}^{n}]a_i,b_i] \;\&\;]a_i,b_i]\cap]a_j,b_j]=\phi\; ; \; i\neq j\; ; \; 1\leq i\leq n\}$$

و τ معرف بالشكل:

$$\tau(D)=\tau\left(\bigcup_{i=1}^{n}]a_i,b_i]\right)=\sum_{i=1}^{n}\tau(]a_i,b_i])=\sum_{i=1}^{n}F(b_i)-F(a_i)\; ; \; D\in\mathcal{D}$$

و F دالة توزيع على $\mathbb{R}$:

أما M_F فهي أسرة المجموعات القابلة للقياس بالنسبة للقياس الخارجي μ_F^* والمولد بالقياس τ والمعطى بالعلاقة:

$$\mu_F^*(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\tau(A_i)\; ; \; A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \;\&\; A_i\in\mathcal{D}\right\}$$

و μ_F هو قياس منته وتام.

الطلب الثاني: إن $A=[a,b]$ حيث $[a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}[$ وبما أن التقاطع المعدود للمجموعات المفتوحة هو مجموعة بوريلية وبالتالي A مجموعة بوريلية وبما أن

كل مجموعة بورلية مجموعة قيوسة وفق قياس لوبيغ - ستيلجس وبالتالي يمكن حساب قياسها كما يلي :

$$\mu_F(A)=\mu_F([a,b])=\mu_F(]a,b]\cup\{a\})=\mu_F(]a,b])+\mu_F(\{a\})\quad(*)$$

ولكن $\mu_F(\{a\})$ نحسبها كما يلي :

$$\mu_F(\{a\})=\mu_F\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}]a-\tfrac{1}{i},a]\right)=\lim_{i\to\infty}\mu_F(]a-\tfrac{1}{i},a])$$

حسب مبرهنة المتتاليات المتناقصة للمجالات

$$=\lim_{i\to\infty}\left(F(a)-F(a-\tfrac{1}{i})\right)=F(a)-F(a-)\Rightarrow\mu_F(\{a\})=F(a)-F(a-)$$

نعوض في (*) فنجد أن :

$$\mu_F(A)=F(b)-F(a)+F(a)-F(a-)=F(b)-F(a-)$$

5

ملاحظة : جميع التمارين الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة الموجودة في سلم التصحيح

الموصل 28/8/2018

مدرسة المقرر د. عائدة صبابحة

الجمهورية العربية السورية	امتحان نظرية القياس	المدة: ساعتان
جامعة طرطوس	لطلاب السنة الثالثة–رياضيات	الدرجة العظمى:80 درجة
كلية العلوم	الفصل الدراسي الأول	اسم الطالب:

السؤال الأول (35درجة)

أثبت صحة ما يلي:

1- تقاطع أسرة غير خالية من الجبور التامة في X هو جبر تام في X.

2- إذا كان (X,F,μ) فضاء قياس فإن:

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B) \;;\; \forall \quad A,B\in F \, .$$

3- كل جبر في X ، حيث X مجموعة ما غير خالية ، حلقة فيها.

السؤال الثاني: (30 درجة)

لتكن X مجموعة ما غير منتهية، ولتكن $\mu^{*}:P(X)\to\overline{R}$ دالة مجموعة معرفة بالشكل التالي:

$$\mu^{*}(A)=\begin{cases}\sqrt{n} \;; & n \text{ عدد عناصرها} \quad A \text{ مجموعة منتهية و} \\ +\infty \;; & A \text{ مجموعة غير منتهية}\end{cases}$$

تحقق من أن μ^{*} دالة قياس خارجي على $P(X)$ ؟ ثم تحقق من أن μ^{*} دالة قياس على $P(X)$ ؟ ماذا نستنتج ؟

السؤال الثالث : (15درجة)

عرف المجموعة الوحيدة العنصر والمجموعة العدودة ، ثم أثبت أن كلا منهما مجموعتان بوريليتان في R واحسب قياس المجموعة الوحيدة العنصر وفق قياس لوبيغ –ستيلجس μ_{l}.

***************************انتهت الأسئلة**************************

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2018/2/13

$\boxed{1}$

الجمهورية العربية السورية

جامعة الموصل

كلية العلوم　　　سلم التصحيح لمادة نظرية القياس لطلاب السنة الرابعة

للفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٧-٢٠١٨

السؤال الأول (35 درجة)

أثبت صحة ما يلي:

١- تقاطع أسرة غير خالية من الجبور التامة في X هو جبر تام في X.

٢- إذا كان (X, F, μ) فضاء قياسياً فإن:

$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$; $\forall A, B \in F$

٣- كل جبر في X هو جبر تام في X حيث X مجموعة غير خالية ومنتهية.

الحل: برهان (1) لتكن $\{F_i\}_{i \in I}$ أسرة غير خالية من الجبور التامة في X ولنرمز $\bigcap_{i \in I} F_i$ (2)

ولنبرهن أن F جبر تام في X

أ: بما أن F_i جبر تام في X وذلك $\forall i \in I$ (3)

$\Leftarrow F_i \neq \phi$; $\forall i \in I \Leftarrow \bigcap_{i \in I} F_i \neq \phi$

ب: F مغلقة بالنسبة لعملية المتممة:

(لأن F_i جبر تام في X) $\forall i \in I$; $\bar{A} \in F_i \Leftarrow \forall i \in I$; $A \in F_i \Leftarrow A \in F = \bigcap_{i \in I} F_i$ (4)

$\Leftarrow \bar{A} \in \bigcap_{i \in I} F_i = F$

F مغلقة بالنسبة لعملية المتممة

ج: F مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود:

لتكن (A_j) متتالية من عناصر $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ ولنبرهن أن $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in F$ (5)

$j = 1, 2, \dots$; $\forall i \in I$; $A_j \in F_i \Leftarrow j = 1, 2, \dots$; $A_j \in F = \bigcap_{i \in I} F_i$

$F = \bigcap_{i \in I} F_i \ni \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \Leftarrow$ (لأن F_i جبر تام في X) $\forall i \in I$; $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in F_i$

F مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود

مما سبق نجد أن $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ جبر تام في X (2)

برهان 2: لدينا

$A \cup B = A \cup [B - (A \cap B)]$

وبما أن $A \cap [B - (A \cap B)] = \phi$ (5)

و A و B من F

و μ قياس على F وبالتالي μ يحقق خاصة الجمعية! (3)

$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B - (A \cap B))$

$= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ (لأن $A \cap B \subseteq B$ و μ قياس يحقق خاصة التزايد) (5)

برهان (3): ليكن F جبر في X ولنبرهن أن F مغلقة في X.

الآن شروط الحلقة :

1- $\forall A, B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$

(2) الآن F جبر على X)

2- $\forall A, B \in F \Rightarrow A - B = A \cap \overline{B} \in F$

(3) الآن F جبر مغلق بالنسبة للتقاطع) F^c

(1) وبالتالي F مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي والفرق النسبي إذاً

F حلقة في X .

السؤال الثاني: (20 درجة)

لتكن X مجموعة ما غير منتهية ولتكن $\mu^*: P(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ دالة مجموعة معرفة بالشكل التالي:

A مجموعة منتهية وعدد عناصرها n ، $\sqrt{n}$

A مجموعة غير منتهية ، $\mu^*(A) = \infty$. تحقق من أن μ^* دالة قياس

خارجي على $P(X)$ ؟ ثم تحقق من أن μ^* دالة قياس على $P(X)$ ؟ ماذا تستنتج ؟

الحل: أولاً: μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$

أ: نلاحظ أن $\mu^*(A) \geq 0$ حسب تعريف μ^* ، $\forall A \in P(X)$ (1)

كذلك $\mu^*(\emptyset) = 0$ لأن $\emptyset$ مجموعة منتهية وعدد عناصرها يساوي الصفر (1)

ج: خاصية تحت الجمعية التامة: لتكن $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر $P(X)$ ولنبرهن أن

(1) $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ لدينا حالتان :

الحالة الأولى: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة منتهية وعدد عناصرها n ، $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sqrt{n}$

وفي هذه الحالة فإن المجموعات $A_1, A_2, \dots$ فيها عدد منته من المجموعات المنتهية

ولتكن $A_1, A_2, \dots, A_k$ وعدد عناصرها على الترتيب $n_1, n_2, \dots, n_k$ ويكون

لدينا: $\mu^*(A_i) = \sqrt{n_i}$ من أجل $i = 1, 2, \dots, k$ أما المجموعات الباقية هي

مجموعات خالية ولتكن المجموعات $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots$ أي أن

(1) $(A_i)_{i=k+1}^{\infty}$ حيث $A_i = \emptyset$ ويكون لدينا $\mu^*(A_i) = 0$ من أجل $k+1, \dots$

وكذلك لدينا: $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \mu^*(A_1) + \dots + \mu^*(A_k) + \mu^*(A_{k+1}) + \dots$

$$= \sqrt{n_1} + \dots + \sqrt{n_k} + 0 + 0 + \dots = \sqrt{n_1} + \sqrt{n_2} + \dots + \sqrt{n_k}$$

من جهة أخرى لدينا: $\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$ وبالتالي:

$$n \leq \sum_{i=1}^{\infty} n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \leq \sqrt{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \leq \sqrt{n_1} + \dots + \sqrt{n_k} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

الحالة الثانية: (1) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة غير منتهية وبالتالي $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \infty$ ولدينا الحالات

أ: إحدى عناصر المتتالية (A_i) على الأقل مجموعة غير منتهية ولتكن A_{i_0} وبالتالي

فإن $\mu^*(A_{i_0}) = \infty$ ويكون لدينا في هذه الحالة .

