كلية **العلوم**

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

اسئلة دورات محلولة

تحليل عقدي ٢

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر تحليل عقدي 2
سنة ثالثة رياضيات
الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2024–2025م

اسم الطالب:
المدة: ساعتان
الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (50 درجة)

1) لتكن $f(z)$ دالة تحليلية ومحدودة في جميع نقاط المستوى العقدي، والمطلوب أثبت أنّ $f(z)$ دالة ثابتة.

2) أوجد منطقة التقارب لمتسلسلة القوى التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i(z-i)^n}{3n^2}$$

3) بيّن نوع النقطة الشاذة $z=0$ للتابع العقدي $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^3}$، ثم أوجد $Res[f(z),0]$.

4) ليكن $f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-2)^2}$ تابع عقدي و $z_0=2$ والمطلوب:

1. حدد القسم الرئيسي والقسم التحليلي في نشر لوران للتابع f في D حيث $D=\{z:\ 0<|z-z_0|<\infty\}$

2. أوجد قيمة التكامل

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

حيث C دائره مركزها z_0 ونصف قطرها $r=1$.

5) أوجد منشور تايلور للدالة $h(z)=e^{3z}$ في جوار النقطة $z_0=1$.

السؤال الثاني: (40 درجة)

1) ليكن $f(z)=\frac{(z-1)(z-9)^4(z+i)^2}{z^2(z-i)^6}$ تابع عقدي، والمطلوب أوجد قيمة التكامل التالي

$$I=\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

حيث C دائرة مركزها $z_0=0$ ونصف قطرها 2.

2) باستخدام نظرية الرواسب أوجد قيمة التكاملين:

$$I_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta} \quad , \quad I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)^2}$$

---انتهت الأسئلة---

تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

جامعة طرطوس **كلية العلوم** **قسم الرياضيات**

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل عقدي 2 لطلاب السنة الثالثة رياضيات

الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2024–2025م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (50 درجة)

1) لتكن $f(z)$ دالة تحليلية ومحدودة في جميع نقاط المستوي العقدي، والمطلوب أثبت أنّ $f(z)$ دالة ثابته.(10 درجات)

الحل: مبرهنة.

2) أوجد منطقة التقارب لمتسلسلة القوى التالية (8 درجات)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i(z-i)^n}{3n^2}$$

الحل:

$$a_n = \frac{i}{3n^2}$$

$$R = lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3n^2}}{\frac{1}{3(n+1)^2}} = lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)^2}{3n^2} = 1$$

بالتالي منطقة التقارب هي

$$|z-i| < 1$$

3) بين نوع النقطة الشاذة $z=0$ للتابع العقدي $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^3}$، ثم أوجد $Res[f(z),0]$.(10 درجات)

طريقه أولى:

$lim_{z\to 0} f(z) = \frac{0}{0}$ نطبق أوبيتال ثلاث مرات

$$lim_{z\to 0} f(z) = lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{3z^2} = lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{6z} = lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{6} = \frac{1}{6}$$

بما أن $lim_{z\to 0} f(z) = \frac{1}{6}$ عندئذ $z=0$ نقطه شاذه قابله للحذف.

بما أنّ $z=0$ نقطه شاذه قابله للحذف عندئذ $Res[f(z),0]=0$.

طريقه ثانيه:

ننشر التابع $f(z)$ في المنطقة $0<|z|<R$ وفق لوران

$$f(z)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\sin z=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{(z)^3}{3!}+\frac{(z)^5}{5!}-\frac{(z)^7}{7!}+\cdots\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}\ldots=\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\cdots$$

القسم الرئيسي غير موجود بالتالي $z=0$ نقطه شاذه قابله للحذف عندئذ $Res[f(z),0]=0$.

4) (16 درجة). ليكن $f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-2)^2}$ تابع عقدي و $z_0=2$ والمطلوب:

1. **(10 درجات)** حدد القسم الرئيسي والقسم التحليلي في نشر لوران للتابع f في D حيث
$$D=\{z:\ 0<|z-z_0|<\infty\}$$
2. **(6 درجات)** أوجد قيمة التكامل

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

حيث C دائره مركزها z_0 ونصف قطرها $r=1$.

