

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثانية

اسئلة و اجابات محلولة

خليل عقدي ١

A 2 Z LIBRARY

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ، علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم 0931497960 TEL:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

ملو ١٥

الاسم:
الدرجة: 90
المدة:

امتحان مقرر التحليل العقدي_1
لطلاب السنة الثالثة رياضيات
الدورة الفصلية الاولى: 2024-
2025

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الاول: (40 د) ليكن لدينا الدالة العقدية التالية:

$$f(z) = \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i}$$

(15) a. أثبت باستخدام شرطي كوشي-ريمان ان الدالة السابقة تحليلية

(12) b. احسب التكاملات التالي

$$\int_C f(z) dz ; C := \{z \in \mathbb{C}, |z| \in (1, \frac{3}{2}), \arg(z) \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

$$\int_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{-iz + z^2} dz$$

(13) c. هل الدالة التالية توافقية

$$v(x, y) = e^{xy} \ln(x^2 + y^2)$$

السؤال الثاني: (50 د)

(15) أولاً: أوجد اصفار الدالة التالية وحدد مرتبة كل منها

$$f(z) = (z^2 + 1)^3 \operatorname{sh} z$$

(20) ثانياً: أوجد منطقة تقارب السلسلة

$$I := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + 4i)^n}{(z + 2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 2i)^n}{6}$$

(15) ثالثاً: أوجد سلسلة لوران في جوار الصفر لدالة

$$g(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2z - 3}$$

مدرسة المقرر: د. حنان علي

أسف

اسمك تصحيح امتحان قسم التحليل العقدي 1 / الطلاب السنة

الثالثة رياضيات / الدورة الفصلية الأولى : 2024 - 2025

السؤال الأول 40 د : ليكن لدينا الدالة العقدية التالية
 $f(z) = \frac{z^2}{e^z + i}$

15 a. أثبت باستخدام شروط كوشي - ريمان ان الدالة السابقة تحليلية :
 شروط كوشي ريمان

$$\text{حيث } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} , \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{حيث } f(z) = u + iv ; z = x + iy$$

$$f(z) = \frac{z^2}{e^z + i} = \frac{(e^z)^2 - (i)^2}{e^z + i} = \frac{(e^z + i)(e^z - i)}{(e^z + i)}$$

$$f(z) = e^z - i = e^x \cos y + i(e^x \sin y - 1) ; z = x + iy$$

$$u = e^x \cos y , v = e^x \sin y - 1 \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y ; \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y , \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

الشروط محققة والدالة تحليلية حيث المقادير الجزئية موجودة و مستمرة

$$\int_C (e^z - i) dz = 0 \quad (5)$$

13 b

لأن الدالة $f(z)$ تحليلية في المنطقة C المقطوعة بالتيه التي هي منطقة مفتوحة
 و كوشي حيث C صغرى مغلقة



$$* \int_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{-iz+z^2} dz = \int_{|z-i|=1} \frac{e^z - i}{-iz+z^2} dz = \int_{|z-i|=1} \frac{e^z - i}{z(z-i)} dz$$

المنطق السليم: $z=0$ و $z=i$ داخل دائرة $|z-i|=1$ لذلك

$$\frac{e^z - i}{z(z-i)} = \frac{ie^z + 1}{z} - \frac{(1+ie^z)}{z-i} \quad \text{مفكك الكسور}$$

$$\Rightarrow \int_{|z-i|=1} \frac{ie^z + 1}{z} dz - \int_{|z-i|=1} \frac{ie^z + 1}{z-i} dz = 2\pi i(i+1) - 2\pi i(ie^i + 1)$$

وذلك حسب علاقة كوشي انكسارية

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = f(z_0) ; z_0 \in D$$

والدالة $f(z)$ تحليلية داخل وعلى C .

$$C. \text{ حدد الدالة التالية توافقية } u(x, y) = e^{xy} \ln(x^2 + y^2)$$

حتى تكون الدالة توافقية يجب أن يتحقق شرطان هارمونيكيين

$$\text{المدرجة الثانية، تحقق الشرط} \quad (5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y e^{xy} \ln(x^2 + y^2) + e^{xy} \frac{2x}{x^2 + y^2} ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x e^{xy} \ln(x^2 + y^2) + e^{xy} \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} \ln(x^2 + y^2) + y e^{xy} \frac{2x}{x^2 + y^2} + y e^{xy} \frac{2x}{x^2 + y^2} + e^{xy} \frac{2(x^2 + y^2) - 4x^2}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} \ln(x^2 + y^2) + \frac{4xy e^{xy}}{x^2 + y^2} + \frac{2e^{xy}(y^2 - x^2)}{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 e^{xy} \ln(x^2+y^2) + \frac{4xy e^{xy}}{x^2+y^2} + \frac{2e^{xy}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \quad (3)$$