$\mu^*(\bigcup A_i)=\infty$ وبالتالي فإن:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

لجميع المجموعات A_i منتهية وغير خالية من أجل $i=1,2,\dots$ ولكل عدد من الحالات

نفرض أن عدد عناصر A_i هو n_i من أجل $i=1,2,\dots$ وبالتالي فإن:

$\mu^*(A_i)=\sqrt{n_i}\ge 1$ من أجل $i=1,2,\dots$

ولكن من جهة أخرى لدينا:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)=\underset{\ge 1}{\mu^*(A_1)}+\underset{\ge 1}{\mu^*(A_2)}+\dots=\sqrt{n_1}+\sqrt{n_2}+\dots=\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{n_i}=+\infty$$

وبالتالي:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\infty \le \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$$

ومن جميع الحالات فإن:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$$

ج: خاصة التزايد: لتكن $A_1, A_2\in P(X)$ ولنفرض أن $A_1\subseteq A_2$ لنثبت أن: $\mu^*(A_1)\le\mu^*(A_2)$

من أجل ذلك لدينا الحالتان التاليتان ولدينا هنا احتمالات

الحالة الأولى: A_1 منتهية وليكن عدد عناصرها هو n_1 ولدينا

أ) A_2 منتهية وعدد عناصرها n_2 عندئذ وبما أن $A_1\subseteq A_2 \Leftarrow n_1\le n_2$

$\Rightarrow \sqrt{n_1}\le\sqrt{n_2} \Rightarrow \mu^*(A_1)\le\mu^*(A_2)$

ب) A_2 غير منتهية وبالتالي: $\mu^*(A_2)=\infty$ ، $n_1<\infty$

$\Rightarrow \mu^*(A_1)\le\mu^*(A_2)$

الحالة الثانية: A_1 غير منتهية وبالتالي $\mu^*(A_1)=\infty$ وبما أن A_1 غير منتهية وبالتالي A_2 غير منتهية $\Leftarrow \mu^*(A_2)=\infty \Leftarrow$ $\mu^*(A_1)\le\mu^*(A_2)$

وفي كلا الحالتين $\mu^*(A_1)\le\mu^*(A_2)$

مما سبق نجد أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$.

ثانياً: μ^* دالة قياس على $P(X)$:

أ) بما أن μ^* قياس خارجي على $P(X)$ وبالتالي فإن: $\mu^*(A)\ge 0$ وذلك $\forall A\in P(X)$ وكذلك فإن $\mu^*(\phi)=0$

ب: لنتحقق من أن μ^* تحقق الخاصة تامة الجمعية من أجل ذلك لنأخذ مثالاً بسيطاً عنصرين A_1 و A_2 من عناصر $P(X)$ حيث $A_1\cap A_2=\phi$ وحيث أن A_1 و A_2 مجموعتين منتهيتين وعدد عناصر كل منهما على الترتيب n_1 و n_2 عندئذ فإن

$$\mu^*(A_1\cup A_2)=\sqrt{n_1+n_2}\neq\sqrt{n_1}+\sqrt{n_2}=\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)$$

لأن $\sqrt{n_1+n_2}<\sqrt{n_1}+\sqrt{n_2}$

وبالتالي μ^* لا يحقق الخاصة تامة الجمعية بشكل عام إذاً μ^* ليست دالة قياس على $P(X)$.

ثالثاً: نستنتج مما سبق أنه ليس من الضروري أن تكون كل دالة قياس خارجي هي دالة قياس.

السؤال الثالث: (25 درجة)
عرف المجموعة الوحيدة العنصر والمجموعة المعدودة ثم أثبت أن كلاً منها مجموعات بوريلية في $\mathbb{R}$ واحسب قياس المجموعة الوحيدة العنصر وفق قياس لوبيغ - ستيلجس μ_F

الحل: المجموعة الوحيدة العنصر: هي المجموعة المؤلفة من عنصر واحد فقط مثل $\{a\}$ (3)

المجموعة المعدودة: نقول عن المجموعة الغير منتهية E أنها مجموعة معدودة إذا كان بالإمكان إيجاد تطابق $\varphi : \mathbb{N} \to E$ بين مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ و هذه المجموعة. (9)

المجموعة الوحيدة العنصر $\{a\}$ مجموعة بوريلية في $\mathbb{R}$ لأن:
$\mathbb{R} \supseteq \{a\} = [a,a] = \bigcap]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}[\;,\; n \in \mathbb{N}$ (4)
مجموعة بوريلية

وأن مجموعة معدودة في $\mathbb{R}$ هي مجموعة بوريلية لأنها اجتماع معدود للمجموعات وحيدة العنصر وبوريلية و $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ جبر تام σ وهو مغلق بالنسبة للاجتماع المعدود مجموعة بوريلية وبالتالي فهي قابلة للقياس (3)

حساب $\mu_F(\{a\})$: $\mathbb{R} \supseteq \{a\}$ مجموعة بالنسبة لـ μ_F

$\mu_F(\{a\}) = \mu_F\left(\bigcap]a-\frac{1}{i}, a]\right) = \lim_{i \to \infty} \mu_F(]a-\frac{1}{i}, a])$

حسب نظام متتالية متناقصة من المجالات

$= \lim_{i \to \infty} \left(F(a) - F(a-\frac{1}{i})\right) = F(a) - F(a-)$ (6)

ملاحظة: جميع التمارين الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

طرطوس في 13/2/2018

مدرسة المقرر: د. عائدة صباغ

الجمهورية العربية السورية   امتحان نظرية القياس   المدة: ساعتان
جامعة طرطوس   لطلاب السنة الثالثة –رياضيات   الدرجة العظمى:80
كلية العلوم   الدورة الثالثة   اسم الطالب:

السؤال الأول: (25درجة)

1- عرف الجبر ، الجبر التام واستنتج ما هو الفرق بينهما.
2- ليكن F جبراً تاماً في X ، ولتكن $A \subseteq X$ ولنعرف الصف: $F_1 = \{A \cap B; \quad B \in F\}$ ، تحقق من أن F_1 جبر تام في A .

السؤال الثاني: (30درجة)

لتكن X مجموعة ما غير منتهية ولتكن $\mu^* : P(X) \longrightarrow \overline{R}$ دالة مجموعة معرفة بالشكل التالي:

المعرفة بالشكل التالي: $\mu^*(A) = \begin{cases} \sqrt{n} \; ; & A \text{ مجموعة منتهية عدد عناصرها } n \\ +\infty \; ; & A \text{ مجموعة غير منتهية} \end{cases}$. تحقق من أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$ ؟ ثم تحقق من أن μ^* دالة قياس على $P(X)$ ؟ ماذا تستنتج ؟

السؤال الثالث: (25درجة)

1-أثبت أن أي دالة قياس μ معرفة على جبر تام يحوي جميع أنواع المجالات في R تعين دالة توزع متزايدة ومستمرة من اليمين.

2-إذا كان τ قياساً على حلقة D في X ، وكانت $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ ، حيث $C_i \in D$ من أجل $i = 1,2,3,\ldots$ ، فاكتب دالة القياس الخارجي المولدة من القياس τ .

---------------------------------------انتهت الأسئلة---------------------------------------

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2017/8/30

$\boxed{1}$

جامعة طرطوس
كلية العلوم

الحل النموذجي لمادة نظرية القياس لطلاب معلم / السنة الثالثة العام الدراسي 2016 - 2017

السؤال الأول: (15 درجة)

1. عرف الجبر والجبر التام واستنتج ما هو الفرق بينهما.

2. ليكن F جبراً تاماً في X، ولتكن $A \subseteq X$ ولنعرف الصف:
$F_1 = \{A \cap B : B \in F\}$ تحقق من أن F_1 جبر تام في A.

الحل: الطلب الأول: الجبر: لتكن X مجموعة ما غير خالية ندعو الصف E من أجزاء X جبراً في X إذا كان:

$1- \ \phi, X \in E$

$2- \ \forall A, B \in E : A \cup B \in E$ (4)

$3- \ \forall A \in E : \bar{A} \in E$

الجبر التام: ندعو الصف غير الخالي F من أجزاء X حيث X مجموعة ما غير خالية، جبراً تاماً في X إذا حقق الشروط التالية:

أ) من أجل أية متتالية $(A_i)_i$ من عناصر F فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

(3) F مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود

ب) من أجل أي مجموعة A من F فإن $\bar{A} \in F$

(3) أي أن F مغلق بالنسبة لعملية الإتمام.

الفرق بين الجبر والجبر التام: إن الجبر التام مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود والذي يحوي ضمنياً الاجتماع المنتهي وبالتالي كل جبر

(1) تام في X هو جبر فيها.

ولكن بما أن الجبر ليس مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود بشكل عام

(1) إذاً ليس كل جبر في X هو جبراً تاماً فيه في الحالة العامة.

الطلب الثاني: F_1 جبر تام في A:

(1) أ) $\phi \in F_1$ لأن: $\phi = A \cap \phi$

كذلك فإن $A \in F_1$ لأن: $A = A \cap X$ و $X \in F$ و F جبر تام في X و $A \subseteq X$ (2)

وبما أن $A \in F_1$ وبالتالي $F_1 \neq \phi$ إذاً F_1 صف غير خالٍ من أجزاء A

ثانياً: F_1 مغلق بالنسبة لعملية الإتمام:

$\forall A\cap B\in F_1$ ولنبرهن أن: $\overline{A\cap B}\in F_1$

لدينا $\overline{A\cap B} = A-(A\cap B) = A\cap(\overline{A\cap B}) = A\cap(\bar A\cup\bar B)$

$=(A\cap\bar A)\cup(A\cap\bar B) = \Phi\cup(A\cap\bar B) = A\cap\bar B \in F_1$

لأن $\bar B\in F$ و F جبر تام

(3) إذاً: F_1 مغلق بالنسبة لعملية الإتمام.

ثالثاً: F_1 مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود:

لتكن $(B_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر F عندئذٍ فإن $(A\cap B_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر F_1

لدينا $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap B_i) = A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\in F_1$ (3)

لأن F جبر تام في X وبالتالي F_1 مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود.

(1) إذاً من (1) و(2) و(3) نجد أن F_1 جبر تام في A.