الحلّ:

.1

$$f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-2)^2}=\frac{e^{2(z-2+2)}}{(z-2)^2}=\frac{e^4}{(z-2)^2}e^{2(z-2)}=\frac{e^4}{(z-2)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2(z-2)\right)^n}{n!}$$
$$=\frac{e^4}{(z-2)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(z-2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^4 2^n(z-2)^{n-2}}{n!}$$

القسم التحليلي هو:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^4 2^n(z-2)^{n-2}}{n!}$$

القسم الرئيسي هو:

$$\sum_{n=0}^{1}\frac{e^4 2^n(z-2)^{n-2}}{n!}=\frac{e^4}{(z-2)^2}+\frac{2e^4}{z-2}$$

.2

طريقه أولى: (لدينا $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}}dz$ أمثال متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في D حيث C منحني بسيط مغلق تقع $z_0=2$ داخله)

بأخذ C الدائره التي مركزها $z_0=2$ ونصف قطرها $r=1$ عندئذ

$$a_0=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-2}dz \Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z-2}dz=2\pi i\times a_0=2\pi i\times\frac{2^2e^4}{2!}=4\pi i e^4$$

طريقه ثانية:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-2}dz=\int_C \frac{e^{2z}}{(z-2)^3}dz$$

نطبق صيغة كوشي الثانية نجد

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z-2)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\times g^{(2)}(2)$$

حيث $g(z)=e^{2z}$ و $g^{(2)}(z)=2^2e^{2z}$

بالتالي

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z-2)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!} \times 2^2 \times e^4 = 4\pi i e^4$$

طريقه ثالثة: التكامل $\int_C \frac{e^{2z}}{(z-2)^3}dz$ يمكن إيجاد قيمته باستخدام نظرية الرواسب علما أن

$z=2$ قطب للتابع $h(z) = \frac{e^{2z}}{(z-2)^3}$ من المرتبه الثالثة عندئذٍ $\int_C \frac{e^{2z}}{(z-2)^3}dz = 2\pi i \times Res[h(z),2]$

5) (6 درجات). أوجد منشور تايلور للدالة $h(z) = e^{3z}$ في جوار النقطة $z_0 = 1$.

الحلّ:

نفرض $t = z-1$ عندئذ $z = t+1$

$$e^{3z} = e^{3(t+1)} = e^3 e^{3t} = e^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3t)^n}{n!} = e^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3 3^n}{n!}(z-1)^n$$

السؤال الثاني: (40 درجة)

1) (12 درجة). ليكن $f(z) = \frac{(z-1)(z-9)^4(z+i)^2}{z^2(z-i)^6}$ تابع عقدي، والمطلوب أوجد قيمة التكامل التالي

$$I = \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

حيث C دائرة مركزها $z_0 = 0$ ونصف قطرها $r = 2$.

الحل:

$f(z)$ يملك ثلاثة أصفار :

- $z = 1$ صفر من المرتبه الأولى للتابع $f(z)$ يقع داخل C.
- $z = 9$ صفر من المرتبه الرابعة للتابع $f(z)$ يقع خارج C.
- $z = -i$ صفر من المرتبه الثانية للتابع $f(z)$ يقع داخل C.

$f(z)$ يملك قطبين هما:

- $z = 0$ قطب من المرتبه الثانيه للتابع $f(z)$ وهو يقع داخل C.
- $z = i$ قطب من المرتبه السادسه للتابع $f(z)$ وهي يقع داخل C.

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(N-P)$$

حيث N عدد أصفار التابع $f(z)$ والواقعه داخل C. نلاحظ $N = 3$

حيث P عدد أقطاب التابع $f(z)$ والواقعه داخل C. نلاحظ $P = 8$

$$I = \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -10\pi i$$

2) (28 درجة). 14 درجه لكل تكامل. باستخدام نظرية الرواسب أوجد قيمة التكاملين:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - cos\theta} \qquad , \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)^2}$$

الحل:

✓ **التكامل الأول:**

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - cos\theta}$$

الحل: نفرض $z = e^{i\theta}$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$

$$cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - cos\theta} = \int_{C:|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2 - \frac{z + z^{-1}}{2}} = 2i \times \int_{C:|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 4z + 1}$$

$z_1 = 2 + \sqrt{3}$ قطب بسيط للتابع $f(z) = \frac{1}{z^2-4z+1}$ يقع خارج دائرة الوحدة.

$z_2 = 2 - \sqrt{3}$ قطب بسيط للتابع $f(z) = \frac{1}{z^2-4z+1}$ يقع داخل دائرة الوحدة.