والدالة ليست توافقية، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \neq 0$ (2)

السؤال الثاني (50 >): أولاً، اوجد اصفاء الدالة التالية وحدد مرتبة كل صفا

$$f(z) = (z^2+1)^3 \operatorname{sh} z = (z+i)^3 (z-i)^3 \operatorname{sh} z = 0$$

الصفاء: $z = \bar{x}i$, $\operatorname{sh} z = 0 \Rightarrow z = k\pi i$; $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

عند $z = -i$ بالمثل $f(z)$ يمكن كتابته

$$f(z) = (z+i)^3 u(z), \quad u(z) = (z-i)^3 \operatorname{sh} z \quad (3)$$

$u(z)$ دالة تحليلية في النقطة $z = -i$

$$u(-i) = 8i \operatorname{sh} i = -8 \operatorname{sh} 1 \neq 0 \quad (2)$$

وهذا يعني أن $z = -i$ صفر من المرتبة الثالثة بالمثل ثبت أن $z = -i$ صفر من المرتبة الثالثة. ولنبحث عن مرتبة $z = k\pi i$ ($k=0, \pm 1, \dots$) بالاستقانة

$$f'(z) = 6z(z^2+1)^2 \operatorname{sh} z + (z^2+1)^3 \operatorname{ch} z \quad (2)$$

في النقطة $z = k\pi i$ الدالة $f(z)$ مختلفة عند الصفر

صفر من المرتبة الأولى. $z = k\pi i$ (2)

ثانياً، اوجد منطقة تقارب السلسلة:

$$I := \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{6}$$

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}$ لدينا $C_{-n-1} = (3+4i)^{n+1}$

$$C_{-n} = (3+4i)^n$$

$$\Rightarrow r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(3+4i)^{n+1}|}{|(3+4i)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |3+4i| = 5 \quad (5)$$

السلسلة التقارب في المنطقة $|z+2i| > 5$ (2)

السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{6}$ لدينا $C_n = 6^{-1}$, $C_{n+1} = 6^{-1}$

$$\Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} = 1 \quad (5)$$

السلسلة تقارب في المنطقة $|z+2i| < 1$ (2)

(6) $r = 5 > R = 1$ ، تقارب في كل مكان

15 المسألة اوجد سلسلة لوران في $z=1$ ، الدالة

$$g(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2z - 3} = 1 + \frac{2z+3}{z^2 - 2z - 3}$$

$$\frac{2z+3}{z^2 - 2z - 3} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-3} \Rightarrow A = -\frac{1}{4}, B = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{z^2}{z^2 - 2z - 3} = 1 + \frac{9}{4} \frac{1}{z-3} - \frac{1}{4} \frac{1}{z+1} \quad (5)$$

$$= 1 + \frac{9}{4} \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \dots \right) - \frac{1}{4} \left(1 - z + z^2 - z^3 + \dots \right)$$

(5)

(5)

السؤال الأول: (54 درجة)

- (1) بين أن التابع $u = u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ متوافقي في المستوى العقدي وأوجد مرافقا متوافقيا له v بحيث يكون التابع $f = u + iv$ تحليلي في المستوى العقدي.
- (2) ليكن لدينا التابع $f(z) = e^{-x} \cos y - ie^{-x} \sin y$ المعرف في جميع نقاط المستوى العقدي.
 1. أثبت أن التابع f يحقق معادلتى كوشي-ريمان في جميع نقاط المستوى العقدي، وماذا تستنتج؟
 2. أوجد $\bar{f}(z)$.
- (3) ادرس تقارب المتتالية العقدية $(z_n)_{n \geq 0}$ حيث $z_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)^n$.
- (4) ليكن $f(z) = \bar{z}$ تابع معرف في جميع نقاط المستوى العقدي والمطلوب:
 1. أثبت بأن التابع $h(z) = \frac{z}{f(z)}$ ليس له نهاية عند الصفر.
 2. أوجد معادلة القطعة المستقيمة C الواصلة بين العددين العقديين $z_1 = 1 + 2i$, $z_0 = 0$ ثم أوجد

$$\int_C f(z) dz$$

3. استخدم مبرهنة غرين في إيجاد التكامل $\int_C f(z) dz$ حيث C هو محيط المثلث الذي رؤوسه الأعداد العقدية $z_2 = -1 + i$, $z_1 = 0$, $z_0 = -1$

