كلية **العلوم**

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

اسئلة دورات محلولة

ميكانيك٢

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Zمكتبة

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (2)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى 2024 - 2025

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (30 درجة):

أوجد عزم عطالة صفيحة متجانسة بشكل نصف دائرة نصف قطرها R محدودة بالمحور ox بالنسبة لمحور مار من مركز الدائرة o ويقع في مستويها ويصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$ مع ox .

السؤال الثاني (25 درجة):

في الحركة المستوية للجسم الصلب برهن أن متجه سرعة أي نقطة M من هذا الجسم هو متجه سرعتها بالنسبة للمركز الآني للدوران I . ثم برهن أن متجه تسارع أي نقطة من هذا الجسم هو متجه تسارعها بالنسبة للمركز التسارع الآني C .

السؤال الثالث (35 درجة):

$OABC$ صفيحة مربعة تستطيع الدوران حول رأسها الثابت O والضلع OA يبقى ملازماً للمستوالثابت Oxy والمطلوب:

1) بين نوع الحركة وأوجد وسطاء الحركة.

2) أوجد مركبات متجه الدوران على المحاور الثابتة ومحاور متماسكة مع الجسم.

3) أوجد معادلات الحركة بفرض أن الصفيحة تتحرك بسرعة زاوية ثابتة القيمة و متجه الدوران يصنع مع المستو الثابت زاوية ثابتة α.

4) أوجد معادلات المحور الآني للدوران في الفضاء الثابت والمتحرك ومعادلات مخروطي القاعدة والمتدحرج.

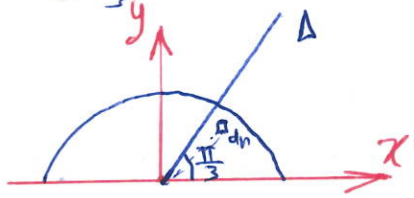
علماً أنه في اللحظة $t = 0$ كانت الصفيحة منطبقة على المستو الثابت Oxy.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (30 درجة):

أوجد عزم عطالة صفيحة متجانسة بشكل نصف دائرة قطرها R محدودة بالمحور ox بالنسبة لمحور مار من مركز الدائرة o يقع في مستويها ويصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$ مع القطر المحدد للصفيحة.



الحل:

ليكن o مركز الدائرة ، ox القطر المحدد للصفيحة

و oy هو المحور التناظري للصفيحة :

عزم العطالة للصفيحة بالنسبة لـ Δ :

$$I_\Delta = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta \quad (5)$$

حيث : (6)

$$A = I_x = \int (y^2+z^2)\,dm \;,\; B = I_y = \int (x^2+z^2)\,dm \;,\; C = I_z = \int (x^2+y^2)\,dm$$

$$D = P_{yz} = \int yz\,dm \;,\; E = P_{zx} = \int zx\,dm \;,\; F = P_{xy} = \int xy\,dm \;,\; dm = \rho\, r\,dr\,d\theta \quad (3)$$

$$y = r\sin\theta \;,\; x = r\cos\theta \;,$$

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \;,\; \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;,\; \gamma = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad (3)$$

$$A = \int (y^2+z^2)\,dm = \int y^2\,dm = \int r^2\sin^2\theta\,\rho\, r\,dr\,d\theta = \rho\int_0^R r^3\,dr \int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta \quad (2)$$

$$= \frac{\rho R^4}{4}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\pi = \frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \underbrace{\frac{\rho\pi R^2}{2}}_{=M}\cdot\frac{R^2}{4} = \frac{MR^2}{4} \;;\; M = \frac{\rho\pi R^2}{2}$$

كتلة الصفيحة

$$B = \int (x^2+z^2)\,dm = \int x^2\,dm = \int r^2\cos^2\theta\,\rho\, r\,dr\,d\theta = \rho\int_0^R r^3\,dr\int_0^\pi \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\int_0^\pi \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\pi = \frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{MR^2}{4} \;, \quad (2)$$

$$C = I_z = \int (x^2+y^2)\,dm = \int x^2\,dm + \int y^2\,dm = A + B = \frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{4} = \frac{MR^2}{2} \quad (2)$$

$$D = P_{yz} = \int yz\,dm = 0 \;;\; z = 0 \quad (2)$$

$$E = P_{zx} = \int zx\,dm = 0 \;;\; z = 0 \quad (2)$$

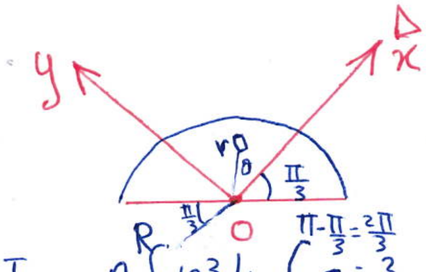
$F = P_{xy} = \int xy\,dm = 0$ ، لأن y محور تناظر (2)

نعوض في الدستور :

$$I_\Delta = \frac{MR^2}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{MR^2}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{MR^2}{2}(0) - 0 - 0 - 0$$

$$I_\Delta = \frac{MR^2}{4}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{MR^2}{4}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{MR^2}{4} \quad (1)$$

طريقة ثانية:



لو أخذنا المحور ox منطبق على Δ فيكون:

$$I_\Delta = I_x = \int (y^2+z^2)\,dm \;;\; z=0,\; dm=\rho r\,dr\,d\theta \quad 5$$

$$= \int y^2\,dm \;.\; y = r\sin\theta \quad 5$$

$$\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

$$I_\Delta = \rho \int_0^R r^3\,dr \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{(1-\cos 2\theta)}{2}\, d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac12\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \quad 5 \quad 5$$

$$I_\Delta = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac12\cdot\frac{2\pi}{3} - \frac14 \sin\frac{4\pi}{3} - \left(\frac12\cdot\frac{\pi}{3} - \frac14\sin -\frac{2\pi}{3}\right)\right] \quad 5$$

$$;\ \sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt3}{2}$$

$$\sin -\frac{2\pi}{3} = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt3}{2}$$

$$I_\Delta = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{2\pi}{6}+\frac{\sqrt3}{8}+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt3}{8}\right] = \frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{\cancel{3}\pi}{\cancel{6}_2} = \underbrace{\frac{\rho\pi R^2}{2}}_{=M}\cdot\frac{R^2}{4} \quad 5$$

$$I_\Delta = \frac{MR^2}{4}.$$

السؤال الثاني (25 درجة): (12 - 13)

في الحركة المستوية للجسم الصلب برهن أن متجه السرعة لأي نقطة M من هذا الجسم هو متجه سرعته بالنسبة للمركز الآني للدوران I . وبرهن أن متجه تسارع أي نقطة من هذا الجسم هو متجه تسارعه بالنسبة لمركز التسارع الآني C.

الحل:

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{AM} \quad 5$$
$$= \vec{v}(A) + \vec{\dot\varphi} \wedge (\vec{AI} + \vec{IM}) \quad 1$$
$$= \vec{v}(A) + \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{AI} + \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{IM}$$

ولكن I هو المركز الآني للدوران:

$$\vec{v}(A) + \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{AI} = \vec{v}(I) = 0 \quad 3$$

نعوض

$$\Longrightarrow \vec{v}(M) = \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{IM} = \vec{v}_I(M) \quad 3$$

أو يمكن بالبرهان بالطريقة:

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{AM} \quad 5$$

بما أن I المركز الآني للدوران ⇐

$$\vec{v}(I) = \vec{v}(A) + \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{AI} = 0 \Rightarrow \quad 3$$
$$\Longrightarrow \vec{v}(A) = -\vec{\dot\varphi} \wedge \vec{AI}$$

نعوض $\vec{v}(A)$ بعلاقة السرعة الأولى 1

$$\vec{v}(M) = -\vec{\dot\varphi} \wedge \vec{AI} + \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{AM}$$
$$\vec{v}(M) = \vec{\dot\varphi} \wedge (\vec{AM} - \vec{AI}) = \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{IM} = \vec{v}_I(M) \quad 3$$

وهو المطلوب

لنبرهن أن متجه تسارع النقطة M هو متجه تسارعه بالنسبة للنقطة C:

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{AM} - \dot\varphi^2 \vec{AM} \quad 5$$

حسب علاقة شال

$$= \vec{\Gamma}(A) + \vec{\ddot\varphi} \wedge (\vec{AC} + \vec{CM}) - \dot\varphi^2 (\vec{AC} + \vec{CM})$$
$$= \vec{\Gamma}(A) + \vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{AC} + \vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{CM} - \dot\varphi^2 \vec{AC} - \dot\varphi^2 \vec{CM} \quad 2$$
$$= \vec{\Gamma}(A) + \vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{AC} - \dot\varphi^2 \vec{AC} + \vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{CM} - \dot\varphi^2 \vec{CM}$$

بما أن C هو مركز التسارع الآني ⇐ 3

$$\vec{\Gamma}(C) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{AC} - \dot\varphi^2 \vec{AC} = 0$$
$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{CM} - \dot\varphi^2 \vec{CM} = \vec{\Gamma}_C(M) \quad 3$$

أو بطريقة أخرى:

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{AM} - \dot\varphi^2 \vec{AM} \quad (*) \quad 5$$

بما أن C هو مركز التسارع الآني ⇐

$$\vec{\Gamma}(C) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{AC} - \dot\varphi^2 \vec{AC} = 0 \quad 3$$
$$\Longrightarrow \vec{\Gamma}(A) = -\vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{AC} + \dot\varphi^2 \vec{AC}$$

نعوض $\vec{\Gamma}(A)$ في (*) ⇐

$$\vec{\Gamma}(M) = -\vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{AC} + \dot\varphi^2 \vec{AC} + \vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{AM} - \dot\varphi^2 \vec{AM} \quad 2$$
$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\ddot\varphi} \wedge (\vec{AM} - \vec{AC}) - \dot\varphi^2 (\vec{AM} - \vec{AC})$$
$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{CM} - \dot\varphi^2 \vec{CM} = \vec{\Gamma}_C(M) \quad 3$$

السؤال الثالث (35 درجة)

OABC صفيحة مربعة تستطيع الدوران حول رأسها الثابت O والضلع OA يبقى ملازماً للمستوي الثابت OXY والمطلوب:

1) بيّن نوع الحركة وأوجد وسطاء الحركة.

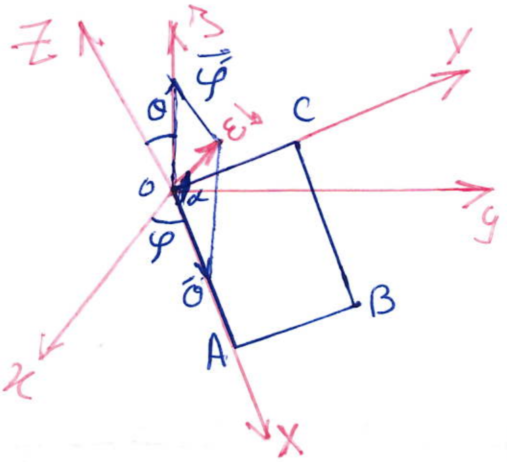
2) أوجد مركبات متجه الدوران على محاور ثابتة ومحاور متماسكة مع الجسم.

3) أوجد معادلات الحركة بفرض أن الصفيحة تتحرك بسرعة زاوية ثابتة القيمة ومتجه الدوران يصنع مع المستوي الثابت زاوية ثابتة α.

4) أوجد معادلات المحور الآني للدوران في الفضاء الثابت والمتحرك والمعادلات الوسيطية لمخروطي القاعدة والمتدحرج.

علماً أنه في اللحظة $t=0$ كانت الصفيحة منطبقة على المستوي الثابت OXY،

الحل:



1) الحركة هي حركة جسم صلب حول نقطة ثابتة والجسم ثلاثة وسطاء هي زوايا أولر

بما أن OA ملازماً للمستوي الثابت $\Leftarrow \psi = 0$ والحركة وسيطين

$\hat{\varphi} = (\vec{Ox}, \vec{OX})$ وبالتالي $\dot{\varphi}$ محمول على Oz

$\hat{\theta} = (\vec{Oz}, \vec{OZ})$ وبالتالي $\dot{\theta}$ محمول على OX

2)
$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{I} + \dot{\varphi}\vec{k}$$

بالإسقاط على المحاور الثابتة Oxyz : $\vec{\omega}(p,q,r)$

$$\begin{cases} p = \dot{\theta}\cos\varphi \\ q = \dot{\theta}\sin\varphi \\ r = \dot{\varphi} \end{cases}$$

بالإسقاط على المحاور المتحركة مع الصفيحة OXYZ : $\vec{\omega}(P,Q,R)$

$$\begin{cases} P = \dot{\theta} \\ Q = \dot{\varphi}\sin\theta \\ R = \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases}$$

3) متجه الدوران ثابت الطول $\Leftarrow$ $\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 = \omega^2 = \upsilon^2$ (1) (υ ثابت)

ومتجه الدوران يصنع مع المستوي الثابت زاوية ثابتة $\alpha \Leftarrow$ (2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\dot{\varphi}}{\dot{\theta}} = K$

$\Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = K\dot{\theta}}$ (3)

نعوض (3) في (1) :
$$\dot{\theta}^2 + K^2\dot{\theta}^2 = \upsilon^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2(1+K^2) = \upsilon^2$$

$$\Rightarrow \dot\theta = \frac{v}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{v}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = v\cos\alpha$$

بالمكاملة

$$\Rightarrow \theta = (v\cos\alpha)t + c$$

من شروط البدء في اللحظة $t=0$ كانت الصفيحة منطبقة على Oxy ⇐ $\theta = 0$ ⇐ $c=0$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = (v\cos\alpha)t} \quad (4) \qquad 3$$

من (3) $\dot\varphi = k\dot\theta$ ⇐ بالمكاملة

$$\varphi = k\theta = tg\alpha\,(v\cos\alpha)\,t$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = (v\sin\alpha)t} \quad (5) \qquad 3$$

(4) و (5) هي معادلات الحركة. 2

طريقة أخرى لحساب معادلات الحركة:

نسقط $\vec\omega$ على OX ⇐ $P = |\vec\omega|\cos\alpha \Rightarrow P = v\cos\alpha$

$$\dot\theta = v\cos\alpha \Rightarrow \theta = (v\cos\alpha)t + C$$

في اللحظة $t=0$ ⇐ $\theta = 0$ ⇐ $C=0$ ⇐

$$\boxed{\theta = (v\cos\alpha)t} \quad (1) \qquad 3$$

نسقط $\vec\omega$ على Oz ⇐

$$r = |\vec\omega|\sin\alpha = v\sin\alpha \qquad 3$$

$$\dot\varphi = v\sin\alpha \Rightarrow \varphi = (v\sin\alpha)t + C$$

من شروط البدء في اللحظة $t=0$ كانت $\varphi = 0$ ⇐ $0 = C$

$$\boxed{\varphi = (v\sin\alpha)t} \quad (2) \qquad 3$$

(1) و (2) هما معادلتا الحركة. 2

4) معادلات المحور الآني للدوران في الفضاء الثابت: $\vec{OI} \parallel \vec\omega$

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \Rightarrow \frac{x}{\dot\theta\cos\varphi} = \frac{y}{\dot\theta\sin\varphi} = \frac{z}{\dot\varphi} \qquad 3$$

$$\frac{x}{(v\cos\alpha)\cos(tv\sin\alpha)} = \frac{y}{(v\cos\alpha)\sin(tv\sin\alpha)} = \frac{z}{v\sin\alpha}$$

وهما معادلتا المحور الآني للدوران (المعادلات الوسيطة لمخروط القاعدة)

بحذف الزمن:

$$\frac{x^2+y^2}{v^2\cos^2\alpha} = \frac{z^2}{v^2\sin^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = ctg^2\alpha\, z^2} \quad 3$$

وهي معادلة مخروط القاعدة وتمثل مخروط دوراني محور دورانه OZ ونصف زاويته الرأسية هي $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

- معادلات المحور الآني للدوران في الفضاء المتحرك :

$$\frac{X}{P} = \frac{Y}{Q} = \frac{Z}{R} \quad 3$$

$$\frac{X}{\theta'} = \frac{Y}{\varphi' \sin\theta} = \frac{Z}{\varphi' \cos\theta}$$

$$\frac{X}{\omega \cos\alpha} = \frac{Y}{\omega \sin\alpha \sin(\omega t + \cos\alpha)} = \frac{Z}{\omega \sin\alpha \cos(\omega t + \cos\alpha)}$$

$$\frac{X^2}{\omega^2 \cos^2\alpha} = \frac{Y^2 + Z^2}{\omega^2 \sin^2\alpha} \Longrightarrow$$

$$\boxed{X^2 + Z^2 = tg^2\alpha\, X^2} \quad 3$$

وهي معادلة مخروط دوراني محور OX ونصف زاويته الرأسية α ويمثل مخروط المتدحرج.

جامعة طرطوس
كلية العـلـوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (2)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية 2024 - 2023

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (30 درجة):

أوجد مجسم عطالة صفيحة مستطيلة متجانسة طولها a وعرضها b بالنسبة لمحورين إحداثيين ox و oy يمران من مركز ثقل هذه الصفيحة. ثم أوجد عزوم العطالة الأساسية والمحاورالأساسية واكتب معادلة مجسم العطالة الأساسي للصفيحة .

السؤال الثاني (25 درجة):

في حركة الجسم الصلب حول نقطة ثابتة عين معادلات الحركة مع الشرح ثم استنتج مركبات متجه الدوران على المحاور الثابتة وعلى محاور متماسكة مع الجسم (علاقات أولر الهندسية).

السؤال الثالث (35 درجة):

ABC صفيحة مثلثية قائمة في A تتحرك في المستوي الثابت oxy بحيث أن الرأس A يتحرك بسرعة ثابتة راسماً المنحني :

$$y(A) = a\,ch\left(\frac{x(A)}{a}\right) \qquad (a \text{ ثابت})$$

ومنحني القاعدة لهذه الحركة هو المستقيم $y = a x$

و المطلوب :

1) بين نوع الحركة.

2) أوجد معادلات هذه الحركة .

3) أوجد احداثيات المركز الآني للدوران في المستوي المتحرك.

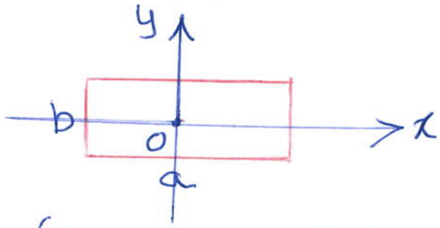
علماً أنه في لحظة البدء كانت $x(A) = 0$.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (30 درجة)

أوجد مجسم عطالة صفيحة متجانسة مستطيلة طولها a وعرضها b بالنسبة لمحورين أفقيين ox و oy يمران من مركز ثقل هذه الصفيحة. ثم أوجد عزوم العطالة الأساسية والمحاور الاحداثية واكتب معادلة مجسم العطالة الأساسي لهذه الصفيحة.



الحل: مجسم العطالة:

$$AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EZX-2FXY=1$$ 6

حيث:

$$A=I_x=\int(y^2+z^2)dm \ , \ B=I_y=\int(x^2+z^2)dm \ , \ C=I_z=\int(x^2+y^2)dm$$

$$D=P_{yz}=\int yz\,dm \ , \ E=P_{xz}=\int xz\,dm \ , \ F=P_{xy}=\int xy\,dm \ , \ dm=\rho\,dx\,dy \ , \ M=\rho ab$$ 6

$$A=I_x=\int(y^2+z^2)dm=\int y^2dm \ ; \ z=0 \ , \ dm=\rho\,dx\,dy$$ 1

$$=\rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}y^2dy=\rho[x]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}=\frac{\rho ab^3}{12}=\frac{Mb^2}{12} \ ; \ M=\rho ab$$

$$B=I_y=\int(x^2+z^2)dm=\int x^2dm=\rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}x^2dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}dy=\rho\frac{a^3b}{12}=\frac{Ma^2}{12}$$

$$C=I_z=\int(x^2+y^2)dm=\int x^2dm+\int y^2dm=I_x+I_y=A+B=\frac{M(a^2+b^2)}{12}$$

$$D=P_{yz}=\int yz\,dm=0 \ ; \ z=0$$

$$E=P_{xz}=\int xz\,dm=0 \ , \ z=0$$ 6

$$F=P_{xy}=\int xy\,dm=0$$ لأن (ox) و oy محورا تناظر

بالتعويض في مجسم العطالة:

$$AX^2+BY^2+CZ^2=1 \Longrightarrow \boxed{\frac{Mb^2}{12}X^2+\frac{Ma^2}{12}Y^2+\frac{M(a^2+b^2)}{12}Z^2=1}$$ 2

نلاحظ أن المحاور ox , oy , oz هي محاور تناظر للصفيحة ⟸ مجسم العطالة هو نفسه مجسم العطالة الأساسي و 3 محاور الاحداثية ox , oy , oz هي نفس المحاور الأساسية وعزوم العطالة الأساسية هي نفس عزوم العطالة 3

أي مجسم العطالة الأساسي

$$AX^2+BY^2+CZ^2=1$$

$$\boxed{\frac{Mb^2}{12}X^2+\frac{Ma^2}{12}Y^2+\frac{M(a^2+b^2)}{12}Z^2=1}$$

$$A'=A=\frac{Mb^2}{12} \ , \ B'=B=\frac{Ma^2}{12} \ , \ C'=C=\frac{M(a^2+b^2)}{12}$$ 3

أو يمكن أن يحل الطالب بهذه الطريقة :

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & -F & -E \\ -F & B-\lambda & -D \\ -E & -D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} \frac{Mb^2}{12}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{12}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M(a^2+b^2)}{12}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{Mb^2}{12}-\lambda\right)\left(\frac{Ma^2}{12}-\lambda\right)\left(\frac{M(a^2+b^2)}{12}-\lambda\right) = 0$$

وبالتالي علينا إيجاد الحلول هي عزوم العطالة الأساسية

$$\lambda_1 = A' = A = \frac{Mb^2}{12}$$

$$\lambda_2 = B' = B = \frac{Ma^2}{12}$$

$$\lambda_3 = \frac{M(a^2+b^2)}{12} = C' = C$$

3

نلاحظ أن عزوم العطالة الأساسية هي عزوم الصفيحة

لنوجد محاور العطالة الأساسية :

$$\left.\begin{aligned} (A-\lambda)\alpha - F\beta - E\gamma &= 0 \\ -F\alpha + (B-\lambda)\beta - D\gamma &= 0 \\ -E\alpha - D\beta + (C-\lambda)\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{بالتعويض}} \begin{aligned} (A-\lambda)\alpha &= 0 \\ (B-\lambda)\beta &= 0 \\ (C-\lambda)\gamma &= 0 \end{aligned}$$

• من أجل $\lambda_1 = \frac{Mb^2}{12}$ ⇐ α محققة من أجل جميع القيم

$\beta = \gamma = 0$ ⇐ المنحى الأساسي الأول هو المحور ox $(\alpha,0,0)$

• من أجل $\lambda_2 = \frac{Ma^2}{12}$ ⇐ $\alpha = \gamma = 0$ ⇐ β محققة من أجل جميع القيم ⇐

المنحى الأساسي الثاني هو المحور oy $(0,\beta,0)$

• من أجل $\lambda_3 = \frac{M(a^2+b^2)}{12}$ ⇐ γ محققة من أجل جميع القيم ⇐ $\alpha = \beta = 0$ ⇐ المنحى الأساسي الثالث هو

المحور oz $(0,0,\gamma)$

⇐ المحاور الأساسية منطبقة على المحاور ox , oy , oz

3

ومجسم العطالة الأساسي هو :

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = 1$$

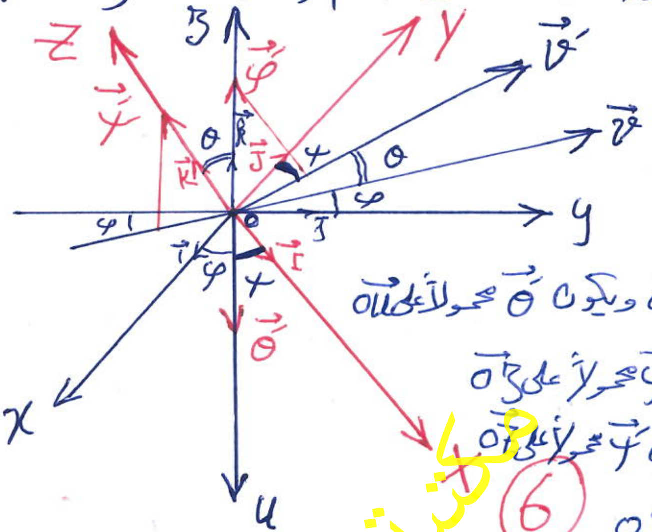
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

3

$$\boxed{\frac{Mb^2}{12}x^2 + \frac{Ma^2}{12}y^2 + \frac{M(a^2+b^2)}{12}z^2 = 1}$$

السؤال الثاني (25 درجة)

في حركة الجسم الصلب حول نقطة ثابتة عين معادلات الحركة مع الشرح ثم استنتج مركبات متجه الدوران على المحاور الثابتة وعلى محاور متماسكة مع الجسم (علاقات أولر الهندسية).



الحل:

في الحركة حول نقطة ثابتة وسطاء الحركة هي زوايا أولر وهي:

- الوسيط الأول هو θ الزاوية بين $\vec{Oz}$ و $\vec{OZ}$ ويكون $\vec{\dot\theta}$ محمولاً على $\vec{Ou}$
- الوسيط الثاني هو φ الزاوية بين $\vec{Ox}$ و $\vec{Ou}$ ويكون $\vec{\dot\varphi}$ محمولاً على $\vec{Oz}$
- الوسيط الثالث هو ψ الزاوية بين $\vec{Ou}$ و $\vec{OX}$ ويكون $\vec{\dot\psi}$ محمولاً على $\vec{OZ}$

6

حيث $\vec{Ou}$ هو الفصل المشترك بين oxy و OXY

و $oxyz$ هي المحاور الثابتة و $OXYZ$ هي المحاور المتماسكة مع الجسم.

معادلات الحركة:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(t) \\ \psi = \psi(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$$

3

θ هي زاوية التأرجح و φ زاوية الترنح و ψ زاوية الدوران الذاتي.

متجه الدوران يكون:

$$\vec{\omega} = \vec{\dot\theta} + \vec{\dot\varphi} + \vec{\dot\psi}$$

$$\vec{\omega} = \dot\theta\,\vec{u} + \dot\varphi\,\vec{k} + \dot\psi\,\vec{K}$$

2

$\vec{\omega}(P,Q,R)$ ، $\vec{\omega}(p,q,r)$ و

لنسقط متجه الدوران على المحاور الثابتة:

$$(1)\begin{cases} p = \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\theta\sin\varphi \\ q = \dot\theta\sin\varphi - \dot\psi\sin\theta\cos\varphi \\ r = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta \end{cases}$$

6

بإسقاط متجه الدوران على المحاور المتحركة:

$$(2)\begin{cases} P = \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi \\ Q = \dot\theta\sin\psi + \dot\varphi\sin\theta\cos\psi \\ R = \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta \end{cases}$$

6

2 تسمى العلاقات (1) و (2) بعلاقات أولر الهندسية.

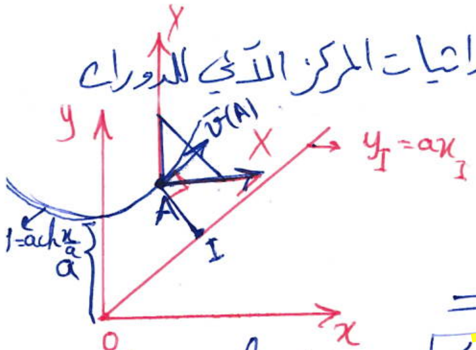
السؤال الثالث (35 درجة) :

صفيحة مثلثية قائمة ABC في A تتحرك في المستوي الثابت oxy بحيث أن الرأس A يتحرك بسرعة ثابتة راسماً المنحني :

$$y(A) = a\,ch\left(\frac{x(A)}{a}\right) \quad (a \text{ ثابت})$$

ومنحني القاعدة لهذه الحركة هو المستقيم $y = ax$ والمطلوب :

1) بين نوع الحركة 2) أوجد معادلات هذه الحركة 3) أوجد احداثيات المركز الآني للدوران في المستوي المتحرك



الحل: 1) الحركة مستوية 2

2) سرعة A ثابتة ولتكن b

$$v(A) = \sqrt{\dot{x}^2(A) + \dot{y}^2(A)}$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2(A) + \dot{y}^2(A) = b^2 \quad (1) \qquad 3$$

$$y(A) = a\,ch\frac{x(A)}{a} \Rightarrow \boxed{\dot{y}(A) = \dot{x}(A)\,sh\frac{x(A)}{a}} \xrightarrow{\text{نعوض في (1)}} \dot{x}^2(A) + \dot{x}^2(A)\,sh^2\frac{x(A)}{a} = b^2 \qquad 3$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2(A)\left(1 + sh^2\frac{x(A)}{a}\right) = b^2 \Rightarrow \dot{x}^2(A)\,ch^2\frac{x(A)}{a} = b^2 \Rightarrow \dot{x}(A)\,ch\frac{x(A)}{a} = b$$

$$\xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \int ch\frac{x(A)}{a}\,dx(A) = \int b\,dt \Rightarrow a\,sh\frac{x(A)}{a} = bt + C$$

في اللحظة $t = 0$ ⇐ $x(A) = 0$ ⇐ $C = 0$ ⇐

$$sh\frac{x(A)}{a} = \frac{b}{a}t$$

$$\boxed{x(A) = a\,\text{arc}\,sh\frac{b}{a}t} \quad (1) \qquad 3$$

$$y(A) = a\,ch\left(\text{arc}\,sh\frac{b}{a}t\right) = a\sqrt{1 + sh^2\left(\text{arc}\,sh\frac{b}{a}t\right)} = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}t^2}; \quad \boxed{y(A) = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}t^2}} \quad (2)$$

لدينا :

$$x(I) = x(A) - \frac{\dot{y}(A)}{\dot{\varphi}}, \quad y(I) = y(A) + \frac{\dot{x}(A)}{\dot{\varphi}} \qquad 6$$

$$y(I) = ax(I) \Rightarrow y(A) + \frac{\dot{x}(A)}{\dot{\varphi}} = a\left(x(A) - \frac{\dot{y}(A)}{\dot{\varphi}}\right) \qquad 3$$

$$\Rightarrow a\,ch\frac{x(A)}{a} + \frac{dx(A)}{d\varphi} = a\left[x(A) - sh\frac{x(A)}{a}\cdot\frac{dx(A)}{d\varphi}\right]$$

بترتيب العلاقة :

$$a\left(ch\frac{x(A)}{a} - x(A)\right) = -\frac{dx(A)}{d\varphi}\left[1 + a\,sh\frac{x(A)}{a}\right] \qquad 3$$

$$\Rightarrow d\varphi = -\frac{\left(1 + a\,sh\frac{x(A)}{a}\right)}{a\left(ch\frac{x(A)}{a} - x(A)\right)}\,dx(A) \Rightarrow \boxed{\varphi = -\int \frac{1 + a\,sh\frac{x(A)}{a}}{a\left(ch\frac{x(A)}{a} - x(A)\right)}\,dx(A)} \quad (3) \qquad 3$$

(1) و (2) و (3) تمثل معادلات الحركة 1

$$X(I) = \frac{\dot{x}(A)\sin\varphi - \dot{y}(A)\cos\varphi}{\dot{\varphi}} = \frac{dx(A)}{d\varphi}\sin\varphi - \frac{dy(A)}{d\varphi}\cos\varphi = \left(\sin\varphi - sh\frac{x}{a}\cos\varphi\right)\left(\frac{-a\left(ch\frac{x(A)}{a} - x(A)\right)}{1 + a\,sh\frac{x(A)}{a}}\right) \quad 3$$

6

$$Y(I) = \frac{\dot{x}(A)\cos\varphi + \dot{y}(A)\sin\varphi}{\dot{\varphi}} = \left(\cos\varphi + sh\frac{x}{a}\sin\varphi\right)\frac{dx(A)}{d\varphi} = \left(\cos\varphi + sh\frac{x(A)}{a}\sin\varphi\right)\left(\frac{-a\left(ch\frac{x(A)}{a} - x(A)\right)}{1 + a\,sh\frac{x(A)}{a}}\right) \quad 1$$

جامعة طرطوس
كلية العــلــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (2)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى 2024 - 2023

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (30 درجة):

أوجد مجسم عطالة صفيحة متجانسة بشكل ربع دائرة نصف قطرها R المتعلق بمبدأ الإحداثيات o المنطبق على مركز دائرة الصفيحة. ثم أوجد عزوم العطالة الأساسية واكتب معادلة مجسم العطالة الأساسي لهذه الصفيحة.