نطبق نظرية الرواسب

$$I_1 = 2i \times 2\pi i \times Res[f(z), z_2]$$

$$Res[f(z), z_2] = lim_{z \to z_2}(z - z_2)f(z) = lim_{z \to z_2} \frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{z_2 - z_1} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

بالتالي:

$$I_1 = 2i \times 2\pi i \times \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

✓ **التكامل الثاني:**

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)^2} dx$$

لنأخذ $R(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)^2}$، نلاحظ بأن $R(x)$ لا يملك نقاط شاذه على المحور الحقيقي Ox.

نلاحظ بأن درجة المقام تساوي $n = 6$ ودرجة البسط تساوي $m = 0$. $n - m = 6 > 2$

❖ من أجل انجاز هذا التكامل نستبدل x بـ z نجد $R(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)^2}$ ولنوجد النقاط الشاذه للتابع $R(z)$ في المستوي العقدي ونأخذ منها النقاط الشاذه الواقعة فوق المحور الحقيقي Ox.

النقاط الشاذة للتابع$R(z)$

$z_0 = -3i$ قطب من المرتبه 2 لـ $R(z)$ وهي تقع تحت المحور الحقيقي Ox.

$z_1 = 3i$ قطب من المرتبه 2 لـ $R(z)$ وهي تقع فوق المحور الحقيقي Ox.

$z_2 = -i$ قطب بسيط لـ $R(z)$ وهي تقع تحت المحور الحقيقي Ox.

$z_3 = i$ قطب بسيط لـ $R(z)$ وهي تقع فوق المحور الحقيقي Ox.

بالتالي

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)^2} = 2\pi i \times (Res[R(z), i] + Res[R(z), 3i])$$

$$Res[R(z), i] = lim_{z\to i}(z-i)R(z) = lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)(z^2+9)^2} = -\frac{1}{128}i$$

$$Res[R(z), 3i] = \frac{1}{(2-1)!} lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}(z-3i)^2 R(z) = lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z+3i)^2}\right)$$

$$= lim_{z\to 3i}\frac{-2z(z+3i)-2(z^2+1)}{(z^2+1)^2(z+3i)^3} = \frac{26}{6912}i$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)^2} = 2\pi i \times \left(-\frac{1}{128}i + \frac{26}{6912}i\right) = \pi i \times \left(-\frac{1}{64}i + \frac{26}{3456}i\right) = \frac{28\pi}{3456} = \frac{7\pi}{864}$$

- ✓ بعض التمارين تحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تحليل عقدي 2	اسم الطالب:
كلية العلوم	سنة ثالثة رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	الدورة التكميلية – العام الدراسي 2023-2024م	الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (48 درجة)

1) لتكن $f(z)$ دالة تحليلية ومحدودة في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب أثبت أنّ $f(z)$ دالة ثابته.

2) ليكن $f(z) = \frac{e^z}{z-2}$ تابع عقدي و $z_0 = 2$ والمطلوب:

1. حدد القسم الرئيسي والقسم التحليلي في نشر لوران للتابع f في D حيث $D = \{z : 0 < |z - z_0| < \infty\}$

2. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$ حيث C دائره مركزها z_0 ونصف قطرها $r = 1$.

3) أوجد منطقة التقارب لمتسلسلة القوى التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i3^n(z+i)^n}{n!}$$

4) ليكن $f(z) = \frac{z^3-4z^2}{1-e^{\frac{z^2}{2}}}$ والمطلوب:

1. أوجد $lim_{z\to 0} f(z)$ ثم بيّن نوع النقطه الشاذة $z = 0$ للتابع $f(z)$.

2. أوجد راسب التابع $f(z)$ عند $z = 0$.

السؤال الثاني: (42 درجة)

1) ليكن $f(z) = \frac{z+2}{z^2(z+2i)}$ و $C: |z| = \frac{1}{2}$ والمطلوب: أوجد

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

2) باستخدام نظرية الرواسب أوجد قيمة التكاملين:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + cos\theta}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cosx}{(x^2+1)^2} dx$$

انتهت الأسئلة

تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. أحمد علي عيسى

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تحليل عقدي 2	اسم الطالب:
كلية العلوم	سنة ثالثة رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2023-2024م	الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (50 درجة)

1) ليكن $f(z)$ تابع عقدي يملك قطب بسيط عند $z = z_0$، والمطلوب أثبت أنّ

$$Res[f(z), z_0] = lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$$

2) ليكن $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-2)^2}$ تابع عقدي و $z_0 = 2$ والمطلوب:

1. حدد القسم الرئيسي والقسم التحليلي في نشر لوران للتابع f في D حيث $D = \{z : 0 < |z - z_0| < \infty\}$
2. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$ حيث C دائره مركزها z_0 ونصف قطرها $r = 1$.