السؤال الثاني: (36 درجة)

- (1) أوجد ناتج ما يلي بأبسط شكل ممكن:
- $$A = ch\left(\frac{9\pi}{4}i\right), \quad B = \text{Log}(ei)$$
- (2) ليكن $w = f(z) = \frac{z+1}{2z-1}$ تابع عقدي معرف في جميع نقاط المستوى العقدي والمطلوب:
 1. أوجد صورة دائرة الوحدة $C: |z| = 1$ وفق $w = f(z)$.
 2. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z) dz$ حيث C الدائرة التي مركزها العدد $z_0 = -1$ ونصف قطرها 1.
 3. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{z^2} dz$ حيث C الدائرة التي مركزها $z_0 = \frac{1}{2}$ ونصف قطرها $\frac{1}{4}$.

انتهت الأسئلة

تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى





قسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة طرابلس

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل عقدي 1 لطلاب السنة الثالثة رياضيات

الدورة الفصلية الثانية - العام الدراسي 2023-2024م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (54 درجة)

1) (12 درجة). بين أن التابع $u = u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ توافقي في المستوى العقدي وأوجد مرافقا توافقيا له v بحيث يكون التابع $f = u + iv$ تحليلي في المستوى العقدي.
الحل:

• (6 درجات)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 5, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$
$$(معادلة لابلاس محققة) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

المشتقات الجزئية مستمرة في جميع نقاط المستوى العقدي وتتحقق معادلة لابلاس بالتالي الدالة u توافقية في المستوى العقدي.

• (6 درجات)

إيجاد المرافق التوافقي v

بما أن التابع $f = u + iv$ تحليلي في $\mathbb{C}$ عندئذ تتحقق معادلتا كوشي-ريمان أي

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \dots (2)$$

من (1) نجد:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

$$v = \int (3x^2 - 3y^2) dy \text{ بالتالي}$$

9/1

عندئذ

$$v = 3x^2y - y^3 + \phi(x)$$

من (2) نجد:

$$-6xy - 5 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$-6xy - 5 = -6xy - \phi'(x)$$

بالتالي

عندئذ

$$\phi'(x) = 5$$

بالتالي

$$\phi(x) = 5x + c; c \in \mathbb{C}$$

$$v = 3x^2y - y^3 + 5x + c; c \in \mathbb{C}$$

(2) (12 درجة). ليكن لدينا التابع $f(z) = e^{-x} \cos y - ie^{-x} \sin y$ المعرفة في جميع نقاط المستوى العقدي.

1. أثبت أن التابع $f(z)$ يحقق معادلتَي كوشي-ريمان في جميع نقاط المستوى العقدي، وماذا تستنتج؟

2. أوجد $\bar{f}(z)$.

الحل:

1. (6 درجات).

$$u = \operatorname{Re} f(z) = e^{-x} \cos y, \quad v = \operatorname{Im} f(z) = -e^{-x} \sin y$$

نلاحظ بأن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x} \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x} \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x} \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-x} \cos y$$

نلاحظ بأن $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ بالتالي معادلتَي كوشي-ريمان محققة.

• (3 درجات) المشتقات الجزئية مستمرة وتتحقق معادلتَي كوشي-ريمان في جميع نقاط المستوى العقدي بالتالي التابع f

اشتقاقي في جميع نقاط المستوى العقدي بالتالي f تابع تحليلي في جميع نقاط المستوى العقدي.

• (3 درجات)

$$\bar{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = (-e^{-x} \cos y) + i(e^{-x} \sin y) = -e^{-z} = -f(z)$$

(3) (6 درجات)

ادرس تقارب المتتالية العقدية $(z_n)_{n \geq 0}$ حيث $z_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)^n$.

الحل: المتتالية الهندسية $\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)^n$ متقاربة من الصفر لأن $\left|\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

بالتالي $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

فالممتالية $(z_n)_{n \geq 0}$ متقاربة من 0.