السؤال الثاني (25 درجة):

في الحركة المستوية للجسم الصلب برهن أن المحل الهندسي لنقاط التسارع الناظمي هو قوس من دائرة مارة من المركزالآني للدوران I ومركز التسارع الآني C.

السؤال الثالث (35 درجة):

OAB صفيحة مثلثية قائمة. تستطيع الدوران حول رأسها القائم الثابت O والضلع OA يبقى ملازماً للمستوالثابت Oxy .

والمطلوب:

1) أوجد وسطاء الحركة.

2) أوجد مركبات متجه الدوران على محاور ثابتة ومحاور متماسكة مع الجسم.

3) أوجد معادلات الحركة بفرض أن الصفيحة تتحرك بسرعة زاوية ثابتة القيمة و متجه الدوران يصنع مع المستو الثابت زاوية ثابتة α.

4) أوجد سرعة الرأس A في الفضاء الثابت و المتحرك.

5) أوجد معادلات المحور الآني للدوران في الفضاء الثابت والمتحرك ومعادلتي مخروطي القاعدة والمتدحرج.

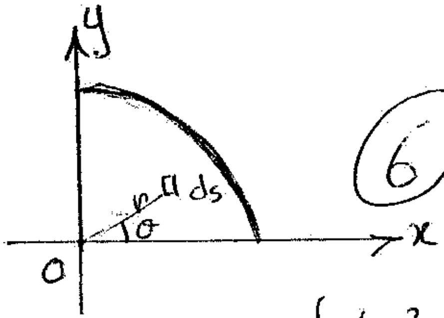
علماً أنه في اللحظة $t = 0$ كانت الصفيحة منطبقة على المستو الثابت Oxy.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (30 درجة)

أوجد مجسم عطالة صفيحة متجانسة بشكل ربع دائرة نصف قطرها R المتعلق بمبدأ الإحداثيات o المنطبق على مركز دائرة الصفيحة. ثم أوجد عزوم العطالة الأساسية واكتب معادلة مجسم العطالة الأساسي لهذه الصفيحة.



الحل:

مجسم العطالة $AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EZX-2FXY=1$ 6

حيث $A=I_x=\int(y^2+z^2)dm$, $B=I_y=\int(x^2+z^2)dm$

$C=I_z=\int(x^2+y^2)dm$, $D=P_{yz}=\int yz\,dm$, $E=P_{zx}=\int zx\,dm$, 6

$F=P_{xy}=\int xy\,dm$, $dm=\rho r\,dr\,d\theta$, $y=r\sin\theta$, $x=r\cos\theta$

$$A=\int y^2dm=\int r^2\sin^2\theta\,\rho r\,dr\,d\theta=\rho\int_0^R r^3dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta=\rho\frac{R^4}{4}\int\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\rho\frac{R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\rho\pi R^2}{4}\cdot\frac{R^2}{4}=\frac{MR^2}{4},\quad \boxed{A=\frac{MR^2}{4}}\ ;\ M=\frac{\rho\pi R^2}{4}$$

$$B=\int x^2dm=\int r^2\cos^2\theta\,\rho r\,dr\,d\theta=\rho\int_0^R r^3dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\rho\pi R^2}{4}\cdot\frac{R^2}{4}=\frac{MR^2}{4}\Rightarrow\boxed{B=\frac{MR^2}{4}}$$

$$C=I_z=\int(x^2+y^2)dm=A+B=\frac{MR^2}{4}+\frac{MR^2}{4}=\frac{MR^2}{2},\quad\boxed{C=\frac{MR^2}{2}}$$

$D=P_{yz}=\int yz\,dm=0$, $z=0$

$E=P_{zx}=\int zx\,dm=0$, $z=0$

$$F=P_{xy}=\int xy\,dm=\int r^2\sin\theta\cos\theta\,\rho r\,dr\,d\theta=\rho\int_0^R r^3dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\rho\frac{R^4}{4}\left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]=\frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\rho\pi R^2}{4}\cdot\frac{R^2}{2\pi}=\boxed{\frac{MR^2}{2\pi}=F}$$

مجسم العطالة: 6

$$\frac{MR^2}{4}X^2+\frac{MR^2}{4}Y^2+\frac{MR^2}{2}Z^2-2\cdot\frac{MR^2}{2\pi}XY=1$$

$$\boxed{\frac{MR^2}{2}\left(\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{2}+Z^2-\frac{2}{\pi}XY\right)=1}$$

لإيجاد عزوم العطالة الأساسية نفك المعين:

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & -F & -E \\ -F & B-\lambda & -D \\ -E & -D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{MR^2}{4}-\lambda & -\frac{MR^2}{2\pi} & 0 \\ -\frac{MR^2}{2\pi} & \frac{MR^2}{4}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ 3

$$\left(\frac{MR^2}{4}-\lambda\right)\left(\frac{MR^2}{4}-\lambda\right)\left(\frac{MR^2}{2}-\lambda\right)+\frac{MR^2}{2\pi}\left[-\frac{MR^2}{2\pi}\left(\frac{MR^2}{2}-\lambda\right)\right]=0$$

$$\left(\frac{MR^2}{2}-\lambda\right)\left[\left(\frac{MR^2}{4}-\lambda\right)^2-\left(\frac{MR^2}{2\pi}\right)^2\right]=0$$

$$\left(\frac{MR^2}{2}-\lambda\right)\left[\left(\frac{MR^2}{4}-\lambda+\frac{MR^2}{2\pi}\right)\left(\frac{MR^2}{4}-\lambda-\frac{MR^2}{2\pi}\right)\right]=0$$ 3

إما :

$$\lambda_1 = A' = \frac{MR^2}{2}$$

$$\lambda_2 = B' = \frac{MR^2}{4}+\frac{MR^2}{2\pi} = \left(\frac{2+\pi}{2\pi}\right)\frac{MR^2}{2}$$ 3

$$\lambda_3 = C' = \frac{MR^2}{4}-\frac{MR^2}{2\pi} = \left(\frac{-2+\pi}{2\pi}\right)\frac{MR^2}{2}$$

مجسم العطالة الأساسي لهذه الصفيحة :

$$A'X'^2 + B'Y'^2 + C'Z'^2 = 1$$

$$\frac{MR^2}{2}X'^2 + \left(\frac{2+\pi}{2\pi}\right)\frac{MR^2}{2}Y'^2 + \left(\frac{-2+\pi}{2\pi}\right)\frac{MR^2}{2}Z'^2 = 1$$ 3

$$\boxed{\frac{MR^2}{2}\left[X'^2 + \left(\frac{2+\pi}{2\pi}\right)Y'^2 + \frac{(-2+\pi)}{2\pi}Z'^2\right] = 1}$$

السؤال الثاني (25 درجة)

في الحركة المستوية للجسم الصلب برهن أن المحل الهندسي لنقاط ذات التسارع الناظمي هو قوس من دائرة مار من المركز الآني للدوران I ومن مركز التسارع الآني C.

الحل: نقول عن النقطة N أنها ذات تسارع ناظمي إذا كان متجه تسارعها دوماً محمول على الناظم

أي أن:

$$\vec{\Gamma}(N)\cdot\vec{v}(N)=0$$ 3

ولكن: 3

$$\vec{\Gamma}(N)=\vec{\ddot\varphi}\wedge\vec{CN}-\dot\varphi^2\vec{CN}$$

$$\vec{v}(N)=\vec{\dot\varphi}\wedge\vec{IN}$$ 3

بالتعويض

$$\Rightarrow (\vec{\ddot\varphi}\wedge\vec{CN}-\dot\varphi^2\vec{CN})\cdot(\vec{\dot\varphi}\wedge\vec{IN})=0$$

$$(\vec{\ddot\varphi}\wedge\vec{CN})\cdot(\vec{\dot\varphi}\wedge\vec{IN})-\dot\varphi^2\vec{CN}\cdot(\vec{\dot\varphi}\wedge\vec{IN})=0$$

باستخدام خواص الجداء المختلط:

$$\vec{\ddot\varphi}\cdot[\vec{CN}\wedge(\vec{\dot\varphi}\wedge\vec{IN})]+\dot\varphi^2\vec{CN}\cdot(\vec{IN}\wedge\vec{\dot\varphi})=0$$ 3

$$\vec{\ddot\varphi}\cdot[\vec{CN}\wedge(\vec{\dot\varphi}\wedge\vec{IN})]+\dot\varphi^2(\vec{CN}\wedge\vec{IN})\cdot\vec{\dot\varphi}=0$$

باستخدام علاقة جيبس للحد الأول:

$$\vec{CN}\wedge(\vec{\dot\varphi}\wedge\vec{IN})=(\vec{CN}\cdot\vec{IN})\vec{\dot\varphi}-(\vec{CN}\cdot\vec{\dot\varphi})\cdot\vec{IN}$$ 3 لأن $\vec{\dot\varphi}$ و $\vec{CN}$ متعامدان $\vec{CN}\cdot\vec{\dot\varphi}=0$

$$\vec{\ddot\varphi}\cdot[(\vec{CN}\cdot\vec{IN})\vec{\dot\varphi}]+\dot\varphi^2(\vec{CN}\wedge\vec{IN})\cdot\vec{\dot\varphi}=0$$

$$\vec{\ddot\varphi}\cdot(\vec{CN}\cdot\vec{IN})\vec{\dot\varphi}+\dot\varphi^2(\vec{CN}\wedge\vec{IN})\cdot\vec{\dot\varphi}=0$$ 3

$$\ddot\varphi(\vec{CN}\cdot\vec{IN})\cdot\dot\varphi+\dot\varphi^2|\vec{CN}\wedge\vec{IN}|\cdot\dot\varphi=0$$

لكن θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{CN},\vec{IN}$ ⇐ وبالاختصار على $\dot\varphi$:

$$\ddot\varphi|\vec{CN}|\cdot|\vec{IN}|\cos\theta+\dot\varphi^2|\vec{CN}|\cdot|\vec{IN}|\sin\theta=0$$

بالاختصار على $|\vec{CN}|$ و $|\vec{IN}|$ ⇐

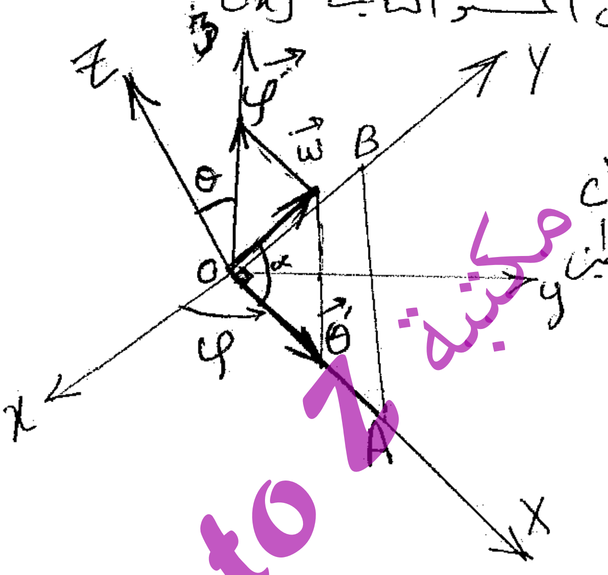
$$\ddot\varphi\cos\theta+\dot\varphi^2\sin\theta=0\Rightarrow tg\theta=-\frac{\ddot\varphi}{\dot\varphi^2}$$ 3

كل نقطة N ترى منها القطعة المستقيمة IC ضمن زاوية θ تكون تسارعاً ناظمياً فقط ومنه المحل الهندسي لهذه النقاط هو قوس من دائرة مارة من I و C. 4

السؤال الثالث (35 درجة)

OAB صفيحة مثلثية قائمة. تستطيع الدوران حول رأسها القائم الثابت O، الضلع OA يبقى ملازماً للمستوي الثابت OXY، والمطلوب:

1) أوجد وسطاء الحركة 2) أوجد مركبات متجه الدوران على محاور ثابتة ومحاور متماسكة مع الجسم 3) أوجد معادلات الحركة بفرض أن الصفيحة تتحرك بسرعة زاوية ثابتة القيمة ومتجه الدوران يصنع مع المستوي الثابت زاوية ثابتة α. 4) ثم أوجد سرعة الرأس A في الفضاء الثابت والمتحرك. 5) أوجد معادلات المحور اللحظي للدوران في الفضاء الثابت والمتحرك، علماً أنه في اللحظة $t=0$ كانت الصفيحة منطبقة على المستوي الثابت OXY



الحل:

1) إن الحركة هي حركة جسم صلب حول نقطة ثابتة وبالتالي للجسم ثلاث وسطاء هي زوايا أولر. بما أن

2) OA ملازماً للمستوي الثابت $\Leftarrow \psi = 0$ والحركة بوسيطين

$\hat{\varphi} = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX})$ وبالتالي $\dot{\varphi}$ محمول على Oz

$\hat{\theta} = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OZ})$ فيكون $\dot{\theta}$ محمول على OX

2) $$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{I} + \dot{\varphi}\vec{k}$$

بالإسقاط على المحاور الثابتة Oxyz:

$$\begin{cases} p = \dot{\theta}\cos\varphi \\ q = \dot{\theta}\sin\varphi \\ r = \dot{\varphi} \end{cases}$$

وهي مركبات متجه الدوران $\vec{\omega}$ على المحاور الثابتة Oxyz

بالإسقاط على المحاور المتحركة مع الصفيحة OXYZ:

$$\begin{cases} P = \dot{\theta} \\ Q = \dot{\varphi}\sin\theta \\ R = \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases}$$

وهي مركبات متجه الدوران $\vec{\omega}$ على OXYZ.

3) بالفرض متجه الدوران ثابت القيمة (الطول) $\Leftarrow \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 = \omega^2 = \upsilon^2$ ثابت (1)

ومتجه الدوران يصنع مع المستوي الثابت زاوية ثابتة $\alpha \Leftarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\theta}} = K$ (2)

لدينا في (2) $\Leftarrow$ $\boxed{\dot{\varphi} = K\dot{\theta}}$ (3) نعوض في (1)

$$\dot{\theta}^2 + K^2\dot{\theta}^2 = \upsilon^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{\upsilon^2}{1+K^2}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\upsilon}{\sqrt{1+K^2}} = \frac{\upsilon}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \upsilon\cos\alpha \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \theta = (\upsilon\cos\alpha)t + C$$

من شروط البدء في اللحظة $t=0$ كانت الصفيحة منطبقة على المستوي الثابت OXY $\Leftarrow \theta = 0 \Leftarrow c = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = (\upsilon\cos\alpha)t} \quad (4)$$

من (3) $\dot{\varphi} = K\dot{\theta} \Leftarrow$ بالمكاملة واستخدام شروط البدء

$$\varphi = K\theta = \operatorname{tg}\alpha(\upsilon\cos\alpha)t \Rightarrow \boxed{\varphi = (\upsilon\sin\alpha)t} \quad (5)$$

(4) و(5) هي معادلات الحركة :
ج/ إذا الطالب أوجد معادلات الحركة بهذه الطريقة فيكون توزيع العلامات كما يلي :

نسقط $\vec{\omega}$ على $OX \Leftarrow$

$$P = |\vec{\omega}| \cos\alpha \Rightarrow P = \omega \cos\alpha$$

$$\dot{\theta} = \omega \cos\alpha \Rightarrow \theta = (\omega \cos\alpha)t + C$$ 1

باستخدام شروط البدء (في اللحظة $t=0$ كانت $\theta = 0 \Leftarrow C = 0$)

$$\Rightarrow \boxed{\theta = (\omega \cos\alpha)t}$$ 2

نسقط $\vec{\omega}$ على OZ :

$$r = |\vec{\omega}| \sin\alpha = \omega \sin\alpha$$

$$\dot{\varphi} = \omega \sin\alpha \Rightarrow \varphi = (\omega \sin\alpha)t + C$$

$$\boxed{\varphi = (\omega \sin\alpha)t}$$ 2 $\Leftarrow$ باستخدام شروط البدء

أو

4) إيجاد معادلات حركة الرأس A في الفراغ الثابت

$$\vec{OA} : \begin{cases} x_A = a\cos\varphi \\ y_A = a\sin\varphi \\ z_A = 0 \end{cases}$$ 2

لإيجاد سرعة الرأس A في الفراغ الثابت لدينا طريقتين :

(a) بالاشتقاق المباشر

$$\vec{v}(A) \begin{cases} \dot{x}_A = -a\dot{\varphi}\sin\varphi = -a\omega\sin\alpha\sin(\omega\sin\alpha t) \\ \dot{y}_A = a\dot{\varphi}\cos\varphi = a\omega\sin\alpha\cos(\omega\sin\alpha t) \\ \dot{z}_A = 0 \end{cases}$$ 2

أو

(b)

$$\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \vec{OA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ a\cos\varphi & a\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{\theta}\cos\varphi & \dot{\theta}\sin\varphi & \dot{\varphi} \\ a\cos\varphi & a\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$ 2

$$\vec{v}(A) = -a\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{i} + a\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

$$\vec{v}(A) = -a\omega\sin\alpha\sin(\omega\sin\alpha t)\,\vec{i} + a\omega\sin\alpha\cos(\omega\sin\alpha t)$$ 2

أما سرعة الرأس A في الفراغ المتحرك مع الصحن :

$$\vec{V}(A) = \vec{\omega} \wedge \vec{OA} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ P & Q & R \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ 2

$$\vec{OA} \begin{cases} X(A) = a \\ Y(A) = 0 \\ Z(A) = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ \dot{\theta} & \dot{\varphi}\sin\theta & \dot{\varphi}\cos\theta \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = a\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{J} - a\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{K}$$

$$= a\omega\sin\alpha\cos(\omega\cos\alpha t)\,\vec{J} - a\omega\sin\alpha\sin(\omega\cos\alpha t)\,\vec{K}$$ 2

5) معادلات المحور الآني للدوران : $\vec{OI} \parallel \vec{\omega}$

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \Longrightarrow \frac{x}{\dot\theta \cos\varphi} = \frac{y}{\dot\theta \sin\varphi} = \frac{z}{\dot\varphi}$$ 3

$$\frac{x}{(\omega\cos\alpha)\cos(t\,\omega\sin\alpha)} = \frac{y}{(\omega\cos\alpha)\sin(t\,\omega\sin\alpha)} = \frac{z}{\omega\sin\alpha}$$

وهي معادلتا المحور الآني للدوران في الفراغ الثابت ، بحذف الزمن :

$$\frac{x^2+y^2}{\omega^2\cos^2\alpha} = \frac{z^2}{\omega^2\sin^2\alpha} \Longrightarrow \boxed{x^2+y^2 = \cot^2\alpha\, z^2}$$ 3

وهي معادلة مخروط دوراني محور الدوران Oz ، نصف زاوية الرأس هي $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

ويمثل مخروط القاعدة .

معادلات المحور الآني للدوران في الفضاء المتحرك :

$$\frac{X}{P} = \frac{Y}{Q} = \frac{Z}{R} \Longrightarrow \frac{X}{\dot\theta} = \frac{Y}{\dot\varphi\sin\theta} = \frac{Z}{\dot\varphi\cos\theta}$$

$$\frac{X}{\omega\cos\alpha} = \frac{Y}{\omega\sin\alpha\sin(\omega t\cos\alpha)} = \frac{Z}{\omega\sin\alpha\cos(\omega t\cos\alpha)}$$

$$\frac{X^2}{\omega^2\cos^2\alpha} = \frac{Y^2+Z^2}{\omega^2\sin^2\alpha} \longrightarrow \boxed{Y^2+Z^2 = \tan^2\alpha\, X^2}$$ 3

وهي معادلة مخروط دوراني محوره OX ، نصف زاوية الرأسية α ويمثل مخروط المتدحرج .

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (2)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة التكميلية 2023 - 2022

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (25 درجة):

في حركة الجسم الصلب حول نقطة ثابتة . برهن أن جميع نقاط الجسم تدور حول المحور الآني للدوران بسرعة زاوية واحدة $\vec{\omega}$.

السؤال الثاني (30 درجة):

أوجد مجسم عطالة قرص متجانس دائري نصف قطره R المتعلق بمبدأ الأحداثيات o المنطبق على مركز هذا القرص وأوجدعزوم العطالة الأساسية لهذا القرص.

السؤال الثالث (35 درجة):

صفيحة مربعة $ABCD$ تتحرك في المستوي الثابت oxy بحيث أن الرأس A يتحرك على المحور الأفقي ox و الرأس B يتحرك على المحور الشاقولي oy .تدور الصفيحة بسرعة زاوية ثابتة ω والمطلوب:

1) أوجد معادلات الحركة.

2) أوجد إحداثيات المركز الآني للدوران ومحليه الهندسيين في المستوي الثابت وفي المستوي المتحرك.

3) أوجد متجه موضع المركز الآني للتسارع ومحليه الهندسيين في المستوي الثابت والمتحرك.

علماً أن الصفيحة بدأت الحركة عندما كانت A منطبقة على o وطول ضلع الصفيحة $AB = L$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

ميكانيك (2) الدورة التكميلية 2022 - 2023

السؤال الأول (25 درجة)

في حركة الجسم الصلب حول نقطة ثابتة برهن أن جميع نقاط الجسم تدور حول المحور الآني للدوران بسرعة زاوية واحدة.

الحل:

لتكن A نقطة من الجسم الصلب المتحرك حول نقطة ثابتة O ولنفترض أن A تدور حول المحور الآني للدوران بسرعة زاوية $\vec{\omega}(A)$ فيكون:

$$\vec{v}(A) = \vec{\omega}(A) \wedge \vec{OA} \quad 3$$

ولتكن B نقطة أخرى من هذا الجسم وتدور حول المحور الآني للدوران بسرعة زاوية $\vec{\omega}(B)$ فيكون: $\vec{v}(B) = \vec{\omega}(B) \wedge \vec{OB}$

فلنبرهن أن: $\vec{\omega}(A) = \vec{\omega}(B)$.

لدينا من النظرية الأساسية للجسم الصلب أن مسقط سرعة A على AB يساوي مسقط سرعة B على AB أي أن:

$$\vec{v}(A) \cdot \vec{AB} = \vec{v}(B) \cdot \vec{AB} \quad 4$$

بالتعويض لـ $\vec{v}(A)$، $\vec{v}(B)$ بعلاقتيهما نجد أن:

$$[\vec{\omega}(A) \wedge \vec{OA}] \cdot \vec{AB} = [\vec{\omega}(B) \wedge \vec{OB}] \cdot \vec{AB} \quad 3$$

لدينا: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$$[\vec{\omega}(A) \wedge \vec{OA}](\vec{OB} - \vec{OA}) = [\vec{\omega}(B) \wedge \vec{OB}](\vec{OB} - \vec{OA}) \quad 3$$

بفك الأقواس:

$$(\vec{\omega}(A), \vec{OA}, \vec{OB}) - (\vec{\omega}(A), \vec{OA}, \vec{OA}) = (\vec{\omega}(B), \vec{OB}, \vec{OB}) - (\vec{\omega}(B), \vec{OB}, \vec{OA}) \quad 3$$

لدينا: $(\vec{\omega}(A), \vec{OA}, \vec{OA}) = (\vec{\omega}(B), \vec{OB}, \vec{OB}) = 0 \quad 3$

$$\Rightarrow (\vec{\omega}(A), \vec{OA}, \vec{OB}) = -(\vec{\omega}(B), \vec{OB}, \vec{OA})$$

$$(\vec{\omega}(A), \vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{\omega}(B), \vec{OA}, \vec{OB}) \quad 3$$

$$\vec{\omega}(A) \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{OB}) = \vec{\omega}(B) \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{OB})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega}(A) = \vec{\omega}(B)} \quad 3$$

السؤال الثاني (30 درجة)

أوجد مجسم المطالة لقرص دائري متجانس نصف قطره R . ثم أوجد عزوم المطالة الأساسية لهذا القرص . علماً أن مبدأ الاحداثيات o هو مركز القرص .

الحل: مجسم المطالة :

$$A X^2 + B Y^2 + C Z^2 - 2DYZ - 2EXZ - 2FXY = 1$$ 6

حيث

$$A = I_x = \int (y^2+z^2)\,dm \;,\; B = I_y = \int (x^2+z^2)\,dm \;,\; C = I_z = \int (x^2+y^2)\,dm$$

$$D = P_{yz} = \int yz\,dm \;,\; E = P_{xz} = \int xz\,dm \;,\; F = P_{xy} = \int xy\,dm$$ 6

$$x = r\cos\theta \;,\; y = r\sin\theta \;,\; dm = \rho\, r\, dr\, d\theta$$ 3

$$A = I_x = \int (y^2+z^2)\,dm = \int y^2\,dm = \rho\int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\cdot 2\pi\right] = \frac{\rho R^4 \pi}{4} = \frac{MR^2}{4} \;;\; M = \rho\pi R^2$$

$$B = I_y = \int (x^2+z^2)\,dm = \int x^2\,dm = \rho\int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\rho R^4 \pi}{4}$$

$$B = \frac{MR^2}{4}$$

$$C = I_z = \int (x^2+y^2)\,dm = I_x + I_y = A + B = \frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

$$D = P_{yz} = \int yz\,dm = 0 \quad ; \; z = 0$$

$$E = P_{xz} = \int xz\,dm = 0 \quad ; \; z = 0$$

$$F = P_{xy} = \int xy\,dm = 0$$ لأن ox , oy محورا تناظر للقرص

نعوض في مجسم المطالة :

$$\boxed{\frac{MR^2}{2}\left[\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} + Z^2\right] = 1}$$ 6

لايجاد عزوم المطالة الأساسية نأخذ المعين :

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & -F & -E \\ -F & B-\lambda & -D \\ -E & -D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Longrightarrow\; \begin{vmatrix} \frac{MR^2}{4}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ 3 3

$$\left(\frac{MR^2}{4} - \lambda\right)^2\left(\frac{MR^2}{2} - \lambda\right) = 0 \Longrightarrow$$

قيم λ هي عزوم المطالة الأساسية :

$$A' = \lambda_1 = \frac{MR^2}{4} \;,\; B' = \lambda_2 = \frac{MR^2}{4} \;,\; C' = \lambda_3 = \frac{MR^2}{2}$$ 3

وهي عزوم المطالة الأساسية .

السؤال الثالث (35 درجة)

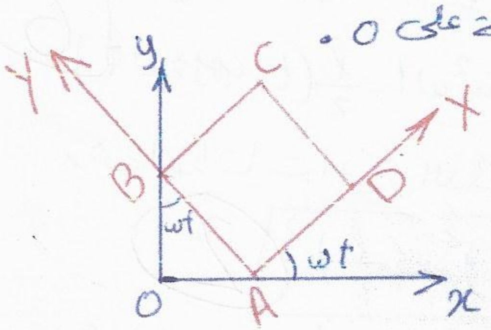
صفيحة مربعة $ABCD$ تتحرك على مستو ثابت OXY بحيث أن الرأس A يتحرك على المحور الأفقي Ox والرأس B يتحرك على المحور الشاقولي Oy ، $AB=l$ طول ضلع الصفيحة، تدور الصفيحة بسرعة زاوية ثابتة ω والمطلوب:

1) أوجد معادلات الحركة.

2) أوجد احداثيات المركز الآني للدوران ومحليه الهندسيين في المستوي الثابت وفي المستوي المتحرك.

3) أوجد سحب موضع المركز الآني للتسارع (مركز التسارع المعدوم) واحداثياته في المستوي الثابت والمتحرك ومحله الهندسي في المستويين الثابت والمتحرك.

علماً أن الصفيحة بدأت الحركة عندما كانت A منطبقة على O.



الحل:

1) الحركة هي حركة مستوية للجسم الصلب

معادلات الحركة:

$$\begin{cases} x(A) = l\sin\omega t \\ y(A) = 0 \\ \varphi = \omega t \end{cases}$$

3

2) احداثيات المركز الآني للدوران في المستوي الثابت:

$$\left.\begin{aligned} x(I) &= x(A) - \frac{y'(A)}{\varphi'} = l\sin\omega t \\ y(I) &= y(A) + \frac{x'(A)}{\varphi'} = l\cos\omega t \end{aligned}\right\}$$

6

المحل الهندسي للمركز الآني للدوران في المستوي الثابت $\boxed{x^2+y^2=l^2}$ 2 وهو يمثل القاعدة التي تمثل دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها l

احداثيات المركز الآني للدوران في المستوي المتحرك:

$$X(I) = \frac{x'(A)\sin\varphi - y'(A)\cos\varphi}{\varphi'} = l\cos\omega t\sin\omega t = \frac{l}{2}\sin 2\omega t$$

$$Y(I) = \frac{x'(A)\cos\varphi + y'(A)\sin\varphi}{\varphi'} = l\cos^2\omega t = \frac{l}{2}(1+\cos 2\omega t)$$

6

بالتربيع والجمع: $\boxed{X^2+\left(Y-\frac{l}{2}\right)^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2}$ 2 معادلة دائرة مركزها $\left(0, \frac{l}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{l}{2}$

وتمثل المحل الهندسي للمركز الآني للدوران في المستوي المتدحرج (المتحرك).

3) المركز الآني للتسارع في المستوي الثابت :

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{\vec{\Gamma}(A)}{\dot{\varphi}^2} = \vec{OA} + \frac{\vec{\Gamma}(A)}{\omega^2}$$

$$x(C) = x(A) + \frac{x''(A)}{\omega^2} = l\sin\omega t - l\sin\omega t = 0$$

$$y(C) = y(A) + \frac{y''(A)}{\omega^2} = 0$$

6

مركز التسارع الآني $x(C)=0$, $y(C)=0$ هو مبدأ الاحداثيات $(0,0)$.

والمحل الهندسي $\boxed{x^2+y^2=0}$ في المستوي الثابت هو نقطة $(0,0)$ دائرة مركزها o ونصف قطرها الصفر.

2

لنوجد احداثيات المركز الآني للتسارع في المستوي المتحرك :

$$X(C) = \frac{\Gamma_X(A)}{\dot{\varphi}^2} = \frac{x''(A)\cos\varphi + y''(A)\sin\varphi}{\dot{\varphi}^2} = -l\sin\omega t\cos\omega t = -\frac{l}{2}\sin 2\omega t$$

$$Y(C) = \frac{\Gamma_Y(A)}{\dot{\varphi}^2} = \frac{-x''(A)\sin\varphi + y''(A)\cos\varphi}{\dot{\varphi}^2} = l\sin^2\omega t = \frac{l}{2}(1-\cos 2\omega t)$$

6

وهي احداثيات المركز الآني للتسارع في المستوي المتحرك .

المحل الهندسي للمركز الآني للتسارع $\boxed{X^2 + \left(Y-\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2}$ 2 في المستوي المتحرك وهو ~~بل~~ دائرة مركزها $\left(0,\frac{l}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{l}{2}$

جامعة طرطوس
كلية العـلـوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (2)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة االفصلية الثانية 2023 - 2022

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (30 درجة):

أوجد مجسم عطالة قرص متجانس بشكل نصف دائرة نصف قطرها R المتعلق بمبدأ الأحداثيات o المنطبق على مركز دائرة هذا القرص واكتب معادلة مجسم العطالة الأساسي لهذا القرص.
ثم أوجد مجسم العطالة المتعلق بمركز كتل هذا القرص .

السؤال الثاني (25 درجة):

إن حركة الجسم الصلب حول نقطة ثابتة هي حركة دورانية حول محور آني مار من هذه النقطة في كل لحظة من الزمن، ونسمي هذا المحور بالمحور الآني للدوران.

السؤال الثالث (35 درجة):

O_1AB صفيحة مثلثية قائمة. تستطيع الدوران حول رأسها القائم O_1 الذي يتحرك على المحور الثابت oy بسرعة ثابتة v والرأس A يبقى ملازماً للمستو الثابت oxy.

والمطلوب:

1) أوجد وسطاء الحركة.

2) أوجد مركبات متجه الدوران على محاور ثابتة ومحاور متماسكة مع الجسم.

3) أوجد معادلات الحركة بفرض أن الصفيحة تتحرك بسرعة زاوية ثابتة القيمة و متجه الدوران يصنع مع المستو الثابت زاوية ثابتة α.

4) أوجد معادلات محور الفتل في الفضاء الثابت.

علماً أنه في اللحظة $t = 0$ كان الصفيحة منطبقة على المستو الثابت oxy .

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

امتحان مقرر ميكانيك (2) 2022-2023

السؤال الأول: (30 درجة)

أوجد مجسم عطالة قرص متجانس بشكل نصف دائرة نصف قطرها R المتعلق بمبدأ الاحداثيات o المنطبق على مركز دائرة هذا القرص واكتب معادلة مجسم العطالة الأساسي لهذا القرص. ثم أوجد مجسم العطالة المتعلق بمركز كتل هذا القرص.