3) ليكن $h(z) = 1 - \pi i + z + e^z$ تابع عقدي معرّف في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. أوجد $\int_C h(z)dz$ حيث C دائرة الوحدة.
2. حدد مرتبة الصفر (الجذر) للتابع $h(z)$ عند $z_0 = \pi i$.
3. حدد مرتبة القطب $z_0 = \pi i$ للتابع $f(z) = \frac{z}{h(z)}$.

4) بيّن نوع النقطة الشاذة $z = 0$ للتابع العقدي $f(z) = \frac{-4z+sin4z}{z^2}$ ثم أوجد $Res[f(z), 0]$.

السؤال الثاني: (40 درجة)

1) ليكن $f(z) = \frac{(z-2i)(z+2)^2}{z^2\left(z+\frac{1}{2}i\right)^3}$ تابع عقدي والمطلوب أوجد قيمة التكامل

$$\int_C \frac{\acute{f}(z)}{f(z)} dz$$

حيث C محيط المستطيل الذي رؤوسه الأعداد العقدية

$$z_0 = 10 + i, \quad z_1 = -4 + i, \quad z_2 = -4 - i, \quad z_3 = 10 - i$$

2) باستخدام نظرية الرواسب أوجد قيمة التكاملين:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - cos\theta}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos3x}{(x^2+1)^2} dx$$

انتهت الأسئلة

تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل عقدي 2 لطلاب السنة الثالثة رياضيات

الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2023–2024م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (50 درجة)

1) (7 درجات). ليكن $f(z)$ تابع عقدي يملك قطب بسيط عند $z = z_0$، والمطلوب أثبت أنّ

$$Res[f(z), z_0] = lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$$

الحلّ: طريقه أولى: بما أنّ التابع $f(z)$ يملك قطب بسيط عند $z = z_0$، عندئذ ينشر بمتسلسلة لوران ضمن

$$0 < |z - z_0| < R$$

بالشكل التالي

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots\ldots$$

حيث $\boldsymbol{a_{-1} \neq 0}$

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \ldots\ldots$$

$$lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = a_{-1} = Res[f(z), z_0]$$

طريقه ثانية: نعوض $n = 1$ في القانون

$$Res[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} lim_{z \to i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z)$$

واستنتج $Res[f(z), z_0] = lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$

2) (16 درجة). (8 درجات لكل مطلوب) ليكن $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-2)^2}$ تابع عقدي و $z_0 = 2$ والمطلوب:

1. حدد القسم الرئيسي والقسم التحليلي في نشر لوران للتابع f في D حيث $D = \{z :\ 0 < |z - z_0| < \infty\}$
2. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ حيث C دائره مركزها z_0 ونصف قطرها $r = 1$.

الحلّ:

.1

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-2)^2} = \frac{e^{2(z-2+2)}}{(z-2)^2} = \frac{e^4}{(z-2)^2} e^{2(z-2)} = \frac{e^4}{(z-2)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(2(z-2)\big)^n}{n!}$$

$$= \frac{e^4}{(z-2)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(z-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^4 2^n(z-2)^{n-2}}{n!}$$

القسم التحليلي هو:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^4 2^n(z-2)^{n-2}}{n!}$$

القسم الرئيسي هو:

$$\sum_{n=0}^{1}\frac{e^4 2^n(z-2)^{n-2}}{n!} = \frac{e^4}{(z-2)^2} + \frac{2e^4}{z-2}$$

.2

طريقه أولى: (لدينا $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}}dz$ أمثال متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في D حيث C منحني بسيط مغلق تقع $z_0 = 2$ داخله)

بأخذ C الدائره التي مركزها $z_0 = 2$ ونصف قطرها $r = 1$ عندئذ

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-2}dz \Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z-2}dz = 2\pi i \times a_0 = 2\pi i \times \frac{2^2 e^4}{2!} = 4\pi i e^4$$

طريقه ثانية:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-2}dz = \int_C \frac{e^{2z}}{(z-2)^3}dz$$

نطبق صيغة كوشي الثانية نجد

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z-2)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!} \times g^{(2)}(2)$$