السؤال الثاني: (30 درجة)

لتكن X مجموعة غير منتهية ولتكن $\mu^*: P(X)\to \bar{\mathbb{R}}$ دالة مجموعة معرفة بالشكل التالي:

$$\mu^*(A)=\begin{cases}\sqrt{n} & ; \ A \text{ مجموعة منتهية وعدد عناصرها } n\\ +\infty & ; \ A \text{ مجموعة غير منتهية}\end{cases}$$

تحقق من أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$؟ ثم تحقق من أن μ^* دالة قياس على $P(X)$؟ ماذا تستنتج؟

الحل: أولاً: μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$:

أ) نلاحظ أن $\mu^*(A)\geq 0$ حسب تعريف μ^* وذلك $\forall A\in P(X)$ (1)

كذلك: $\mu^*(\Phi)=0$ لأن Φ مجموعة منتهية وعدد عناصرها يساوي الصفر (1)

3

3) لتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر $P(X)$ ولنبرهن أن:
$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ (٢) لدينا حالتان:

الحالة الأولى $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة منتهية وعدد عناصرها n $\Leftarrow$ $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sqrt{n}$

وفي هذه الحالة فإن المجموعات $A_1, A_2, \dots$ فيها عدد منتهٍ من المجموعات المنتهية ولتكن $A_1, A_2, \dots, A_k$ وعدد عناصرها على الترتيب $n_1, n_2, \dots, n_k$

ويكون لدينا: $\mu^*(A_i) = \sqrt{n_i}$ من أجل $i = 1, 2, \dots, k$ أما المجموعات الباقية فهي مجموعات خالية وهي المجموعات $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots$

أي أن: $(A_i)_{i=k+1}^{\infty}$ $A_i = \phi$ ويكون لدينا: $\mu^*(A_i) = 0$ من أجل $i = k+1, \dots$ وكذلك

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \mu^*(A_1) + \dots + \mu^*(A_k) + \underbrace{\mu^*(A_{k+1}) + \dots}_{0}$$
$$= \sqrt{n_1} + \dots + \sqrt{n_k} + 0 + 0 + \dots$$
$$= \sqrt{n_1} + \sqrt{n_2} + \dots + \sqrt{n_k}$$

من جهة أخرى لدينا: $|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$ وبالتالي:

$$n \leq \sum_{i=1}^{\infty} n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \leq \sqrt{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \leq \sqrt{n_1} + \dots + \sqrt{n_k}$$

$$\Rightarrow \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$ 3

الحالة الثانية (١) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة غير منتهية وبالتالي $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \infty$ ولدينا هنا احتمالات (٢) إحدى عناصر المتتالية $(A_i)_{i\geq 1}$ على الأقل مجموعة غير منتهية ولتكن A_{i_0} وبالتالي فإن $\mu^*(A_{i_0}) = \infty$ ويكون لدينا في هذه الحالة:

$$\infty = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \underbrace{\mu^*(A_{i_0})}_{\infty} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{\infty} \mu^*(A_i) \geq \mu^*(A_{i_0}) = +\infty$$

ولكن $\mu^*(\bigcup A_i) = \infty$ وبالتالي فإن:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$ 2

ب) لجميع المجموعات A_i منتهية وغير خالية من أجل $i=1,2,\dots$ وكلها عددها لا نهائي ولنفرض أن عدد عناصر A_i هو n_i من أجل $i=1,2,\dots$ وبالتالي فإن

$\mu^*(A_i)=\sqrt{n_i}\geq 1$ من أجل $i=1,2,\dots$.

وكذلك من جهة أخرى لدينا:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)=\underbrace{\mu^*(A_1)}_{\geq 1}+\underbrace{\mu^*(A_2)}_{\geq 1}+\dots=\sqrt{n_1}+\sqrt{n_2}+\dots=\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{n_i}=+\infty$$

وبالتالي:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\infty\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$$

أي لجميع الحالات فإن: $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$

٣: خاصة التزايد: لتكن $A_1, A_2\in P(X)$ و $A_1\subseteq A_2$ ولنبرهن أن $\mu^*(A_1)\leq\mu^*(A_2)$ من أجل ذلك نفرق لدينا الحالات التالية:

الحالة الأولى: A_1 منتهية وعدد عناصرها هو n_1 ولدينا هنا احتمالان:

أ) A_2 منتهية وعدد عناصرها n_2 عندئذ يكون

$$A_1\subseteq A_2\Rightarrow n_1\leq n_2\Rightarrow\sqrt{n_1}\leq\sqrt{n_2}\Rightarrow\mu^*(A_1)\leq\mu^*(A_2)$$

ب) A_2 غير منتهية وبالتالي $\mu^*(A_2)=\infty\Rightarrow n_1\leq\infty$

$$\Rightarrow\mu^*(A_1)\leq\mu^*(A_2)$$

الحالة الثانية: A_1 غير منتهية وبالتالي $\mu^*(A_1)=\infty$ وبما أن A_1 غير منتهية وبالتالي A_2 غير منتهية $\Rightarrow\mu^*(A_2)=\infty\Rightarrow\mu^*(A_1)\leq\mu^*(A_2)$

وفي كلا الحالتين $\mu^*(A_1)\leq\mu^*(A_2)$

مما سبق نجد أن μ^* دالة قياس خارجي على $P(X)$.

ثانياً: μ^* دالة قياس على $P(X)$.

أ: بما أن μ^* قياس خارجي على $P(X)$ وبالتالي فإن $\mu^*(A)\geq 0$ وذلك $\forall A\in P(X)$ كذلك فإن $\mu^*(\phi)=0$

ج: لنتحقق من أن μ^* يحقق الخاصة تامة الجمعية من أجل ذلك لنأخذ متتالية من عنصرين هي A_1 و A_2 من عناصر $P(X)$ بحيث $A_1\cap A_2=\phi$ وبحيث أن A_1 و A_2 مجموعتين منتهيتين وعدد عناصر كل منهما وعلى الترتيب n_1 و n_2 عندئذ فإن:

$$\mu^*(A_1\cup A_2)=\sqrt{n_1+n_2}\neq\sqrt{n_1}+\sqrt{n_2}=\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)$$

5

لذا:

$$\sqrt{n_1+n_2} < \sqrt{n_1}+\sqrt{n_2}$$

وبالتالي μ^* لا يحقق الخاصية ثانية الجمعية بشكل عام. إذاً μ^* ليست دالة قياس على $P(X)$ 1

ثالثاً: نستنتج مما سبق أنه ليس من الضروري أن تكون كل دالة قياس خارجي هي دالة قياس. 3

السؤال الثالث (25 درجة)

1- أثبت أن أي دالة قياس μ معرفة على جبر تام يحوي جميع أنواع المجالات في R تعين دالة توزيع متزايدة ومستمرة من اليمين

2- إذا كان C قياساً μ على X وكانت $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ حيث $C_i \in D$ من أجل $i=1,2,\dots$ أوجد دالة القياس الخارجي المولدة من القياس C

الحل: الطلب الأول: ليكن (X, F, μ) فضاء قياس و $X=R$ و F جبر تام يحوي جميع أنواع المجالات في R وليكن α عدد حقيقي مقرر، ولنعرف على R دالة حقيقية F_α بالشكل التالي:

$$F_\alpha(x)=\begin{cases} \mu(]\alpha,x]) & ; \alpha<x \\ 0 & ; \alpha=x \\ -\mu(]x,\alpha]) & ; \alpha>x \end{cases}$$

10

ولنتحقق من أن F_α دالة متزايدة ومستمرة من اليمين.

لنفرض أن $a \le b$ عندئذ لدينا:

$$F_\alpha(b)-F_\alpha(a)=\begin{cases} \mu(]\alpha,b])-\mu(]\alpha,a])=\mu(]a,b])\ge 0 & ; \alpha<a<b \\ \mu(]\alpha,b])-\mu(]\alpha,\alpha])=\mu(]a,b])\ge 0 & ; \alpha=a \\ \mu(]\alpha,b])+\mu(]a,\alpha])=\mu(]a,b])\ge 0 & ; a<\alpha<b \\ \mu(]\alpha,\alpha])+\mu(]a,\alpha])=\mu(]a,b])\ge 0 & ; \alpha=b \\ -\mu(]b,\alpha])+\mu(]a,\alpha])=\mu(]a,b])\ge 0 & ; b<\alpha \end{cases}$$

5

وكما نلاحظ في جميع الحالات فإن $0 \le F_\alpha(b)-F_\alpha(a)$ وذلك $\forall a \le b$

أي أن F_α دالة متزايدة وكذلك فإن:

$F_\alpha(b)-F_\alpha(a)=\mu(]a,b])$ في جميع الحالات

بقي أن نثبت أن F_α مستمرة من اليمين:

$$\lim_{b\to a^+}[F_\alpha(b)-F_\alpha(a)]=\lim_{i\to\infty}\left(F_\alpha(a+\tfrac{1}{i})-F_\alpha(a)\right)$$

٥

$$= \lim \mu(]a, a+\tfrac{1}{i}[) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}]a, a+\tfrac{1}{i}[\right) = \mu(\phi) = 0$$

حسب خاصية استمرار التقاطع حيث $]a, a+\frac{1}{i}[$ متتالية متناقصة واول حد منتهٍ وكذلك

$\bigcap_{i=1}^{\infty} (]a, a+\frac{1}{i}[) = \phi$

5

وبالتالي F_α دالة مستمرة من اليمين في النقطة a ، وبما أن a كيفية

وبالتالي F_α مستمرة من اليمين.

الطلب الثاني

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \tau(D_i) \,;\, D_i \in R \,;\, \forall i \geq 1 + A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i\right\}$$

$\forall A \in P(X)$

5

ملاحظة: جميع الأسئلة الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس الدرجة المخصصة لها في سلم التصحيح.

اللاذقية في ١٢/٨/٢٠١٧

د. عائشة [illegible] صالحة

الجمهورية العربية السورية امتحان نظرية القياس المدة: ساعتان

جامعة طرطوس لطلاب السنة الثالثة–رياضيات الدرجة العظمى:80

كلية العلوم الفصل الدراسي الثاني اسم الطالب:

السؤال الأول (40 درجة)

أثبت صحة ما يلي:

1- تقاطع أسرة غير خالية من الجبور التامة في X هو جبر تام في X.