الحل: مجسم العطالة الناقصي:

$$AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EZX-2FXY=1$$

6

حيث: $A=I_x=\int(y^2+z^2)dm$, $B=I_y=\int(x^2+z^2)dm$, $C=I_z=\int(x^2+y^2)dm$

$D=P_{yz}=\int yz\,dm$, $E=P_{zx}=\int xz\,dm$, $F=P_{xy}=\int xy\,dm$

3

$dm=\rho\, r\,dr\,d\theta$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

$$A=I_x=\int(y^2+z^2)dm=\int y^2dm=\iint r^2\sin^2\theta\,\rho\, r\,dr\,d\theta=\rho\int_0^R r^3dr\int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta$$

$$=\rho\frac{R^4}{4}\int_0^\pi\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)d\theta=\rho\frac{R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{\sin2\theta}{4}\right]_0^\pi=\frac{\rho R^4\pi}{8}=\frac{MR^2}{4};\ M=\frac{\rho\pi R^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{MR^2}{4}}$$

$$B=I_y=\int(x^2+z^2)dm=\int x^2dm=\rho\int_0^R r^3dr\int_0^\pi\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^\pi$$

$$=\frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{MR^2}{4}\ ,\quad \boxed{B=\frac{MR^2}{4}}$$

3

$$C=I_z=\int(x^2+y^2)dm=A+B=\frac{MR^2}{4}+\frac{MR^2}{4}=\frac{MR^2}{2},\quad \boxed{C=\frac{MR^2}{2}}$$

$D=P_{yz}=\int yz\,dm=0$; $z=0$

$E=P_{zx}=\int xz\,dm=0$; $z=0$

3

$F=P_{xy}=\int xy\,dm=0$; oy محور تناظر

نعوض في مجسم العطالة:

$$\frac{MR^2}{4}X^2+\frac{MR^2}{4}Y^2+\frac{MR^2}{2}Z^2=1$$

$$\boxed{\frac{MR^2}{2}\left[\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{2}+Z^2\right]=1}$$

وهو مجسم العطالة.

لايجاد عزوم العطالة الأساسية نكتب المميز:

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & -F & -E \\ -F & B-\lambda & -D \\ -E & -D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} \frac{MR^2}{4}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

3

$$\Rightarrow \left(\frac{MR^2}{4}-\lambda\right)^2\left(\frac{MR^2}{2}-\lambda\right)=0$$

فان قيم λ الثلاثة هي عزوم العطالة الأساسية

$$A' = \lambda_1 = \frac{MR^2}{4} \quad , \quad B' = \lambda_2 = \frac{MR^2}{4} \quad , C' = \lambda_3 = \frac{MR^2}{2}$$

وهي مساوية لعزوم العطالة حول $Oxyz$.

مجسم العطالة الأساسي هو:

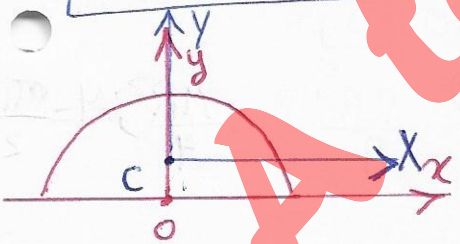
$$A'X'^2 + B'Y'^2 + C'Z'^2 = 1$$

$$\boxed{\frac{MR^2}{4}X'^2 + \frac{MR^2}{4}Y'^2 + \frac{MR^2}{2}Z'^2 = 1}$$

مجسم العطالة الأساسي. 3

وهو منطبق على مجسم العطالة الناقصي .

(2) نأخذ محاور $CXYZ$ توازي $Oxyz$ ونطبق نظرية هويغنز الأولى:



$$A_1 = A - My_c^2 \quad ; \quad y_c = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi} \quad , \quad x_c = 0$$

$$A_1 = \frac{MR^2}{4} - M\left(\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}\right)^2 = \frac{MR^2}{4} - \frac{MR^2(16)}{9\pi^2}$$

$$B_1 = B - M(x_c)^2 = \frac{MR^2}{4}$$

$$C_1 = A_1 + B_1 = \frac{MR^2}{2} - \frac{16MR^2}{9\pi^2}$$

3

نطبق نظرية هويغنز الثانية لإيجاد جداءات العطالة:

$$D_1 = D - My_c z_c = 0 \quad ; \quad D = 0 , z_c = 0$$

$$E_1 = E - Mz_c x_c = 0 \quad ; \quad E = 0 , z_c = 0$$

$$F_1 = F - Mx_c y_c = 0 \quad ; \quad F = 0 , x_c = 0$$

3

وبالتالي مجسم العطالة المتعلق بمركز الكتل:

$$A_1X^2 + B_1Y^2 + C_1Z^2 = 1$$

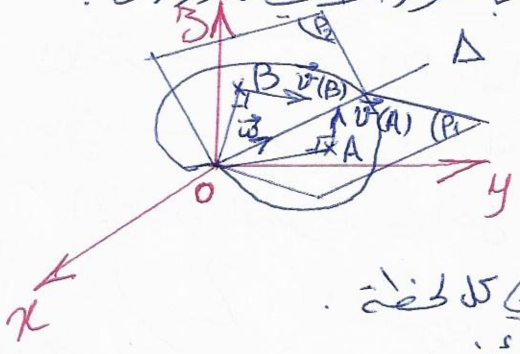
$$\left(\frac{MR^2}{4} - \frac{MR^2(16)}{9\pi^2}\right)X^2 + \frac{MR^2}{4}Y^2 + \left(\frac{MR^2}{2} - \frac{16MR^2}{9\pi^2}\right)Z^2 = 1$$

3

$$\boxed{MR^2\left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)X^2 + \frac{MR^2}{4}Y^2 + MR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)Z^2 = 1}$$

السؤال الثاني (25 درجة)

إن حركة الجسم الصلب حول نقطة ثابتة هي حركة دورانية حول محور آني مار من هذه النقطة في كل لحظة من الزمن. ونسمي هذا المحور بالمحور الآني للدوران.



البرهان:

إذا ثبتنا نقطة ما ولتكن O ولنبرهن أنه في كل لحظة يوجد مستقيم يمر من هذه النقطة وسرع نقاط هذا المستقيم تكون معدومة.

أي لنبرهن وجود مستقيم Δ يحقق $\forall C\in\Delta \Rightarrow \vec v(C)=\vec 0$ في كل لحظة.

لتكن A و B نقطتان من الجسم S لا تقعان في مستو واحد عندئذ:

① نفرض أن $\vec v(A)\neq\vec 0$ لأنه لو كان $\vec v(A)=0$ في كل لحظة فإن A ثابتة فيكون OA هو المحور الآني للدوران وتم المطلوب

② نفرض أن $\vec v(B)\neq\vec 0$ لأنه لو كان $\vec v(B)=0$ في كل لحظة لكان OB هو محور آني للدوران وتم المطلوب.

③ نفرض أن $\vec v(A)\neq\vec v(B)$ لأنه لو كان $\vec v(A)=\vec v(B)$ في لحظة ما فإن الحركة انسحابية وهذا يخالف كونه ثابتة.

④ نفرض أن $\vec v(A)$ و $\vec v(B)$ غير متوازيين: لأنه لو كان $\vec v(A)\parallel\vec v(B)$ فإن ! حسب النظرية الأساسية للجسم الصلب: $\vec{AB}\cdot\vec v(A)=\vec{AB}\cdot\vec v(B)$ وهذا يخالف $\vec v(A)\neq\vec v(B)$

الفرضيات مع التعليل (5) درجات

والآن لنبرهن النظرية ضمن الفرضيات السابقة:

- A نقطة من الجسم S وسرعتها $\vec v(A)$ عمودية على $\vec{OA}$ لأنه حسب النظرية الأساسية للجسم الصلب:

$$\vec{OA}\cdot\vec v(A)=\vec{OA}\cdot\vec v(O)=0 \quad (\text{لأن } \vec v(O)=0) \qquad 2$$

$$\Rightarrow \vec{OA}\cdot\vec v(A)=0 \Rightarrow \begin{cases}\text{إما } \vec v(A)=\vec 0 & (\text{مرفوض})\\ \text{أو } \vec v(A)\perp\vec{OA}\end{cases}$$

وبالتالي $\vec{OA}\perp\vec v(A)$ وبنفس الطريقة نبرهن أن $\vec{OB}\perp\vec v(B)$. 2

لنأخذ مستو (P_1) مار من OA وناظمه $\vec v(A)$ وبالتالي فكل نقطة من الجسم S الواقعة في المستو (P_1) ولتكن A_1 تكون لها سرعة معدومة أو عمودية على هذا المستو لأنه:

بتطبيق النظرية الأساسية على O و A_1: 3

$$\vec{OA_1}\cdot\vec v(A_1)=\vec{OA_1}\cdot\vec v(O)=0$$

$$\vec{OA_1}\cdot\vec v(A_1)=0\Rightarrow\begin{cases}\vec v(A_1)=\vec 0\\ \vec v(A_1)\perp\vec{OA_1}\end{cases} \quad (1) \qquad 2$$

وبتطبيق النظرية الأساسية على A و A_1 فيكون: $\vec{AA_1}\cdot\vec v(A_1)=\vec{AA_1}\cdot\vec v(A)$

A_1 هي نقطة من المستوي (P_1) الذي ناظمه $\vec v(A) \Leftarrow \vec{AA_1}\cdot\vec v(A)=0$

$$\Rightarrow \vec{AA_1}\cdot\vec v(A_1)=0\Rightarrow \vec v(A_1)=\begin{cases}\text{إما } 0\\ \text{أو } \vec{AA_1}\perp\vec v(A_1)\end{cases} \quad (2) \qquad 2$$

من (1) و(2) نكون: $\vec{v}(A_1) = \begin{cases} \text{إما } \vec{0} \\ \text{أو } \vec{v}(A_1) \perp \vec{AA_1} \wedge \vec{OA_1} \end{cases}$

أي أن: (2)

$\vec{v}(A_1) = \begin{cases} \text{إما } \vec{0} \\ \text{أو } \vec{v}(A_1) \perp (P_1) \text{ المستوي} \end{cases}$

لنأخذ مستوٍ آخر (P_2) مار من $(\vec{OB})$ ناظمه $\vec{v}(B)$ وبالتالي فكل نقطة من الجسم S واقعة في المستوي (P_2)، ولكن B_1 تكون سرعتها إما الصفر أو عمودية على المستوي (بنفس الطريقة من أجل A_1) وبالتالي فإن: (2)

$\vec{v}(B_1) = \begin{cases} \text{إما } \vec{0} \\ \text{أو } \vec{v}(B_1) \perp (P_2) \text{ المستوي} \end{cases}$

بما أن $\vec{v}(A) \not\parallel \vec{v}(B)$ من الفرضية (4) فإن المستوي (P_1) لا يوازي (P_2)
وبما أن O نقطة مشتركة بين (P_1) و(P_2) فإنه يوجد فصل مشترك وليكن Δ مار من O (2)

ولكن $C \in \Delta$ نقطة من Δ فإن $C \in P_1$ و $C \in P_2$ وبالتالي تحقق ما تحققه A_1 وتحقق ما تحققه B_1 أي أن

$\vec{v}(C) = \begin{cases} \text{إما } \vec{0} \\ \text{أو } \vec{v}(C) \perp P_1 \end{cases}$ مرفوض

$\vec{v}(C) = \begin{cases} \text{إما } \vec{0} \\ \text{أو } \vec{v}(C) \perp P_2 \end{cases}$ مرفوض

$\Rightarrow \vec{v}(C) = \vec{0}$ (2) لأنه من المستحيل $\vec{v}(C)$ أن يتعامد مع المستويين (P_1) و(P_2) في نفس الوقت (2)

ومنه فإن سرعة جميع نقاط هذا المحور Δ تكون معدومة في هذه اللحظة أي أن Δ هو محور آني للدوران. (2) وهو المطلوب.

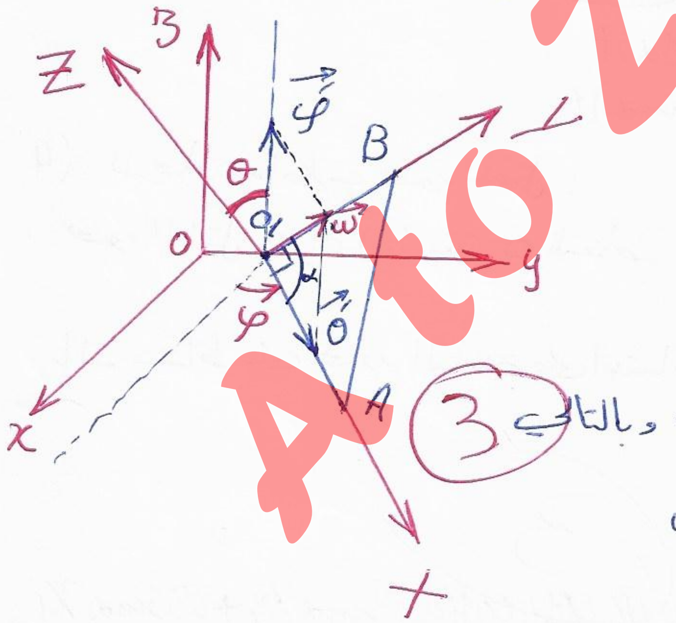
السؤال الثالث (35 درجة)

O_1AB صفيحة مثلثية قائمة. تستطيع الدوران حول رأسها القائم O_1 الذي يتحرك على المحور الثابت Oy بسرعة ثابتة v والرأس A يبقى ملازماً للمستوي الثابت Oxy.

والمطلوب:

1) أوجد وسطاء الحركة. 2) أوجد مركبات متجه الدوران على محاور ثابتة ومحاور متماسكة مع الجسم.

3) أوجد معادلات الحركة بفرض أن الصفيحة تتحرك بسرعة زاوية ثابتة المقدار ومتجه الدوران يصنع مع المستوي الثابت زاوية ثابتة α. ثم 4) أوجد معادلات محور الفتل في الفضاء الثابت. علماً أنه في اللحظة $t=0$ كانت الصفيحة منطبقة على المستوي الثابت Oxy.



الحل:

1) نوع الحركة هي حركة جسم صلب في الحالة العامة

تتعين الحركة بستة وسطاء

$$x(O_1)=x(t)\ ,\quad \varphi=\varphi(t)$$
$$y(O_1)=y(t)\ ,\quad \psi=\psi(t)$$
$$z(O_1)=z(t)\ ,\quad \theta=\theta(t)$$

لدينا $x(O_1)=0$, $z(O_1)=0$, $\psi=0$ وبالتالي 3

المسألة 3 وسطاء:

$$\left.\begin{aligned} y(O_1)&=vt \\ \varphi&=(\widehat{Ox,O_1X}) \\ \theta&=(Oz,O_1Z) \end{aligned}\right\}\ 3$$

O_1Z هو ناظم الصفيحة

2) مركبات متجه الدوران

$$\vec{\omega}=\vec{\theta'}+\vec{\varphi'}=\theta'\vec{I}+\varphi'\vec{k}\quad 2$$

بالإسقاط على المحاور الإحداثية الثابتة $Oxyz$

$$p=\theta'\cos\varphi$$
$$q=\theta'\sin\varphi\qquad 3$$
$$r=\varphi'$$

بالإسقاط على المحاور الإحداثية المتماسكة مع الصفيحة O_1XYZ :

$$P=\theta'$$
$$Q=\varphi'\sin\theta\qquad 3$$
$$R=\varphi'\cos\theta$$

3) لدينا طول متجه الدوران ثابت

$$\omega^2=\theta'^2+\varphi'^2=\nu^2\quad (1)\quad 2$$

متجه الدوران يصنع مع المستوي الثابت زاوية ثابتة α :

$$\frac{\varphi'}{\theta'}=\operatorname{tg}\alpha=K \Rightarrow \frac{\varphi'}{\theta'}=K \Rightarrow \varphi'=K\theta'\quad (2)\quad 2$$

نعوض (2) ب (1) :

$$\dot{\theta}^2 + K^2\dot{\theta}^2 = v^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2(1+K^2) = v^2$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{\sqrt{1+K^2}} = \frac{v}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = v\cos\alpha \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \theta = (v\cos\alpha)\,t$$

3

باستخدام شروط البدء: $t=0$ كان $\theta=0$ ، $\varphi=0$ لأن الصفيحة منطبقة على oxy

$$\dot{\varphi} = K v\cos\alpha = v\sin\alpha \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \varphi = (v\sin\alpha)\,t$$ (وذلك باستخدام شروط البدء السابقة)

وبالتالي معادلات الحركة : 3

2

$$\begin{cases} x = vt \\ \theta = (v\cos\alpha)\,t \\ \varphi = (v\sin\alpha)\,t \end{cases}$$

4) لايجاد معادلات محور الفتل :

محور الفتل هو المحل الهندسي للنقاط M التي تحقق المعادلة: 3 $\vec{v}(M) \parallel \vec{\omega}$

$$\left(\vec{v}(M) = \vec{v}(O_1) + \vec{\omega}\wedge\vec{O_1M}\right) \parallel \vec{\omega}$$

بالإسقاط على المحاور الثابتة على اعتبار $M(x_1, y_1, z_1)$ ، $O_1(0, vt, 0)$

$$(0, v, 0) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{\theta}\cos\varphi & \dot{\theta}\sin\varphi & \dot{\varphi} \\ x_1 & y_1 - vt & z_1 \end{vmatrix} \parallel \vec{\omega}$$

3

$$\frac{v\cos\alpha\sin(vt\sin\alpha)z_1 - v\sin\alpha(y_1 - vt)}{v\cos\alpha\cos(vt\sin\alpha)} = \frac{-v\cos\alpha\cos(vt\sin\alpha)z_1 + v\sin\alpha\,x_1}{v\cos\alpha\sin(vt\sin\alpha)} =$$

$$= \frac{(y_1 - vt)v\cos\alpha\cos(vt\sin\alpha) - x_1 v\cos\alpha\sin(vt\sin\alpha)}{v\sin\alpha}$$

3

وهي المعادلات الوسيطية لمحور الفتل في الفضاء الثابت $oxyz$.

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (2)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة التكميلية 2022- 2021

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (30 درجة):

في الحركة المستوية للجسم الصلب برهن أن متجه السرعة لأي نقطة M من هذا الجسم هو متجه سرعتها بالنسبة للمركز الآني للدوران I ، ثم برهن أن متجه تسارع هذه النقطة هو متجه تسارعها بالنسبة لمركز التسارع الآني C .

السؤال الثاني (30 درجة):

أوجد عزم عطالة صفيحة متجانسة بشكل ربع دائرة نصف قطرها R محدودة بالمحورين الإحداثيين ox و oy بالنسبة لمحور مار من مركز الدائرة ويقع في مستويها ويصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$ مع المحور ox المحدد للصفيحة .

السؤال الثالث (30 درجة):

O_1AB صفيحة مثلثية قائمة. يتحرك رأسها القائم O_1 على المحور الثابت ox بسرعة ثابتة v والرأس A ملزم بالبقاء في المستوي الثابت oxy.

والمطلوب: بين نوع الحركة وأوجد وسطاء هذه الحركة ثم أوجد معادلات الحركة.

علماً بأن متجه الدوران ثابت الطول ويصنع مع O_1A زاوية ثابتة. وأنه في اللحظة $t = 0$ كانت الصفيحة منطبقة على المستوي oxy .

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (30 درجة):

في الحركة المستوية للجسم الصلب برهن أن متجه السرعة لأي نقطة M من هذا الجسم هو متجه سرعتها بالنسبة للمركز الآني للدوران I ، ثم برهن أن متجه تسارع هذه النقطة هو متجه تسارعها بالنسبة لمركز التسارع الآني C .

الحل:

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\varphi}' \wedge \overrightarrow{AM} \quad 5$$

$$= \vec{v}(A) + \vec{\varphi}' \wedge (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM})$$

$$= \vec{v}(A) + \vec{\varphi}' \wedge \overrightarrow{AI} + \vec{\varphi}' \wedge \overrightarrow{IM}$$

لدينا $\vec{v}(A) + \vec{\varphi}' \wedge \overrightarrow{AI} = \vec{v}(I) = 0$ 5 لأن I المركز الآني للدوران

نعوض:

$$\vec{v}(M) = \vec{\varphi}' \wedge \overrightarrow{IM} = \vec{v}_I(M) \quad 5$$

أي أن سرعة أي نقطة M من الجسم الذي يتحرك حركة مستوية هي سرعتها بالنسبة للمركز الآني I.

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varphi}'' \wedge \overrightarrow{AM} - \varphi'^2 \overrightarrow{AM} \quad 5$$

$$= \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varphi}'' \wedge (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}) - \varphi'^2 (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM})$$

$$= \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varphi}'' \wedge \overrightarrow{AC} - \varphi'^2 \overrightarrow{AC} + \vec{\varphi}'' \wedge \overrightarrow{CM} - \varphi'^2 \overrightarrow{CM}$$

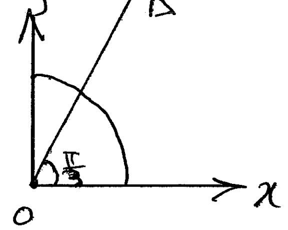
لدينا 5 لأن C مركز التسارع الآني

$$\vec{\Gamma}(C) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varphi}'' \wedge \overrightarrow{AC} - \varphi'^2 \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varphi}'' \wedge \overrightarrow{CM} - \varphi'^2 \overrightarrow{CM} = \vec{\Gamma}_C(M) \quad 5$$

السؤال الثاني (30 درجة):

أوجد عزم عطالة صفيحة متجانسة بشكل ربع دائرة نصف قطرها R محدودة بالمحورين الاحداثيين ox و oy بالنسبة لمحور مار من مركز الدائرة ويقع في مستويها ويصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$ مع المحور ox الأفقي المحدد للصفيحة .



الحل:

$$I_\Delta = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta \quad 5$$

$$A = I_x = \int (y^2 + z^2)\,dm \;,\; B = I_y = \int (x^2 + z^2)\,dm \quad 6$$

$$C = I_z = \int (x^2 + y^2)\,dm \;,\; D = P_{yz} = \int yz\,dm \;,\; E = P_{zx} = \int zx\,dm \;,\; F = P_{xy} = \int xy\,dm$$

$$dm = \rho r\,dr\,d\theta \;,\; y = r\sin\theta \;,\; x = r\cos\theta . \quad 3$$

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \;,\; \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;,\; \gamma = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad 3$$

$$A = \int y^2\,dm = \int r^2 \sin^2\theta\, \rho\, r\,dr\,d\theta = \rho \int_0^R r^3\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta = \rho \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\rho \pi R^2}{4}\cdot\frac{R^2}{4} = \frac{MR^2}{4} \;;\; M = \frac{\rho\pi R^2}{4} \quad 2$$

$$B = \int x^2\,dm = \int r^2 \cos^2\theta \cdot \rho\, r\,dr\,d\theta = \rho \int_0^R r^3\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\rho R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho\pi R^2}{4}\cdot\frac{R^2}{4} = \frac{MR^2}{4} \quad 2$$

$$C = I_z = \int (x^2+y^2)\,dm = A + B = \frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{4} = \frac{MR^2}{2} \quad 2$$

$$D = P_{yz} = \int yz\,dm = 0 \;;\; z = 0 \quad 2$$

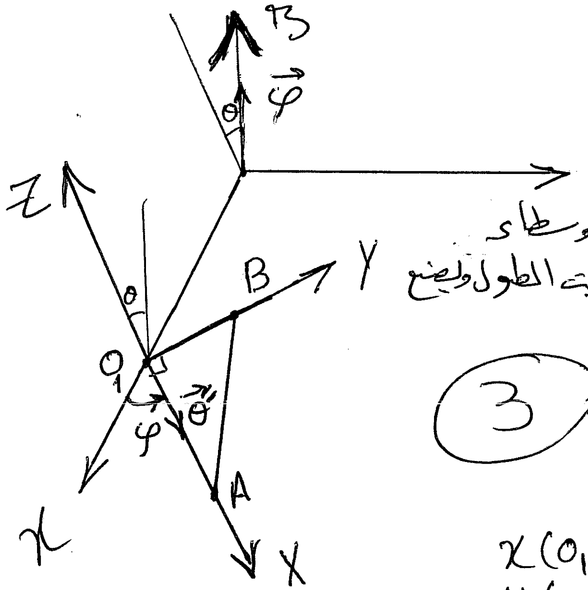
$$E = P_{zx} = \int zx\,dm = 0 \,,\; z = 0 \quad 2$$

$$F = P_{xy} = \int xy\,dm = \int r^2 \sin\theta\cos\theta\, \rho\, r\,dr\,d\theta = \rho \int_0^R r^3\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \rho \frac{R^4}{4}\left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right] = \frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\rho\pi R^2}{4}\cdot\frac{R^2}{2\pi} = \frac{MR^2}{2\pi} \quad 2$$

$$I_\Delta = \frac{MR^2}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{MR^2}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0 - 0 - 0 - 2\,\frac{MR^2}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$I_\Delta = \frac{MR^2}{4}\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right] = \frac{MR^2}{4}\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right] \quad 1$$



السؤال الثالث (30 درجة)

O_1AB صفيحة مثلثية قائمة. يتحرك رأسها القائم O_1 على المحور الثابت Ox بسرعة ثابتة v والرأس A ملزم بالبقاء في المستوي الثابت Oxy والمطلوب: بيّن نوع الحركة وأوجد وسطاء هذه الحركة ثم أوجد معادلات الحركة. علماً أن متجه الدوران ثابت الطول ويصنع مع O_1A زاوية ثابتة.

الحل: نوع الحركة: حركة جسم صلب في الحالة العامة 3

تتعين الحركة بستة وسطاء في الحالة العامة:

$$x(O_1)=x(t) \quad , \varphi=\varphi(t)$$
$$y(O_1)=y(t) \quad , \psi=\psi(t)$$
$$z(O_1)=z(t) \quad , \theta=\theta(t)$$
3

لدينا $y(O_1)=0$ و $z(O_1)=0$, $\psi=0$ إذاً للمسألة ثلاثة وسطاء:

$$\begin{cases} x(O_1)=x=vt \\ \varphi=(\widehat{Ox, O_1X}) \\ \theta=(\widehat{Oz, O_1Z}) \end{cases}$$
3

المحور الآني للدوران: $\vec{\omega}=\dot{\vec{\theta}}+\dot{\vec{\varphi}}=\dot{\theta}\vec{I}+\dot{\varphi}\vec{k}$ 3

بالإسقاط على المحاور الإحداثية $Oxyz$:

$$p=\dot{\theta}\cos\varphi$$
$$q=\dot{\theta}\sin\varphi$$
$$r=\dot{\varphi}$$
3

بالإسقاط على المحاور الإحداثية (المتحركة) المتماسكة مع الصفيحة O_1XYZ:

$$P=\dot{\theta}$$
$$Q=\dot{\varphi}\sin\theta$$
$$R=\dot{\varphi}\cos\theta$$
3

لدينا طول متجه الدوران ثابت ⟸

$$\omega^2=\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2=\Omega^2 \quad (1)$$
3

بما أن متجه الدوران يصنع مع O_1A زاوية ثابتة ولتكن α:

$$\frac{\sqrt{Q^2+R^2}}{P}=K=\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\theta}}=K \Rightarrow \dot{\varphi}=K\dot{\theta} \quad (2)$$
3

(1) و (2) معادلتان بمجهولين :

15

$$\theta'^2 + k^2\theta'^2 = v^2$$

$$\theta'^2(1+k^2) = v^2 \Rightarrow \theta' = \frac{v}{\sqrt{1+k^2}} = v\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \theta = vt\cos\alpha + c$$

3

باستخدام شروط البدء : $t=0$ كانت الصفيحة على المستوي OXY $\Leftarrow$

$t=0$; كان $\theta=0$, $\varphi=0$ $\Leftarrow$ $C=0$

$$\theta = vt\cos\alpha$$

$$\varphi' = kv\cos\alpha = v\sin\alpha \Rightarrow \varphi = vt\sin\alpha$$

3

وبالتالي معادلات الحركة :

$$\begin{cases} x = vt \\ \theta = (v\cos\alpha)\,t \\ \varphi = (v\sin\alpha)\,t \end{cases}$$

جامعة طرطوس
كلية العلـوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (2)
لطلاب الرياضيات ـ السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى 2022- 2021

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (30 درجة):

صفيحة مربعة متجانسة طول ضلعها a محصورة بالمحورين الإحداثيين ox و oy والمطلوب :
أوجد عزم عطالة هذه الصفيحة بالنسبة لمحور منطبق على قطرها ويمر من مبدأ الإحداثيات o .

السؤال الثاني (30 درجة):

في حركة الجسم الصلب حول نقطة ثابتة وأوجد معادلات الحركة ثم استنتج علاقات أولر الهندسية (أي مركبات متجه الدوران على المحاور الثابتة و على محاور متماسكة مع الجسم).

السؤال الثالث (30 درجة):

ABC صفيحة مثلثية قائمة تتحرك في المستوي الثابت oxy بحيث أن الرأس القائم A يرسم المحور الأفقي ox بسرعة ثابتة a ومنحني القاعدة لهذه الحركة هو المنحني المعطى بالعلاقة :

$$y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$$

و المطلوب :

1) بين نوع الحركة ثم أوجد معادلات هذه الحركة .

2) أوجد احداثيات المركز الآني للدوران و محله الهندسي في المستوي المتحرك(المتدحرج).

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

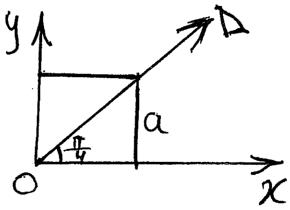
د. هالا محمد

الدورة الفصلية الأولى 2022 - 2021

السؤال الأول (30 درجة):

صفيحة مربعة متجانسة طول ضلعها a محصورة بالمحورين الاحداثيين ox ، oy المطلوب:

أوجد عزم عطالة هذه الصفيحة بالنسبة لمحور منطبق على قطرها ويمر من مبدأ الاحداثيات.



الحل:

عزم عطالة هذه الصفيحة بالنسبة لـ Δ :

$$I_\Delta = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta \qquad 6$$

حيث:

$$A = I_x = \int (y^2+z^2)\,dm,\quad B = I_y = \int (x^2+z^2)\,dm,\quad C = I_z = \int (x^2+y^2)\,dm \qquad 6$$

$$D = P_{yz} = \int yz\,dm,\quad E = P_{xz} = \int xz\,dm,\quad F = P_{xy} = \int xy\,dm$$

$$,\ dm = \rho\,dx\,dy,\quad \alpha = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \gamma = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad 3$$

$$A = I_x = \int y^2\,dm\ ;\ z=0,\quad A = \rho\int_0^a dx\int_0^a y^2\,dy = \boxed{\rho\frac{a^4}{3} = \frac{Ma^2}{3}}\ ;\ M = \rho a^2 \qquad 2$$

$$B = I_y = \int x^2\,dm = \rho\int_0^a x^2\,dx\int_0^a dy = \boxed{\frac{\rho a^4}{3} = \frac{Ma^2}{3}} \qquad 2$$

$$C = I_z = \int (x^2+y^2)\,dm = \int x^2\,dm + \int y^2\,dm = A + B = \boxed{\frac{2\rho a^4}{3} = \frac{2Ma^2}{3}} \qquad 2$$

$$D = \int yz\,dm = 0 \quad ;\ z = 0 \qquad 2$$

$$E = \int xz\,dm = 0 \quad ;\ z = 0 \qquad 2$$

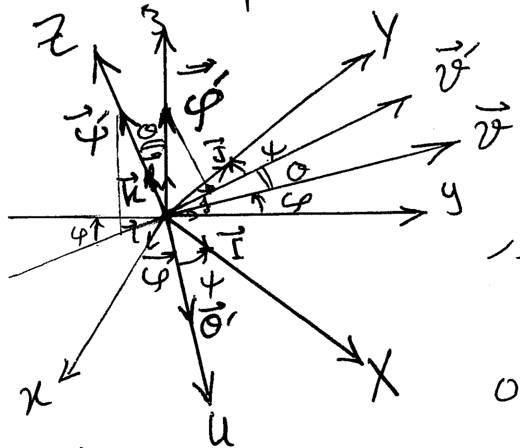
$$F = \int xy\,dm = \rho\int_0^a x\,dx\int_0^a y\,dy = \boxed{\frac{\rho a^4}{4} = \frac{Ma^2}{4}} \qquad 2$$

$$I_\Delta = \frac{Ma^2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{Ma^2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0 + 0 + 0 - 2\left(\frac{Ma^2}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{Ma^2}{3}\cdot\frac{2}{4} + \frac{Ma^2}{3}\left(\frac{2}{4}\right) - 2\left(\frac{Ma^2}{4}\right)\frac{2}{4} = \frac{Ma^2}{3} - \frac{Ma^2}{4} = \boxed{\frac{Ma^2}{12}} \qquad 3$$

السؤال الثاني (30 درجة):

في حركة الجسم الصلب حول نقطة ثابتة أوجد معادلات الحركة ثم استنتج علاقات أولر الهندسية (أي مركبات متجه الدوران على المحاور الثابتة وعلى محاور متماسكة مع الجسم.