(4) (24 درجة). ليكن $f(z) = \bar{z}$ تابع معرف في جميع نقاط المستوى العقدي والمطلوب:

1. أثبت بأن التابع $h(z) = \frac{z}{f(z)}$ ليس له نهاية عند الصفر.

2. أوجد معادلة القطعة المستقيمة C الواصلة بين العددين العقديين $z_1 = 1 + 2i$, $z_0 = 0$ ثم أوجد

$$\int_C f(z) dz$$

3. استخدم مبرهنة غرين في إيجاد التكامل $\int_C f(z) dz$ حيث C هو محيط المثلث الذي رؤوسه الأعداد العقدية

$$z_0 = -1, z_1 = 0, z_2 = -1 + i$$

الحل:

1. (8 درجات)

ليكن $h(z) = \frac{z}{f(z)}$ ، لنأخذ الممتاليتين $(z_n)_{n \geq 1}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$ حيث $z_n = \frac{1}{n}$ و $w_n = \frac{i}{n}$

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow h(z_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow h(w_n) = \frac{\frac{i}{n}}{-\frac{i}{n}} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$$

نلاحظ بأن $1 \neq -1$ بالتالي التابع $h(z) = \frac{z}{f(z)}$ ليس له نهاية عند الصفر.

ملاحظة : يمكن اثبات بأن $h(z)$ ليس له نهاية عند الصفر باستخدام طريقة المسارات.

مثلاً : المسار الأول: $y = 0; x \rightarrow 0$

المسار الثاني: $y = x; x \rightarrow 0$

2. (8 درجات)

$$C: z = z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t; 0 \leq t \leq 1$$

$$z = z(t) = 0 + (1 + 2i - 0)t = (1 + 2i)t; 0 \leq t \leq 1$$

$$\dot{z}(t) = 1 + 2i$$

$$\int_C f(z) dz = \int_0^1 f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_0^1 (1 - 2i)(1 + 2i)t dt = \int_0^1 5t dt = \frac{5}{2}$$

3. (8 درجات)

$$\int_C f(z) dz = \int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_C x dx + y dy + i \int_C -y dx + x dy$$

$$= \iint_D 0 dx dy + i \iint_D 2 dx dy = i \int_{-1}^0 \int_0^{-x} 2 dy dx = i \int_{-1}^0 -2x dx = i$$

السؤال الثاني: (36 درجة)

(1) (12 درجة) (6 درجات لكل تمرين) أوجد ناتج ما يلي بأبسط شكل ممكن:

$$A = ch\left(\frac{9\pi}{4}i\right), \quad B = \text{Log}(ei)$$

الحل:

$$A = ch\left(\frac{9\pi}{4}i\right) \checkmark$$

$$A = ch\left(\frac{9\pi}{4}i\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = \text{Log}(ei) \checkmark$$

$$B = \text{Log}(ei) = \ln(|ei|) + i(\text{Arg}(ei)) = \ln(e) + i\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi}{2}i$$

(2) (24 درجة). ليكن $w = f(z) = \frac{z+1}{2z-1}$ تابع عقدي معرف في جميع نقاط المستوى العقدي المطلوب:

1. أوجد صورة دائرة الوحدة $C: |z| = 1$ وفق $w = f(z)$.

2. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z) dz$ حيث C الدائرة التي مركزها العدد $z_0 = -1$ ونصف قطرها 1.

3. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{z^2} dz$ حيث C الدائرة التي مركزها $z_0 = \frac{1}{2}$ ونصف قطرها $\frac{1}{4}$.

الحل:

1. (9 درجات).

$$w = f(z) = \frac{z+1}{2z-1}$$

بالتالي:

$$z = \frac{w+1}{2w-1}$$

$$\left| \frac{w+1}{2w-1} \right| = |z| = 1$$

بالتالي

$$|w+1| = |2w-1|$$

نضع $w = u + iv$ نجد:

$$|u+1+iv| = |2u-1+i2v|$$

بالتالي:

$$(u+1)^2 + (v)^2 = (2u-1)^2 + (2v)^2$$

$$(u-1)^2 + v^2 = 1 \text{ بالتالي}$$

صورة دائرة الوحدة وفق $w = f(z)$ هي دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها 1.

2. (6 درجات).