2- إذا كان (X,F,μ) فضاء قياس فإن:

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B)\ ;\ \forall\ A,B\in F .$$

3- كل جبر في X ، حيث X مجموعة ما غير خالية ، حلقة فيها.

4- كل دالة قياس معرفة على $P(X)$ ، حيث X مجموعة ما غير خالية ، تكون دالة قياس خارجي على $P(X)$

السؤال الثاني: (17 درجة)

أثبت صحة النظرية التالية:

إذا كان τ قياسا على حلقة D في X وكانت $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$ ، حيث $C_i\in D$ من أجل $i=1,2,\ldots$ ، عندئذ فإن دالة المجموعة μ^* المعرفة على $P(X)$ بالشكل التالي:

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\tau(D_i)\ ;\ D_i\in D\ ;\forall\ i\geq 1\ \wp\ A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}D_i\right\}\ ;\ \forall A\in P(X)$$

تكون قياسا خارجيا على $P(X)$.

السؤال الثالث: (23 درجة)

1- عرف المجموعة الوحيدة العنصر والمجموعة العدودة ، ثم أثبت أن كلا منهما مجموعتان بوريليتان في R واحسب قياس المجموعة الوحيدة العنصر وفق قياس لوبيغ –ستيلجس μ_F.

2- لتكن $X=N$ مجموعة ما غير خالية ، تحقق فيما إذا كانت دالة المجموعة μ المعرفة على $P(X)$ بالشكل التالي:

$$\mu(A)=\begin{cases}0 & ; \quad A=\phi\\ 1 & ; \quad A\neq\phi\end{cases}\ ;\forall A\in P(X)$$

قياساً على $P(X)$.

**************************انتهت الأسئلة*************************

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2017/6/13

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

(1)

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس
لطلاب سنة ... الفصل الدراسي الثاني
للعام ٢٠١٦ - ٢٠١٧

السؤال الأول: (٤٥ درجة)

أثبت صحة ما يلي:

١- تقاطع أسرة لانهائية من الجبور التامة في X هو جبر تام في X

٢- إذا كان (X, F, μ) فضاء قياس فإن:
$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B) \; ; \; \forall A,B\in F$

٣- كل جبر في X حيث X لانهائية، مغلق فيه.

٤- كل دالة قياس معرفة على $P(X)$ (حيث X مجموعة لانهائية) تكون دالة قياس خارجي على $P(X)$.

الحل:

أولاً: لتكن $\{F_i\}_{i\in I}$ أسرة لانهائية من الجبور التامة في X ولنرمز ب $F=\bigcap_{i\in I}F_i$ ولنبرهن أن F جبر تام في X (1)

آ: بما أن F_i جبر تام في X من أجل $\forall i\in I \Leftarrow$

$F_i\neq\phi \; ; \; \forall i\in I \Rightarrow F=\bigcap_{i\in I}F_i\neq\phi$.

ب: F مغلقة بالنسبة لعملية المتممة:

$\forall A\in F=\bigcap_{i\in I}F_i \Rightarrow A\in F_i \; ; \; \forall i\in I \Rightarrow$

$\bar{A}\in F_i \; ; \; \forall i\in I$ (لأن F_i جبر تام في X)

$\Rightarrow \bar{A}\in\bigcap_{i\in I}F_i=F \Rightarrow$ F مغلق بالنسبة لعملية المتممة. (3)

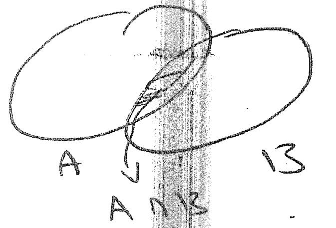
ج: F مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود:

لتكن $(A_j)_{j\geq 1}$ متتالية من عناصر $F=\bigcap_{i\in I}F_i$ ولنبرهن أن $\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\in F$

لدينا $A_j\in F=\bigcap_{i\in I}F_i \; ; \; j=1,2,\dots \Rightarrow A_j\in F_i \; ; \; \forall i\in I \; \& \; j=1,2,\dots$

$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\in F_i \; ; \; \forall i\in I$ (لأن F_i جبر تام في X)

$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\in\bigcap_{i\in I}F_i=F \Rightarrow$ F مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المعدود (3)



ثانياً: لدينا: $A\cup B = A\cup[B-(A\cap B)]$ (3)

بما أن $A\cap[B-(A\cap B)]=\phi$ و $A, B \in F$ (3)

و μ قياس على F وبالتالي يحقق خاصة الجمعية إذاً:

$$\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B-(A\cap B)) \quad (2)$$

$$= \mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cap B) \quad (1)\ (1)$$

لأن $A\cap B\subseteq B$ و μ قياس يحقق خاصة التزايد

ثالثاً: F جبر في X ولنبرهن أن F حلقة في X.

F جبر في X $\Leftarrow$ $F\neq\phi$ ولدينا:

$$\forall A,B\in F \Rightarrow A\cap B = \overline{(\bar A\cup\bar B)} \in F$$

إذاً F مغلق بالنسبة لعملية التقاطع المنتهية.

ولنبرهن الآن شروط الحلقة:

1- $\forall A,B\in F \Rightarrow A\cup B\in F$ (لأن F جبر في X)

2- $\forall A,B\in F \Rightarrow A-B = A\cap\bar B \in F$ (F جبر مغلق بالنسبة للتقاطع)

أي أن F مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع المنتهي والفرق النسبي إذاً F حلقة في X. (2)

رابعاً: لتكن μ دالة قياس على $P(X)$ ولنبرهن أن μ قياس خارجي على $P(X)$ (1)

بما أن μ قياس على $P(X)$ وبالتالي فهو يحقق:

μ دالة مجموعة على $P(X)$ (1)

$\mu(A)\geq 0$ وذلك $\forall A\in P(X)$ و $\mu(\phi)=0$ (2)

خاصة التزايد: إذا كانت $A_1,A_2\in P(X)$ و $A_1\subseteq A_2$ فإن

$$\mu(A_1)\le\mu(A_2) \quad (2)$$

خاصة تحت الجمعية التامة: لتكن $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ متتالية لعناصر $P(X)$

عندئذ فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (3)$$

أي أن μ يحقق جميع شروط القياس الخارجي وبالتالي هو قياس خارجي على $P(X)$ (1)

السؤال الثاني: (17 درجة)

أثبت صحة النظرية التالية: إذا كان τ قياساً على حلقة D في X وكانت $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ حيث $C_i \in D$ من أجل $i=1,2,\dots$ عندئذٍ فإن دالة المجموعة μ^* المعرفة على $P(X)$ بالشكل التالي:

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\tau(D_i)\ ;\ D_i\in D\ ;\ \forall i\geq 1\ +\ A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}D_i\right\};\ \forall A\in P(X)$$

تكون قياس خارجي على $P(X)$.

البرهان: أ: $\mu^*(A)\geq 0$ (2) وذلك $\forall A\in P(X)$ لأن τ قياس على حلقة D و $\tau\geq 0$ وكذلك فإن $\mu^*(\phi)=0$ لأنه: (2)

إذا كانت $(D_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر D بحيث أن $D_i=\phi$ من أجل $i=1,2,\dots$ فإن $\phi\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}D_i$ وبالتالي فإن $0\leq\mu^*(\phi)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\tau(D_i)=0$

ب: لتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر $P(X)$ ولنبرهن أن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)\qquad (1)$$

لدينا $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر $P(X)$ وليكن $\varepsilon>0$ عندئذٍ من أجل أي عدد طبيعي i توجد متتالية $(D_{i,k})_{k\geq 1}$ من عناصر الحلقة D بحيث يكون:

$$A_i\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}D_{i,k}\ ,\ \sum_{k=1}^{\infty}\tau(D_{i,k})<\mu^*(A_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}\qquad (2)$$

إذاً $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\subseteq\bigcup_{i,k}D_{i,k}$

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i,k}\tau(D_{i,k})=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\tau(D_{i,k})<$$

$$<\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}<\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)+\varepsilon\ ;\ \forall\varepsilon>0\qquad (3)\ (1)$$

$\Rightarrow\ \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$ $\Leftarrow$ μ^* يحقق خاصة تحت الجمع اللانهائي

ج: خاصة التزايد: لتكن $A_1,A_2\in P(X)$ حيث $A_1\subseteq A_2$ عندئذٍ من أجل أية متتالية $(D_i)_{i\geq 1}$ من عناصر D بحيث يكون $A_2\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}D_i$ فإن $A_1\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}D_i$ وبالتالي $\mu^*(A_1)\leq\mu^*(A_2)$ و μ^* متزايد (1) (4)

إذاً مما سبق نجد أن μ^* قياس خارجي على $P(X)$.

السؤال الثالث: (23 درجة)

1- عرّف المجموعة الواحدية الصفرية والمجموعة المحدودة، ثم أثبت أن كلاً منهما مجموعتان بوريليتان في $\mathbb{R}$. واحسب قياس المجموعة الواحدية العظمى و

قياس لوبيغ ... μ.

- لتكن $X = IN$ مجموعة غير خالية ، نحقق فيما إذا كانت دالة المجموعة μ المعرفة على $P(X)$ بالشكل التالي: $\forall A \in P(X)$;

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 ; & A = \emptyset \\ 1 ; & A \neq \emptyset \end{cases}$$

قياساً على $P(X)$.

الحل: ١ - المجموعة الوحيدة العنصر هي المجموعة المؤلفة من عنصر واحد فقط مثل $\{a\}$.

المجموعة المعدودة: ندعو المجموعة غير المنتهية Ω مجموعة معدودة إذا كان بالإمكان إيجاد تطبيق تقابل $\varphi : IN \to \Omega$ بين مجموعة الأعداد الطبيعية IN وهذه المجموعة.

المجموعة الوحيدة العنصر $\{a\}$ حيث $a \in IR$ مجموعة بوريلية في IR لأن:

$$IR \supseteq \{a\} = [a, a] = \bigcap]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[\; ; \; n \in IN$$

مجموعة بوريلية

ب - كل مجموعة معدودة في IR هي مجموعة بوريلية لأنها اجتماع معدود لمجموعات وحيدة العنصر وبوريلية و B_{IR} تام في IR ومغلق بالنسبة للاجتماع المعدود.