الحل:

في الحركة حول نقطة ثابتة وسطاء الحركة هي زوايا أولر وهي ثلاث:

لتكن $oxyz$ جملة المحاور الثابتة و $OXYZ$ جملة المحاور المتحركة المتماسكة مع الجسم.

- لتكن $\overrightarrow{Ou}$ هو الفصل المشترك بين oxy و OXY

- الوسيط الأول هو θ الزاوية بين Oz و OZ ويكون $\vec{\theta}'$ محمولاً على $\overrightarrow{Ou}$

- الوسيط الثاني هو φ الزاوية بين $\overrightarrow{Ox}$ و $\overrightarrow{Ou}$ ويكون $\vec{\varphi}'$ محمولاً على Oz

- الوسيط الثالث هو ψ الزاوية بين $\overrightarrow{Ou}$ و $\overrightarrow{OX}$ ويكون $\vec{\psi}'$ محمولاً على OZ.

معادلات الحركة:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(t) \\ \psi = \psi(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$$

6

تسمى θ زاوية التأرجح، φ زاوية الترنح و ψ زاوية الدوران الذاتي

متجه الدوران يكون:

$$\vec{\omega} = \vec{\theta}' + \vec{\varphi}' + \vec{\psi}'$$

$$\vec{\omega} = \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{k} + \psi' \vec{K}$$

6

لنسقط على المحاور الثابتة:

$$(1)\begin{cases} p = \theta' \cos\varphi + \psi' \sin\theta \sin\varphi \\ q = \theta' \sin\varphi - \psi' \sin\theta \cos\varphi \\ r = \varphi' + \psi' \cos\theta \end{cases}$$

6

بإسقاط متجه الدوران على المحاور المتحركة:

$$(2)\begin{cases} P = \theta' \cos\psi + \varphi' \sin\theta \sin\psi \\ Q = -\theta' \sin\psi + \varphi' \sin\theta \cos\psi \\ R = \psi' + \varphi' \cos\theta \end{cases}$$

6

تسمى العلاقات (1) و (2) بعلاقات أولر الهندسية.

السؤال الثالث (30 درجة):

ABC صفيحة مثلثية قائمة تتحرك في المستوي الثابت oxy بحيث أن الرأس القائم A يرسم المحور الأفقي ox بسرعة ثابتة a ومنحني القاعدة لهذه الحركة هو المنحني المعطى بالعلاقة $y = a\,ch\left(\frac{x}{a}\right)$

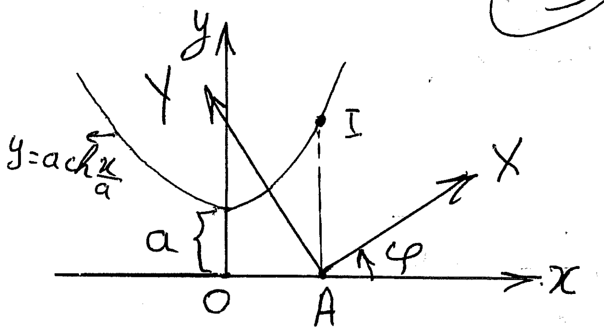
والمطلوب:

1) بين نوع الحركة ثم أوجد معادلات هذه الحركة.

2) أوجد احداثيات المركز الآني للدوران ومحله الهندسي في المستوي المتحرك (المرافق).

الحل:

1) نوع الحركة هي الحركة المستوية للجسم الصلب. 3



$$x(A) = at$$
$$y(A) = 0$$

3

لنوجد $\varphi = \varphi(t)$:

لدينا منحني القاعدة: $y(I) = a\,ch\frac{x(I)}{a}$

احداثيات المركز الآني للدوران في المستوي الثابت:

$$x(I) = x(A) - \frac{y'(A)}{\varphi'} = at$$ 3

$$y(I) = y(A) + \frac{x'(A)}{\varphi'} = \frac{a}{\varphi'}$$ 3

نعوض في معادلة القاعدة:

3 $$\frac{a}{\varphi'} = a\,ch\frac{at}{a} \Rightarrow \varphi' = \frac{1}{ch\,t} \quad , \quad ch\,t = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$$

بالتكامل

$$\Longrightarrow \varphi = \int\frac{dt}{ch\,t} = \int\frac{2\,dt}{e^{t}+e^{-t}} \underset{\text{نضرب}}{\overset{\frac{e^t}{e^t}}{=}} \int\frac{2e^{t}}{e^{2t}+1}dt = 2\,arctg\,e^{t}$$ 3

معادلات الحركة:

$$\begin{cases} x(A) = at \\ y(A) = 0 \\ \varphi = 2\,arctg\,e^{t} \end{cases}$$

إحداثيات المركز الآني للدوران I في المستوي المتحرك :

$$X(I) = \frac{x'(A)\sin\varphi - y'(A)\cos\varphi}{\varphi'} = a\sin\varphi \, ch\, t = a\sin(2 arctg\, e^{t})\, ch\, t \quad 3$$

$$Y(I) = \frac{x'(A)\cos\varphi + y'(A)\sin\varphi}{\varphi'} = a\cos\varphi \, ch\, t = a\cos(2 arctg\, e^{t})\, ch\, t$$

وهي تمثل المعادلات الوسيطية للمتدحرج.

$$\boxed{X^2(I) + Y^2(I) = a^2 ch^2 t} \quad (1)$$

$$\varphi = 2 arctg\, e^{t} \Rightarrow tg\,\varphi = tg(2(arctg\, e^{t}))$$

بتطبيق :
$$\boxed{tg\, 2x = \frac{2\, tg\, x}{1+tg^2 x}}$$

$$\Rightarrow tg\,\varphi = \frac{2\, tg(arctg\, e^{t})}{1-[tg(arctg\, e^{t})]^2} = \frac{2e^{t}}{1-e^{2t}}$$

$$\Rightarrow tg\,\varphi = \frac{X}{Y} = \frac{2e^{t}}{1-e^{2t}} \Rightarrow (1-e^{2t})\frac{X}{Y} = 2e^{t} \quad 3$$

$$\Rightarrow \frac{X}{Y} - \frac{X}{Y}e^{2t} = 2e^{t} \Rightarrow \boxed{\frac{X}{Y}e^{2t} + 2e^{t} - \frac{X}{Y} = 0}$$

معادلة من الدرجة الثانية حلها :

$$e^{t} = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4\frac{X^2}{Y^2}}}{2\frac{X}{Y}} = \frac{-Y \mp \sqrt{Y^2 - X^2}}{X} \quad (2)$$

المطلوب
$$\Rightarrow e^{-t} = \frac{X}{-Y \mp \sqrt{Y^2-X^2}} \quad (3)$$

في (1) $\Leftarrow$
$$\boxed{\frac{X^2+Y^2}{a^2} = ch^2 t = \left(\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\right)^2} \quad (4)$$

نعوض (2) و(3) في (4) فنجد :

$$\boxed{\frac{X^2+Y^2}{a^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{-Y \mp \sqrt{Y^2-X^2}}{X} + \frac{X}{-Y \mp \sqrt{Y^2-X^2}}\right)^2} \quad 3$$

وهو منحني المتدحرج.

جامعة طرطوس	امتحان مقرر ميكانيك (2)	
كلية العـلـوم	لطلاب الرياضيات ــالسنة الثالثة	المدة: ساعتين
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الثانية 2021- 2020	الدرجة: 90

السؤال الأول (35 درجة):

أوجد مجسم عطالة صفيحة مستطيلة متجانسة طولها a وعرضها b بالنسبة لمحورين إحداثيين ox و oy يمران من مركز ثقل هذه الصفيحة. ثم أوجد عزوم العطالة الأساسية والمحاورالأساسية واكتب معادلة مجسم العطالة الأساسي للصفيحة .

السؤال الثاني (20 درجة):

في الحركة المستوية للجسم الصلب برهن أن المحل الهندسي لنقاط ذات التسارع المماسي هو قوس من دائرة تمر من المركز الآني للدوران I ومن مركز التسارع الآني C .

السؤال الثالث (35 درجة):

AoB صفيحة مثلثية قائمة تدور حول رأسها القائم والثابت o بحيث يبقى الضلع oA ملازماً للمستو الثابت xoy والمطلوب:

1) أوجد وسطاء الحركة.

2) أوجد مركبات متجه الدوران على محاور ثابتة ومحاور متماسكة مع الجسم.

3) بفرض أن الصفيحة تتحرك بسرعة زاوية ثابتة القيمة و متجه الدوران يصنع مع المستو الثابت زاوية ثابتة α, أوجد معادلات الحركة و معادلات المحور الآني للدوران ومحله الهندسي في الفضاء الثابت والفضاء المتحرك مع الجسم.

علماً أنه في اللحظة $t = 0$ كان الضلع oA منطبق على المحور ox .

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول: (35 درجة)

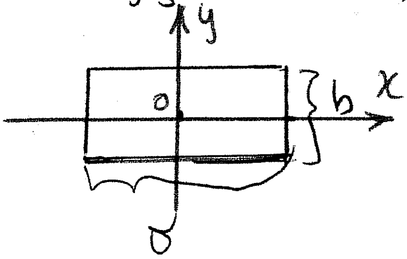
أوجد مجسم عطالة صفيحة متجانسة مستطيلة طولها a وعرضها b بالنسبة لمحورين احداثيين ox و oy يمران من مركز ثقل هذه الصفيحة . ثم أوجد عزوم العطالة الأساسية والمحاور الأساسية واكتب معادلة مجسم العطالة الأساسي لهذه الصفيحة.

الحل: مجسم العطالة :

$$AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EXZ-2FXY=1 \quad 6$$

$A=I_x=\int(y^2+z^2)dm=\int y^2dm$, $B=I_y=\int(x^2+z^2)dm$, $C=I_z=\int(x^2+y^2)dm$ 6

$D=P_{yz}=\int yz\,dm$, $E=P_{xz}=\int xz\,dm$, $F=P_{xy}=\int xy\,dm$, $dm=\rho\,dx\,dy$ 1



$$A=I_x=\int(y^2+z^2)dm=\int y^2dm \;;\; z=0 \;;\; dm=\rho\,dx\,dy$$

$$=\rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}y^2dy=\rho[x]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}=\rho\frac{ab^3}{12}$$

لدينا $M=\rho ab \Leftarrow$

$$\boxed{A=\frac{Mb^2}{12}} \quad 1$$

$$B=I_y=\int(x^2+z^2)dm=\int x^2dm=\rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}x^2dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}dy=\frac{\rho a^3b}{12} \quad 1 \quad =\boxed{\frac{Ma^2}{12}}$$

$$C=I_z=\int(x^2+y^2)dm=\int x^2dm+\int y^2dm=I_x+I_y=A+B=\boxed{\frac{M(a^2+b^2)}{12}} \quad 1$$

$D=P_{yz}=\int yz\,dm=0$; $z=0$ 1

$E=P_{xz}=\int xz\,dm=0$; $z=0$ 1

$F=P_{xy}=\int xy\,dm=0$ 1 . لأن oy (ox) هو محور تناظر

بالتعويض في مجسم العطالة

$$\boxed{AX^2+BY^2+CZ^2=1} \Rightarrow \boxed{\frac{Mb^2}{12}X^2+\frac{Ma^2}{12}Y^2+\frac{M(a^2+b^2)}{12}Z^2=1} \quad 2$$

نلاحظ أن المحاور oz , oy , ox هي محاور تناظر ⇐ مجسم العطالة هو نفسه مجسم العطالة الأساسي 3 ومحاور الاحداثيات ox , oy , oz هي نفس المحاور الأساسية 3 وعزوم العطالة هي نفس عزوم العطالة الأساسية 3 أي:

مجسم العطالة الأساسي هو

$$\boxed{AX^2+BY^2+CZ^2=1}$$

و

$A'=A$, $B'=B$, $C'=C$

أو يمكن أن يحل الطالب بهذه الطريقة :

نفك المعين :

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & -F & -E \\ -F & B-\lambda & -D \\ -E & -D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} \frac{Mb^2}{12}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{12}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M(a^2+b^2)}{12}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{Mb^2}{12}-\lambda\right)\left(\frac{Ma^2}{12}-\lambda\right)\left(\frac{M(a^2+b^2)}{12}-\lambda\right) = 0$$

وبالتالي نجد أن الحلول هي عزوم العطالة الأساسية :

$$\lambda_1 = A' = A = \frac{Mb^2}{12}$$

$$\lambda_2 = B' = B = \frac{Ma^2}{12}$$

$$\lambda_3 = \frac{M(a^2+b^2)}{12} = C' = C$$

3

نلاحظ أنها هي عزوم العطالة للصفيحة .

لنوجد محاور العطالة الأساسية : نأخذ الجملة :

$$\begin{cases} (A-\lambda)\alpha - F\beta - E\gamma = 0 \\ -F\alpha + (B-\lambda)\beta - D\gamma = 0 \\ -E\alpha - D\beta + (C-\lambda)\gamma = 0 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{بالتعويض}} \begin{cases} (A-\lambda)\alpha = 0 \\ (B-\lambda)\beta = 0 \\ (C-\lambda)\gamma = 0 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1 \end{cases}$$

3

• من أجل $\lambda_1 = \frac{Mb^2}{12} \Leftarrow \alpha$ محققة من أجل جميع قيم α

و $0 = \gamma = \beta \Longleftarrow$ المنحى هو المحور ox الأساسي الأول $(\alpha, 0, 0)$

• من أجل $\lambda_2 = \frac{Ma^2}{12} \Leftarrow \alpha = \gamma = 0$, β محققة من أجل جميع القيم $\Leftarrow$ المنحى هو المحور oy الأساسي الثاني $(0, \beta, 0)$

• من أجل $\lambda_3 = \frac{M(a^2+b^2)}{12} \Leftarrow \gamma$ محققة من أجل جميع القيم و $\alpha = \beta = 0 \Leftarrow$ المنحى هو المحور oz الأساسي الثالث $(0, 0, \gamma)$

3

إذن المحاور الأساسية منطبقة على المحاور ox , oy , oz

ومجسم العطالة الأساسي هي :

$$A'X^2 + B'Y^2 + C'Z^2 = 1$$

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1$$

3

$$\boxed{\frac{Mb^2}{12}X^2 + \frac{Ma^2}{12}Y^2 + \frac{M(a^2+b^2)}{12}Z^2 = 1}$$

السؤال الثاني (20 درجة):

في الحركة المستوية للجسم الصلب برهن أن المحل الهندسي لنقاط ذات التسارع المماسي هو دوماً قوس من دائرة تمر من المركز الآني للدوران I ومن مركز التسارع الآني C.

الحل: نقول عن النقطة T أنها ذات تسارع مماسي إذا كان متجه تسارعها محمولاً على مماس مسارها أي أن متجه تسارعها الناظمي معدوم وبالتالي يكون:

$$\vec{\Gamma}(T) \wedge \vec{v}(T) = 0$$

لدينا:

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}_C(M) = \vec{\varphi}'' \wedge \vec{CM} - \varphi'^2 \vec{CM}$$

ولدينا:

$$\vec{v}(M) = \vec{v}_I(M) = \vec{\varphi}' \wedge \vec{IM}$$

نعوض بالنسبة للنقطة T:

$$\vec{\Gamma}(T) = \vec{\varphi}'' \wedge \vec{CT} - \varphi'^2 \vec{CT}$$

$$\vec{v}(T) = \vec{\varphi}' \wedge \vec{IT}$$

نعوض في العلاقة الأولى:

$$(\vec{\varphi}'' \wedge \vec{CT} - \varphi'^2 \vec{CT}) \wedge (\vec{\varphi}' \wedge \vec{IT}) = 0$$

الجداء توزيعي على الطرح:

$$(\vec{\varphi}'' \wedge \vec{CT}) \wedge (\vec{\varphi}' \wedge \vec{IT}) - \varphi'^2 \vec{CT} \wedge (\vec{\varphi}' \wedge \vec{IT}) = 0$$

بتطبيق علاقة جيبس على كل من الحدين:

$$[(\vec{\varphi}'' \wedge \vec{CT}) \cdot \vec{IT}] \cdot \vec{\varphi}' - \underbrace{[(\vec{\varphi}'' \wedge \vec{CT}) \cdot \vec{\varphi}']}_{0} \cdot \vec{IT} - \varphi'^2 [(\vec{CT} \cdot \vec{IT}) \vec{\varphi}'] + \varphi'^2 [\underbrace{(\vec{CT} \cdot \vec{\varphi}')}_{0} \cdot \vec{IT}] = 0$$

بما أن المتجهين $\vec{\varphi}'$ ، $\vec{\varphi}''$ عموديان على $\vec{IT}$ و $\vec{CT}$:

$$\vec{CT} \cdot \vec{\varphi}' = 0 \quad , \quad (\vec{\varphi}'' \wedge \vec{CT}) \cdot \vec{\varphi}' = 0$$

$$\Rightarrow [(\vec{\varphi}'' \wedge \vec{CT}) \cdot \vec{IT}] \cdot \vec{\varphi}' - \varphi'^2 [(\vec{CT} \cdot \vec{IT}) \vec{\varphi}'] = 0$$

خواص الجداء المختلط:

$$[\vec{\varphi}'' \cdot (\vec{CT} \wedge \vec{IT})] \cdot \vec{\varphi}' - [\varphi'^2 (\vec{CT} \cdot \vec{IT})] \vec{\varphi}' = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\varphi}'' \cdot (\vec{CT} \wedge \vec{IT}) - \varphi'^2 (\vec{CT} \cdot \vec{IT}) = 0$$

إذا فرضنا أن الزاوية بين المتجهين $\vec{CT}$, $\vec{IT}$ في اللحظة t هي θ فيكون:

$$\ddot{\varphi}\cdot|\vec{CT}|\cdot|\vec{IT}|\sin\theta-\dot{\varphi}^2|\vec{CT}|\cdot|\vec{IT}|\cos\theta=0$$

$$\ddot{\varphi}\sin\theta-\dot{\varphi}^2\cos\theta=0\Rightarrow\boxed{tg\,\theta=\frac{\dot{\varphi}^2}{\ddot{\varphi}}}$$

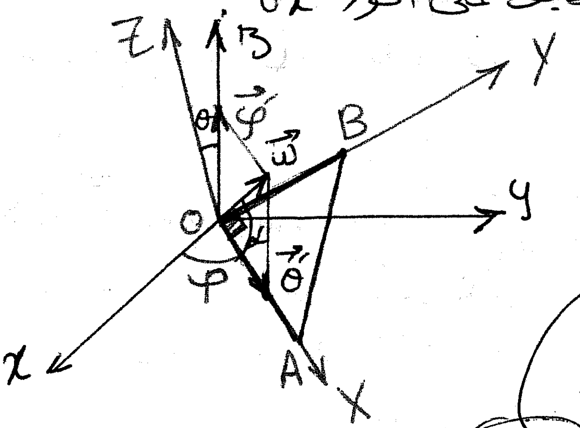
وبالتالي فإن كل نقطة ترى منها القطعة المستقيمة IC في اللحظة t بزاوية θ $\left(tg\,\theta=\frac{\dot{\varphi}^2}{\ddot{\varphi}}\right)$ يكون تسارعها مماسي. وبالتالي فإن المحل الهندسي للنقاط ذات التسارع المماسي هو دوماً قوس من دائرة تمر من المركز الآني للدوران I ومن المركز الآني للتسارع C.

السؤال الثالث (35 درجة):

$A\hat{O}B$ صفيحة مثلثية قائمة تدور حول رأسها القائم الثابت O بحيث يبقى الضلع OA ملازماً للمستوي الثابت xOy والمطلوب:

1) أوجد وسطاء الحركة
2) أوجد مركبات متجه الدوران على محاور ثابتة ومحاور متماسكة مع الجسم.
3) بفرض أن الصفيحة تتحرك بسرعة زاوية ثابتة القيمة ومتجه الدوران يصنع مع المستوي الثابت زاوية ثابتة α. أوجد معادلات الحركة ومعادلات المحور الآني للدوران ومحله الهندسي في الفضاء الثابت والفضاء المتحرك مع الجسم.

علماً أن في اللحظة $t=0$ كان الضلع OA منطبق على المحور Ox



الحل:

1) إن الحركة هي حركة جسم صلب حول نقطة ثابتة وبالتالي للجسم ثلاث وسطاء هي زوايا أولر

بما أن OA ملازماً للمستوي الثابت $\Leftarrow \psi = 0$

والحركة وسيطين:

$\hat{\varphi} = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX})$ وبالتالي $\dot{\varphi}$ محمول على Oz 2

$\hat{\theta} = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OZ})$ فيكون $\dot{\theta}$ محمولاً على OX 2

2) $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{I} + \dot{\varphi}\vec{k}$ 1

بالاسقاط على المحاور الثابتة $Oxyz$:

$$\begin{cases} p = \dot{\theta}\cos\varphi \\ q = \dot{\theta}\sin\varphi \\ r = \dot{\varphi} \end{cases}$$

3

وهي مركبات متجه الدوران $\vec{\omega}$ على $Oxyz$.

بالاسقاط على المحاور المتحركة مع الصفيحة $OXYZ$

$$\begin{cases} P = \dot{\theta} \\ Q = \dot{\varphi}\sin\theta \\ R = \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases}$$

3

وهي مركبات متجه الدوران $\vec{\omega}$ على $OXYZ$

3) لدينا متجه الدوران يصنع مع المستوي الثابت زاوية ثابتة $\alpha \Leftarrow$ 1

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\theta}} = K \quad (1)$$

ومتجه الدوران ثابت القيمة (الطول): 3

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 = \omega^2 = n^2 \quad (2)$$

لدينا من (1) و (3) $\boxed{\varphi' = K\theta'}$ نعوض في (2)

$$\theta'^2 + K^2\theta'^2 = \omega^2 \Rightarrow \theta'^2(1+K^2) = \omega^2 \Rightarrow \theta' = \frac{\omega}{\sqrt{1+K^2}}$$

$$\xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \theta = \frac{\omega}{\sqrt{1+K^2}}t + C$$

من شروط البدء في اللحظة $t=0$ كانت $\theta = 0 \Leftarrow C=0 \Leftarrow$

$$\theta = \frac{\omega}{\sqrt{1+K^2}}t$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = (\omega\cos\alpha)t} \quad (4)$$

لدينا من (3) $\Leftarrow$ $\varphi' = K\theta' \xrightarrow{\text{بالمكاملة}}$ واستخدام شروط البدء

$$\varphi = K\theta = tg\alpha(\omega\cos\alpha)t \Rightarrow \boxed{\varphi = (\omega\sin\alpha)t} \quad (5)$$

معادلات الحركة هي (4) و (5)

معادلات المحور الآني للدوران :

$$\vec{OI} \parallel \vec{\omega} \Rightarrow \frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

$$\frac{x}{\theta'\cos\varphi} = \frac{y}{\theta'\sin\varphi} = \frac{z}{\varphi'} \xrightarrow{\text{نعوض}} \boxed{\frac{x}{\omega\cos\alpha\cos(\omega\sin\alpha t)} = \frac{y}{\omega\cos\alpha\sin(\omega\sin\alpha t)} = \frac{z}{\omega\sin\alpha}}$$

وهي معادلات المحور الآني للدوران في الفضاء الثابت

بحذف الزمن t نحصل على المحل الهندسي في الفضاء الثابت

$$\frac{x^2+y^2}{\omega^2\cos^2\alpha} = \frac{z^2}{\omega^2\sin^2\alpha} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2 = ctg^2\alpha\, z^2}$$

وهي معادلة مخروط دوراني محور الدوران هو Oz ونصف زاوية الرأس هي $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ (القاعدة)

أما معادلات المحور الآني للدوران في الفضاء المتحرك :

$$\frac{X}{P} = \frac{Y}{Q} = \frac{Z}{R} \Rightarrow \frac{X}{\theta'} = \frac{Y}{\varphi'\sin\theta} = \frac{Z}{\varphi'\cos\theta}$$

$$\frac{X}{\omega\cos\alpha} = \frac{Y}{\omega(\sin\alpha)\sin(\omega t\cos\alpha)} = \frac{Z}{(\omega\sin\alpha)\cos(\omega t\cos\alpha)}$$

$$\frac{X^2}{\omega^2\cos^2\alpha} = \frac{Y^2+Z^2}{\omega^2\sin^2\alpha} \Rightarrow \boxed{Y^2+Z^2 = tg^2\alpha X^2}$$

وهو المحل الهندسي لمحور الدوران في الفضاء المتحرك (المتدحرج) وتمثل معادلة مخروط دوراني محوره OX ونصف زاوية الرأس α .

طريقة أخرى لإيجاد معادلات الحركة :

نسقط $\vec{\omega}$ على OX :

$$P = |\vec{\omega}|\cos\alpha \Rightarrow P = \omega\cos\alpha$$

$$\theta' = \omega\cos\alpha \Rightarrow \theta = (\omega\cos\alpha)t + C$$

من شروط البدء $t=0$ كان $\theta = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = (\omega\cos\alpha)t}$

نسقط $\vec{\omega}$ على Oz

$$r = |\vec{\omega}|\sin\alpha = \omega\sin\alpha$$

$$\varphi' = \omega\sin\alpha \Rightarrow \varphi = (\omega\sin\alpha)t + C \xrightarrow{\text{شروط البدء}} \boxed{\varphi = (\omega\sin\alpha)t}$$

جامعة طرطوس
كلية العلــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (2)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى 2021- 2020

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (30 درجة):

أوجد عزم عطالة صفيحة متجانسة بشكل ربع دائرة نصف قطرها R محدودة بالمحورين الإحداثيين ox و oy بالنسبة لمحور مار من مركز الدائرة ويقع في مستويها ويصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{6}$ مع القطر المحدد للصفيحة .

السؤال الثاني (30 درجة):

في الحركة المستوية للجسم الصلب برهن أن متجه السرعة لأي نقطة M من هذا الجسم هو متجه سرعتها بالنسبة للمركز الآني للدوران I ، ثم برهن أن متجه تسارع هذه النقطة هو متجه تسارعها بالنسبة لمركز التسارع الآني C .

السؤال الثالث (30 درجة):

ABC صفيحة مثلثية متساوية الأضلاع طول ضلعها a تتحرك بحركة انسحابية بحيث أن الرأس A يرسم دائرة مركزها o ونصف قطرها R بسرعة زاوية ثابتة Ω .إذا علمت أن الحركة بدأت عندما كان الضلع AB منطبق على المحور الأفقي ox . والمطلوب :

1) **أوجد مسار حركة الرأس B و مسار حركة الرأس C و ماذا تستنتج؟**

2) **برهن أن مسقط سرعة B على $\overrightarrow{AB}$ يساوي مسقط سرعة A على $\overrightarrow{AB}$.**

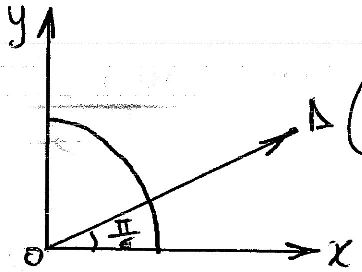
مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

سلم تصحيح ميكانيك (2) الدورة الفصلية الأولى (2020-2021)

السؤال الأول (30 درجة)

أوجد عزم عطالة صفيحة متجانسة بشكل ربع دائرة نصف قطرها R محدودة بالمحورين الاحداثيين ox و oy بالنسبة لمحور مار من مركز الدائرة ويقع في مستويها ويصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{6}$ مع القطر المحدد للصفيحة.



الحل:

5 $I_\Delta = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta$

حيث

$A = I_x = \int (y^2+z^2)\,dm$, $B = I_y = \int (x^2+z^2)\,dm$

$C = I_z = \int (x^2+y^2)\,dm$, $D = P_{yz} = \int yz\,dm$

$E = P_{zx} = \int zx\,dm$, $F = P_{xy} = \int xy\,dm$. 6

$dm = \rho r\,dr\,d\theta$, $y = r\sin\theta$, $x = r\cos\theta$ 3

$\alpha = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta = \cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\gamma = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ 3

$A = \int y^2 dm = \int r^2\sin^2\theta\,\rho r\,dr\,d\theta = \rho\int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta = \rho\frac{R^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$

$= \rho\frac{R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \underbrace{\frac{\rho\pi R^2}{4}}_{=M}\cdot\frac{R^2}{4} = \frac{MR^2}{4}$; $M = \frac{\rho\pi R^2}{4}$ 2

$B = \int x^2 dm = \int r^2\cos^2\theta\,\rho r\,dr\,d\theta = \rho\int_0^R r^3 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

$= \frac{\rho R^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho\pi R^2}{4}\cdot\frac{R^2}{4} = \frac{MR^2}{4}$ 2

$C = I_z = \int (x^2+y^2)\,dm = A + B = \frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{4} = \frac{MR^2}{2}$ 2

$D = P_{yz} = \int yz\,dm = 0$; $z = 0$ 2

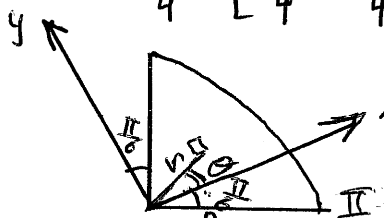
$E = P_{zx} = \int zx\,dm = 0$; $z = 0$ 2

$F = P_{xy} = \int xy\,dm = \int r^2\sin\theta\cos\theta\,\rho r\,dr\,d\theta = \rho\int_0^R r^3 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta$

$= \rho\frac{R^4}{4}\left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right] = \frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\rho\pi R^2}{4}\cdot\frac{R^2}{2\pi} = \frac{MR^2}{2\pi}$ 2

$I_\Delta = \frac{MR^2}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{MR^2}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 - 0 - 0 - 2\frac{MR^2}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{MR^2}{4}\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right] = \frac{MR^2}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)$ 1



إذا الطالب حل بهذه الطريقة:

لو أخذنا المحور ox منطبق على Δ فيكون

5 $I_\Delta = I_{ox} = \int y^2 dm$; $dm = \rho r\,dr\,d\theta$ 5

$I_\Delta = \rho\int_0^R r^3 dr\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta\,d\theta = \rho\frac{R^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$ 5 5

$$I_\Delta = \frac{\rho R^4}{4}\left[\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3} - \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{4}\right) - \left(\frac{-\pi}{12} - \frac{\sin(\frac{-\pi}{3})}{4}\right)\right] = \frac{\rho R^4}{4}\left[\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{4}\right) - \left(\frac{-\pi}{12} + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{4}\right)\right] \quad 5$$

$$= \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right] = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{4\pi - 3\sqrt{3} + 2\pi - 3\sqrt{3}}{24}\right] = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{6\pi - 6\sqrt{3}}{24}\right]$$

$$= \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{\pi - \sqrt{3}}{4}\right] = \frac{\rho \pi R^4}{\pi\, 4}\left[\frac{\pi - \sqrt{3}}{4}\right] = \frac{\rho \pi R^2}{4}\left[\frac{\pi - \sqrt{3}}{4\pi}\right] R^2 = \frac{MR^2}{4}\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right] \quad 5$$

السؤال الثاني (30 درجة) :

في الحركة المستوية للجسم الصلب برهن أن متجه السرعة لأي نقطة M من هذا الجسم هو متجه سرعة بالنسبة للمركز الآني للدوران I وأن متجه تسارع هذه النقطة هو متجه تسارع بالنسبة لمركز التسارع الآني C .