حيث $g(z) = e^{2z}$ و $g^{(2)}(z) = 2^2 e^{2z}$

بالتالي

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z-2)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!} \times 2^2 \times e^4 = 4\pi i e^4$$

طريقه ثالثة: التكامل $\int_C \frac{e^{2z}}{(z-2)^3}dz$ يمكن إيجاد قيمته باستخدام نظرية الرواسب علما أن

$z = 2$ قطب للتابع $h(z) = \frac{e^{2z}}{(z-2)^3}$ من المرتبه الثالثة. $\int_C \frac{e^{2z}}{(z-2)^3}dz = 2\pi i \times Res[h(z), 2]$

3) (19 درجة). ليكن $h(z) = 1 - \pi i + z + e^z$ تابع عقدي معرَف في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. أوجد $\int_C h(z)dz$ حيث C دائرة الوحدة. **(5 درجات)**.
2. حدد مرتبة الصفر (الجذر) للتابع $h(z)$ عند $z_0 = \pi i$. **(7 درجات)**.
3. حدد مرتبة القطب $z_0 = \pi i$ للتابع $f(z) = \frac{z}{h(z)}$. **(7 درجات)**.

الحل:

1. C منحني بسيط مغلق

$h(z)$ دالة تحليلية في جميع نقاط المستوي العقدي بالتالي $h(z)$ تحليلية داخل دائرة الوحدة وعلى محيطها فحسب نظرية كوشي نجد:

$$\int_C h(z)dz = 0$$

2. $h(\pi i) = 0$

$$h^{(1)}(z) = 1 + e^z \Longrightarrow h^{(1)}(\pi i) = 0$$
$$h^{(2)}(z) = e^z \Longrightarrow h^{(2)}(\pi i) = -1 \neq 0$$

بالتالي

$z = \pi i$ جذر (صفر) للتابع $h(z)$ من المرتبه الثانيه

3. **طريقه أولى:**

$$f(z) = \frac{z}{h(z)} = \frac{g(z)}{h(z)}$$

حيث $g(z) = z$

نلاحظ بأنّ $g(z)$ و $h(z)$ تحليليتان عند $z_0 = \pi i$ و $g(\pi i) = \pi i \neq 0$ و $z_0 = \pi i$ صفر من المرتبه 2 للتابع $h(z)$

بالتالي $z_0 = \pi i$ قطب للتابع $f(z)$ من المرتبه الثانية.

طريقه ثانية: نوجد النهاية التالية بتطبيق أوبيتال مرتين

$$lim_{z\to\pi i}(z-\pi i)^2 f(z) = lim_{z\to\pi i}\frac{z(z-\pi i)^2}{1-\pi i+z+e^z} = -2\pi i \neq 0, \infty$$

بالتالي $z_0 = \pi i$ قطب للتابع $f(z)$ من المرتبه الثانية.

4) (8 درجات). ما نوع النقطة الشاذة $z = 0$ للتابع العقدي $f(z) = \frac{-4z+sin4z}{z^2}$ ثم أوجد $Res[f(z),0]$.

الحلّ: طريقه أولى:

$lim_{z\to 0} f(z) = \frac{0}{0}$ نطبق أوبيتال مرتين

$$lim_{z\to 0} f(z) = lim_{z\to 0}\frac{-4+4cos4z}{2z} = lim_{z\to 0}\frac{-16sin4z}{2} = 0$$

بما أن $lim_{z\to 0} f(z) = 0$ عندئذ $z = 0$ نقطه شاذه قابله للحذف.

بما أنّ $z = 0$ نقطه شاذه قابله للحذف عندئذ $Res[f(z),0] = 0$.

طريقه ثانيه:

ننشر التابع $f(z)$ في المنطقه $0 < |z - z_0| < R$ وفق لوران

$$f(z) = -\frac{4}{z} + \frac{1}{z^2}sin4z = -\frac{4}{z} + \frac{1}{z^2}\left(4z - \frac{(4z)^3}{3!} + \frac{(4z)^5}{5!} - \cdots\right) = -\frac{4}{z} + \frac{4}{z} - \frac{4^3 z}{3!} + \frac{4^5 z^3}{5!} - \cdots$$
$$= -\frac{4^3 z}{3!} + \frac{4^5 z^3}{5!} - \cdots$$

القسم الرئيسي غير موجود بالتالي$0 = z$ نقطه شاذه قابله للحذف عندئذ $Res[f(z),0] = 0$.