C منحنى بسيط مغلق موجه بالاتجاه الموجب، والدالة f تحليلية في $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ فهي تحليلية داخل المنحنى C

(منطقة بسيطة الترابط) وعلى محيطه بالتالي حسب مبرهنة كوشي نجد $\int_C f(z)dz = 0$

3. (9 درجات).

التابع المكامل هو $\frac{f(z)}{z^2} = \frac{z+1}{2z^3-z^2} = \frac{\frac{z+1}{2z^2}}{z-\frac{1}{2}}$ تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$.

$$h(z) = \frac{z+1}{2z^2}$$

h تابع تحليلي في المنطقة الداخلية للمنحنى C البسيطة الترابط وعلى المنحنى C البسيط المغلق الموجه بالاتجاه الموجب.

$z = \frac{1}{2}$ يقع داخل المنحنى C

نستخدم صيغة كوشي التكاملية الأولى:

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2} dz = \int_C \frac{h(z)}{z - \frac{1}{2}} dz = 2\pi i \times h\left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi i \times \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = 6\pi i$$

✓ بعض التمارين تحلّ بأكثر من طريقة، فأى طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة
ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى



اسم الطالب:

المدة: ساعتان

الدرجة: تسعون

امتحان مقرر تحليل عقدي 1

سنة ثالثة رياضيات

الدورة الفصلية الأولى - العام الدراسي 2023-2024م

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السؤال الأول: (60 درجة)

- (1) بين أن التابع $u = u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ توافقي في المستوى العقدي وأوجد مرافقا توافقياً له v بحيث يكون التابع $f = u + iv$ تحليلي في المستوى العقدي.
- (2) ليكن $f(z) = e^{3x} \cos 3y + ie^{3x} \sin 3y$ تابع معرف في جميع نقاط المستوى العقدي والمطلوب:
1. أثبت أن f يحقق معادلتى كوشي-ريمان في جميع نقاط المستوى العقدي، وماذا تستنتج؟
 2. أوجد $\bar{f}(z)$.
 - (3) ليكن $f(z) = \bar{z}$ تابع معرف في جميع نقاط المستوى العقدي والمطلوب:
1. أثبت بأن التابع $g(z) = \left(\frac{z}{f(z)}\right)^2$ ليس له نهاية عند الصفر.
 2. أوجد معادلة القطعة المستقيمة C الواصلة بين العددين العقديين $z_0 = 1$ و $z_1 = 1 + i$ ثم أوجد $\int_C f(z) dz$.
 3. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z) dz$ حيث C المنحني المعرف بالشكل $C: y = x + 1; 0 \leq x \leq 2$.
 4. استخدم مبرهنة غرين في إيجاد التكامل $\int_C f(z) dz$ حيث C هو محيط المثلث الذي رؤوسه الأعداد العقدية $z_2 = 1 + 2i, z_1 = 1 + i, z_0 = i$.
- (4) ادرس تقارب المتتالية العقدية $(z_n)_{n \geq 1}$ حيث $z_n = \frac{3+ni}{n+2ni}$.

السؤال الثاني: (30 درجة)

- (1) أوجد ناتج اثنين فقط مما يلي:
- $$A = sh\left(\frac{5\pi}{3}i\right), \quad B = \lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i}, \quad C = sh^{-1}(i)$$
- (2) ليكن $w = f(z) = \frac{z+1}{z+2i}$ والمطلوب:
1. أوجد صورة $C: |z| = 1$ وفق $w = f(z)$.
 2. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z) dz$ حيث C الدائرة التي مركزها i ونصف قطرها 1.
 3. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{z+1}{z^3+2iz^2} dz$ حيث C دائرة الوحدة.

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

تمنياتي بالتوفيق والنجاح

طرطوس: الثلاثاء 2024/2/13م



قسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة طرطوس

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل عقدي 1 لطلاب السنة الثالثة رياضيات

الدورة الفصلية الأولى - العام الدراسي 2023-2024م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (60 درجة)

(1) (12 درجة). بين أن التابع $u = u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ توافقي في المستوى العقدي وأوجد مرافقا توافقياً له v بحيث يكون التابع $f = u + iv$ تحليلي في المستوى العقدي.
الحل:

• (6 درجات)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$
$$(معادلة لابلاس محققة) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

المشتقات الجزئية مستمرة في جميع نقاط المستوى العقدي وتحقق معادلة لابلاس بالتالي الدالة u توافقية في المستوى العقدي.