الحل : لنبرهن أن سرعة أي نقطة M من الجسم الذي يتحرك حركة مستوية هي سرعة بالنسبة للمركز الآني للدوران I :

$$5 \quad \vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{AM} = \vec{v}(A) + \vec{\dot{\varphi}} \wedge (\vec{AI} + \vec{IM})$$

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{AI} + \vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{IM} \quad 5$$

ولكن لأن I المركز الآني للدوران $\vec{v}(A) + \vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{AI} = \vec{v}(I) = 0$

نعوض : $\vec{v}(M) = \vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{IM} = \vec{v}_I(M) \quad 5$

لنبرهن أن متجه تسارع النقطة M هو متجه تسارع بالنسبة للنقطة C :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\ddot{\varphi}} \wedge \vec{AM} - \dot{\varphi}^2 \vec{AM} \quad 5$$

$$= \vec{\Gamma}(A) + \vec{\ddot{\varphi}} \wedge (\vec{AC} + \vec{CM}) - \dot{\varphi}^2 (\vec{AC} + \vec{CM})$$

$$= \vec{\Gamma}(A) + \vec{\ddot{\varphi}} \wedge \vec{AC} + \vec{\ddot{\varphi}} \wedge \vec{CM} - \dot{\varphi}^2 \vec{AC} - \dot{\varphi}^2 \vec{CM} \quad 5$$

ولكن لدينا : $\vec{\Gamma}(C) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\ddot{\varphi}} \wedge \vec{AC} - \dot{\varphi}^2 \vec{AC} = 0$ (لأن C مركز التسارع الآني)

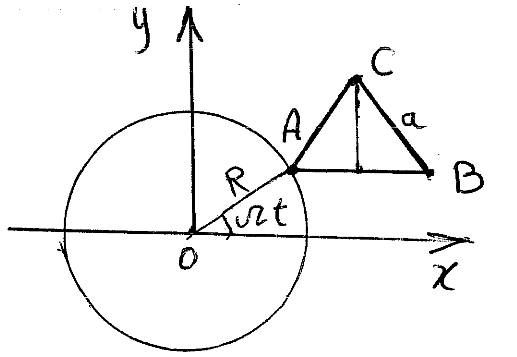
$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\ddot{\varphi}} \wedge \vec{CM} - \dot{\varphi}^2 \vec{CM} = \vec{\Gamma}_C(M) \quad 5$$

السؤال الثالث (30 درجة)

ABC صفيحة مثلثية متساوية الأضلاع طول ضلعها a تتحرك بحركة انسحابية بحيث أن الرأس A يرسم دائرة مركزها o ونصف قطرها R بسرعة زاوية ثابتة ω. إذا علمت أن الحركة تبدأ عندما كان الضلع AB منطبق على المحور الأفقي ox والمطلوب:

1) أوجد مسار حركة الرأس B ومسار حركة الرأس C وماذا تستنتج؟

2) برهن أن مسقط سرعة B على $\vec{AB}$ يساوي مسقط سرعة A على $\vec{AB}$.



الحل:

1) مسار حركة الرأس B

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$$

$$\vec{OA} = \begin{cases} x(A) = R\cos\omega t \\ y(A) = R\sin\omega t \end{cases} \quad 2$$

$$\vec{AB} = a\vec{i} + 0\vec{j} \quad 2$$

$$x(B) = x(A) + x(\vec{AB}) = R\cos\omega t + a \quad 2$$

$$y(B) = y(A) + y(\vec{AB}) = R\sin\omega t \quad 2$$

$$\Rightarrow \boxed{(x-a)^2 + y^2 = R^2} \quad 2$$

وبالتالي مسار النقطة B هو دائرة مركزها (a,0) ونصف قطرها R.

مسار حركة الرأس C:

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$

$$\vec{AC} = \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}a\vec{j} \quad 2$$

$$x(C) = x(A) + x(\vec{AC}) = R\cos\omega t + \frac{a}{2} \quad 2$$

$$y(C) = y(A) + y(\vec{AC}) = R\sin\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad 2$$

$$\boxed{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 = R^2} \quad 2$$

وبالتالي مسار النقطة C هو أيضاً دائرة مركزها $(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a)$ ونصف قطرها R.

- نستنتج أن المسارات هي دوائر مطبوقة تنتج من مسار النقطة A بانسحاب قدره $\vec{AB}(a,0)$ لمسار النقطة B وبانسحاب قدره $\vec{AC}(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a)$ لمسار النقطة C. 4

2) لدينا :

$(\vec{AB})^2 = a^2 \xrightarrow{\text{بالاشتقاق}}$ 2

$2(\vec{AB})\dfrac{d\vec{AB}}{dt} = 0$

$\vec{AB} \cdot \dfrac{d}{dt}(\vec{OB} - \vec{OA}) = 0$ 2

$\vec{AB} \cdot \dfrac{d\vec{OB}}{dt} - \vec{AB} \cdot \dfrac{d\vec{OA}}{dt} = 0$ 2

$\vec{AB} \cdot \vec{v}(B) = \vec{AB} \cdot \vec{v}(A)$ 2

جامعة طرطوس | امتحان مقرر ميكانيك (2) |
كلية العلـوم | لطلاب الرياضيات ــالسنة الثالثة | المدة: ساعتين
قسم الرياضيات | الدورة الفصلية الثانية 2020- 2019 | الدرجة: 90

السؤال الأول (25 درجة):

أوجد مجسم العطالة لكرة صماء متجانسة نصف قطرها R بالنسبة لمركزها . ثم أوجد مجسم العطالة لهذه الكرة بالنسبة لنقطة على محيطها.

السؤال الثاني (30 درجة):

ادرس الحركة الدورانية للجسم الصلب حول محور منزلق (معادلات الحركة و متجه الموضع و متجه السرعة و متجه التسارع لنقطة من هذا الجسم) .

السؤال الثالث (35 درجة):

AXY مستوي يدور في المستو الثابت oxy بسرعة زاوية ثابتة ω و النقطة A تتحرك على المحور الأفقي ox بسرعة مقدارها $v = h\,\omega\,\cos\omega t$ حيث h ثابت .و المحور AY يبقى ملازماً للمحور الشاقولي oy.علماً أن الحركة بدأت عندما كانت النقطة A منطبقة على النقطة o والمطلوب:

1) بين نوع الحركة ثم أوجد معادلات الحركة.

2) أوجد إحداثيات المركز الآني للدوران ومحليه الهندسيين في المستويين الثابت والمتحرك.

3) أوجد إحداثيات مركز التسارع الآني ومحليه الهندسيين في المستويين الثابت والمتحرك.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

سلم تصحيح امتحان ميكانيك (2) - الدورة الفصلية (2) (2020 - 2019)

السؤال الأول (25 درجة)

أوجد مجسم المطالة لكرة صماء متجانسة نصف قطرها R بالنسبة لمركزها، ثم أوجد مجسم المطالة لهذه الكرة بالنسبة لنقطة على محيطها.

الحل: إن مجسم المطالة هو:

$$Ax^2+By^2+Cz^2-2DYZ-2EXZ-2FXY=1 \quad 5$$

لناخذ من مركز الكرة ثلاث محاور متعامدة oz, oy, ox حيث:

$$A=I_x=\int(y^2+z^2)dm \;,\; B=I_y=\int(x^2+z^2)dm \;,\; C=I_z=\int(y^2+x^2)dm \quad 6$$

$$D=P_{yz}=\int yz\,dm \;,\; E=P_{xz}=\int xz\,dm \;,\; F=P_{xy}=\int xy\,dm$$

$$, dm=\rho\, 4\pi r^2 dr$$

بسبب التناظر بالنسبة للمحاور الاحداثية فإن $I_x=I_y=I_z$

عزم المطالة حول المركز o :

$$I_o=\frac{1}{2}(I_x+I_y+I_z)=\frac{3}{2}I_x \Rightarrow I_x=\frac{2}{3}I_o$$

لنوجد عزم المطالة حول o :

$$I_o=\int r^2dm=\rho\int_0^R 4\pi r^4dr=\frac{4}{5}\rho\pi R^5=\frac{3}{5}MR^2 \quad ; \quad M=\rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Rightarrow I_x=\frac{2}{3}I_o=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}MR^2=\frac{2}{5}MR^2$$

$$\Rightarrow A=B=C=\frac{2}{5}MR^2 \quad 3$$

أما جداءات المطالة فهي معدومة بسبب تناظر نقاط الكرة بالنسبة للمستويات الاحداثية.

$$\Rightarrow D=E=F=0 \quad 3$$

مجسم المطالة المتعلق بالمركز

$$\boxed{\frac{2}{5}MR^2[X^2+Y^2+Z^2]=1} \quad 1$$

- لنأخذ نقطة ما من محيط الكرة ولتكن P واقعة على المحور oz فتكون احداثياتها (0,0,R) بأخذ محاور جديدة مبدؤها النقطة P وموازية للمحاور oxyz فنجد عزوم المطالة وجداءات المطالة بالنسبة للمستويات الجديدة بتطبيق نظرية هويغنز الأولى كالتالي:

$$A'=A+MR^2=\frac{2}{5}MR^2+MR^2=\frac{7}{5}MR^2$$

$$B'=B+MR^2=\frac{2}{5}MR^2+MR^2=\frac{7}{5}MR^2 \quad 3$$

$$C'=C+0=\frac{2}{5}MR^2$$

أما جداءات المطالة حسب هويغنز التالية:

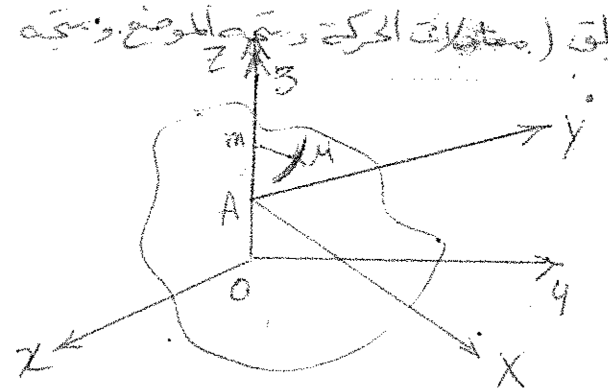
$$D'=D+My_pz_p=0 \quad , \quad E'=E+Mx_pz_p=0 \quad , \quad F'=F+Mx_py_p=0 \quad 3$$

ويكون مجسم المطالة المتعلق بالنقطة P على محيط الكرة:

$$\boxed{\frac{MR^2}{5}[7X^2+7Y^2+2Z^2]=1} \quad 1$$

السؤال الثاني (30 درجة):

ادرس الحركة الدورانية للجسم الصلب حول محور منزلق (معادلات الحركة ومتجه الموضع ومتجه السرعة ومتجه التسارع لنقطة من هذا الجسم).



الحل: متجه الموضع لنقطة M من هذا الجسم

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} + \vec{mM} \quad (1) \quad 8$$

- $\vec{OA}$ متجه متغير بالطول وثابت بالمنحى يتعين موضع A بوسيط واحد هو z_A
- $\vec{AM}$ متجه طوله ثابت ومنحاه ثابت
- $\vec{mM}$ متجه طوله ثابت ومنحاه متغير ويتعين بوسيط واحد هو زاوية دوران φ حول Oz

وبالتالي حركة النقطة M تتعين بوسيطين هما φ و z_A ومعادلتا الحركة هما:

$$\begin{cases} z = z_A(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \quad 2$$

باشتقاق (1) موضع النقطة M نحصل على متجه سرعة النقطة M:

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{mM} \quad (2) \quad 8$$

والسرعة هي حاصل جمع متجهين متعامدين، متجه سرعة A ومتجه دوران M حول Oz 2

باشتقاق (2) متجه السرعة نحصل على متجه تسارع النقطة M:

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{mM} - \dot\varphi^2 \vec{mM} \quad 8$$

وهو حاصل جمع متجهين: المتجه الأول هو التسارع الناتج عن حركة انزلاق المحور على نفسه والمتجه الثاني هو التسارع الناتج عن دوران الجسم حول المحور. 2

إذا الطالب كتب:

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\varphi - Y\sin\varphi \\ y &= X\sin\varphi + Y\cos\varphi \\ z &= z_A + Z \end{aligned}\right\} \quad 8$$

$$\left.\begin{aligned} \dot x &= -\dot\varphi\,(X\sin\varphi + Y\cos\varphi) = -\dot\varphi\, y \\ \dot y &= \dot\varphi\,(X\cos\varphi - Y\sin\varphi) = \dot\varphi\, x \\ \dot z &= \dot z_A \end{aligned}\right\} \quad 8$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot x &= -\ddot\varphi\,(X\sin\varphi + Y\cos\varphi) - \dot\varphi^2\,(X\cos\varphi - Y\sin\varphi) \\ \ddot y &= \ddot\varphi\,(X\cos\varphi - Y\sin\varphi) - \dot\varphi^2\,(X\sin\varphi + Y\cos\varphi) \\ \ddot z &= \ddot z_A \end{aligned}\right\} \quad 8$$

السؤال الثالث (35 درجة) :

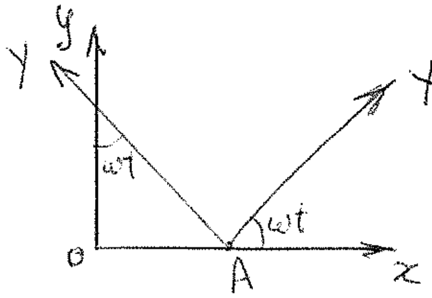
AXY مستوٍ يدور في المستوي الثابت OXY بسرعة زاوية ثابتة ω والنقطة A تتحرك على المحور الأفقي OX (المحور AY ملازماً المحور على oy) بسرعة مقدارها $v = k\omega\cos\omega t$ حيث k ثابت، علماً أن الحركة بدأت عندما كانت النقطة A منطبقة على النقطة O، والمطلوب :

1) أوجد معادلات الحركة .

2) أوجد إحداثيات المركز الآني الدوران ومحليه الهندسيين في المستويين الثابت والمتحرك.

3) أوجد إحداثيات مركز التسارع الآني ومحليه الهندسيين في المستويين الثابت والمتحرك.

الحل :



(1) الحركة هي حركة مستوية ومعادلات الحركة :

$$\varphi = \varphi(t)$$
$$x(A) = x(t)$$
$$y(A) = y(t)$$

بما أن المستوي يدور بسرعة زاوية ثابتة $\Leftarrow$ $\varphi = \omega t$.

سرعة A $v(A) = k\omega\cos\omega t$ $\Leftarrow$ بالمكاملة

$$x(A) = k\sin\omega t + c$$

من شروط البدء في اللحظة $t = 0$ كان $x(A) = 0$ $\Leftarrow$ $c = 0$

$$\Rightarrow x(A) = k\sin\omega t + 0 = k\sin\omega t$$

وبالتالي معادلات الحركة :

$$\begin{cases} \varphi = \omega t \\ x(A) = k\sin\omega t \\ y(A) = 0 \end{cases}$$

6

(2) إحداثيات المركز الآني للدوران في المستوي الثابت :

$$x(I) = x(A) - \frac{\dot{y}(A)}{\dot{\varphi}} = k\sin\omega t = k\sin\omega t$$
$$y(I) = y(A) + \frac{\dot{x}(A)}{\dot{\varphi}} = \frac{k\omega\cos\omega t}{\omega} = k\cos\omega t$$

6

المحل الهندسي :

$$\boxed{x^2(I) + y^2(I) = k^2}$$

2

والمحل الهندسي عبارة عن دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها k وهي تمثل منحني القاعدة .

أما إحداثيات المركز الآني للدوران في المستوي المتحرك :

$$X(I) = \frac{\dot{x}(A)\sin\varphi - \dot{y}(A)\cos\varphi}{\dot{\varphi}} = h\cos\omega t\sin\omega t = \frac{h}{2}\sin 2\omega t$$

$$Y(I) = \frac{\dot{x}(A)\cos\varphi + \dot{y}(A)\sin\varphi}{\dot{\varphi}} = h\cos^2\omega t = \frac{h}{2}(1+\cos 2\omega t)$$

6

والمحل الهندسي $\boxed{X^2 + \left(Y - \frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4}}$

والمحل الهندسي في المستوي المتحرك هو عبارة عن دائرة مركزها $(0, \frac{h}{2})$ ونصف قطرها $\frac{h}{2}$ وهي تمثل منحني المتدحرج. 2

3 مركز التسارع الآني:

$$\vec{\Gamma}(A) + \ddot{\varphi}\wedge\vec{AC} - \dot{\varphi}^2\vec{AC} = 0$$

بما أن $\dot{\varphi} = \omega = C^{te}$ ⇐ $\ddot{\varphi} = 0$

$$\Rightarrow \vec{AC} = \frac{\vec{\Gamma}(A)}{\dot{\varphi}^2} = \frac{\vec{\Gamma}(A)}{\omega^2}$$ (في المستوي المتحرك)

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{\vec{\Gamma}(A)}{\omega^2}$$ (في المستوي الثابت)

$$\begin{cases} x(C) = x(A) + \dfrac{\ddot{x}(A)}{\dot{\varphi}^2} \\ y(C) = y(A) + \dfrac{\ddot{y}(A)}{\dot{\varphi}^2} \end{cases}$$

هي مركز التسارع الآني في الثابت:

3 $x(C) = h\sin\omega t - h\sin\omega t = 0$

$y(C) = 0$

والمحل الهندسي في المستوي الثابت $\boxed{x^2 + y^2 = 0}$ 2 هو النقطة O (دائرة مركزها O، نصف قطرها O)

- احداثيات المركز الآني للتسارع في المستوي المتحرك:

$$X(C) = \frac{\ddot{x}(A)\cos\varphi + \ddot{y}(A)\sin\varphi}{\dot{\varphi}^2} = -h\sin\omega t\cos\omega t = -\frac{h}{2}\sin 2\omega t$$

$$Y(C) = \frac{-\ddot{x}(A)\sin\varphi + \ddot{y}(A)\cos\varphi}{\dot{\varphi}^2} = h\sin\omega t\sin\omega t = \frac{h}{2}(1 - \cos 2\omega t)$$

6

والمحل الهندسي $\boxed{X^2 + \left(Y - \frac{h}{2}\right)^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2}$

2 وهو عبارة عن دائرة مركزها $(0, \frac{h}{2})$ ونصف قطرها $\frac{h}{2}$.

7

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (2)
لطلاب الرياضيات - السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى 2020 - 2019

المدة: ساعتان
الدرجة: 90

<u>السؤال الأول (20 درجة):</u>

في الحركة العامة للجسم الصلب استنتج المعادلة المتجهية للمحور الآني للفتل و مقدار الفتل.

<u>السؤال الثاني (20 درجة):</u>

أوجد مجسم العطالة لقرص دائري متجانس نصف قطره R ، ثم أوجد عزوم العطالة الأساسية لهذا القرص . علماً أن مبدأ الإحداثيات o هو مركز القرص.

<u>السؤال الثالث (15 درجة):</u>

أوجد مركز ثقل صفيحة على شكل نصف قطع ناقص .

<u>السؤال الرابع (35 درجة):</u>

AB سلم طوله a يتحرك طرفه B على حائط شاقولي ويتحرك طرفه الآخر A على الأرض (المحور الأفقي ox) بسرعة ثابتة v و المطلوب:

1) أوجد معادلات الحركة.
2) أوجد إحداثيات المركز الآني للدوران ومعادلة الهيكلين في المستوي الثابت والمستوي المتحرك.
3) استخدم المركز الآني لتعيين سرعة B و سرعة النقطة C منتصف السلم

علماً أنه في اللحظة t = 0 كانت A منطبقة على o مبدأ الإحداثيات.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. علا محمد

السؤال الأول (20 درجة) في الحركة العامة للجسم الصلب استنتج المعادلة المتجهية للمحور الآني للفتل ومقدار الفتل

الحل:
في الحركة العامة للجسم الصلب تكون سرعة موضع أي نقطة من الجسم ولتكن M :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$$

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \frac{d}{dt}(\vec{AM}) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \vec{AM} \quad (1)$$

5

نضرب طرفي العلاقة (1) داخلياً بالمتجه $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{v}(M) = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{AM}) + \vec{\omega} \cdot \vec{v}(A)$$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{v}(M) = \vec{\omega} \cdot \vec{v}(A)$$

وهذا يعني أن مساقط متجهات السرع (لجميع نقاط الجسم) على متجه دورانه متساوية في كل لحظة.

إذا فرقنا متجه السرعة إلى متجهين أحدهما مواز للمتجه $\vec{\omega}$ وليكن $\vec{v}_{\omega}(M)$ وثانيهما عمودي عليه (الكائن في المستوى π الناظم عليه) وليكن $\vec{v}_{\pi}(M)$

فيكون :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}_{\omega}(M) + \vec{v}_{\pi}(M)$$

وتكون النقطة M ذات سرعة أصغرية عندما تكون سرعتها موازية لمتجه الدوران.

لتكن I النقطة ذات السرعة الأصغرية فيكون :

$$\vec{v}_{\pi}(I) = 0$$

$$\vec{v}(I) = \vec{v}_{\omega}(I)$$

أي أن $\vec{v}(I)$ و $\vec{\omega}$ متوازيان :

$$\vec{v}(I) = f \cdot \vec{\omega}$$

5

حيث f مقدار التناسب في كل لحظة.

نعوض في (1) :

$$\vec{v}(I) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \vec{AI}$$

$$f \cdot \vec{\omega} = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \vec{AI} \quad (2)$$

5

وهي معادلة مستقيم يوازي المتجه $\vec{\omega}$ ويسمى بمحور الفتل

نضرب طرفي العلاقة (2) بـ $\vec{\omega}$

$$f \cdot \omega^2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}(A)$$

$$\Rightarrow f = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}(A)}{\omega^2}$$

5

نسمي f بمقدار الفتل.

السؤال الثاني (20 درجة)

أوجد مجسم العطالة لقرص دائري متجانس نصف قطره R . ثم أوجد عزوم العطالة الأساسية لهذا القرص. علماً أن مبدأ الاحداثيات o هو مركز القرص.

الحل: مجسم العطالة: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Exz - 2Fxy = 1$ 5

حيث

$A = I_x = \int (y^2+z^2)\,dm$, $B = I_y = \int (x^2+z^2)\,dm$, $C = I_z = \int (x^2+y^2)\,dm$

$D = P_{yz} = \int yz\,dm$, $E = P_{xz} = \int xz\,dm$, $F = P_{xy} = \int xy\,dm$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $dm = \rho\, r\,dr\,d\theta$ 3

$A = I_x = \int (y^2+z^2)\,dm = \int y^2\,dm = \rho \int_0^R r^3\,dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,d\theta = \rho \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$

$= \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\cdot 2\pi\right] = \frac{\rho R^4 \pi}{4} = \frac{MR^2}{4}$; $M = \rho\pi R^2$

$B = I_y = \int (x^2+z^2)\,dm = \int x^2\,dm = \rho \int_0^R r^3\,dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\rho R^4 \pi}{4}$

$B = \frac{MR^2}{4}$

$C = I_z = \int (x^2+y^2)\,dm = I_x + I_y = A + B = \frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{4} = \frac{MR^2}{2}$

$D = P_{yz} = \int yz\,dm = 0$; $z = 0$

$E = P_{xz} = \int xz\,dm = 0$; $z = 0$

$F = P_{xy} = \int xy\,dm = 0$ لأن ox , oy محورا تناظر للقرص

نعوض في مجسم العطالة:

$$\boxed{\frac{MR^2}{2}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2\right] = 1}$$ 6

لإيجاد عزوم العطالة الأساسية نأخذ المعين:

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & -F & -E \\ -F & B-\lambda & -D \\ -E & -D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{MR^2}{4}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ 3

$$\left(\frac{MR^2}{4} - \lambda\right)^2 \left(\frac{MR^2}{2} - \lambda\right) = 0 \Longrightarrow$$

قيم λ هي عزوم العطالة الأساسية:

$A' = \lambda_1 = \frac{MR^2}{4}$, $B' = \lambda_2 = \frac{MR^2}{4}$, $C' = \lambda_3 = \frac{MR^2}{2}$ 3

وهي عزوم العطالة الأساسية.

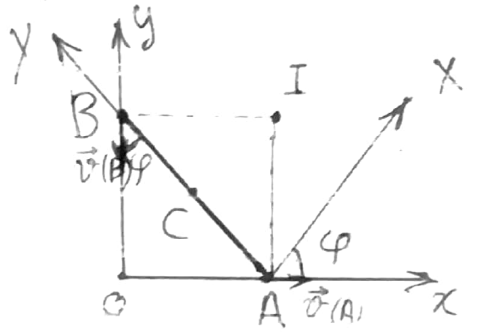
السؤال الرابع (35 درجة) :

AB سلم طوله a يتحرك طرفه B على حائط شاقولي ويتحرك طرفه الآخر A على الأرض (المحور الأفقي ox) بسرعة ثابتة v والمطلوب :

1) أوجد معادلات الحركة .

2) أوجد احداثيات المركز الآني للدوران ومحليه الهندسيين في المستوي الثابت والمستوي المتحرك .

3) استخدم المركز الآني لتعيين سرعة B وسرعة النقطة C منتصف السلم.



الحل : 1)

معادلات الحركة
$$\begin{cases} x'(A) = v \Rightarrow x(A) = vt \\ y(A) = 0 \\ \sin\varphi = \dfrac{vt}{a} \end{cases}$$ 6

رقم

$$x(I) = x(A) - \frac{y'(A)}{\varphi'} = vt$$ 3

$$y(I) = y(A) + \frac{x'(A)}{\varphi'} = \frac{v}{\varphi'}$$ 3

لنوجد φ' :

من معادلات الحركة لدينا باشتقاق المعادلة الثالثة :

$$\varphi' \cos\varphi = \frac{v}{a} \Rightarrow \boxed{\varphi' = \frac{v}{a\cos\varphi}}$$ 3

نعوض في احداثيات المركز الآني للدوران :

$$\left.\begin{aligned} x(I) &= vt = a\sin\varphi \\ y(I) &= \frac{v}{v/a\cos\varphi} = a\cos\varphi \end{aligned}\right\}$$ 2

المحل الهندسي للمركز الآني للدوران في المستوي الثابت :

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2}$$ 2

وهو دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها a وهي تمثل منحني القاعدة .

أما لايجاد المركز الآني في المستوي المتحرك نكتب :

3 $$X(I) = \frac{x'(A)\sin\varphi - y'(A)\cos\varphi}{\varphi'} = \frac{v\sin\varphi}{v} \cdot a\cos\varphi = \frac{a}{2}\sin 2\varphi$$

3 $$Y(I) = \frac{x'(A)\cos\varphi + y'(A)\sin\varphi}{\varphi'} = \frac{v\cos\varphi}{v} \cdot a\cos\varphi = a\cos^2\varphi$$

$X(I) = \frac{a}{2}\sin 2\varphi$

$Y(I) = a\cos^2\varphi = \frac{a}{2}(1+\cos 2\varphi)$ 2

بحذف الوسيط φ نجد :

$\boxed{X^2+\left(Y-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ 2

وهي معادلة دائرة مركزها $C(0,\frac{a}{2})$ يقع على OY ونصف قطرها $\frac{a}{2}$ وهي تمثل منحني المتدحرج .

(3

$\vec{v}(B)=\vec{\omega}\wedge\vec{IB}$ 2

$v(B)=\dot\varphi \cdot IB = \frac{v}{a\cos\varphi}\cdot IB = \frac{v}{a\cos\varphi}\cdot a\sin\varphi$

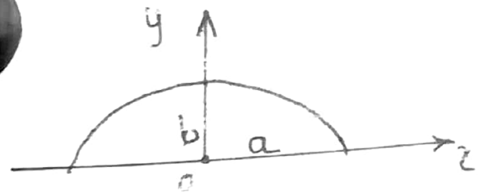
$\boxed{v(B)=v\,tg\varphi}$ 2

$v(C) = \dot\varphi \cdot IC = \frac{v}{a\cos\varphi}\cdot\frac{a}{2} = \frac{v}{2\cos\varphi}$

$\boxed{v(C)=\frac{v}{2\cos\varphi}}$ 2

السؤال الثالث (15 درجة) :

أوجد مركز كتلة صفيحة على شكل نصف قطع ناقص



الحل :

معادلة القطع

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

oy محور تناظر فمركز الكتلة يقع على oy وبالتالي

5 $x_c = 0$

$y_c = \frac{\int y\,dm}{\int dm}$; $dm = \rho\,dx\,dy$ 5

$$y_c = \frac{\iint \rho y\,dx\,dy}{\iint \rho\,dx\,dy} = \frac{\int_{-a}^{a}dx\int_{0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y\,dy}{\int_{-a}^{a}dx\int_{0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy} = \frac{\int_{-a}^{a}\frac{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}{2}dx}{\frac{\pi a b}{2}} = \frac{b}{\pi a}\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{b}{\pi a}\left[a-\frac{a^3}{3a^2}-\left(-a-\frac{(-a)^3}{3a^2}\right)\right] = \frac{2ba}{\pi a}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\pi}b$$ 5

- إذا الطالب أوجد التكامل بطريقة تغيير المتحول نفرض $X=\frac{x}{a}, Y=\frac{y}{b}$ فنكون $-1<X<1$, $0<Y<\sqrt{1-X^2}$ ثم نعود ونجري تغيير آخر بالمتحول $X=\cos\theta \Leftarrow dX=-\sin\theta\,d\theta$, $Y=\sin\theta$

يأخذ الطالب 5 على أول تغيير متحول و 5 على تغيير المتحول الثاني

جامعة طرطوس
كلية العلــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (2)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثالثة 2018- 2019

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (20 درجة):

في الحركة المستوية للجسم الصلب استنتج عبارة متجه المركز الآني للدوران في المستوي الثابت والمستوي المتحرك.

السؤال الثاني (20 درجة):

أوجد مجسم العطالة لصفيحة نصف دائرية متجانسة نصف قطرها R . ثم أوجد عزوم العطالة الأساسية لهذه الصفيحة. علماً أن مبدأ الإحداثيات o هو مركز الدائرة, و المحور ox هو القطر المحدد للصفيحة

السؤال الثالث (15 درجة):

C_1 دائرة نصف قطرها r تتحرك بحركة انسحابية بحيث أن A نقطة من محيطها ترسم دائرة C_2 في المستوي oxy مركزها o ونصف قطرها R بسرعة زاوية ثابتة ω .والمطلوب:
أوجد مسار النقطة C المقابلة قطريا للنقطة A في الدائرة C_1 .
علماً أنه في اللحظة $t = 0$ كان AC منطبق على المحور الأفقي ox .

السؤال الرابع (35 درجة):

O_1AB صفيحة مثلثية قائمة. يتحرك رأسها القائم O_1 على المحور الثابت ox بسرعة ثابتة v والرأس A ملزم بالبقاء في المستوي الثابت oxy .
والمطلوب: بين نوع الحركة وأوجد وسطاء هذه الحركة ثم أوجد معادلات الحركة.

علماً بأن متجه الدوران ثابت الطول ويصنع مع O_1A زاوية ثابتة. وأنه في اللحظة $t = 0$ كانت الصفيحة منطبقة على المستوي oxy .

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

مقرر ميكانيك (2)
لطلاب سنة ثالثة
2018-2019
الدورة الفصلية الثالثة

السؤال الأول (20 درجة)

في الحركة المستوية للجسم الصلب استنتج عبارة متجه المركز الآني للدوران في المستوي الثابت والمستوي المتحرك.

الحل:

لدينا سرعة النقطة M في الحركة المستوية تعطى بالعلاقة:

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{v}_A(M) = \vec{v}(A) + \vec{\varphi} \wedge \vec{AM} \quad 5$$

لتكن I هي المركز الآني للدوران:

$$\vec{v}(I) = 0 \quad 5$$

$$\vec{v}(A) + \vec{\varphi} \wedge \vec{AI} = 0$$

بضرب الطرفين خارجياً بـ $\vec{\varphi}$:

$$\vec{\varphi} \wedge \vec{v}(A) + \vec{\varphi} \wedge (\vec{\varphi} \wedge \vec{AI}) = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\varphi} \wedge (\vec{\varphi} \wedge \vec{AI}) = \underbrace{(\vec{\varphi} \cdot \vec{AI})}_{=0}\vec{\varphi} - \vec{\varphi}^2 \vec{AI}$$

نعوض بـ (1)

$$\vec{\varphi} \wedge \vec{v}(A) - \vec{\varphi}^2 \vec{AI}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{AI} = \frac{\vec{\varphi} \wedge \vec{v}(A)}{\varphi^2}} \quad 5$$

وهو متجه موضع المركز الآني للدوران بالنسبة للنقطة A (في المستوي المتحرك)

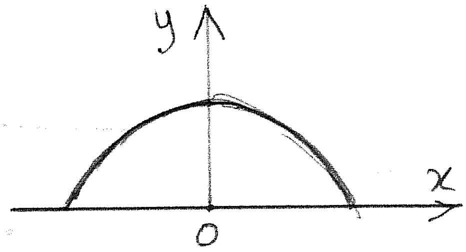
$$\vec{AI} = \vec{OI} - \vec{OA} \xrightarrow{\text{نعوض}}$$

$$\boxed{\vec{OI} = \vec{OA} + \frac{\vec{\varphi} \wedge \vec{v}(A)}{\varphi^2}} \quad 5$$

وهو متجه موضع المركز الآني للدوران في المستوي الثابت.

السؤال الثاني (20 درجة)

أوجد مجسم المطالة لصفيحة نصف دائرية متجانسة نصف قطرها R، ثم أوجد عزوم المطالة الأساسية لهذه الصفيحة. علماً أن مبدأ الإحداثيات o هو مركز الدائرة والمحور ox هو القطر المحدد للصفيحة.