<u>السؤال الثاني: (40 درجة)</u>

1) (12 درجة). $f(z) = \frac{(z-2i)(z+2)^2}{z^2\left(z+\frac{1}{2}i\right)^3}$ تابع عقدي والمطلوب أوجد قيمة التكامل

$$\int_C \frac{\acute{f}(z)}{f(z)}dz$$

حيث C محيط المستطيل الذي رؤوسه الأعداد العقدية

$$z_0 = 10+i, \qquad z_1 = -4+i, \qquad z_2 = -4-i, \qquad z_3 = 10-i$$

الحل:

$f(z)$ يملك صفرين:

- $z=-2$ صفر من المرتبه الثانية للتابع $f(z)$ يقع داخل C.
- $z=2i$ صفر بسيط للتابع $f(z)$ يقع خارج C.

$f(z)$ يملك قطبين هما:

- $z=0$ قطب من المرتبه الثانيه للتابع $f(z)$ وهو يقع داخل C
- $z=-\frac{1}{2}i$ قطب من المرتبه الثالثة للتابع $f(z)$ وهي يقع داخل C

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(N-P)$$

حيث N عدد أصفار التابع $f(z)$ والواقعه داخل C. نلاحظ $N=2$

حيث P عدد أقطاب التابع $f(z)$ والواقعه داخل C. نلاحظ $P=5$

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -6\pi i$$

2) **(28 درجة). 14 درجه لكل تكامل.** باستخدام نظرية الرواسب أوجد قيمة التكاملين:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-cos\theta}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos3x}{(x^2+1)^2}dx$$

الحل:

✓ **التكامل الأول:**

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-cos\theta}$$

الحل: نفرض $z=e^{i\theta}$ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$

$$cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-cos\theta} = \int_{C:|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2-\frac{z+z^{-1}}{2}} = 2i \times \int_{C:|z|=1} \frac{dz}{z^2-4z+1}$$

$z_1 = 2+\sqrt{3}$ قطب بسيط للتابع $f(z) = \frac{1}{z^2-4z+1}$ يقع خارج دائرة الوحدة.

$z_2 = 2-\sqrt{3}$ قطب بسيط للتابع $f(z) = \frac{1}{z^2-4z+1}$ يقع داخل دائرة الوحدة.

نطبق نظرية الرواسب

$$I_1 = 2i \times 2\pi i \times Res[f(z), z_2]$$

$$Res[f(z), z_2] = lim_{z \to z_2}(z - z_2)f(z) = lim_{z \to z_2} \frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{z_2 - z_1} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

بالتالي:

$$I_1 = 2i \times 2\pi i \times \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

✓ **التكامل الثاني:**

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos3x}{(x^2+1)^2} dx$$

الحل:

$$m = 3 > 0$$

لنأخذ $R(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ لايملك نقاط شاذه على المحور الحقيقي Ox.

❖ من أجل انجاز هذا التكامل نأخذ التابع العقدي $f(z) = R(z)e^{i3z} = \frac{e^{i3z}}{(z^2+1)^2}$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos3x}{(x^2+1)^2} dx = Re\left(2\pi i \times \sum_{Imz_k > 0} Res[f(z), z_k]\right)$$

المجموع مأخوذ من أجل جميع النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ والواقعه فوق المحور Ox.

$z_0 = -i$ قطب من المرتبه 2 لـ $f(z)$ وهي تقع تحت المحور الحقيقي Ox.

$z_1 = i$ قطب من المرتبه 2 لـ $f(z)$ وهي تقع فوق المحور الحقيقي Ox.

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos3x}{(x^2+1)^2} dx = Re(2\pi i \times Res[f(z), i])$$

$$Res[f(z), i] = \frac{1}{(2-1)!} lim_{z \to i} \frac{d}{dz}(z - i)^2 f(z) = lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{i3z}}{(z+i)^2}\right)$$

$$= lim_{z \to i} \frac{3ie^{i3z}(z+i) - 2e^{i3z}}{(z+i)^3} = \frac{e^{-3}}{i}$$

عندئذ:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos3x}{(x^2+1)^2} dx = Re\left(2\pi i \times \frac{e^{-3}}{i}\right) = \frac{2\pi}{e^3}$$

✓ **بعض التمارين تحلّ بأكثر من طريقة، فأي طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.**

مدرس المقرر : د. أحمد عيسى