• (6 درجات)

إيجاد المرافق التوافقي v

بما أن التابع $f = u + iv$ تحليلي في $\mathbb{C}$ عندئذ تحقق معادلتَي كوشي-ريمان أي

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots (2)$$

من (1) نجد:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

$$v = \int (3x^2 - 3y^2) dy \quad \text{بالتالي}$$

عندئذ

$$v = 3x^2y - y^3 + \varphi(x)$$

من (2) نجد:

$$-6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$-6xy = -6xy - \phi(x)$$

بالتالي

$$\phi(x) = 0$$

بالتالي

$$\phi(x) = c; c \in \mathbb{C}$$

$$v = 3x^2y - y^3 + c; c \in \mathbb{C}$$

(2) (12 درجة). ليكن $f(z) = e^{3x} \cos 3y + ie^{3x} \sin 3y$ تابع معرف في جميع نقاط المستوى العقدي والمطلوب:

1. أثبت أن f يحقق معادلتى كوشي-ريمان في جميع نقاط المستوى العقدي، وماذا تستنتج؟

2. أوجد $\bar{f}(z)$.

الحل:

1. (6 درجات).

$$u = \operatorname{Re} f(z) = e^{3x} \cos 3y, v = \operatorname{Im} f(z) = e^{3x} \sin 3y$$

نلاحظ بأن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3e^{3x} \cos 3y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -3e^{3x} \sin 3y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3e^{3x} \sin 3y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3e^{3x} \cos 3y$$

نلاحظ بأن $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ بالتالي معادلتى كوشي-ريمان محققة.

• (3 درجات) المشتقات الجزئية مستمرة وتتحقق معادلتى كوشي-ريمان في جميع نقاط المستوى العقدي بالتالي التابع f اشتقاقي في جميع نقاط المستوى العقدي بالتالي f تابع تحليلي في جميع نقاط المستوى العقدي.

$$\bar{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = (3e^{3x} \cos 3y) + i(3e^{3x} \sin 3y) = 3f(z) \quad (3 \text{ درجات})$$

(3) (29 درجة). ليكن $f(z) = \bar{z}$ تابع معرف في جميع نقاط المستوى العقدي والمطلوب:

1. أثبت بأن التابع $g(z) = \left(\frac{z}{f(z)}\right)^2$ ليس له نهاية عند الصفر.

2. أوجد معادلة القطعة المستقيمة C الواسلة بين العددين العقديين $z_0 = 1$ و $z_1 = 1 + i$ ، ثم أوجد

$$\int_C f(z) dz$$

3. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z) dz$ حيث C المنحني المعرف بالشكل $C: y = x + 1; 0 \leq x \leq 2$.

4. استخدم مبرهنة غرين في إيجاد التكامل $\int_C f(z) dz$ حيث C هو محيط المثلث الذي رؤوسه الأعداد العقدية

$$z_2 = 1 + 2i, z_1 = 1 + i, z_0 = i$$

الحل:

1. (7 درجات) ليكن $g(z) = \left(\frac{z}{f(z)}\right)^2$ ، لنأخذ المتتاليتين $(z_n)_{n \geq 1}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$ حيث $z_n = \frac{1}{n}$ و $w_n = \frac{1}{n} + \frac{i}{n}$

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow g(z_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow g(w_n) = \left(\frac{\frac{1}{n} + \frac{i}{n}}{\frac{1}{n} - \frac{i}{n}} \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2 = -1$$

نلاحظ بأن $1 \neq -1$ بالتالي التابع $g(z) = \left(\frac{z}{f(z)} \right)^2$ ليس له نهاية عند الصفر.

ملاحظة: يمكن اثبات بأن $g(z)$ ليس له نهاية عند الصفر باستخدام طريقة المسارات.