الحل:

إن مجسم المطالة هو:

$$AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EXZ-2FXY=1 \quad (5)$$

• حيث A هو عزم المطالة حول ox:

$$A = I_x = \int y^2 \, dm \quad ; \quad dm = \rho r \, dr \, d\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

$$A = \rho\int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \sin^2\theta \, d\theta = \rho\int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \left[\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right] d\theta$$

$$= \rho\frac{R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\pi = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin 0)\right] = \frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{\pi}{2}$$

لدينا: $M = \frac{\rho R^2 \pi}{2}$

$$\Longrightarrow \boxed{A = \frac{MR^2}{4}} \quad (3)$$

• B عزم المطالة حول oy هو:

$$B = I_y = \int x^2 dm = \rho\int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \cos^2\theta \, d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\pi$$

$$= \frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{MR^2}{4} \quad , \quad \boxed{B = \frac{MR^2}{4}} \quad (3)$$

• عزم المطالة حول oz هو:

$$C = I_z = \int (x^2+y^2) dm = I_x + I_y = A+B = \frac{MR^2}{2} \quad , \quad \boxed{C = \frac{MR^2}{2}} \quad (3)$$

• جداءات المطالة:

$D = P_{yz} = 0$, $E = P_{xz} = 0$; $z=0$ لأن الصفيحة مستوية

$F = P_{xy} = 0$ لأن oy محور تناظر الصفيحة.

نعوض في مجسم المطالة:

$$\boxed{\frac{MR^2}{2}\left[\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} + Z^2\right] = 1}$$

- لإيجاد عزوم المطالة الأساسية نأخذ المعين:

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & -F & -E \\ -F & B-\lambda & -D \\ -E & -D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} \frac{MR^2}{4}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

بفك المعين:

$$\left[\frac{MR^2}{4}-\lambda\right]^2\left[\frac{MR^2}{2}-\lambda\right] = 0 \Longrightarrow \quad (3)$$

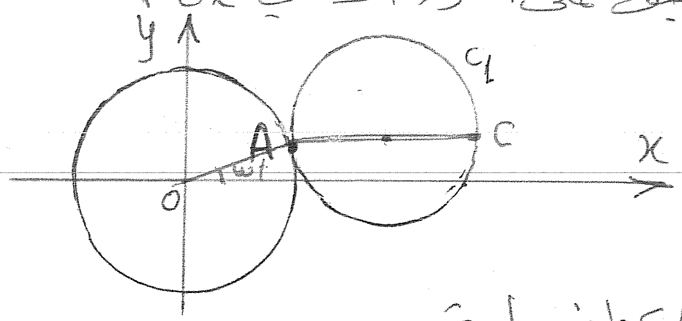
$$A' = \lambda_1 = \frac{MR^2}{4} \quad , \quad B' = \lambda_2 = \frac{MR^2}{4} \quad , \quad C' = \lambda_3 = \frac{MR^2}{2}$$

وهي عزوم المطالة الأساسية.

السؤال الثالث (15 درجة)

C_1 دائرة نصف قطرها r تتحرك بحركة انسحابية بحيث أن A نقطة من محيطها ترسم دائرة في المستوي oxy مركزها o ونصف قطرها R بسرعة زاوية ثابتة ω.
والمطلوب أوجد مسار النقطة C المقابلة قطرياً للنقطة A في الدائرة C_1.
علماً أنه في اللحظة $t=0$ كان AC منطبق على المحور الأفقي ox

الحل:



$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$

$$\vec{OA}\begin{cases} x(A) = R\cos\omega t \\ y(A) = R\sin\omega t \end{cases} \quad 5$$

$\vec{AC} = 2r\vec{i}$ لأن الحركة انسحابية.

$$x(C) = x(A) + 2r\vec{i} = R\cos\omega t + 2r \quad 5$$
$$y(C) = y(A) = R\sin\omega t$$

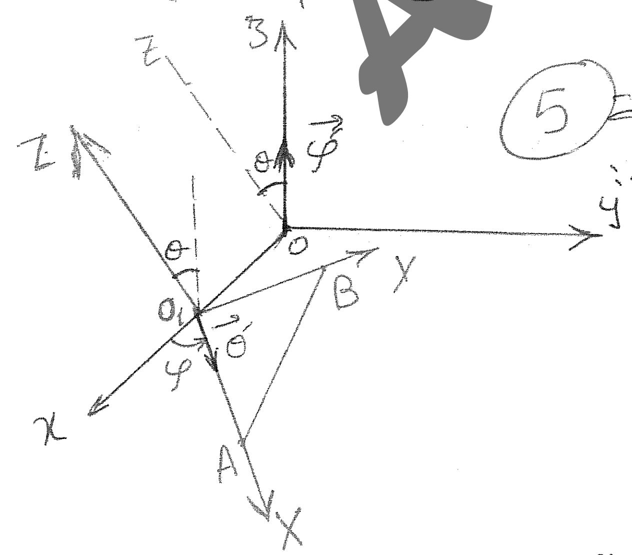
مسار النقطة C: $\boxed{(x-2r)^2 + y^2 = R^2}$ 5

وهي معادلة دائرة مركزها $(2r, 0)$ ونصف قطرها R.

السؤال الرابع (35 درجة)

O_1AB صفيحة مثلثية قائمة. يتحرك رأسها القائم O_1 على المحور الثابت ox بسرعة ثابتة v والرأس A ملتزم بالبقاء في المستوي الثابت oxy.
والمطلوب: بيّن نوع الحركة وأوجد وسطاء هذه الحركة ثم أوجد معادلات الحركة. علماً بأن متجه الدورات ثابت الطول ويصنع مع O_1A زاوية ثابتة.

الحل:



نوع الحركة: حركة جسم صلب في الحالة العامة 5

تتعين الحركة بستة وسطاء في الحالة العامة:

$$x(O_1) = x(t) \quad , \quad \varphi = \varphi(t)$$
$$y(O_1) = y(t) \quad , \quad \psi = \psi(t)$$
$$z(O_1) = z(t) \quad , \quad \theta = \theta(t)$$

لدينا $y(O_1)=0$ ، $z(O_1)=0$ ، $\psi=0$

للمسألة ثلاثة وسطاء:

$$x(O_1) = x = vt$$
$$\varphi = (\widehat{ox, O_1X}) \quad 3$$
$$\theta = (\widehat{oz, O_1Z})$$

1 $\vec{\omega} = \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\varphi}} = \dot{\theta}\,\vec{I} + \dot{\varphi}\,\vec{k}$ المحور الآني للدوران:

بالإسقاط على المحاور الإحداثية $oxyz$:

$$p = \dot{\theta}\cos\varphi$$
$$q = \dot{\theta}\sin\varphi$$
$$r = \dot{\varphi}$$

5

بالإسقاط على المحاور الإحداثية المتماسكة مع الصفيحة O_1XYZ

$$P = \dot{\theta}$$
$$Q = \dot{\varphi}\sin\theta$$
$$R = \dot{\varphi}\cos\theta$$

5

لدينا طول متجه الدوران ثابت $\Leftarrow$

$$\omega^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 = \Omega^2 \quad (1)$$ 3

بما أن متجه الدوران يصنع مع O_1A زاوية ثابتة ولتكن α

$$\frac{\sqrt{Q^2+R^2}}{P} = K = tg\,\alpha \Rightarrow \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\theta}} = K \Rightarrow \dot{\varphi} = K\dot{\theta} \quad (2)$$ 3

(1) و(2) معادلتان بمجهولين:

نعوض (2) بـ (1):

$$\dot{\theta}^2 + K^2\dot{\theta}^2 = \Omega^2$$
$$\dot{\theta}^2(1+K^2) = \Omega^2 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\Omega}{\sqrt{1+K^2}} = \Omega\cos\alpha$$
$$\Rightarrow \theta = (\Omega\cos\alpha)t + C$$

باستخدام شروط البدء: $t=0$ كانت الصفيحة على المستوى oxy $\Leftarrow$

$t=0$ كان $\theta=0$ و $\varphi=0$ $\Leftarrow$ $C=0$

$$\theta = (\Omega\cos\alpha)t$$ 5

$$\dot{\varphi} = K\Omega\cos\alpha = \Omega\sin\alpha \Rightarrow \varphi = (\Omega\sin\alpha)t$$ 5

وبالتالي معادلات الحركة:

$$x = vt$$
$$\theta = (\Omega\cos\alpha)t$$
$$\varphi = (\Omega\sin\alpha)t$$

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (2)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية 2018- 2019

المدة: ساعتين
الدرجة: 90

السؤال الأول (20 درجة):

استنتج عبارة متجه مركز التسارع الآني في المستوي الثابت والمستوي المتحرك لجسم صلب يتحرك حركة مستوية.

السؤال الثاني (20 درجة):

أوجد مركز كتلة صفيحة مثلثية متجانسة ABD. ثم أوجد عزم عطالة هذه الصفيحة بالنسبة لمستقيم منطبق على الضلع BD. علماً أن h هو ارتفاع الصفيحة المتعلق بالرأس A و b هو طول الضلع BD.

السؤال الثالث (25 درجة): (35 درجة)

قرص دائري نصف قطره r يستطيع الحركة حول مركزه الثابت c بحيث يبقى هذا القرص مستنداً على مستو أفقي ثابت oxy حيث أن النقطة o تقع على الشاقول المار من c وتبعد عنه مسافة $r \geq a$ والمطلوب:

1) **عين وسطاء الحركة.**
2) **أوجد مركبات متجه الدوران على المحاور الثابتة ثم على محاور متماسكة مع القرص.**
3) **إذا كانت الحركة تدحرج بدون انزلاق وأن طول متجه الدوران ثابت. أوجد العلاقة بين الوسطاء ثم أوجد معادلات الحركة. إذا علمت أنه في اللحظة $t = 0$ كانت نقطة تماس الصفيحة مع oxy منطبقة على o.**

السؤال الرابع (25 درجة): (15 درجة)

OAB مثلث متساوي الأضلاع يدور في مستويه حول الرأس الثابت O بسرعة زاوية ثابتة Ω. M نقطة مادية تتحرك على الضلع AB بحركة اهتزازية حول منتصفه C سعتها a و نبضها ω.
والمطلوب: أوجد السرعة النسبية والجرية والتسارع النسبي والجري والمتمم والمطلق.
علماً أن OX محور يمر من الرأس O والنقطة C وأن طول $OC = b$.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

مقرر ميكانيك (2) لطلاب س3 ر
الدورة الفصلية الثانية 2018 - 2019

السؤال الأول (20 درجة)

1 - استنتج عبارة متجه مركز التسارع الآني في المستوي الثابت والمستوي المتحرك لجسم صلب يتحرك حركة مستوية.

الحل: نعلم أن متجه السرعة معطى بالعلاقة:

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{AM}$$

بالاشتقاق بالنسبة للزمن:

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\ddot{\varphi}} \wedge \vec{AM} + \vec{\dot{\varphi}} \wedge (\vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{AM})$$

$$\vec{\dot{\varphi}} \wedge (\vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{AM}) = (\vec{\dot{\varphi}} \cdot \vec{AM})\vec{\dot{\varphi}} - \dot{\varphi}^2 \vec{AM} = -\dot{\varphi}^2 \vec{AM}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\ddot{\varphi}} \wedge \vec{AM} - \dot{\varphi}^2 \vec{AM} \quad 5$$

لتكن C النقطة ذات التسارع المعدوم أي المركز الآني للتسارع فيكون:

$$\vec{\Gamma}(C) = 0 \quad 5$$

$$\vec{\Gamma}(C) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\ddot{\varphi}} \wedge \vec{AC} - \dot{\varphi}^2 \vec{AC} = 0$$

في حالة خاصة إذا كان $\ddot{\varphi} = 0$ أي $\dot{\varphi} = cte$ فإن

$$\vec{\Gamma}(A) - \dot{\varphi}^2 \vec{AC} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{AC} = \frac{\vec{\Gamma}(A)}{\dot{\varphi}^2}} \quad 5$$

وهو متجه مركز التسارع الآني في المستوي المتحرك

$$\vec{OC} - \vec{OA} = \frac{\vec{\Gamma}(A)}{\dot{\varphi}^2} \Rightarrow \boxed{\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{\vec{\Gamma}(A)}{\dot{\varphi}^2}} \quad 5$$

وهو متجه مركز التسارع الآني في المستوي الثابت

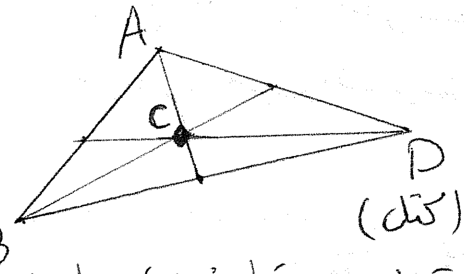
- إذا الطالب كتب الإحداثيات:

$$\left.\begin{aligned} x(C) &= x(A) + \frac{\ddot{x}(A)}{\dot{\varphi}^2} \\ y(C) &= y(A) + \frac{\ddot{y}(A)}{\dot{\varphi}^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{يأخذ } 5$$

$$\left.\begin{aligned} X(C) &= \frac{\Gamma_X(A)}{\dot{\varphi}^2} = \frac{\ddot{x}(A)\cos\varphi + \ddot{y}(A)\sin\varphi}{\dot{\varphi}^2} \\ Y(C) &= \frac{\Gamma_Y(A)}{\dot{\varphi}^2} = \frac{-\ddot{x}(A)\sin\varphi + \ddot{y}(A)\cos\varphi}{\dot{\varphi}^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{يأخذ } 5$$

السؤال الثاني (20 درجة)

أوجد مركز كتلة صفيحة مثلثية متجانسة ABD . ثم أوجد عزم عطالة هذه الصفيحة بالنسبة لمستقيم منطبق على الضلع BD . علماً أن h هو ارتفاع الصفيحة المتعلق بالرأس A , و b هو طول الضلع BD .

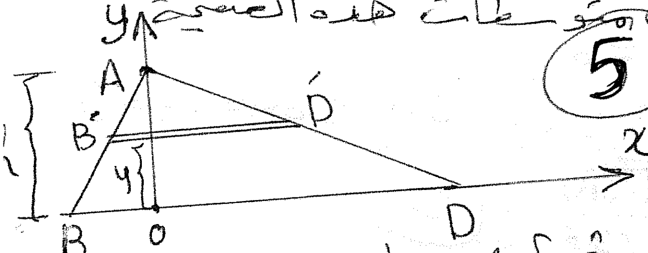


الحل:

1 إذا جزأنا هذه الصفيحة إلى شرائح لا متناهية في الصغر متوازية وموازية للضلع BD . فمركز ثقل (الكتل) كل شريحة يقع في منتصفها (على اعتبار كل شريحة قضيب متجانس) وبالتالي فمركز كتل المجموعة يقع على المستقيم الواصل بين منتصف هذه الشرائح أي على المستقيم المتوسط المتعلق بالرأس A . 2

وإذا أعدنا المحاكمة نفسها فيما يتعلق بالضلع AD نجد أن مركز الكتل يقع على المتوسط المتعلق بالرأس B .

وبالتالي مركز الكتل يقع على المتوسط الأول والثاني أي يقع على تقاطعهما ⟸ مركز كتلة هذه الصفيحة هو نقطة تلاقي متوسطات هذه الصفيحة 5



2 لنأخذ المحور ox منطبق على BD

ولنأخذ المحور oy عامودياً على ox مار من A

نقسم الصفيحة إلى شرائح موازية للمحور ox بحيث يكون بعدها عن القاعدة BD هو y وسماكتها dy وطولها x فيكون

$$dm = \rho x\, dy$$

$$I_x = \int y^2\, dm = \rho \int x y^2\, dy \qquad 5$$

من تشابه المثلثات : ABD, AB'D'

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow x = \frac{b}{h}(h-y)$$

$$I_x = \rho \int_0^h \frac{b}{h}(h-y)\, y^2\, dy = \frac{\rho b}{h}\int_0^h (hy^2 - y^3)\, dy \qquad 5$$

$$= \frac{\rho b}{h}\left[\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{\rho b}{h}\left[\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4}\right] = \frac{\rho b h^3}{12} = \frac{\rho b h}{2}\cdot\frac{h^2}{6} = \frac{Mh^2}{6}$$

$$\boxed{I_x = \frac{Mh^2}{6}}$$

حيث $M = \frac{\rho b h}{2}$ 3

إذا الطالب وضع مركز الكتل $\frac{\int y\, dm}{\int dm}$ يأخذ 3 درجات

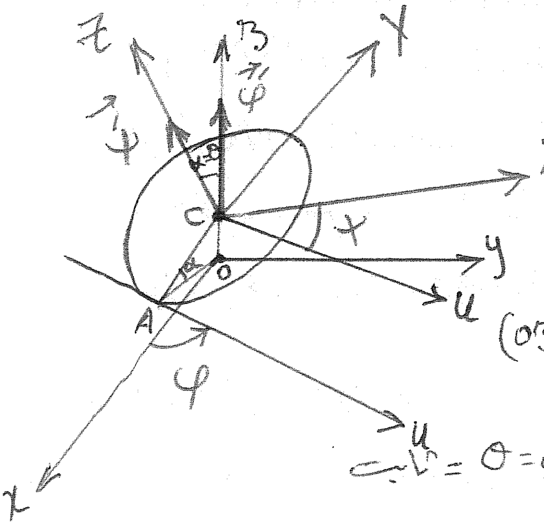
إذا عوض بعدها يأخذ 2 درجة

إذا توصل إلى النتيجة $\frac{h}{3}$ يأخذ 2 درجة .

السؤال الثالث (35 ج/17)

قرص دائري نصف قطره r يستطيع الحركة حول مركزه الثابت C بحيث يبقى هذا القرص مستنداً على مستوٍ أفقي ثابت OXY حيث أن النقطة O تقع على الشاقول المار من C وتبعد عنه مسافة a ، $r \geq a$ والمطلوب:

1) عين وسطاء الحركة
2) أوجد مركبات متجه الدوران على المحاور الثابتة ثم على محاور متماسكة مع القرص.
3) إذا كانت الحركة تدحرج بدون انزلاق وأن طول متجه الدوران ثابت. أوجد العلاقة بين الوسطاء ثم أوجد معادلات الحركة. إذا علمت أنه في اللحظة $t=0$ كانت نقطة التماس منطبقة على O.



الحل:

1) إن الحركة هي حركة جسم صلب حول نقطة ثابتة.
فلها ثلاثة وسطاء هي زوايا أولر θ, φ, ψ

• θ هي الزاوية بين ناظم المستوي الثابت XOY (OB) وناظم القرص (CZ)

$\theta = \alpha = \text{ثابت} \Leftarrow \sin\theta = \sin\alpha = \frac{a}{r} = \text{ثابت}$

لا يوجد حركة ترجحية

• φ هي الزاوية بين AU و OX

$\hat{\varphi} = (\widehat{AU, OX})$

• ψ هي الزاوية بين CU و CX

$\hat{\psi} = (\widehat{CU, CX})$

للحركة وسيطان φ, ψ . 5

2) متجه الدوران

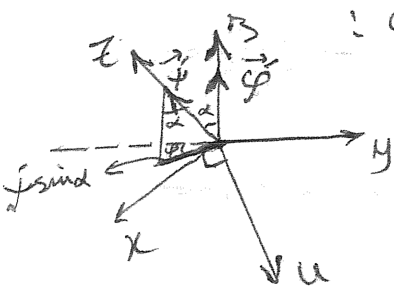
$\vec{\omega} = \vec{\dot\theta} + \vec{\dot\varphi} + \vec{\dot\psi}$ ، $\vec{\dot\theta} = 0$

$\vec{\omega} = \vec{\dot\varphi} + \vec{\dot\psi}$ 3

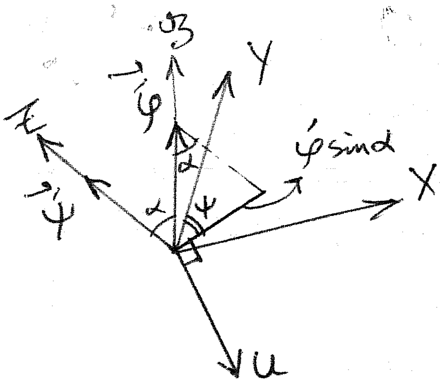
حيث $\vec{\dot\psi}$ محمول على CZ و $\vec{\dot\varphi}$ محمول على OB.

$$\vec{\omega} = \dot\varphi \vec{k} + \dot\psi \vec{K}$$

لنوجد مساقط متجه الدوران في المستوي الثابت $OXYB$:



$$\begin{cases} p = \dot\psi \sin\alpha \sin\varphi \\ q = -\dot\psi \sin\alpha \cos\varphi \\ r = \dot\varphi + \dot\psi \cos\alpha \end{cases}$$ 6



مساقط متجه الدوران في المستوي المتحرك CXYZ

$$\begin{cases} P=\dot\varphi\sin\alpha\sin\psi \\ Q=\dot\varphi\sin\alpha\cos\psi \\ R=\dot\varphi\cos\alpha+\dot\psi \end{cases}$$

6

3) $\vec{v}(A)=0$ لأن الحركة تدحرج بدون انزلاق.

أي أن سرعة A معدومة أي أن A هي نقطة من المحور الآني للدوران

ونعلم أيضاً أن المحور الآني للدوران يمر من C وبالتالي فإن المحور

الآني يمر من A و C وهما واقعتان في مستوي القرص ⇐ 3

المحور الآني يقع دوماً في مستوي القرص

المحور الآني يحوي متجه الدوران $\vec{\omega}$ ⇐ مسقط $\vec{\omega}$ على $CZ=0$

$$\Rightarrow R=0 \Rightarrow \dot\varphi\cos\alpha+\dot\psi=0 \Rightarrow \dot\psi=-\dot\varphi\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \psi=-\varphi\cos\alpha+C$$

من شروط البدء في اللحظة $t=0$

كانت A منطبقة على O ⇐ $\alpha=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \psi=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow \boxed{\psi=-\varphi\cos\alpha}$$

3

وهي العلاقة بين الوسيطين φ و ψ

- لدينا $\omega^2=P^2+Q^2+R^2=P^2+Q^2=\dot\varphi^2\sin^2\alpha=\omega_0^2$ 3

$$\Rightarrow \dot\varphi=\frac{\omega_0}{\sin\alpha} \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \boxed{\varphi=\frac{\omega_0}{\sin\alpha}t}$$

3

$$\Rightarrow \psi=-\varphi\cos\alpha=-\frac{\omega_0}{\sin\alpha}t\cos\alpha=(-\omega_0\,ctg\,\alpha)t$$

3

⇐ معادلات الحركة:

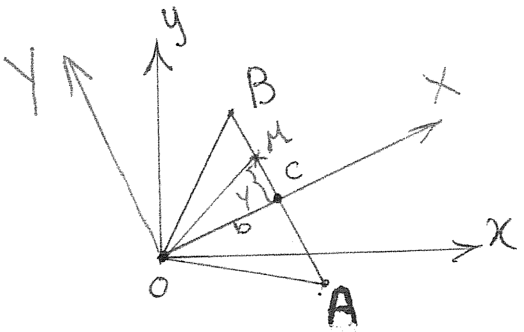
$$\begin{cases} \varphi=\frac{\omega_0}{\sin\alpha}t \\ \psi=-\omega_0 t\, ctg\,\alpha \end{cases}$$

السؤال الرابع (15 درجة)

OAB مثلث متساوي الأضلاع يدور في مستويه حول الرأس الثابت O بسرعة زاوية ثابتة Ω . M نقطة مادية تتحرك على الضلع AB بحركة اهتزازية حول منتصف C بسعة a ونبض ω .

والمطلوب : أوجد السرعة النسبية والجرية والتسارع النسبي والجري والمتمم والمطلق علماً أن OX محور يمر من الرأس O والنقطة C وأن طول $OC=b$.

الحل :



M تتحرك على AB بحركة اهتزازية قانونها :

$$Y = a\cos\omega t$$

السرعة النسبية :

$$\vec{v}_r = -a\omega\sin\omega t\,\vec{I} \quad 3$$

السرعة الجرية :

$$\vec{v}_e = \vec{\Omega}\wedge\vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \Omega \\ b & a\cos\omega t & 0 \end{vmatrix} = -\Omega a\cos\omega t\,\vec{I} + \Omega b\,\vec{J}$$

السرعة المطلقة :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = -\Omega a\cos\omega t\,\vec{I} + (\Omega b - a\omega\sin\omega t)\vec{J}$$

التسارع النسبي :

$$\vec{\Gamma}_r = -a\omega^2\cos\omega t\,\vec{J} \quad 3$$

التسارع الجري :

$$\vec{\Gamma}_e = -\Omega^2\vec{OM} = -\Omega^2(b\vec{I} + a\cos\omega t\,\vec{J}) \quad 3$$

التسارع المتمم

$$\vec{\Gamma}_c = 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r = 2\begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \Omega \\ 0 & -a\omega\sin\omega t & 0 \end{vmatrix} = 2a\omega\Omega\sin\omega t\,\vec{I} \quad 3$$

التسارع المطلق :

$$\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_r + \vec{\Gamma}_c = (-\Omega^2 b + 2a\omega\Omega\sin\omega t)\vec{I} - a(\Omega^2+\omega^2)\cos\omega t\,\vec{J}$$

$$= \Omega(2a\omega\sin\omega t - b\Omega)\vec{I} - a(\Omega^2+\omega^2)\cos\omega t\,\vec{J} \quad 3$$

جامعة طرطوس امتحان مقرر ميكانيك (2)

كلية العلوم لطلاب الرياضيات – السنة الثالثة المدة ساعتين

قسم الرياضيات الدورة الأولى 2016 - 2017 الدرجة : 75

السؤال الأول (25 درجة):

صفيحة دائرية متجانسة نصف قطرها R أوجد مجسم عطالة هذه الصفيحة بالنسبة لمركزها ثم أوجد عزوم العطالة الأساسية للصفيحة.

السؤال الثاني (25 درجة):

في حركة الجسم الصلب حول نقطة ثابتة برهن أن جميع نقاط الجسم تدور حول المحور الآني للدوران بسرعة زاوية واحدة.

السؤال الثالث (25 درجة):

مستو يتحرك في المستو الثابت oxy بحيث أن نقطة من المستوي المتحرك ترسم المحور x بسرعة ثابتة v. و منحني القاعدة لهذه الحركة هو :

$$y = v\,ch\,\frac{x}{v}$$

و المطلوب :

أوجد معادلات الحركة و أوجد منحني المتدحرج

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (٢٥ درجة)

صفيحة دائرية متجانسة نصف قطرها R ، أوجد مجسم العطالة لهذه الصفيحة بالنسبة لمركز هذه الصفيحة. ثم أوجد عزوم العطالة الأساسية.

الحل:

مجسم العطالة للصفيحة

$$AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EXZ-2FXY=1 \quad (5)$$

$$A=I_x=\int(y^2+z^2)\,dm=\int y^2\,dm \quad (1) \qquad B=I_y=\int(x^2+z^2)\,dm=\int x^2\,dm \quad (1)$$

$$C=I_z=\int(x^2+y^2)\,dm \quad (1), \quad D=P_{yz}=\int yz\,dm \quad (1) \quad E=P_{xz}=\int xz\,dm \quad (1)$$

$$F=P_{xy}=\int xy\,dm \quad (1)$$

لدينا:

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta, \quad dm=\rho\, r\,dr\,d\theta, \quad z=0 \quad (2)$$

$$A=\int y^2\,dm=\rho\int_0^R r^3\,dr\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta=\rho\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}\,d\theta=\frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{\sin2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\cdot2\pi\right]=\frac{\rho R^4\pi}{4}=\frac{MR^2}{4} \quad (1), \quad M=\rho\pi R^2$$

$$B=\int x^2\,dm=\rho\int_0^R r^3\,dr\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{\rho R^4\pi}{4}=\frac{MR^2}{4} \quad (1)$$

$$C=\int(x^2+y^2)\,dm=\int x^2\,dm+\int y^2\,dm=I_x+I_y=A+B=\frac{2MR^2}{4}=\frac{MR^2}{2} \quad (1)$$

$$D=P_{yz}=\int yz\,dm=0, \quad z=0$$

$$E=P_{xz}=\int xz\,dm=0, \quad z=0$$

$$F=P_{xy}=\int xy\,dm=0$$ لأن oy , ox محورا تناظر (3)

نعوض في مجسم العطالة:

$$\boxed{\frac{MR^2}{2}\left[\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{2}+Z^2\right]=1}$$

لإيجاد عزوم العطالة الأساسية نأخذ المعين:

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & -F & -E \\ -F & B-\lambda & -D \\ -E & -D & C-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad (3) \Longrightarrow \begin{vmatrix} \frac{MR^2}{4}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\left[\frac{MR^2}{4}-\lambda\right]^2\left[\frac{MR^2}{2}-\lambda\right]=0 \Longrightarrow$$

$$\lambda_1=A'=\frac{MR^2}{4}, \quad \lambda_2=B'=\frac{MR^2}{4}, \quad \lambda_3=C'=MR^2 \quad (3)$$

قيم λ هي عزوم العطالة الأساسية A', B', C'.

السؤال الثاني (25 درجة)

في حركة الجسم الصلب حول نقطة ثابتة برهن أن جميع نقاط الجسم تدور حول المحور الآني للدوران بسرعة زاوية واحدة.

الحل: لتكن A نقطة من الجسم الصلب المتحرك حول نقطة ثابتة O ولنفرض أن A تدور حول المحور الآني للدوران بسرعة زاوية $\vec{\omega}(A)$ فيكون

$$\vec{v}(A) = \vec{\omega}(A) \wedge \vec{OA} \quad 3$$

ولتكن B نقطة أخرى من هذا الجسم وتدور حول المحور الآني للدوران بسرعة زاوية $\vec{\omega}(B)$ فيكون:

$$\vec{v}(B) = \vec{\omega}(B) \wedge \vec{OB} \quad 3$$

ولنبرهن أن $\vec{\omega}(A) = \vec{\omega}(B)$

لدينا من النظرية الأساسية للجسم الصلب أن مسقط سرعة A على AB يساوي مسقط سرعة B على AB أي أن:

$$\vec{v}(A) \cdot \vec{AB} = \vec{v}(B) \cdot \vec{AB} \quad 5$$

بالتعويض عن $\vec{v}(A)$ و $\vec{v}(B)$ بقيمتيهما نجد أن:

$$[\vec{\omega}(A) \wedge \vec{OA}] \cdot \vec{AB} = [\vec{\omega}(B) \wedge \vec{OB}] \cdot \vec{AB}$$

لدينا: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$$[\vec{\omega}(A) \wedge \vec{OA}](\vec{OB} - \vec{OA}) = [\vec{\omega}(B) \wedge \vec{OB}](\vec{OB} - \vec{OA}) \quad 3$$

بفك الأقواس:

$$(\vec{\omega}(A), \vec{OA}, \vec{OB}) - (\vec{\omega}(A), \vec{OA}, \vec{OA}) = (\vec{\omega}(B), \vec{OB}, \vec{OB}) - (\vec{\omega}(B), \vec{OB}, \vec{OA}) \quad 3$$

لدينا: $(\vec{\omega}(A), \vec{OA}, \vec{OA}) = (\vec{\omega}(B), \vec{OB}, \vec{OB}) = 0 \quad 2$

$$(\vec{\omega}(A), \vec{OA}, \vec{OB}) = -(\vec{\omega}(B), \vec{OB}, \vec{OA}) \quad 3$$

$$(\vec{\omega}(A), \vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{\omega}(B), \vec{OA}, \vec{OB})$$

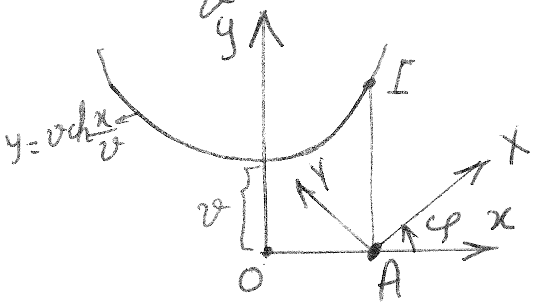
$$\vec{\omega}(A) \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{OB}) = \vec{\omega}(B) \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{OB})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega}(A) = \vec{\omega}(B)} \quad 3$$

السؤال الثالث (25 درجة)

مستو يتحرك في المستوي الثابت xoy بحيث أن نقطة من المستوي المتحرك ترسم المحور ox بسرعة ثابتة v، ومنحني القاعدة لهذه الحركة هو المنحني $y = v\,ch\frac{x}{v}$

والمطلوب: أوجد معادلات الحركة وأوجد المتدحرج.