جـ - $\{a\} \subseteq IR$ مجموعة بوريلية وبالتالي نبحث $\mu_F(\{a\})$ قيمة القياس بالنسبة لـ μ_F

$$\mu_F(\{a\}) = \mu_F\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}]a - \frac{1}{i}, a]\right) = \lim_{i \to \infty} \mu_F(]a - \frac{1}{i}, a])$$

حسب خاصة لمتتالية متناقصة من المجموعات.

$$= \lim_{i \to \infty} \left(F(a) - F(a - \frac{1}{i})\right) = F(a) - F(a-)$$

٢: لنتحقق ما إذا كانت μ قياساً على X :

أ: من تعريف μ نلاحظ أن $\mu(A) \geq 0$ وذلك $\forall A \in P(X)$

ب: $\mu(\emptyset) = 0$ من تعريف μ .

٣: خاصة الجمع التامة: لتكن A_1 و A_2 متتالية منتهية من عناصر $P(X)$ بحيث أن $A_1 = \{2\}$ و $A_2 = \{3\}$ و $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

عندئذ يكون لدينا:

$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(\{2, 3\}) = 1$

$\mu(A_1) = \mu(A_2) = 1$

وبالتالي: $\mu(A_1 \cup A_2) = 1 \neq \mu(A_1) + \mu(A_2) = 2$

أي أن μ لا تحقق خاصة الجمع التامة.

إذاً μ ليست قياساً على $P(X)$.

ملاحظة: التمارين الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح.

طرطوس في ١٣/٦/٢٠١٧

مدرسة المقرر: د. عائشة صالحة

الجمهورية العربية السورية   امتحان نظرية القياس   المدة: ساعتان

جامعة طرطوس   لطلاب السنة الثالثة رياضيات   الدرجة العظمى: ٨٠

كلية العلوم   الفصل الدراسي الأول   اسم الطالب:

السؤال الأول: (٢٥ درجة)

١- عرف المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي مفروض μ^*.

٢- لتكن $X=\{0,1,2,\dots\}$ و لتكن $A\subset X$ ، حيث $A\neq\phi$ فإذا كان $\alpha=\sup A$ لنعرف على $P(X)$ تابع مجموعة μ^* بالشكل التالي:

$$\mu^*(A)=\begin{cases} 0 & : A=\phi \\ \dfrac{\alpha}{1+\alpha} & : A \text{ منتهية} \\ 1 & : A \text{ غير منتهية} \end{cases}$$

والمطلوب تحقق من أن μ^* قياس خارجي على X.

السؤال الثاني: (٢٥ درجة)

أثبت صحة ما يلي:

١. إذا كانت $\mu^*(E)=0$ ، حيث μ^* قياس خارجي مفروض على مجموعة ما غير خالية X ، فإن: $E\in M^*$.

٢. إذا كان μ^* قياس خارجي معرف على مجموعة ما غير خالية مفروضة X ، و إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر M^* غير المتقاطعة فإن:

$$\mu^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(T\cap A_i)\ ,\ \forall T\subseteq X.$$

السؤال الثالث: (٣٠ درجة)

١- عرف: القياس ، القياس التام ، عملية تميم القياسات ، القياس $\bar{\mu}$ ما هي منطقة تعريفه واذكر خواصه.

٢- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس ولنعرف التابع $\mu_A: M\to\bar{R}$ حيث $A\in M$ بالشكل التالي: $\mu_A(B)=\mu(A\cap B)$ ، والمطلوب أثبت أن μ_A قياساً على الفضاء (X,M).

*******************************انتهت الأسئلة*******************************

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في ٢٠١٧/١/٣١

جامعة [illegible]

كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس

لطلاب [illegible] للفصل الدراسي الأول

للعام ٢٠١٦ - ٢٠١٧

السؤال الأول (25 درجة)

١- عرف المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي μ^* .

٢- لتكن $X=\{0,1,2,\dots\}$ ولتكن $A\subseteq X$ حيث $A\neq\phi$ فإذا كان $\alpha=\sup A$ للعرف على $P(X)$ تابع مجموعة μ^* بالشكل التالي:

$$\mu^*(A)=\begin{cases}0 , & A=\phi\\ \dfrac{\alpha}{1+\alpha} , & \text{منتهية } A\\ 1 , & \text{غير منتهية } A\end{cases}$$

والمطلوب تحقق من أن μ^* قياس خارجي على X

الحل: الطلب الأول: ندعو المجموعة $A\subseteq X$ مجموعة قابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي μ^* معرف على مجموعات [illegible] X إذا حققت الشرط التالي: (5)

$$\mu^*(T)=\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap\bar{A}) , \forall A\subseteq X$$

ونذكر T مجموعة الاختبار

الطلب الثاني: μ^* قياس خارجي على X

أ: واضح من تعريف μ^* أن $\mu^*(A)\geq 0$ من أجل كل مجموعة $A\subseteq X$

وكذلك بأنه عندما $A=\phi$ فإن $\mu^*(\phi)=0$ وفقاً لتعريف μ^* (2)

ب: خاصة التزايد: لتكن A و $B\subseteq X$ ولتكن $A\subseteq B$ عندئذ نميز الحالات التالية:

الحالة الأولى: إذا كانت B منتهية فإن A منتهية وفي هذه الحالة نفرض أن $\alpha=\sup A$ و $\beta=\sup B$ ويكون لدينا $\alpha\leq\beta$ لأن $A\subseteq B$ وبالتالي $\mu^*(A)=\frac{\alpha}{1+\alpha}$ و $\mu^*(B)=\frac{\beta}{1+\beta}$ وبالتالي فإن: (2)

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}\leq\frac{\beta}{1+\beta}\ (\alpha\leq\beta \text{ لأن}) \Rightarrow \mu^*(A)\leq\mu^*(B)$$

الحالة الثانية: B غير منتهية و A منتهية عندئذ لدينا $\mu^*(B)=1$ و $\mu^*(A)=\frac{\alpha}{1+\alpha}$, $\alpha=\sup A$ وبالتالي بأن

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}\leq 1 \Rightarrow \mu^*(A)\leq\mu^*(B)$$ (2)

الحالة الثالثة: B غير منتهية و A غير منتهية عندئذ فإن:

$\mu^*(A)=\mu^*(B)=1 \Rightarrow \mu^*(A)\le\mu^*(B)$ (2)

وفي جميع الحالات فإن: $\mu^*(A)\le\mu^*(B)$ (1)

٣: خاصية تحت الجمعية التامة: لتكن $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر $P(X)$

ولتكن $\alpha_1=\sup A_1$ و $\alpha_2=\sup A_2$ و ... و $\alpha_n=\sup A_n$ ...

ولنثبت أن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$$

نميز الحالات: الحالة الأولى: $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ مجموعة منتهية وفي هذه الحالة فإن جميع المجموعات A_i منتهية وذلك من أجل $i=1,2,\dots$ ويكون لدينا

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)=\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)+\dots=\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}+\dots$$ (2)

وكذلك $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ منتهية ونفرض أن $\alpha=\sup\bigcup A_i$ ⇐ $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\frac{\alpha}{1+\alpha}$

وبما أن $\bigcup A_i\subseteq A_1\cup A_2\cup\dots$ فإن: $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$ (2)

الحالة الثانية: $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ غير منتهية وبالتالي يوجد مجموعة واحدة على الأقل A_k غير منتهية، فإن $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=1$ وبالتالي:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)=\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)+\dots+\mu^*(A_k)+\dots=\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}+\dots+1+\dots$$ (2)

وبالتالي: $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$ (1)

وفي كلا الحالتين فإن: $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$ (1)

مما سبق نجد أن μ^* قياس خارجي على X. (1)

السؤال الثالث: (25 درجة)

أثبت صحة ما يلي:

١- إذا كان μ^* قياس خارجي معرف على مجموعة ما غير خالية X، وكان $\mu^*(E)=0$ فإن $E\in M^*$

٢- إذا كان μ^* قياس خارجي معرف على مجموعة ما غير خالية مفروضة X، وإذا كانت $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر M^* غير المتقاطعة مثنى فإن:

$$\mu^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(T\cap A_i)\ ;\ \forall T\subseteq X$$

الحل: لإثبات (1) من شرط أن $E\in M^*$ يجب أن نبرهن أن

$$\mu^*(T)\ge\mu^*(T\cap E)+\mu^*(T\cap\bar{E})\ ;\ \forall T\subseteq X$$ (3)

لدينا $T\cap E\subseteq E$ وبالتالي:

$$0 = \mu^*(E) \geq \mu^*(T \cap E) \geq 0 \quad \text{I} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \mu^*(T \cap E) = 0$$

وكذلك فإن $T \cap \bar{E} \subseteq T \Rightarrow$

$$\boxed{\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap \bar{E})} \quad \text{II}$$

(3) بجمع المتراجحتين (I) و (II) نجد أن:

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \cap \bar{E}) \quad (1)$$

وبالتالي $E \in M^*$

برهان (2): نثبت أولاً الحالة المنتهية أي:

(1) $\mu^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(T \cap A_i) \; ; \; \forall T \subseteq X$

(1) باستخدام الاستقراء الرياضي:

خطوة البداية: من أجل $n = 1$ فإن العلاقة صحيحة.