مثلاً: المسار الأول: $y = 0; x \rightarrow 0$

المسار الثاني: $y = x; x \rightarrow 0$

2. (8 درجات)

$$C: z = z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t; 0 \leq t \leq 1$$

$$z = z(t) = 1 + (1 + i - 1)t = 1 + it; 0 \leq t \leq 1$$

$$\dot{z}(t) = i$$

$$\int_C f(z) dz = \int_0^1 f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_0^1 (1 - it) i dt = \int_0^1 (i + t) dt = \int_0^1 t dt + i \int_0^1 dt = \frac{1}{2} + i$$

3. (7 درجات)

$$\int_C f(z) dz = \int_C (x - iy)(dx + idy) = (1 + i) \int_0^2 (x - i(x + 1)) dx = (1 + i) \left(\int_0^2 x dx - i \int_0^2 (x + 1) dx \right)$$

$$= (1 + i)(2 - 4i) = 6 - 2i$$

4. (7 درجات)

$$\int_C f(z) dz = \int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_C x dx + y dy + i \int_C -y dx + x dy$$

$$= \iint_D 0 dx dy + i \iint_D 2 dx dy = i \int_0^1 \int_0^{1+x} 2 dy dx = i \int_0^1 2x dx = i$$

(4) (7 درجات). ادرس تقارب المتتالية العقدية $(z_n)_{n \geq 1}$ حيث $z_n = \frac{3+ni}{n+2ni}$

$$z_n = \frac{3+ni}{n+2ni} = \left(\frac{2n^2+3n}{5n^2} \right) + i \left(\frac{n^2-6n}{5n^2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n}{5n^2} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-6n}{5n^2} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

فالممتتالية $(z_n)_{n \geq 1}$ متقاربة من $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$.

السؤال الثاني: (30 درجة)

(1) 10 درجات (5 درجات لكل تمرين). أوجد ناتج اثنين فقط مما يلي:

$$A = sh\left(\frac{5\pi}{3}i\right), \quad B = \lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i}, \quad C = sh^{-1}(i)$$

الحل:

(1)

$$A = sh\left(\frac{5\pi}{3}i\right) \checkmark$$

$$A = sh\left(\frac{5\pi}{3}i\right) = i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = i \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$B = \lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i} \checkmark$$

$$B = \lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i} = \frac{0}{0} \text{ (عدم تعيين)}$$

نطبق أوبيتال

$$B = \lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i} = \lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{2z - 4}{3z^2 - 1} = \lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{2i}{8 + 12i} = \frac{i}{4 + 6i} = \frac{3 + 2i}{26} = \frac{3}{26} + \frac{i}{13}$$

$$C = sh^{-1}(i) \checkmark$$

$$sh^{-1}(z) = \log(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

$$C = sh^{-1}(i) = \log(i + \sqrt{i^2 + 1}) = \log(i) = \ln(|i|) + i(Arg(i) + 2\pi k)$$

$$= \ln(1) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right); k \in \mathbb{Z}$$

(2) (20 درجة). ليكن $w = f(z) = \frac{z+1}{z+2i}$ المطلوب:

1. أوجد صورة $|z| = 1$ وفق $w = f(z)$.

2. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z) dz$ حيث C الدائرة التي مركزها i ونصف قطرها 1.

3. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{z+1}{z^3+2iz^2} dz$ حيث C دائرة الوحدة.

(3) الحل:

1. (8 درجات).

$$w = f(z) = \frac{z+1}{z+2i}$$

بالتالي:

$$z = \frac{2iw - 1}{1 - w}$$

$$\left| \frac{2iw - 1}{1 - w} \right| = 1$$

بالتالي

$$|2iw - 1| = |1 - w|$$

نضع $w = u + iv$ نجد:

$$|2i(u + iv) - 1| = |1 - (u + iv)|$$

$$|-1 - 2v + 2ui| = |1 - u - iv|$$

بالتالي:

$$(-1 - 2v)^2 + (2u)^2 = (1 - u)^2 + (-v)^2$$

$$\left(u + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(v + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \text{ بالتالي}$$

صورة دائرة الوحدة وفق $w = f(z)$ هي دائرة مركزها $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

2. (4 درجات). C منحنى بسيط مغلق موجه بالاتجاه الموجب، والدالة f تحليلية في $\mathbb{C} \setminus \{-2i\}$ فهي تحليلية داخل المنحنى C (منطقة

بسيطة الترابط) وعلى محيطه بالتالي حسب ميرهنه كوشي نجد $\int_C f(z)dz = 0$

3. (8 درجات). التابع المكامل هو $\frac{z+1}{z^3+2iz^2} = \frac{f(z)}{z^2}$ تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{0, -2i\}$.

$$f^{(1)}(z) = \frac{-1+2i}{(z+2i)^2}$$

f تابع تحليلي في المنطقة الداخلية للمنحنى C البسيطة الترابط وعلى المنحنى C البسيط المغلق الموجه بالاتجاه الموجب.