الحل:

حركة مستو على مستو ← الحركة الآنية وسطاء

$$\dot{x}(A) = v \Rightarrow x(A) = vt$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x(A) = vt \\ y(A) = 0 \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$

لنوجد $\varphi = \varphi(t)$

لدينا منحني القاعدة $y_I = v\,ch\frac{x_I}{v}$

احداثيات المركز الآني للدوران في المستوي الثابت:

$$x_I = x(A) - \frac{\dot{y}(A)}{\dot{\varphi}} = vt \quad (2)$$

$$y_I = y(A) + \frac{\dot{x}(A)}{\dot{\varphi}} = \frac{v}{\dot{\varphi}} \quad (2)$$

بالتعويض في القاعدة $\Longrightarrow$ $\frac{v}{\dot{\varphi}} = v\,ch\frac{vt}{v} \Longrightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{1}{ch\,t}}$ $\quad ch\,t = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$

بالمكاملة $\Longrightarrow$ $\varphi = \int\frac{dt}{ch\,t} = \int\frac{2\,dt}{e^{t}+e^{-t}}$ بضرب ب e^t $\Longrightarrow \varphi = \int\frac{2e^{t}}{e^{2t}+1}dt = 2\,arctg\,e^{t}$ (3)

$\Longleftarrow$ معادلات الحركة:

$$(3)\quad \begin{cases} x(A) = vt \\ y(A) = 0 \\ \varphi = arctg\,e^{t} \end{cases}$$

- احداثيات المركز الآني للدوران في المستوي المتحرك:

$$X_I = \frac{\dot{x}(A)\sin\varphi - \dot{y}(A)\cos\varphi}{\dot{\varphi}} = v\sin\varphi\,ch\,t = v\sin(2\,arctg\,e^{t})\,ch\,t \quad (3)$$

$$Y_I = \frac{\dot{x}(A)\cos\varphi + \dot{y}(A)\sin\varphi}{\dot{\varphi}} = v\cos\varphi\,ch\,t = v\cos(2\,arctg\,e^{t})\,ch\,t \quad (3)$$

وهي المعادلات الوسيطية للمتدحرج.

لنوجد المحل الهندسي للمتدحرج وذلك بحذف الزمن:

$$\Longrightarrow X^2 + Y^2 = v^2 ch^2 t \Longrightarrow \frac{X^2+Y^2}{v^2} = ch^2 t = \left(\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\right)^2 \quad (1) \quad (3)$$

$$\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\, e^{t} \Rightarrow \mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}\left(2\,\mathrm{arctg}\, e^{t}\right) = \frac{2e^{t}}{1-e^{2t}} \qquad \left(\mathrm{tg}\,2x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2 x} \right)$$

$$\cdot\ \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x} = \frac{2e^{t}}{1-e^{2t}} \Rightarrow \left(1-e^{2t}\right)\frac{y}{x} = 2e^{t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y}{x}e^{2t} + 2e^{t} - \frac{y}{x} = 0} \quad 3 :$$

معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ e^{t}

$$\Rightarrow e^{t} = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4\frac{y^2}{x^2}}}{2\frac{y}{x}} = \frac{x \mp \sqrt{x^2-y^2}}{y}$$

$$\Rightarrow e^{-t} = \frac{y}{x \mp \sqrt{x^2-y^2}}$$

نعوض في (1)

$$\boxed{\frac{x^2+y^2}{\vartheta^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{x \mp \sqrt{x^2-y^2}}{y} + \frac{y}{x \mp \sqrt{x^2-y^2}}\right)} \quad 3$$

وهو منحني المتحرك

جامعة طرطوس
كلية العلـوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (٢)
لطلاب الرياضيات – السنة الثالثة
الدورة الاستثنائية ٢٠١٥- ٢٠١٦

المدة ساعتين
الدرجة : ٧٥

السؤال الأول (٢٥ درجة):

صفيحة متجانسة على شكل قطع ناقص أوجد مجسم العطالة بالنسبة لمركز هذه الصفيحة.

السؤال الثاني (٢٥ درجة):

في الحركة المستوية للجسم الصلب اذكر الطريقة الهندسية لتعيين المركز الآني للدوران I.
ثم برهن أن متجه سرعة أي نقطة M من هذا الجسم هو متجه سرعتها بالنسبة للمركز الآني للدوران I.

السؤال الثالث (٢٥ درجة):

صفيحة مثلثية قائمة oAB تدور حول رأسها القائم الثابت o بحيث يبقى الضلع oA ملازماً لمستو ثابت مار من o والمطلوب:

١) أوجد وسطاء الحركة.

٢) أوجد مركبات متجه الدوران على محاور ثابتة ومحاور متماسكة مع الجسم.

٣) بفرض أن الصفيحة تتحرك بسرعة زاوية ثابتة القيمة و متجه الدوران يصنع مع المستوي الثابت زاوية ثابتة α. أوجد معادلات الحركة و معادلات المحور الآني للدوران ومحله الهندسي في الفراغ الثابت.

علماً أنه في اللحظة $t = 0$ كان الضلع oA منطبق على ox.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (25 درجة)

صفيحة متجانسة على شكل قطع ناقص، أوجد مجسم المطالة بالنسبة لمركز هذه الصفيحة

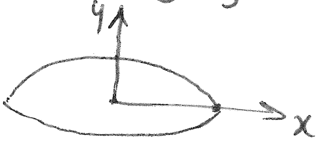
الحل: مجسم المطالة:

$$AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EXZ-2FXY=1 \qquad 5$$

حيث:

$A=I_x=\int(y^2+z^2)\,dm$ 1 , $B=I_y=\int(x^2+z^2)\,dm$ 1 , $C=I_z=\int(x^2+y^2)\,dm$ 1

$D=P_{yz}=\int yz\,dm$ 1 , $E=P_{xz}=\int xz\,dm$ 1 , $F=P_{xy}=\int xy\,dm$ 1



معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$A=I_x=\int(y^2+z^2)\,dm=\int y^2\,dm \;;\; dm=\rho\,dx\,dy \;,\; z=0$

$A=\rho\int y^2\,dx\,dy$

$-b<y<b \;,\; -a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}<x<a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$

بتغيير المتحول: $\frac{x}{a}=X \;,\; \frac{y}{b}=Y \;,\; dx\,dy=ab\,dX\,dY \;,\; X^2+Y^2=1$

$$A=\rho\iint ab^3Y^2\,dX\,dY=\rho ab^3\int_{-1}^{1}Y^2\,dY\int_{-\sqrt{1-Y^2}}^{\sqrt{1-Y^2}}dX=\rho ab^3\int_{-1}^{1}2Y^2\sqrt{1-Y^2}\,dY$$

بفرض أن: $Y=\overset{=1}{R}\sin\theta=\sin\theta \;,\; dY=\cos\theta\,d\theta \;,\; -1<Y<1 \;,\; -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

$$A=2\rho ab^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{2}{2}\rho ab^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta=\rho ab^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4\theta}{4}\,d\theta$$

$$=\rho ab^3\left[\frac{1}{4}\theta-\frac{1}{16}\sin 4\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\rho ab^3\frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{4}\rho ab^3=\frac{Mb^2}{4} \;;\; M=\rho ab \qquad 4$$

$B=I_y=\int x^2\,dm=\rho\iint x^2\,dx\,dy \;;\; -b<y<b \;,\; -a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}<x<a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$

تغيير المتحول: $\frac{x}{a}=X \;,\; \frac{y}{b}=Y \;,\; dx\,dy=ab\,dX\,dY$

$$B=\rho\iint a^3bX^2\,dX\,dY=\rho a^3b\int_{-1}^{1}dY\int_{-\sqrt{1-Y^2}}^{\sqrt{1-Y^2}}X^2\,dX=\rho a^3b\int_{-1}^{1}\left[\frac{X^3}{3}\right]_{-\sqrt{1-Y^2}}^{\sqrt{1-Y^2}}dY$$

لإجراء هذا التكامل نغير المتحول: $X=\cos\theta \;,\; dX=-\sin\theta\,d\theta \;,\; -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

$$B=\frac{2}{3}\rho a^3b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{2}{3}\rho a^3b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\rho a^3b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\left[1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right]d\theta$$

$$B = \frac{2}{3}\rho a^3 b \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\rho a^3 b \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}+ \right.$$

$$= \frac{\rho a^3 b \pi}{4} = \frac{a^2 M}{4} \quad ; \quad M = \rho a b \pi \qquad 4$$

$$C = I_z = \int (x^2+y^2)\, dm = A + B = \frac{a^2+b^2}{4} M \qquad 3$$

$E = P_{xz} = 0 \;,\; D = P_{yz} = 0 \quad \Leftarrow$ بما $z = 0$

$F = P_{xy} = 0$ بسبب التناظر.

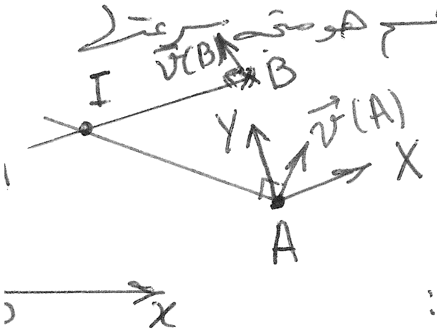
$$\Rightarrow D = E = F = 0 \qquad 3$$

بالتعويض في مجسم المطالة المتعلق بالمركز.

$$\boxed{\frac{b^2 M}{4} x^2 + \frac{a^2 M}{4} y^2 + \frac{(a^2+b^2) M}{4} z^2 = 1}$$

السؤال الثاني (25 درجة)

في الحركة المستوية للجسم الصلب اذكر الطريقة الهندسية لتعيين المركز الآني للدوران I . ثم برهن أن متجه سرعة أي نقطة M من الجسم هو متجه سرعتها بالنسبة للمركز الآني للدوران I .



الحل:

لدينا AXY مستوٍ يتحرك على المستوي الثابت OXY

فإن متجه موضع المركز الآني للدوران I بالنسبة لـ A هو :

$$\vec{AI} = \frac{\vec{\dot\varphi} \wedge \vec{v}(A)}{\dot\varphi^2} \quad 2$$

حيث $\dot\varphi$ السرعة الزاوية .

نلاحظ من العلاقة السابقة أن $\vec{AI}$ عمودي دوماً على $\vec{v}(A)$ (يأخذ 2 هنا إذا الطالب لم يكتب العلاقة السابقة)

ومن أجل نقطة أخرى B مثلاً تكون :

$$\vec{BI} = \frac{\vec{\dot\varphi} \wedge \vec{v}(B)}{\dot\varphi^2}$$

أي أن $\vec{BI}$ عمودي على $\vec{v}(B)$ ،

وبالتالي لإيجاد المركز الآني للدوران I هندسياً

نأخذ من النقطة A عموداً على حامل سرعة النقطة A (على $\vec{v}(A)$) 3

ومن B عموداً على حامل سرعة النقطة B (على $\vec{v}(B)$) فيكون المركز الآني للدوران I هو نقطة تقاطع العمودين 3

- لدينا في الحركة المستوية متجه السرعة يعطى بالعلاقة :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{AM} \quad 4$$
$$= \vec{v}(A) + \vec{\dot\varphi} \wedge (\vec{AI} + \vec{IM})$$
$$= \underline{\vec{v}(A) + \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{AI}} + \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{IM} \quad 3$$

ولكن I هو المركز الآني للدوران ⇐

$$\vec{v}(I) = \vec{v}(A) + \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{AI} = 0 \quad 3$$

بالتعويض :

$$\vec{v}(M) = \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{IM} = \vec{v}_I(M) \quad 4$$

أي أن سرعة أي نقطة هي سرعتها بالنسبة لـ I .

السؤال الثالث (25 درجة)

صفيحة مثلثية OAB قائمة تدور حول رأسها القائم الثابت O بحيث يبقى الضلع OA ملازماً لمستوٍ ثابت مار من O والمطلوب:

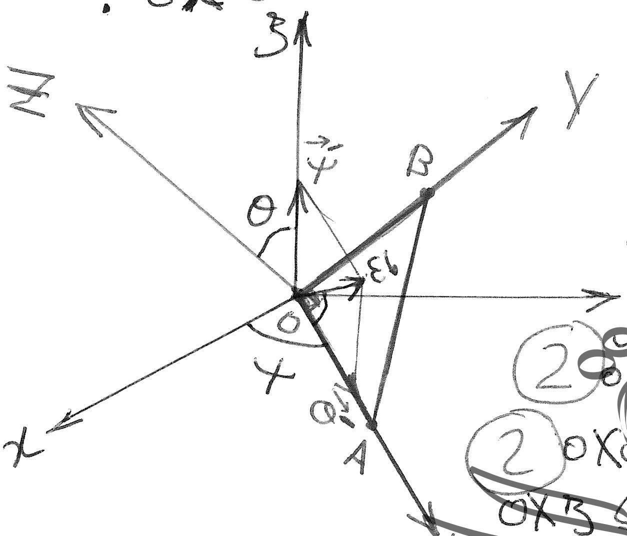
1) أوجد وسطاء الحركة

2) أوجد مركبات متجه الدوران على محاور ثابتة ومحاور متماسكة مع الجسم

3) نفرض أن الصفيحة تتحرك بسرعة زاوية ثابتة القيمة ومتجه الدوران يصنع مع المستوي الثابت زاوية ثابتة α. أوجد معادلات الحركة ومعادلات المحور الآني للدوران وعمله الهندسي في الفراغ الثابت.

علماً أنه في اللحظة $t=0$ كان الضلع OA منطبقاً على $\vec{OX}$.

الحل:



1) إن الحركة هي حركة جسم صلب حول نقطة ثابتة وبالتالي للجسم ثلاث وسطاء هي زوايا أولر ولما أن OA ملازماً للمستوي الثابت ⇐ لدينا وسيطين فقط للحركة θ, ψ

2 وبالتالي ψ تحول على Oz: $\hat{\psi} = (\vec{Ox}, \vec{OX})$

2 OX تحول على θ ويكون: $\hat{\theta} = (\vec{Oz}, \vec{OZ})$

2) بالتالي متجه الدوران موجود في OXz

$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{I} + \dot{\psi}\vec{k}$, $\vec{\omega}(p,q,r)$, $\vec{\omega}(P,Q,R)$

بالإسقاط على المحاور الثابتة Oxyz

3
$$\begin{cases} p = \dot{\theta}\cos\psi \\ q = \dot{\theta}\sin\psi \\ r = \dot{\psi} \end{cases}$$

وهي مركبات متجه الدوران في المستوي الثابت

بالإسقاط على المحاور المتحركة OXYZ

3
$$\begin{cases} P = \dot{\theta} \\ Q = \dot{\psi}\sin\theta \\ R = \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}$$

وهي مركبات متجه الدوران في المستوي المتحرك.

3) لدينا متجه الدوران يصنع مع المستوي الثابت زاوية ثابتة α ⇐

2 $\boxed{tg\alpha = \dfrac{\dot{\psi}}{\dot{\theta}} = K}$ (1)

متجه الدوران ثابت القيمة (الطول)

2 $\boxed{\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 = \omega^2 = \Omega^2}$ (2)

لدينا من (1) ⟸ (3) $\boxed{\varphi' = k\theta'}$ نعوض في (2)

$$\theta'^2 + k^2\theta'^2 = v^2 \Rightarrow \theta'^2(1+k^2) = v^2$$

$$\Rightarrow \theta' = \frac{v}{\sqrt{1+k^2}} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \theta = \frac{v}{\sqrt{1+k^2}}\,t + c$$

من شروط البدء في اللحظة $t=0$ ⟸ $\theta = 0$ ⟸ $c=0$

$$\Rightarrow \theta = \frac{v}{\sqrt{1+k^2}}\,t \Rightarrow \boxed{\theta = (v\cos\alpha)\,t} \quad 1$$

لدينا من (3) ⟸

$$\varphi' = k\theta' \Rightarrow \varphi = k\theta = tg\alpha\, v\, t\cos\alpha \Rightarrow \boxed{\varphi = (v\sin\alpha)\,t} \quad 1$$

وبالتالي معادلات الحركة:

$$\begin{cases} \theta = (v\cos\alpha)\,t \\ \varphi = (v\sin\alpha)\,t \end{cases}$$

معادلات المحور الآني للدوران

$$\vec{OI} \parallel \vec{\omega}$$

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

3

$$\frac{x}{\theta'\cos\varphi} = \frac{y}{\theta'\sin\varphi} = \frac{z}{\varphi'}$$

$$\frac{x}{(v\cos\alpha)\cos(v\sin\alpha\, t)} = \frac{y}{v\cos\alpha\sin(v\sin\alpha\, t)} = \frac{z}{v\sin\alpha} \quad 3$$

وهي معادلات المحور الآني للدوران في الفراغ الثابت

بحذف الزمن t نحصل على المحل الهندسي في الفراغ الثابت

$$\frac{x^2+y^2}{v^2\cos^2\alpha} = \frac{z^2}{v^2\sin^2\alpha} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2 = ctg^2\alpha\, z^2} \quad 2$$

معادلة مخروط دوراني محور الدوران Oz ونصف زاوية الرأس $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

وهو مخروط القاعدة.

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (2)
لطلاب الرياضيات – السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى 2015- 2016

المدة ساعتين
الدرجة : 75

السؤال الأول (25 درجة):

صفيحة ربع دائرية محدودة بالمحورين ox و oy . و المطلوب أوجد عزم عطالة هذه الصفيحة بالنسبة لمحور مار من مركز الدائرة O و يقع في مستويها و يصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ مع القطر.

السؤال الثاني (20 درجة):

oxy مستو ثابت وعليه دائرة ثابتة تمس المحور ox في النقطة o و نصف قطرها a لدينا AB قضيب يتحرك في المستو بحيث أن النقطة A ترسم ox و يستند القضيب دوماً على الدائرة. والمطلوب أوجد هندسياً المركز الآني لدوران القضيب و اشرح طريقة الايجاد.

السؤال الثالث (30 درجة):

AXY مستو يتحرك على مستو ثابت oxy بحيث أن الزاوية بين ox و AX تساوي ωt (ω عدد ثابت و t الزمن) و احداثيا النقطة A هما :

$$x(A) = a + a\cos 2\omega t$$
$$y(A) = a\sin 2\omega t$$

و المطلوب 1) أوجد احداثيات المركز الآني للدوران في المستويين الثابت و المتحرك و استخرج محليه الهندسيين(القاعدة و المتدحرج).

2) أوجد احداثيات المركز الآني للتسارع في المستويين الثابت و المتحرك و محليه الهندسيين.

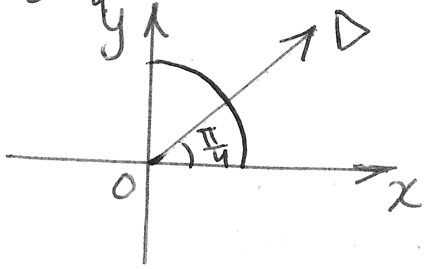
مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (25 درجة)

صفيحة ربع دائرية محدودة بالمحورين ox و oy والمطلوب أوجد عزم عطالة الصفيحة بالنسبة لمحور مار من مركز الدائرة o ويقع في مستويها ويصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور.

الحل:



طريقة أولى:

$$I_\Delta = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta$$

حيث $\alpha = \cos\frac{\pi}{4}$, $\beta = \sin\frac{\pi}{4}$, $\gamma = 0$

$$A = I_x = \int y^2 dm \;;\; dm = \rho r\,dr\,d\theta \;,\; y = r\sin\theta \;,\; x = r\cos\theta$$

$$A = \int r^2 \sin^2\theta \cdot \rho r\,dr\,d\theta = \rho\int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta = \rho\frac{R^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\rho R^4 \pi}{16} = \frac{\rho\pi R^2}{4}\cdot\frac{R^2}{4} = \frac{MR^2}{4}$$

حيث M كتلة الصفيحة $M = \frac{\rho\pi R^2}{4}$

$$B = I_y = \int x^2 dm = \int r^2\cos^2\theta\,\rho r\,dr\,d\theta = \rho\int_0^R r^3 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\rho R^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\rho\pi R^2}{4}\cdot\frac{R^2}{4} = \frac{MR^2}{4}$$

$$C = I_z = \int(x^2+y^2)\,dm = A + B = \frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

$$D = P_{yz} = \int yz\,dm = 0 \;;\; z = 0$$

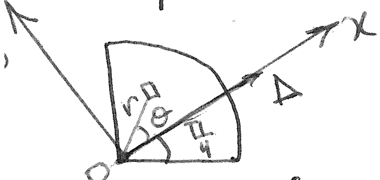
$$E = P_{zx} = \int zx\,dm = 0 \;;\; z = 0$$

$$F = P_{xy} = \int xy\,dm = \int r^2\sin\theta\cos\theta\,\rho r\,dr\,d\theta = \rho\int_0^R r^3 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \rho\frac{R^4}{4}\left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right] = \frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\rho\pi R^2}{4}\cdot\frac{R^2}{2\pi} = \frac{MR^2}{2\pi}$$

$$I_\Delta = \frac{MR^2}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 + \frac{MR^2}{4}\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 - 2\frac{MR^2}{2\pi}\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 = \frac{MR^2}{4} - \frac{MR^2}{2\pi}$$

• طريقة ثانية للحل: لو أخذ الطالب المحور ox منطبق على Δ فيكون:



$$I_\Delta = I_{ox} = \int y^2 dm \;;\; dm = \rho r\,dr\,d\theta$$

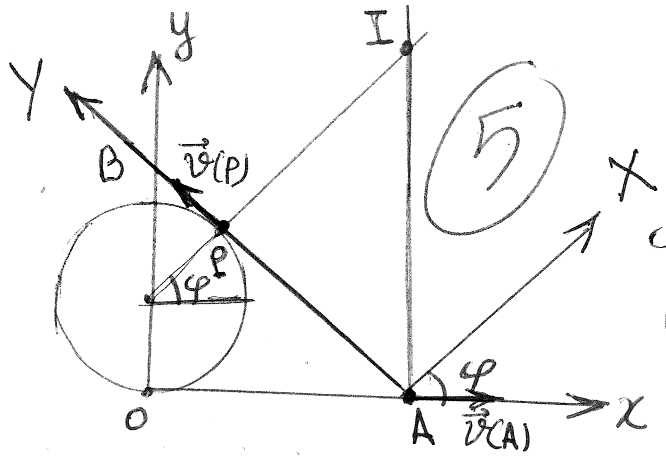
$$I_\Delta = \int y^2 dm = \rho\int_0^R r^3 dr\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{\rho R^4}{4}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\rho R^4}{4}\left[\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{\rho R^4}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\rho R^4}{4}\cdot\frac{\pi}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\rho\pi R^4}{4}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}\right]$$

$$= MR^2\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}\right]$$

السؤال الثاني (20 درجة)

OXY مستوٍ ثابت وعليه دائرة ثابتة تمس المحور Ox في النقطة O ونصف قطرها a (ثابتاً) لدينا AB قضيب يتحرك في المستوي بحيث أن النقطة A ترسم Ox ويستند القضيب دوماً على الدائرة والمطلوب أوجد هندسياً المركز الآني لدوران القضيب واشرح طريقة الإيجاد.



5

الحل:

لدينا النقطة A تتحرك على Ox وبالتالي سرعتها محمولة على Ox وبالتالي مركز الدوران محمول على العمود على سرعة A من A. 5.

القضيب يستند دوماً على الدائرة ونقطة التماس هي P فتكون سرعتها محمولة على المماس الذي هو القضيب AB وبالتالي سرعتها محمولة على AB من P أي أن مركز الدوران محمول على العمود على سرعة النقطة P في النقطة P أي محمول على العمود على القضيب AB.

نقطة تلاقي العمودين على $\vec{v}(P)$ و $\vec{v}(A)$ هي المركز الآني للدوران.

السؤال الثالث (30 درجة)

AXY مستوٍ يتحرك على مستوٍ ثابت OXY بحيث أن الزاوية بين Ox و OX تساوي ωt (ω عدد ثابت و t الزمن) وإحداثيا النقطة A هما:

$$x(A) = a + a\cos 2\omega t$$
$$y(A) = a\sin 2\omega t$$

والمطلوب: 1) أوجد إحداثيات المركز الآني للدوران في المستويين الثابت والمتحرك واستخرج محليه الهندسيين (القاعدة والمتدحرج).

2) أوجد إحداثيات المركز الآني للتسارع في المستويين الثابت والمتحرك ومحليه الهندسيين.

الحل: 1) معادلات الحركة هي:

$$x(A) = a + a\cos 2\omega t$$
$$y(A) = a\sin 2\omega t$$
$$\varphi = \omega t$$

- إحداثيات المركز الآني للدوران في المستوي الثابت:

$$x(I) = x(A) - \frac{y'(A)}{\varphi'}$$
$$y(I) = y(A) + \frac{x'(A)}{\varphi'}$$

وبالتالي:

$$x(I) = a + a\cos 2\omega t - \frac{2a\omega\cos 2\omega t}{\omega} = a - a\cos 2\omega t \quad 3$$
$$y(I) = a\sin 2\omega t - \frac{2a\omega\sin 2\omega t}{\omega} = -a\sin 2\omega t \quad 3$$

محله الهندسي في المستوي الثابت :

$$\boxed{(x-a)^2+y^2=a^2} \quad 2$$

وهو دائرة مركزها $(a,0)$ ونصف قطرها a وهي تمثل منحني القاعدة.

• احداثيات المركز الآني للدوران في المستوي المتحرك :

$$X(I)=\frac{\dot{x}(A)\sin\omega t-\dot{y}(A)\cos\omega t}{\omega}$$

$$Y(I)=\frac{\dot{x}(A)\cos\omega t+\dot{y}(A)\sin\omega t}{\omega}$$

$$X(I)=\frac{-2a\omega\sin 2\omega t\sin\omega t-2a\omega\cos 2\omega t\cos\omega t}{\omega}=-2a\cos(2\omega t-\omega t)=-2a\cos\omega t \quad 3$$

$$Y(I)=\frac{-2a\omega\sin 2\omega t\cos\omega t+2a\omega\cos 2\omega t\sin\omega t}{\omega}=-2a\sin(2\omega t-\omega t)=-2a\sin\omega t$$

ومحله الهندسي في المستوي المتحرك هو:

$$\boxed{X^2+Y^2=(2a)^2} \quad 2$$

وهو دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $(2a)$ وهو منحني المتدحرج.

2) احداثيات المركز الآني للتسارع في المستوي الثابت هو:

$$x(C)=x(A)+\frac{\ddot{x}(A)}{\omega^2}=a+a\cos 2\omega t-\frac{4a\omega^2\cos 2\omega t}{\omega^2}=a-3a\cos 2\omega t \quad 3$$

$$y(C)=y(A)+\frac{\ddot{y}(A)}{\omega^2}=a\sin 2\omega t-\frac{4a\omega^2\sin 2\omega t}{\omega^2}=-3a\sin 2\omega t \quad 3$$

والمحل الهندسي للمركز الآني للتسارع في المستوي الثابت هو:

$$\boxed{(x-a)^2+y^2=(3a)^2} \quad 1$$

هو دائرة مركزها $(a,0)$ ونصف قطرها $3a$

أما احداثيات المركز الآني للتسارع في المستوي المتحرك:

$$X(C)=\frac{\ddot{x}(A)\cos\omega t+\ddot{y}(A)\sin\omega t}{\omega^2}$$

$$Y(C)=\frac{-\ddot{x}(A)\sin\omega t+\ddot{y}(A)\cos\omega t}{\omega^2}$$

بالتعويض:

$$X(C)=\frac{-4a\omega^2\cos 2\omega t\cos\omega t-4a\omega^2\sin 2\omega t\sin\omega t}{\omega^2}=-4a\cos\omega t \quad 3$$

$$Y(C)=\frac{4a\omega^2\cos 2\omega t\sin\omega t-4a\omega^2\sin 2\omega t\cos\omega t}{\omega^2}=-4a\sin\omega t \quad 3$$

والمحل الهندسي في المستوي المتحرك:

$$\boxed{X^2+Y^2=(4a)^2} \quad 1$$

هو دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $4a$.

امتحان مقرر ميكانيك (2)

كلية العلـوم الثانية	لطلاب الرياضيات – السنة الثالثة	المدة ساعتين
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الثانية 2014- 2015	الدرجة : 75

السؤال الأول (25 درجة):

كرة متجانسة نصف قطرها R أوجد مجسم العطالة لهذه الكرة المتعلق بمركزها ثم أوجد مجسم العطالة المتعلق بنقطة على محيط الكرة.

السؤال الثاني (25 درجة):

في الحركة المستوية للجسم الصلب استنتج متجه موضع المركز الأني للدوران في المستويين الثابت و المتحرك، ثم أوجد احداثيات هذا المركز في المستوي الثابت.

السؤال الثالث (25 درجة):

اسطوانة دائرية قائمة تدور حول نقطة ثابتة o من محيط قاعدتها بحيث يبقى مولد هذه الاسطوانة ملازماً لمستو ثابت مار من o والمطلوب:

1) أوجد وسطاء الحركة.

2) أوجد مركبات متجه الدوران على محاور ثابتة ومحاور متماسكة مع الجسم

3) بفرض أن الاسطوانة تتحرك بسرعة زاوية ثابتة القيمة و متجه الدوران يصنع مع مولده الملازم للمستو الثابت زاوية ثابتة β فالمطلوب أوجد معادلات الحركة بدلالة الزمن.

علماً أنه في اللحظة $t = 0$ كان مولد الاسطوانة منطبق على ox .

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (25 درجة)

5 مجسم العطالة هو: $AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EXZ-2FXY=1$ 3

$A=I_x=\int(y^2+z^2)\,dm$, $B=I_y=\int(x^2+y^2)\,dm$; $C=I_z=\int(y^2+x^2)\,dm$

لنأخذ في مركز الكرة ثلاثية متعامدة $Oxyz$

بسبب التناظر لدينا: $I_x=I_y=I_z$

لدينا: $I_0=\frac{1}{2}(I_x+I_y+I_z)=\frac{3}{2}I_x \Rightarrow I_x=\frac{2}{3}I_0$

لنوجد عزم العطالة بالنسبة للمركز O ؛

لنجزئ الكرة إلى قشرات كروية نصف قطر احداها r وسماكتها dr فيكون كتلتها $dm=\rho 4\pi r^2 dr$

3 $I_0=\int r^2\,dm=\rho\int_0^R r^2 4\pi r^2\,dr=4\rho\pi\int_0^R r^4\,dr=\frac{\rho 4\pi R^5}{5}=\frac{3}{5}MR^2$

حيث: $M=\rho\frac{4}{3}\pi R^3$

$I_x=\frac{2}{3}I_0=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}MR^2=\frac{2}{5}MR^2$

$A=B=C=\frac{2}{5}MR^2$ 3

أما جداءات العطالة فهي معدومة بسبب تناظر نقاط الكرة بالنسبة للمستويات الاحداثية

$F=E=D=0$; $F=P_{xy}=\int xy\,dm$, $E=\int xz\,dm$, $D=\int yz\,dm$

3

وبالتعويض في مجسم العطالة: 1

$$\boxed{\frac{2}{5}MR^2(X^2+Y^2+Z^2)=1}$$

وهو مجسم العطالة المركزي (لأن مركز الكرة منطبق على O)

- لنأخذ نقطة P من محيط الكرة فتكون P واقعة على أحد المحاور، ولتكن Oz مثلاً فتكون احداثياتها $(0,0,R)$ ونأخذ محاور جديدة مبدؤها P وموازية للمحاور $Oxyz$ نجد عزوم العطالة وجداءات العطالة بالنسبة للمحاور والمستويات الاحداثية الجديدة بتطبيق نظريتي هويغنز الأولى والثانية:

3
$$A'=A+Mz_p^2=\frac{2M}{5}R^2+MR^2=\frac{7}{5}MR^2 \quad , \quad D'=D+My_pz_p=0$$

$$B'=B+Mz_p^2=\frac{2M}{5}R^2+MR^2=\frac{7}{5}MR^2 \quad , \quad E'=E+Mx_pz_p=0$$ 3

$$C'=C+M(x_p^2+y_p^2)=\frac{2M}{5}R^2+0=\frac{2}{5}MR^2 \quad , \quad F'=F+Mx_py_p=0$$

معادلة مجسم العطالة المتعلق بالنقطة P هي:

$$\boxed{\frac{MR^2}{5}[7X^2+7Y^2+2Z^2]=1}$$ 1

السؤال الثاني (25 درجة)

متجه الموضع

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\dot\varphi} \wedge \overrightarrow{AM} \quad 3$$

المركز الآني للدوران

$$\vec{v}(I) = 0 \quad 3$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(A) + \vec{\dot\varphi} \wedge \overrightarrow{AI} = 0$$

نضرب طرفي العلاقة السابقة خارجياً بـ $\vec{\dot\varphi}$ نجد:

$$\vec{\dot\varphi} \wedge \vec{v}(A) + \vec{\dot\varphi} \wedge (\vec{\dot\varphi} \wedge \overrightarrow{AI}) = 0 \quad (1) \quad 3$$

$$\vec{\dot\varphi} \wedge (\vec{\dot\varphi} \wedge \overrightarrow{AI}) = (\vec{\dot\varphi} \cdot \overrightarrow{AI})\vec{\dot\varphi} - \dot\varphi^2 \overrightarrow{AI}$$

$= 0$ لأن $\vec{\dot\varphi}$ عمودي على مستوي الحركة. 1

نعوض في (1):

$$\vec{\dot\varphi} \wedge \vec{v}(A) - \dot\varphi^2 \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{\dot\varphi} \wedge \vec{v}(A)}{\dot\varphi^2}} \quad (2) \quad 3$$

وهو متجه موضع المركز الآني للدوران في المستوي المتحرك

لدينا $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA}$ نعوض في (2)

$$\boxed{\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \frac{\vec{\dot\varphi} \wedge \vec{v}(A)}{\dot\varphi^2}} \quad 3$$

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{\dot\varphi^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot\varphi \\ \dot x(A) & \dot y(A) & 0 \end{vmatrix} \quad 3$$

بالإسقاط على المحور ox:

$$\boxed{x(I) = x(A) - \frac{\dot y(A)}{\dot\varphi}} \quad 3$$

بالإسقاط على المحور oy:

$$\boxed{y(I) = y(A) + \frac{\dot x(A)}{\dot\varphi}} \quad 3$$

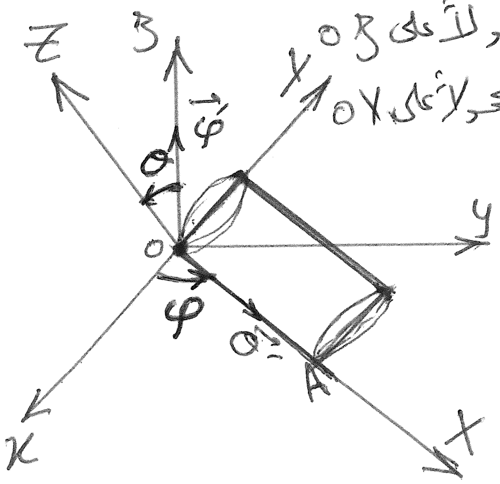
السؤال الثالث (25 درجة)

الحركة وسيطان وهما :

1- الزاوية $\varphi = (OX', OX)$ فيكون شعاع الدوران $\vec{\dot\varphi}$ محمولاً على Oz (2)

2- الزاوية $\theta = (Oz, OZ)$ فيكون شعاع الدوران $\vec{\dot\theta}$ محمولاً على OX

فإن وسيطا الحركة هما φ و θ (2)



مركبات متجه الدوران :

(1) $\vec{\omega} = \vec{\dot\theta} + \vec{\dot\varphi}$

$\vec{\omega} = \dot\theta \vec{I} + \dot\varphi \vec{k}$

متجه الدوران يقع في المستوي OXz

بالإسقاط على المحاور الثابتة :

(4)
$$\begin{cases} p = \dot\theta \cos\varphi \\ q = \dot\theta \sin\varphi \\ r = \dot\varphi \end{cases}$$

وهي مركبات متجه الدوران على المحاور الثابتة.