(1) خطوة الاستقراء: نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل n ونثبت صحتها من أجل $n+1$ أي نثبت صحة العلاقة:

$$\mu^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(T \cap A_i)$$

(2) بما أن M^* جبر على X وهو مغلق بالنسبة لعملية الاتحاد [illegible] وإذا كان μ^* قياس خارجي وبالتالي إذا كانت $(A_i)_{i=1}^{n}$ متتالية منتهية من عناصر M^* فإن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in M^*$ المقيسة بالنسبة للقياس

$$\mu^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right)\right] = \mu^*\left[\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right)\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right] + \mu^*\left[\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right)\right) \cap \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)}\right]$$

$$= \mu^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right] + \mu^*\left[T \cap A_{n+1}\right] = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(T \cap A_i) + \mu^*(T \cap A_{n+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(T \cap A_i) \Rightarrow$$

(3) وبالتالي العلاقة صحيحة من أجل $n+1$

لنثبت أن العلاقة صحيحة من أجل الحالة المنتهية الحالة العامة المطلوبة:

$$\mu^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(T \cap A_i)$$

لدينا:

$\forall T \subseteq X$ ، $i = 1, 2, \dots$ ؛

(2) $T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \supseteq T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$

$$\Rightarrow \mu^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right] \geq \mu^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(T \cap A_i)$$

(2) وبأخذ النهاية لطرفي المتراجحة الأخيرة عندما $n \to \infty$ نجد أن:

(I)

$$\mu^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) \geq \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(T \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(T \cap A_i)$$

(2) ومن جهة أخرى لدينا:

$$\mu^*\left[T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right] = \mu^*\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (T \cap A_i)\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(T \cap A_i) \quad \text{(II)}$$

لأن μ^* قياس خارجي يحقق الخاصية تحت الجمعية التامة

من (I) و (II) فإن العلاقة صحيحة.

السؤال الثالث : (٣٠ درجة)

١- عرف القياس و القياس التام و عملية تتميم القياسات و المتباين $\bar{\mu}$ ما الذي منطقه تعريفه و اذكر خواصه.

٢- ليكن (X, M, μ) فضاء قياس و لنعرف التابع: $\mu_A : M \longrightarrow \bar{R}$ حيث $A \in M$ بالشكل التالي: $\mu_A(B) = \mu(A \cap B)$

و المطلوب أثبت أن μ_A قياساً على الفضاء (X, M).

الحل:

١- القياس: ليكن (X, A) فضاءاً مقيساً. ندعو أي تابع مجموعات معرف على A غير سالب و تام الجمعية بقياس على (X, A) أو على A أو على X إذا لم يكن هناك التباس.

القياس التام: ليكن (X, F, μ) فضاء قياس. نقول عن تام القياس μ أنه قياس تام إذا كانت كل مجموعة جزئية من مجموعة مهملة مجموعة مقيسة بالنسبة لـ μ و ندعو (X, F, μ) في هذه الحالة فضاء قياس تام

أي μ قياس تام

$A \in F$ و $\mu(A) = 0$ + $B \subseteq A$ $\Rightarrow$ $B \in F$ + $\mu(B) = 0$

عملية تتميم القياسات: هو الدوران الذي نحتاجه للحصول على تمديد أي تابع قياس موجب و الحصول بنتيجة هذا التمديد على تابع قياس تام.

القياس $\bar{\mu}$: إذا كان (X, F, μ) فضاء قياس مفروض عندئذٍ فإن $\bar{\mu}$ هو تابع القياس الناتج عن تتميم القياس μ و يعرف بالشكل:

$\bar{\mu}(E) = \bar{\mu}(A \cup B) = \mu(A)$

على المجموعة F حيث

$F = \{E \subseteq X ; E = A \cup B$ + A مقيسة + B مجموعة جزئية من مجموعة مهملة$\}$

و هو يحقق الخاصية الجمعية و الخاصية تحت الجمعية التامة و خاصية التزايد بالإضافة لذلك فهو قياس تام

٢: بما أن (X, M, μ) فضاء قياس و بالتالي فإن M جبر تام كذلك فإن

أ. $\forall B \in M$ وذلك $\mu_A(B) = \mu(A \cap B) \geq 0$

و $\mu_A(\phi) = \mu(A \cap \phi) = 0$

ب. إذا كانت $(A_n)_{n \geq 1}$ متتالية من عناصر M متقاطعة مثنى مثنى عندئذٍ

$\mu_A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_A(A_n)$

أي أنّ M يحقق الخاصة تامة الجمعية (1)

مما سبق نجد أن M قياساً على الفضاء (X, M). (2)

ملاحظة: العلامات الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح.

طرطوس في ٣١ / ١ / ٢٠١٧

مدرسة المقرر: د. عائدة صباغة

الجمهورية العربية السورية — امتحان نظرية القياس — المدة: ساعتان

جامعة طرطوس — لطلاب السنة الثالثة_رياضيات — الدرجة العظمى:80

كلية العلوم — الدورة الثالثة — اسم الطالب:

السؤال الأول: (15 درجة)

عرف كلا من المفاهيم التالية : الجبر التام الأصغري ، القياس الخارجي المولد من القياس τ المعرف على الحلقة D من أجزاء مجموعة ما غير خالية X ، المجموعة $\mu-$ همولة .

السؤال الثاني: (20 درجة)

1-عرف المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي مفروض μ^*.

2- لتكن μ^* دالة مجموعة معرفة على $P(N)$ ، حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية ، بالشكل التالي :

$$\mu^*(A)=\begin{cases}\dfrac{n}{n+1} & ,n \text{ عدد عناصرها و منتهية } A\\ 1 & , \text{ غير منتهية } A\end{cases}$$

برهن أن μ^* قياس خارجي على N .

السؤال الثالث:(30 درجة)

أثبت صحة ما يلي:

1. إذا كانت $\mu^*(E)=0$ ، حيث μ^* قياس خارجي مفروض على مجموعة ما غير خالية X ، فإن : $E\in M^*$.
2. إذا كان μ^* قياس خارجي معرف على مجموعة ما غير خالية مفروضة X ، و إذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية من عناصر M^* غير المتقاطعة فإن

$$\mu^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(T\cap A_i)\quad ,\forall T\subseteq X \ .$$

السؤال الرابع: (15 درجة)

ليكن (R,M,μ) فضاء قياس و M جبر تام يحوي جميع أنواع المجالات في R والمطلوب عرف دالة توزع بالاعتماد على دالة القياس μ وأثبت أن هذه الدالة متزايدة ومستمرة من اليمين.

**************************انتهت الأسئلة**************************

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2016/9/3

وبما أن عدد عناصر $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ هو n وبالتالي فإن: $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \frac{n}{n+1}$

وبما أن: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \dots$ وبالتالي فإن:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

2

الحالة الثانية: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ مجموعة غير منتهية وبالتالي فإن: $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$

وبما أن: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ غير منتهية وبالتالي يوجد مجموعة واحدة على الأقل A_K غير منتهية والمجموعات الأخرى A_i منتهية من أجل $i \neq k$ وعدد عناصر كل منها n_i وبالتالي فإن $\mu^*(A_k) = 1$ و $\mu^*(A_i) = \frac{n_i}{n_i+1}$ من أجل $i = 1, 2, \dots$ و $i \neq k$ ويكون لدينا:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) + \dots + \mu^*(A_k) + \dots$$

$$= \frac{n_1}{n_1+1} + \frac{n_2}{n_2+1} + \dots + 1 + \dots$$

3

وبالتالي فإن:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

وفي كلا الحالتين فإن:

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

1 مما سبق نجد أن μ^* قياس خارجي على N

السؤال الثالث: (30 درجة)

أثبت صحة ما يلي:

أ: إذا كانت $\mu^*(E) = 0$ حيث μ^* قياس خارجي معرف على مجموعة ما غير خالية X فإن $E \in M^*$

ب: إذا كان μ^* قياس خارجي معرف على مجموعة ما غير خالية X وإذا كانت (A_i) متتالية من عناصر M^* غير المتقاطعة فإن:

$$\mu^*[T \cap [\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i]] = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(T \cap A_i) \; ; \; \forall T \subseteq X$$

الحل: **المسألة الأولى:** حتى نبرهن أن $E \in M^*$ يجب أن نبرهن الشرط:

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \cap \bar{E}) \; ; \; \forall T \subseteq X$$

لدينا: $T \cap E \subseteq E$ وبالتالي:

$$0 = \mu^*(E) \geq \mu^*(T \cap E) \geq 0 \quad (\mathrm{I})$$

$$\Rightarrow \mu^*(T \cap E) = 0$$

6

وكذلك فإن: $T \cap \bar{E} \subseteq T \Rightarrow \boxed{\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap \bar{E})}$ (II)

بجمع المتراجحتين (I) و (II) نجد أن:

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \cap \bar{E})$$

5

جامعة طرطوس

كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس لطلاب سنة ٣ ر

للدورة الثالثة للعام الدراسي ٢٠١٥ - ٢٠١٦

السؤال الأول: (١٥ درجة)

عرف كلاً من المفاهيم التالية: الجبر التام الأصغري، القياس الخارجي المولد بالقياس μ المعرف على الحلقة D من أجزاء مجموعة ما غير خالية X، المجموعة μ- مهملة.

الحل: ١: الجبر التام الأصغري: ليكن G صف غير خال من أجزاء مجموعة ما غير خالية X. ندعو تقاطع كل الجبور التامة التي تحوي G في X والذي هو أصغر جبر تام يحوي G بالجبر التام الأصغري ونرمز له بالرمز $\sigma(G)$.

٢: القياس الخارجي المولد بالقياس μ المعرف على الحلقة D من أجزاء مجموعة ما غير خالية X: ليكن μ قياس على حلقة D في مجموعة ما غير خالية X ولتكن $X=\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ حيث $C_i \in D$ أيا كان i، ندعو القياس الخارجي μ^* المعرف على $P(X)$ بالشكل:

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i);\ A_i\in D;\ \forall i\geq 1 + A\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\};\ \forall A\in P(X)$$

بالقياس الخارجي المولد بالقياس μ.

٣: المجموعة μ- مهملة: ليكن (X, D, μ) فضاء قياس، ندعو المجموعة الجزئية A من X ($A\subseteq X$) مجموعة μ- مهملة بالنسبة للقياس μ إذا كانت محتواة في مجموعة قياسها معدوم أي:

$$A\subseteq X \text{ مجموعة } \mu\text{- مهملة} \iff \exists G\in D: A\subseteq G + \mu(G)=0$$

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

١- عرف المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لقياس ما خارجي μ^*.