بالإسقاط على المحاور المتحركة

(4)
$$\begin{cases} P = \dot\theta \\ Q = \dot\varphi \sin\theta \\ R = \dot\varphi \cos\theta \end{cases}$$

وهي مركبات متجه الدوران على المحاور المتحركة

إذا الطالب وضع العلاقات التالية يأخذ فقط (4) علامات.

على المحاور الثابتة
$$\begin{cases} p = \dot\theta \cos\varphi + \dot\psi \sin\theta \sin\varphi \\ q = \dot\theta \sin\varphi - \dot\psi \sin\theta \cos\varphi \\ r = \dot\varphi + \dot\psi \cos\theta \end{cases}$$

أو وضع :

على المحاور المتحركة
$$\begin{cases} P = \dot\theta \cos\psi + \dot\varphi \sin\theta \sin\psi \\ Q = -\dot\theta \sin\psi + \dot\varphi \sin\theta \cos\psi \\ R = \dot\psi + \dot\varphi \cos\theta \end{cases}$$

(3) بما أن متجه الدوران يصنع مع OA زاوية ثابتة β فيكون :

$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\dot\varphi}{\dot\theta} = k$ (2) ثابت (1)

ومتجه الدوران ثابت الشدة والطول فيكون (2)

$\omega^2 = \dot\theta^2 + \dot\varphi^2 = v^2$ ثابت (2)

ومن (1) نحسب $\dot\varphi$ ← (2) $\dot\varphi = k\dot\theta$ (3) بالمكاملة

$\varphi = k\theta + C$

من شرط البدء في اللحظة $t=0$ كانت $\varphi = 0$, $\theta = 0$ ⟸ $C = 0$ ⟸

$\boxed{\varphi = k\theta}$ (4)

$$\dot{\theta}^2 + k^2\dot{\theta}^2 = \Omega^2 \quad \longleftarrow \text{نعوض (3) و (2)}$$

$$\dot{\theta}^2(1+k^2) = \Omega^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{\Omega^2}{1+k^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\Omega}{\sqrt{1+k^2}} \quad 2$$

$$\xrightarrow{\text{بالتكامل}} \theta = \frac{\Omega}{\sqrt{1+k^2}}\, t \xrightarrow{\text{نعوض } k} \boxed{\theta = (\Omega\cos\beta)\, t} \quad 2$$

نعوض β في (4)

$$\boxed{\varphi = (\Omega\sin\beta)\, t} \quad 2$$

وبالتالي معادلتا الحركة هما:

$$\begin{cases} \theta = (\Omega\cos\beta)\, t \\ \varphi = (\Omega\sin\beta)\, t \end{cases}$$

امتحان مقرر ميكانيك (2)

كلية العلـــوم الثانية | لطلاب الرياضيات ــ السنة الثالثة | المدة ساعتين
قسم الرياضيات | الدورة الفصلية الثانية مستنفذين2014 - 2015 | الدرجة : 100

السؤال الأول (25 درجة):

صفيحة مربعة الشكل تدور حول ضلعها الثابت بسرعة زاوية ثابتة ω المطلوب أوجد معادلة الحركة و معادلات حركة مركز كتلتها ثم أوجد معادلات حركة أحد رؤوسها المتحركة.
علماً أنه في اللحظة $t = 0$ كانت الصفيحة منطبقة على المستو xoz

السؤال الثاني (25 درجة):

كرة متجانسة نصف قطرها R أوجد مجسم العطالة لهذه الكرة المتعلق بمركزها ثم أوجد مجسم العطالة المتعلق بنقطة على محيط الكرة.

السؤال الثالث (25 درجة):

في الحركة المستوية للجسم الصلب استنتج متجه موضع المركز الأني للدوران في المستويين الثابت و المتحرك، ثم أوجد احداثيات هذا المركز في المستوي الثابت.

السؤال الرابع (25 درجة):

اسطوانة دائرية قائمة تدور حول نقطة ثابتة o من محيط قاعدتها بحيث يبقى مولد هذه الاسطوانة ملازماً لمستو ثابت مار من o والمطلوب:

1) أوجد وسطاء الحركة.

2) أوجد مركبات متجه الدوران على محاور ثابتة ومحاور متماسكة مع الجسم

3) بفرض أن الاسطوانة تتحرك بسرعة زاوية ثابتة القيمة و متجه الدوران يصنع مع مولده الملازم للمستو الثابت زاوية ثابتة β فالمطلوب أوجد معادلات الحركة بدلالة الزمن.

علماً أنه في اللحظة $t = 0$ كان مولد الاسطوانة منطبق على ox .

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (25 درجة)

صفيحة مربعة الشكل تدور حول ضلعها الثابت بسرعة زاوية ثابتة

أوجد معادلة الحركة و معادلات حركة مركز ثقلها و معادلات حركة أحد الرؤوس المتحركة ،

علماً أنه في لحظة البدء $t=0$ كانت الصفيحة منطبقة على المستوي xOB.

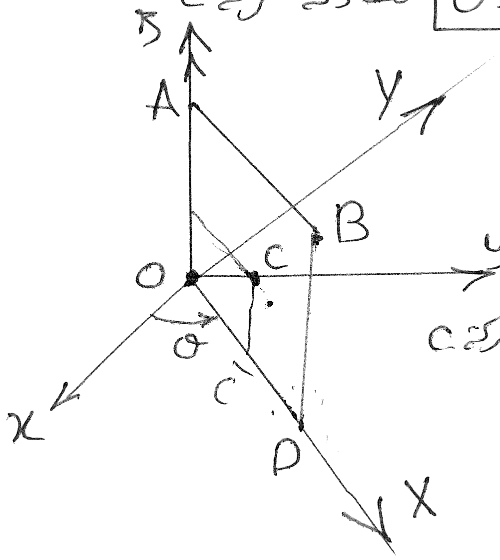
الحل : لدينا السرعة الزاوية ثابتة

$$\theta' = \omega \Rightarrow \theta = \omega t + c_1$$

5

$c_1 = 0 \Leftarrow \theta = 0$ كان $t=0$

معادلة الحركة $\boxed{\theta = \omega t}$



$OXYZ$ جملة محاور متماسكة مع الجسم

$$\vec{OC} = \vec{OC'} + \vec{C'C}$$

معادلات حركة C

$$\begin{cases} x(C) = \frac{a}{2}\cos\omega t \\ y(C) = \frac{a}{2}\sin\omega t \\ z(C) = \frac{a}{2} \end{cases}$$

10

$$\vec{OB} = 2\vec{OC}$$

معادلات حركة C

$$\begin{cases} x(B) = a\cos\omega t \\ y(B) = a\sin\omega t \\ z(B) = a \end{cases}$$

10

$$\vec{OD} = 2\vec{OC}$$

معادلات حركة D

$$\begin{cases} x(D) = a\cos\omega t \\ y(D) = a\sin\omega t \\ z(D) = 0 \end{cases}$$

10 أو

أو

الدورة الفصلية الثالثة 2014 - 2015

السؤال الثاني (25 درجة):

كرة متجانسة نصف قطرها R أوجد مجسم العطالة لهذه الكرة المتعلق بمركز الكرة. ثم أوجد مجسم العطالة المتعلق بنقطة تقع على محيط الكرة.

الحل:

إن مجسم العطالة هو:

$$AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EXZ-2FXY=1 \quad 5$$

لنأخذ من مركز الكرة ثلاث محاور متعامدة ox, oy, oz حيث

$$A=I_x=\int(y^2+z^2)dm \quad , \quad B=I_y=\int(x^2+z^2)dm \quad , \quad C=I_z=\int(y^2+x^2)dm \quad 3$$

لدينا بسبب التناظر:

$$I_x=I_y=I_z$$

$$I_0=\frac{1}{2}(I_x+I_y+I_z)=\frac{3}{2}I_x \Rightarrow I_x=\frac{2}{3}I_0$$

لدينا: $dm=\rho 4\pi r^2 dr$ وعزم العطالة حول o

$$3 \quad I_0=\int r^2 dm=\rho\int_0^R 4\pi r^2 dr\cdot r^2=\rho\frac{4}{5}\pi R^5=\frac{3}{5}MR^2 \; ; \; M=\rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$I_x=\frac{2}{3}I_0=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}MR^2=\frac{2}{5}MR^2$$

$$A=B=C=\frac{2}{5}MR^2.$$

أما جداءات العطالة فهي معدومة بسبب تناظر نقاط الكرة بالنسبة للمستويات الاحداثية:

$$F=E=D=0 \quad 6$$

حيث $F=P_{xy}=\int xy\,dm \quad , \quad E=P_{xz}=\int xz\,dm \quad , \quad D=P_{yz}=\int yz\,dm$

وبالتالي بالتعويض في مجسم العطالة:

$$\boxed{\frac{2}{5}MR^2(X^2+Y^2+Z^2)=1} \quad 1$$

وهو مجسم العطالة المركزي (لأن مركز الكتلة منطبق على o).

- لنأخذ نقطة ما من محيط الكرة فلتكن P واقعة على المحور oz مثلاً فتكون احداثياتها $(0,0,R)$ وبأخذ محاور جديدة مبدؤها P وموازية للمحاور $oxyz$ نجد عزوم العطالة وجداءات العطالة بالنسبة للمحاور والمستويات الاحداثية الجديدة بتطبيق نظريتي هوينغز الأولى والثانية:

$$A'=\frac{2M}{5}R^2+MR^2=\frac{7}{5}MR^2 \quad 3$$

$$B'=\frac{2M}{5}R^2+MR^2=\frac{7}{5}MR^2$$

$$C'=\frac{2M}{5}R^2+0=\frac{2}{5}MR^2$$

أما جداءات العطالة فهي :

$$D' = D + M y_p z_p = 0$$
$$E' = E + M x_p z_p = 0$$
$$F' = F + M x_p y_p = 0$$

3

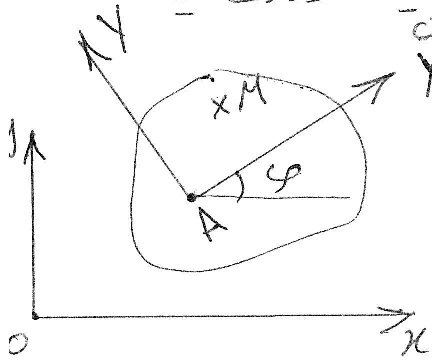
معادلة مجسم العطالة المتعلق بالنقطة P هي :

$$\boxed{\frac{MR^2}{5}\left(7X^2 + 7Y^2 + 2Z^2\right) = 1}$$

1

السؤال الثالث

في الحركة المستوية للجسم الصلب استنتج متجه موضع المركز الآني للدوران في المستويين الثابت والمتحرك ثم أوجد احداثياته في المستوي الثابت



الحل:

الموضع $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \dot{\vec{\varphi}} \wedge \vec{AM}$$

المركز الآني للدوران $\Leftarrow \vec{v}(I) = 0$

$$\vec{v}(I) = \vec{v}(A) + \dot{\vec{\varphi}} \wedge \vec{AI}$$

$$\vec{v}(A) + \dot{\vec{\varphi}} \wedge \vec{AI} = 0$$

نضرب طرفي العلاقة السابقة خارجياً بـ $\dot{\vec{\varphi}}$ نجد:

$$\dot{\vec{\varphi}} \wedge \vec{v}(A) + \dot{\vec{\varphi}} \wedge (\dot{\vec{\varphi}} \wedge \vec{AI}) = 0 \quad (1)$$

لدينا من علاقة جيبس:

$$\dot{\vec{\varphi}} \wedge (\dot{\vec{\varphi}} \wedge \vec{AI}) = \underbrace{(\dot{\vec{\varphi}} \cdot \vec{AI})}_{=0}\dot{\vec{\varphi}} - \dot{\varphi}^2 \vec{AI}$$

لأن $\dot{\vec{\varphi}}$ عمودي على مستوي الحركة.

نعوض في (1):

$$\dot{\vec{\varphi}} \wedge \vec{v}(A) - \dot{\varphi}^2 \vec{AI} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{AI} = \frac{\dot{\vec{\varphi}} \wedge \vec{v}(A)}{\dot{\varphi}^2}} \quad (2)$$

وهو متجه موضع المركز الآني للدوران في المستوي المتحرك

لدينا $\vec{AI} = \vec{OI} - \vec{OA}$ نعوض في (2):

$$\boxed{\vec{OI} = \vec{OA} + \frac{\dot{\vec{\varphi}} \wedge \vec{v}(A)}{\dot{\varphi}^2}}$$

[illegible]

$$\vec{OI} = \vec{OA} + \frac{1}{\dot{\varphi}^2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ \dot{x}(A) & \dot{y}(A) & 0 \end{vmatrix}$$

بالإسقاط على المحور ox:

$$\boxed{x(I) = x(A) - \frac{\dot{y}(A)}{\dot{\varphi}}}$$

بالإسقاط على المحور oy:

$$\boxed{y(I) = y(A) + \frac{\dot{x}(A)}{\dot{\varphi}}}$$

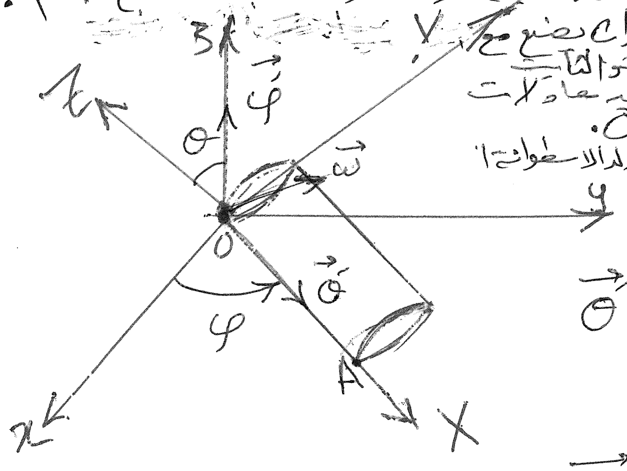
السؤال الرابع :

أسطوانة دائرية قائمة تدور حول نقطة ثابتة O من محيط قاعدتها بحيث يبقى مولد هذه الاسطوانة ملازماً لمستوٍ ثابت مار من O. والمطلوب :

أوجد وسطاء الحركة ومركبات متجه الدوران على محاور ثابتة ومحاور متماسكة مع الجسم.

نفرض أن الاسطوانة تتحرك بسرعة زاوية ثابتة القيمة ومتجه الدوران يصنع مع مولده الملازم للمستوي الثابت زاوية ثابتة. أوجد معادلات الحركة بدلالة الزمن.

في اللحظة $t=0$ كان مولد الاسطوانة منطبقاً على OX



الحل : الحركة وسيطات وهي الزاوية

$\varphi = (\hat{Ox, OX})$ 2

فيكون شعاع الدوران $\vec{\dot\varphi}$ محمولاً على OZ

والزاوية : $\theta = (\hat{OZ, Oz})$ فيكون شعاع الدوران $\vec{\dot\theta}$ محمولاً على OX. 2

وسيطا الحركة هما φ و θ 1

مركبات متجه الدوران :

$$\vec{\omega} = \vec{\dot\theta} + \vec{\dot\varphi}$$

$$\vec{\omega} = \dot\theta\,\vec{I} + \dot\varphi\,\vec{k}$$

متجه الدوران يقع في المستوي OXz

بالإسقاط على المحاور الثابتة :

$$4\begin{cases} p = \dot\theta\cos\varphi \\ q = \dot\theta\sin\varphi \\ r = \dot\varphi \end{cases}$$

وهي مركبات متجه الدوران على المحاور الثابتة

بالإسقاط على المحاور المتحركة نجد :

$$4\begin{cases} P = \dot\theta \\ Q = \dot\varphi\sin\theta \\ R = \dot\varphi\cos\theta \end{cases}$$

وهي مركبات متجه الدوران على المحاور المتحركة (المتماسكة مع الجسم).

• بما أن متجه الدوران يصنع مع OA زاوية ثابتة ولتكن α فيكون

$tg\,\alpha = \dfrac{\dot\varphi}{\dot\theta} = K$ ثابت 2 ①

ومتجه الدوران ثابت القيمة (الطول) فيكون ثابت

② 2 $\omega^2 = \dot\theta^2 + \dot\varphi^2 = \Omega^2$

من ① نحسب $\dot\varphi \Leftarrow$ 2 ③ $\dot\varphi = K\dot\theta \xLeftarrow{\text{بالمكاملة}}$

$\varphi = K\theta + c$

من شروط البدء في اللحظة $t=0$ كانت $\varphi = 0,\ \theta = 0 \Leftarrow c = 0 \Leftarrow$

$\varphi = K\theta$ ④

نعوض ③ في ② $\Leftarrow$ 2

$\dot\theta^2 + K^2\dot\theta^2 = \Omega^2 \Rightarrow \dot\theta^2 = \dfrac{\Omega^2}{1+K^2} \Rightarrow \dot\theta = \dfrac{\Omega}{\sqrt{1+K^2}}$

$\xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \theta = \dfrac{\Omega}{\sqrt{1+K^2}}\,t \xRightarrow{\text{نعوض } K} \boxed{\theta = (\Omega\cos\alpha)\,t} \xRightarrow{\text{من } ④} \boxed{\varphi = (\Omega\sin\alpha)\,t}$ 2

إذا الطالب وضع العلامات التالي يأخذ

$$\begin{cases} p = \theta\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ q = \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{cases} \qquad 3$$

$$\begin{cases} P = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ Q = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ R = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases} \qquad 3$$

امتحان مقرر ميكانيك (٢)

كلية العلــوم الثانية	لطلاب الرياضيات – السنة الثالثة	المدة ساعتين
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الأولى ٢٠١٤- ٢٠١٥	الدرجة : ١٠٠

<u>السؤال الأول (٢٠ درجة):</u>

أوجد مركز كتلة سلك نصف دائري نصف قطره R وكثافته $\rho = a.s$ حيث a ثابت و s طول قوس من السلك مقاساً من نقطة محددة له.

<u>السؤال الثاني (١٥ درجة):</u>

أوجد جداءات العطالة لصفيحة مستطيلة متجانسة و ذلك بالنسبة لمحورين منطبقين على ضلعي الصفيحة.

<u>السؤال الثالث (٢٥ درجة):</u>

ادرس الحركة الدورانية للجسم الصلب حول محور ثابت(متجه الموضع، و متجه السرعة، و متجه التسارع لنقطة ما منه).

<u>السؤال الرابع (٣٠ درجة):</u>

AB سلم طوله l يتحرك طرفه B على المحور الشاقولي ويتحرك طرفه الآخر A على المحور الأفقي ox و يدور السلم بسرعة زاوية ثابتة و المطلوب:

١) أوجد معادلات الحركة.

٢) أوجد إحداثيات المركز الآني للدوران ومحليه الهندسيين في المستوي الثابت و المستوي المتحرك.

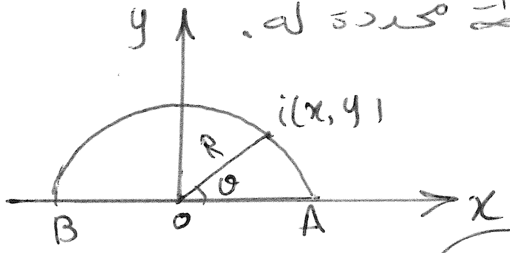
٣) برهن أن المحل الهندسي لمركز التسارع المعدوم هو دائرتين.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (٢٥ درجة)

أوجد مركز كتلة سلك نصف دائري نصف قطره R وكثافته $\rho = a.s$ حيث a ثابت و s طول قوس من السلك مقاساً من نقطة محددة له.



الحل: C مركز كتلة السلك

$$x_c = \frac{\int x_i\, dm_i}{\int dm} \quad , \quad y_c = \frac{\int y_i\, dm_i}{\int dm_i}$$

5 5 5

لدينا: $x_i = R\cos\theta$, $y_i = R\sin\theta$, $dm_i = \rho_i\, ds_i$ $\begin{cases} \rho_i = a s_i = aR\theta \\ ds_i = R\,d\theta \end{cases}$

$$x_c = \frac{\int_0^\pi R\cos\theta \cdot aR\theta R\,d\theta}{\int_0^\pi a R\theta R\,d\theta} = \frac{R\int_0^\pi \cos\theta\cdot\theta\,d\theta}{\int_0^\pi \theta\,d\theta} = \frac{R\int_0^\pi d(\sin\theta\cdot\theta + \cos\theta)}{\int_0^\pi \theta\,d\theta}$$

$$= \frac{R[\sin\theta\cdot\theta + \cos\theta]_0^\pi}{\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^\pi} = \frac{R(-1-1)}{\frac{\pi^2}{2}} = \frac{-4R}{\pi^2} \approx -\frac{4}{10}R \quad 5$$

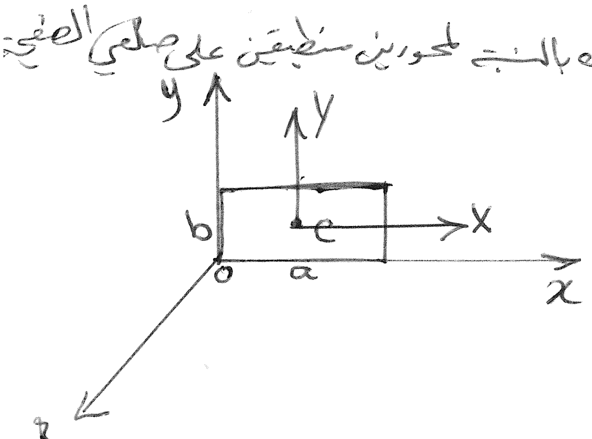
$$y_c = \frac{\int y_i \rho_i\, ds_i}{\int \rho_i\, ds_i} = \frac{\int_0^\pi R\sin\theta\cdot aR\theta R\,d\theta}{\int_0^\pi a.R.\theta.R\,d\theta} = \frac{R\int_0^\pi \sin\theta\cdot\theta\,d\theta}{\int_0^\pi \theta.d\theta}$$

$$= \frac{R\int_0^\pi d(-\cos\theta\cdot\theta + \sin\theta)}{\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^\pi} = \frac{R[-\theta\cos\theta + \sin\theta]_0^\pi}{\frac{\pi^2}{2}} = \frac{R\pi}{\frac{\pi^2}{2}} = \frac{2R}{\pi}$$

$$\approx \frac{4}{9}R \quad 5$$

السؤال الثاني (20 درجة)

أوجد جداءات العطالة لصفيحة مستطيلة متجانسة وذلك بالنسبة لمحورين منطبقين على ضلعي الصفيحة



الحل:

$$P_{xy} = \int_s xy\,dm \quad , \quad dm = \rho\,dx\,dy$$

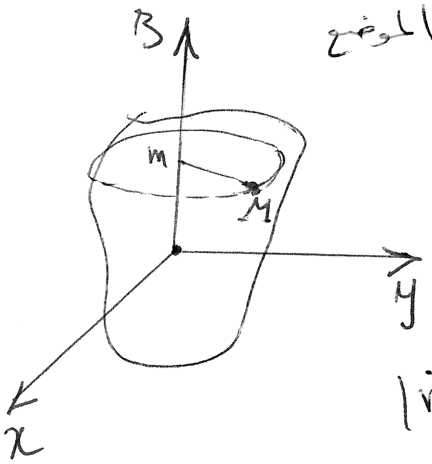
$$P_{xy} = \rho\int_0^a x\,dx \int_0^b y\,dy = \rho\frac{a^2b^2}{4} = \frac{Mab}{4} \quad 10$$

$$P_{xz} = \int xz\,dm = 0 \quad 5$$

$$P_{yz} = \int yz\,dm = 0 \quad 5$$

السؤال الثالث (٢٠ درجة)

ادرس الحركة الدورانية للجسم الصلب حول محور ثابت (أوجد متجه الموضع ومتجه السرعة ومتجه التسارع لنقطة في هذا الجسم).



الحل: نقول عن جسم صلب أنه يتحرك حول محور ثابت إذا كان هنالك محور متماسك مع الجسم مثبت في نقطتين.

لتكن M نقطة ما كيفية من الجسم الصلب

ولتكن m مسقط M على المحور OB محور الدوران وبالتالي $|\vec{mM}| = c$

متجه الموضع:

$$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM} \quad (1)$$ 5

المسار هو دائرة مركزها m واقعة في مستو مار من m وعمودي على OB.

متجه السرعة: باشتقاق العلاقة (1):

$$\vec{v}_M = \vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{mM} \quad (2)$$ 5

أي أن أشعة السرعة عمودية على محور الدوران ومتناسبة طرداً مع بعد النقطة عن المحور.

متجه التسارع: نشتق (2) بالنسبة للزمن:

$$\vec{\Gamma}_M = \vec{\ddot{\varphi}} \wedge \vec{mM} + \vec{\dot{\varphi}} \wedge (\vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{mM})$$

من علاقة جيبس:

$$\vec{\dot{\varphi}} \wedge (\vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{mM}) = \underbrace{(\vec{\dot{\varphi}} \cdot \vec{mM})}_{=0} \vec{\dot{\varphi}} - \dot{\varphi}^2 \, \vec{mM}$$ 4

$$\vec{\Gamma}_M = \vec{\ddot{\varphi}} \wedge \vec{mM} - \dot{\varphi}^2 \, \vec{mM}$$ 5

وهو حاصل جمع متجهين:

المتجه الأول عمودي على نصف قطر الدائرة $\vec{mM}$ ويسمى التسارع المماسي B

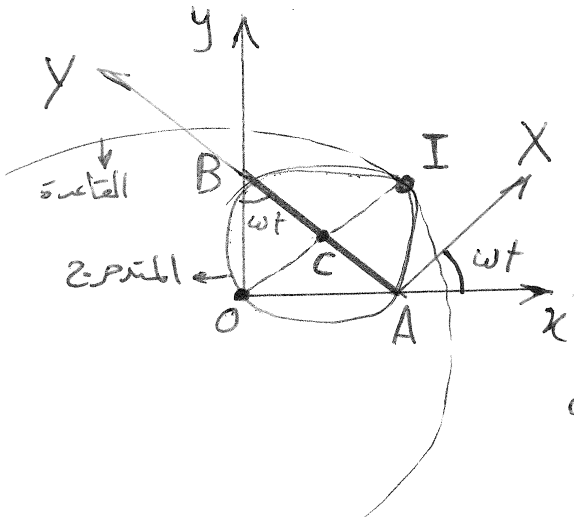
والمتجه الثاني محمول على نصف قطر الدائرة ومتجه إلى محور الدوران (نحو الداخل) ويسمى التسارع الناظمي B

إذا الطالب وضع

$$\begin{cases} x' = R\dot{\varphi}\sin\varphi \\ y' = R\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases}$$ يأخذ 5

وإذا اشتقها بالنسبة للزمن العلاقات x' و y' يأخذ 5 درجات أيضاً.

السؤال الرابع (30 درجة)



AB سلم طوله l يتحرك طرفه B على المحور الشاقولي ويتحرك طرفه الآخر A على المحور الأفقي ox ويدور السلم بسرعة زاوية ثابتة والمطلوب:

1) أوجد معادلات الحركة

2) أوجد احداثيات المركز الآني للدوران ومحليه الهندسيين في المستوي الثابت والمستوي المتحرك.

3) برهن ان المحل الهندسي لمركز التسارع المعدوم هو دائرة.

الحل:

1) معادلات الحركة:

$$x_A = l\sin\omega t$$
$$y_A = 0$$
$$\varphi = \omega t$$

5

2) احداثيات المركز الآني للدوران:

$$x(I) = x(A) - \frac{\cancel{y'(A)}}{\varphi'} = l\sin\omega t$$
$$y(I) = \cancel{y(A)} - \frac{x'(A)}{\varphi'} = l\cos\omega t$$

5

$\boxed{x^2+y^2=l^2}$ 3 دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها l وهو المحل الهندسي للمركز الآني للدوران في المستوي الثابت ويمثل القاعدة

احداثيات المركز الآني للدوران في المستوي المتحرك:

$$X_I = \frac{x'\sin\varphi - y'\cos\varphi}{\varphi'} = l\cos\omega t\sin\omega t = \frac{l}{2}\sin 2\omega t$$
$$Y_I = \frac{x'\cos\varphi + y'\sin\varphi}{\varphi'} = l\cos^2\omega t = \frac{l}{2}(1+\cos 2\omega t)$$

5

$\boxed{X^2+\left(Y-\frac{l}{2}\right)^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2}$ 3 دائرة مركزها $c\left(0,\frac{l}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{l}{2}$

3) المركز الآني للتسارع:

$$\vec{\Gamma}(c) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varphi''}\wedge\vec{AC} - \varphi'^2\vec{AC} = 0$$

بما أن $\varphi' = \omega$ ثابتة $\Leftarrow \varphi'' = 0$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(A) - \varphi'^2\vec{AC} = 0 \Longrightarrow \vec{AC} = \frac{\vec{\Gamma}(A)}{\varphi'^2} = \frac{\vec{\Gamma}(A)}{\omega^2}$$

3

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{\vec{\Gamma}(A)}{\omega^2}$$

بالإسقاط على OXY :

$$x(c) = l\sin\omega t - l\sin\omega t = 0$$
$$y(c) = 0$$

مركز التسارع الآني $x(c) = 0$ و $y(c) = 0$ هو مبدأ الاحداثيات $o(0,0)$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 0} \quad 3$$

الحل الهندسي في المستوي الثابت هو نقطة $(0,0)$ دائرة مركزها o ونصف قطرها o.

$$X(c) = \frac{x''(A)\cos\varphi + y''(A)\sin\varphi}{\varphi'^2} = -l\sin\omega t\cos\omega t = -\frac{l}{2}\sin 2\omega t$$

$$Y(c) = \frac{-x''(A)\sin\varphi + y''(A)\cos\varphi}{\varphi'^2} = l\sin\omega t\sin\omega t = \frac{l}{2}(1-\cos 2\omega t)$$

$$\boxed{X^2 + \left(Y - \frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2} \quad 2$$

الحل الهندسي هو دائرة مركزها $C\left(0, \frac{l}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{l}{2}$.

مع التمنيات

بالتوفيق والنجاح

مكتبة

A to Z