٢- لتكن μ^* دالة مجموعات معرفة على $P(N)$ حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية بالشكل التالي:

$$\mu^*(A)=\begin{cases}\dfrac{n}{n+1}; & A \text{ منتهية وعدد عناصرها } n\\ 1; & A \text{ غير منتهية}\end{cases}$$

برهن أن μ^* قياس خارجي على N.

الحل: الطلب الأول: ندعو المجموعة $A\subseteq X$ مجموعة قابلة للقياس بالنسبة لقياس خارجي μ^* معرف على مجموعة ما غير خالية X. إذا حققت المبرهنة

الشرط التالي: $\mu^*(T)=\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap \bar{A})\ ;\ \forall A\subseteq X$

و ندعو T مجموعة الاختبار.

الطلب الثاني: برهان أن μ^* قياس خارجي على N.

أ: واضح من تعريف μ^* أن $\mu^*(A)\geq 0$ و ذلك من أجل أية مجموعة $A\subseteq N$

كذلك فإنه عندما $A=\phi$ فإن A مجموعة منتهية وعدد عناصرها الصفر وبالتالي فإنه:

$$\mu^*(\phi)=\frac{0}{0+1}=0$$

ج: خاصية التزايد: لتكن A و B مجموعتين من $P(N)$ وليكن $A\subseteq B$ ولنبرهن أن: $\mu^*(A)\leq\mu^*(B)$

نميز هنا الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: B مجموعة منتهية وبالتالي A منتهية ونفرض أن عدد عناصر B هو n_B وعدد عناصر A هو n_A ويكون لدينا $n_A\leq n_B$ (لأن $A\subseteq B$)

و $\mu^*(B)=\frac{n_B}{n_B+1}$ و $\mu^*(A)=\frac{n_A}{n_A+1}$ وبالتالي فإن:

$$\mu^*(A)\leq\mu^*(B) \Leftarrow n_A\leq n_B \text{ لأن } \frac{n_A}{n_A+1}\leq\frac{n_B}{n_B+1}$$

الحالة الثانية: B غير منتهية و $\mu^*(B)=1$ ونميز هنا الاحتمالات التالية:

الاحتمال الأول: A منتهية ونفرض عدد عناصرها n ويكون لدينا $\mu^*(A)=\frac{n}{n+1}$

وبالتالي فإن $\mu^*(A)=\frac{n}{n+1}\leq 1=\mu^*(B)$

الاحتمال الثاني: A غير منتهية وفي هذه الحالة فإن $\mu^*(A)=1$ وبالتالي فإن

$$\mu^*(A)=1\leq 1=\mu^*(B)$$

وفي جميع الحالات فإنه: $\mu^*(A)\leq\mu^*(B)$.

د: خاصية تحت الجمعية التامة: لتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ متتالية لعناصر $P(N)$ ولنبرهن أن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$$

لدينا هنا الحالات التالية: **الحالة الأولى**: $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ مجموعة منتهية وفي هذه الحالة فإن كلاً من A_i مجموعة منتهية من أجل $i=1,2,\dots$ ونفرض عدد عناصر كل منها هو n_i من أجل $i=1,2,\dots$ وعندئذ يكون لدينا: $\mu^*(A_i)=\frac{n_i}{n_i+1}$ ؛ $i=1,2,\dots$

وكذلك فإن:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)=\frac{n_1}{\ }+\frac{n_2}{\ }$$

المسألة الثانية: نبرهن أولاً الحالة المنتهية أي:

$$\mu^*[T\cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i] = \sum_{i=1}^{n} \mu(T\cap A_i)\ ;\ \forall T\subseteq X \quad (1)$$

باستخدام طريقة الاستقراء الرياضي.

خطوة الأساس: من أجل $n=1$ نلاحظ أن العلاقة صحيحة، لأنها صحيحة من أجل

خطوة الاستقراء: نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل n ونبرهن من أجل $n+1$ أي نبرهن صحة العلاقة:

$$\mu^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i)) = \sum_{i=1}^{n+1}\mu^*(T\cap A_i)$$

بما أن $\mathcal{M}^*$ جبر على X وهو صف المجموعات القيوسة بالنسبة للقياس الخارجي μ^* وبالتالي إذا كانت $(A_i)_{i=1}^{n}$ متتالية منتهية من عناصر $\mathcal{M}^*$ فإن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i\in\mathcal{M}^*$ وبالتالي فإن

$$\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i)] = \mu^*[(T\cap(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i))\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)] + \mu^*[(T\cap(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i))\cap(\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i})]$$

$$=\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)] + \mu^*[T\cap A_{n+1}] = \sum_{i=1}^{n}\mu^*(T\cap A_i)+\mu^*(T\cap A_{n+1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1}\mu^*(T\cap A_i) \Rightarrow$$ العلاقة صحيحة من أجل $n+1$

$\Rightarrow$ العلاقة صحيحة من أجل الحالة المنتهية

6

لنبرهن الآن الحالة العامة المطلوبة:

$$\mu^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(T\cap A_i)$$

لدينا

$$T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\supseteq T\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\ ;\ i=1,2,\dots\ ;\ \forall T\subseteq X$$

$$\Rightarrow \mu^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)) \ge \mu^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) = \sum_{i=1}^{n}\mu^*(T\cap A_i)$$

6

بأخذ النهاية لطرفي المتراجحة السابقة عندما $n\to\infty$ نحصل على:

$$\mu^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)) \ge \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \mu^*(T\cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(T\cap A_i) \quad (I)$$

من جهة أخرى لدينا

$$\mu^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)] = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} (T\cap A_i)) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(T\cap A_i) \quad (II)$$

لأن μ^* قياس خارجي يحقق الخاصة تحت الجمعية الثانية.

من (I) و (II) نجد أن العلاقة صحيحة.

5

السؤال الرابع: (15 درجة)

ليكن $(\mathbb{R},\mathcal{M},\mu)$ فضاء قياس و $\mathcal{M}$ جبر تام يحوي جميع أنواع المجالات في $\mathbb{R}$ والمطلوب عرّف دالة توزيع بالاعتماد على دالة القياس μ واثبت أن هذه الدالة متزايدة ومستمرة من اليمين.

الحل: إذا فرضنا a عدد حقيقي مفروض عندئذ يمكن تعريف دالة التوزيع F_a بالاعتماد على دالة القياس μ بالشكل التالي:

$\boxed{5}$

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} \mu(]\alpha, x]) \; ; & \alpha < x \\ 0 \; ; & \alpha = x \\ -\mu(]x, \alpha]) \; ; & \alpha > x \end{cases}$$

3

إن $F_\alpha(x)$ دالة حقيقية وهي متزايدة دوماً لأنه: إذا كانت $b > a$ عندئذ لدينا:

$$F_\alpha(b) - F_\alpha(a) = \begin{cases} \mu(]\alpha,b]) - \mu(]\alpha,a]) = \mu(]a,b]) \; ; & \alpha < a \\ \mu(]\alpha,b]) - \mu(]\alpha,\alpha]) = \mu(]a,b]) \; ; & \alpha = a \\ \mu(]\alpha,b]) + \mu(]a,\alpha]) \; ; & a < \alpha < b \\ \mu(]\alpha,\alpha]) + \mu(]a,\alpha]) = \mu(]a,b]) \; ; & \alpha = b \\ -\mu(]b,\alpha]) + \mu(]a,\alpha]) = \mu(]a,b]) \; ; & b < \alpha \end{cases}$$

5

ونلاحظ أنه وفي جميع الحالات

$F_\alpha(b) - F_\alpha(a) = \mu(]a,b]) \geq 0$ وذلك $\forall a \leq b$

أي أن F_α دالة متزايدة دوماً.

2

كذلك فإن F_α دالة مستمرة من اليمين لأن لدينا

$$\lim_{b \to a^+}(F_\alpha(b) - F_\alpha(a)) = \lim_{n\to\infty}[F_\alpha(a+\tfrac{1}{n}) - F_\alpha(a)] = \lim_{n\to\infty}\mu(]a, a+\tfrac{1}{n}])$$

لأن F_α متزايدة دوماً

$$= \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]a, a+\tfrac{1}{n}]\right) = \mu(\phi) = 0$$

حسب خاصية استمرار القياس حيث $(]a, a+\frac{1}{n}])$ متتالية متناقصة وأول حد منها منته و $\bigcap_{n=1}^{\infty}]a, a+\frac{1}{n}] = \phi$

وبالتالي F_α مستمرة من اليمين في النقطة a وبما أن a كيفية $\Leftarrow$ F_α مستمرة من اليمين

5

ملاحظة: جميع الأسئلة من التمارين الواردة في سلم التصحيح لا أكثر من طريقة رياضية للبرهان والحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

طرطوس في ٢٠١٦/٩/١٣

مدرسة المقرر: د. عائدة علي صالحة

الجمهورية العربية السورية — امتحان نظرية القياس — المدة: ساعتان

جامعة تشرين — لطلاب السنة الثالثة-رياضيات — الدرجة العظمى: ٨٠

كلية العلوم الثانية — الدورة الصيفية الثالثة — اسم الطالب:

السؤال الأول: (٢٠ درجة)

لتكن $X = \mathbb{N}$ ولنعرف على $P(X)$ تابع مجموعة μ^* بالشكل التالي:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & ; \quad A = \Phi \\ \\ 1 & ; \quad A \neq \Phi \end{cases}$$

١- تحقق من أن μ^* قياس خارجي ٢- عين أسرة المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لـ μ^*.

السؤال الثاني: (١٥ درجة)

لتكن $X = \{1,2,3,4\}$ ولتكن $\tau = \{X, \Phi, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$ والمطلوب أثبت أن:

١. τ تبولوجيا على X.

٢. τ ليست حلقة وليست جبراً.

٣. كل جبر من أجزاء X هو $\sigma-$ جبر فيها.

٤. عين أصغر جبر يحوي τ أي $\sigma(\tau)$.

السؤال الثالث: (٣٠ درجة)

١- عرف: القياس ، القياس التام ، عملية تمام القياسات ، القياس μ ما هي منطقة تعريفه وا ذكر خواصه.

٢- ليكن (X, M, μ) فضاء قياس ولنعرف التابع : $\mu_A : M \to \overline{R}$ حيث $A \in M$ بالشكل التالي: $\mu_A(B) = \mu(A \cap B)$ ، والمطلوب أثبت أن μ_A قياساً على الفضاء (X, M).

السؤال الرابع: (١٥ درجة)

ليكن (X, M, μ) فضاء قياس والمطلوب برهن أن :

$$if \quad A, B \in M \quad \wp \quad \mu(A \Delta B) = 0 \qquad then \qquad \mu(A) = \mu(B)$$

****************************انتهت الأسئلة****************************

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في ٢٠١٣/٨/١٨

1

جامعة تشرين

كلية العلوم الثانية

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس

لطلاب سنة ثالثة الدورة الثالثة

للعام الدراسي ٢٠١٢ - ٢٠١٣

السؤال الأول: (20 درجة)

لتكن $X = N$ ولنعرف على $P(X)$ تابع مجموعة μ^* بالشكل التالي:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{و } A = \phi \\ 1 & \text{و } A \neq \phi \end{cases}$$

1- تحقق من أن μ^* قياس خارجي ثم عين أسرة المجموعات القابلة للقياس بالنسبة لـ μ^*.

الحل:

1- μ^* قياس خارجي:

أ: $\mu^*(\phi) = 0$ من التعريف. 1

ب: لتكن (A_i) متتالية من عناصر $P(X)$ لنميز الحالتين:

الحالة الأولى: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \phi \Rightarrow A_i = \phi$ من أجل $i = 1, 2, \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

3

الحالة الثانية: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \neq \phi$ عندئذ توجد مجموعة على الأقل ولتكن A_{i_0} بحيث

أي: $A_{i_0} \neq \phi$ و $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$

ولدينا:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \mu^*(A_{i_0}) + \sum_{i \neq i_0} \mu^*(A_i) \geq \mu^*(A_{i_0}) = 1$$

أي أن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

وفي كلا الحالتين نجد:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

4

ت: μ^* متزايد: لتكن $A_1 \subseteq A_2$ عندئذ نميز الحالتين:

الحالة الأولى: $A_2 = \phi \Rightarrow A_1 = \phi \Rightarrow \mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2)$

الحالة الثانية: $A_2 \neq \phi \Rightarrow \mu^*(A_2) = 1 \ge \mu^*(A_1)$ سواء أكانت A_1 خالية أم غير خالية.

من (أ) و(ب) و(ت) ينتج أن μ^* قياس خارجي.

ث: A قابلة القياس بالنسبة لـ μ^* إذا وفقط إذا:

$$\mu^*(T) \ge \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \bar{A}) \; ; \; \forall T \subseteq X$$

لتكن $A \in P(X)$ عندئذ لدينا حالتان:

أ: $A = \phi \Rightarrow \mu^*(A) = 0$ فهي A قابلة القياس بالنسبة لـ μ^* وبالتالي ϕ ومتممتها $X = N$ قابلتان للقياس بالنسبة لـ μ^*.

ب: إذا كانت $A \notin \{\phi, N\}$ عندئذ نأخذ T بحيث يكون:

$T \cap A \neq \phi$ و $T \cap \bar{A} \neq \phi$ وفي هذه الحالة يكون لدينا:

$\mu^*(T \cap A) = 1$ و $\mu^*(T \cap \bar{A}) = 1$ وبالتالي:

$$\mu^*(T) < \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap \bar{A})$$

أي أن A مجموعة غير قابلة القياس بالنسبة لـ μ^*

أي أن أسرة المجموعات القابلة القياس بالنسبة لـ μ^* هي $\{\phi, N\}$

السؤال الثاني: (15 درجة)

لتكن $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ولتكن $Z = \{\phi, X, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$ والمطلوب إثبات:

١: Z تبولوجيا على X.

٢: Z ليست حلقة وليست جبرًا.

٣: Z جبر من أجزاء X ليس جبرًا فيه.

٤: عيّن أصغر جبر يحوي Z أي $\sigma(Z)$.

الحل: ١- Z تبولوجيا على X، لنتحقق من شروط التبولوجيا:

أ: واضح أن ϕ و X عنصران من Z.

ب: اجتماع عدد منته من عناصر Z مهما تكن هذه العناصر هو عنصر في Z

$$\forall A, B \in Z \Rightarrow A \cap B \in Z$$

من (م) و (ن) و (ح) نجد أن ح تبولوجيا على X .

ج/ ح ليست مغلقة لأنه إذا أخذنا $A=\{3\}\in Z$ و $B=X\in Z$

فإن: $B-A=\{2,1,4\}\notin Z$ أي أن ح ليست مغلقة بالنسبة لعملية

الفرق النسبي و ح ليست جبرًا لأنه إذا أخذنا $\{1\}\in Z$ فإن

6 أي أن ح ليست مغلقة بالنسبة لعملية التتميم $\overline{\{1\}} = X-\{1\} = \{2,3,4\}\notin Z$

د/ ليكن F جبرًا في X عندئذ فإن F هو σ- جبري X أيضًا لأن

م: F جبري X وبالتالي مغلق بالنسبة لعملية التتميم .

ن: بما أن X مجموعة منتهية فإن أي متتالية

4 ستكون متتالية منتهية وبالتالي فإن اجتماع $(A_i)_i$ من عناصر F

من F أيضًا .

هـ: $\sigma(Z)=\{\phi, X, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,4\}, \{2,4\}\}$

2 السؤال الثالث: (30 درجة)

1- عرف القياس، القياس التام، عملية تتميم القياسات، القياس التام ما هي متعلقة تعريفه واذكر خواصه .

2- ليكن (X,M,μ) فضاء قياس ولنعرف التابع $\mu_A : M \longrightarrow \bar{R}$

حيث $A\in M$ بالشكل التالي: $\mu_A(B)=\mu(A\cap B)$ والمطلوب

أثبت أن μ_A قياسًا على الفضاء (X,M) .

الحل: 1- القياس: ليكن (X,A) فضاءً قيوسًا. ندعو أي تابع مجموعة μ معرف على A غير سالب وتام الجمعية بقياس على (X,A) أو على A أو على X إذا لم يكن هناك التباس .

4 القياس التام: ليكن (X,F,μ) فضاء قياس. نقول عن تابع القياس μ أنه قياس تام. إذا كانت كل مجموعة جزئية من مجموعة μ-مهملة قيوسة بالنسبة لـ μ وندعو (X,F,μ) في هذه الحالة فضاء قياس تام .

أي μ قياس تام $\iff$

5 $A\in F ; \mu(A)=0 \ \& \ B\subseteq A \Rightarrow B\in F \ \& \ \mu(B)=0$

3 عملية تتميم القياسات: هو الإجراء الذي يمكننا من خلاله تمديد أي تابع قياس موجب والحصول بنتيجة هذا التمديد على تابع قياس تام .

القياس $\bar{\mu}$: إذا كان (X, F, μ) فضاء قياس منتهي عندئذ فإن $\bar{\mu}$ هو تابع القياس الناتج من تتميم القياس μ والمعرف بالشكل:

$$\bar{\mu}(E) = \bar{\mu}(A \cup B) = \mu(A)$$

على الجبرية F حيث:

$F = \{E \subseteq X ; E = A \cup B$ if A قيوسة & μ مهملة - مجموعة $B\}$ (5)

وهو يحقق الخاصة الجمعية والخاصة تحت الجمعية التامة وخاصة التزايد بالإضافة لذلك فهو قياس تام.

ج- إثبات أن μ_A قياس على الفضاء (X, M):

بما أن (X, M, μ) فضاء قياس وبالتالي فإن M هو جبر تام كذلك فإن:

1: $\mu_A(B) = \mu(A \cap B) \geq 0$ لأن μ قياس أيضاً

وذلك $\forall B \in M$ ، $\mu_A(B) \geq 0$ (2)

2: $\mu_A(\phi) = \mu(A \cap \phi) = 0$ (3)

3: لنتحقق أن μ_A يحقق الخاصة تامة الجمعية:

لتكن إذاً (A_i) متتالية من عناصر M منفصلة ولنبرهن أن:

$$\mu_A\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_A(A_i)$$

لدينا

$$\mu_A\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_A(A_i)$$ (6)

إذاً μ_A يحقق الخاصة تامة الجمعية

مما سبق نجد أن μ_A قياس على الفضاء (X, M).

السؤال الرابع: (15 درجة)

ليكن: (X, M, μ) فضاء قياس والمطلوب برهن أن:

if $A, B \in M$ & $\mu(A \Delta B) = 0$ then $\mu(A) = \mu(B)$

الحل:

لدينا:

$A = (A - B) \cup (A \cap B)$

$B = (B - A) \cup (A \cap B)$

وبالتالي:

$\mu(A) = \mu(A - B) + \mu(A \cap B)$ (1)

$\mu(B) = \mu(B - A) + \mu(A \cap B)$ (2)

(4)

وبجمع 1 مع 2 نجد أن :

$$\mu(A)+\mu(B)=\underbrace{\mu(A-B)+\mu(B-A)}+2\mu(A\cap B)$$

$$=\underbrace{\mu(A\,\Delta\,B)}_{=0}+2\mu(A\cap B)=2\mu(A\cap B)$$

أي أن :

$$\mu(A)+\mu(B)=2\mu(A\cap B)\leq 2\mu(A)$$ لأن $A\cap B\subseteq A$ والرتابة

وبالتالي :

$$\boxed{\mu(B)\leq\mu(A)} \quad \text{I}$$

أيضاً لدينا :

$$\mu(A)+\mu(B)=2\mu(A\cap B)\leq 2\mu(B)$$ لأن $A\cap B\subseteq B$ والرتابة

وبالتالي :

$$\text{II} \quad \boxed{\mu(A)\leq\mu(B)}$$

من المتراجحتين I و II نجد أن :

$$\mu(A)=\mu(B)$$

6

5

ملاحظة: المسائل الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل والجميع تأخذ نفس العلامة الموجودة في سلم التصحيح.

طرطوس في ٢٠١٣/٨/١٨

مدرسة المقرر عائشة صالحة

مع التمنيات

بالتوفيق والنجاح

مكتبة

A to Z