$z = 0$ يقع داخل المنحنى C

$$n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$$

نستخدم صيغة كوشي التكاملية الثانية:

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2} dz = \frac{2\pi i \times f^{(1)}(0)}{1!} = 2\pi i \times \frac{(-1+2i)}{-4} = \pi + \frac{\pi}{2}i$$

✓ بعض التمارين تحلّ بأكثر من طريقة، فأى طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى



2014
م. ص. ع. م.



السؤال الأول: (56 درجة)

(1) بين أن التابع $u = u(x, y) = x^2 - y^2 + 1$ توافقي في $\mathbb{C}$ وأوجد مرافقاً توافقياً له v بحيث يكون التابع $f = u + iv$ تحليلي في $\mathbb{C}$.

(2) ليكن $f(z) = (2e^x \cos y) + i(2e^x \sin y)$ تابع معرف في جميع نقاط المستوى العقدي والمطلوب:

1. أوجد $u = \text{Re} f(z)$ و $v = \text{Im} f(z)$ ، ثم أوجد صورة المستقيم $x = 0$ وفق f .

2. أثبت أن f يحقق معادلتى كوشي-ريمان في جميع نقاط المستوى العقدي، وماذا تستنتج؟

3. أوجد $\bar{f}(z)$.

(3) ليكن $f(z) = \bar{z}$ تابع معرف في جميع نقاط المستوى العقدي والمطلوب:

1. ماذا تمثل المجموعة $E = \{z; z \in \mathbb{C} \text{ و } |\text{Im}(f(z))| > 0\}$ في المستوى العقدي.

2. أثبت بأن التابع $g(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ ليس له نهاية عند الصفر.

3. أوجد المحل الهندسي للنقاط $M(z)$ الممثلة بالمعادلة $|z - i|^2 = \text{Re}(f(z))$.

4. أوجد معادلة القطعة المستقيمة C الواصلة بين العددين العقديين $z_0 = 1$ و $z_1 = 1 + i$ ثم أوجد $\int_C f(z) dz$.

(4) ادرس تقارب المتتالية العقدية $(z_n)_{n \geq 1}$ حيث $z_n = \frac{(1+i)^n}{2^n}$.

السؤال الثاني: (34 درجة)

(1) أوجد ناتج ما يلي:

$$A = \text{Log}(1 + i), \quad B = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^8 - 1}{z^4 - 1}, \quad C = \text{sh}^{-1}(i)$$

(2) ليكن $f(z) = e^z + 1$ تابع تحليلي في جميع نقاط المستوى العقدي والمطلوب:

1. أوجد قيمة التكامل $\int_\gamma f(z) dz$ حيث γ دائرة الوحدة والموجه بالاتجاه الموجب.

2. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z) dz$ حيث C المنحني المعرف بالشكل $C: y = 2; 0 \leq x \leq 1$.

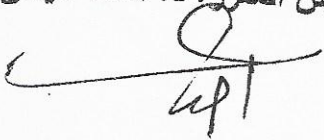
3. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{z} dz$ حيث C دائرة موجه بالاتجاه الموجب مركزها $z = 0$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$.

4. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{(z-i)^3} dz$ حيث C دائرة موجه بالاتجاه الموجب مركزها $z = 0$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$.

-----انتهت الأسئلة-----

تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى





قسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة طنطا

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل عقدي 1 لطلاب السنة الثالثة رياضيات

الدورة الفصلية الثانية- العام الدراسي 2022-2023م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (56 درجة)

(I) (12 درجة). بين أن التابع $u = u(x, y) = x^2 - y^2 + 1$ توافقي في C وأوجد مرافقاً توافقياً له v بحيث يكون التابع $f = u + iv$ تحليلي في C .

الحل:

• (6 درجات)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{معادلة لابلاس محققة})$$

المشتقات الجزئية مستمرة في جميع نقاط المستوى العقدي وتتحقق معادلة لابلاس بالتالي الدالة u توافقية في المستوى العقدي.

• (6 درجات)

إيجاد المرافق التوافقي v

بما أن التابع $f = u + iv$ تحليلي في C عندئذ تحقق معادلتا كوشي-ريمان أي

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots (2)$$

من (1) نجد:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

$$v = \int 2x dy$$

عندئذ

$$v = 2xy + \varphi(x)$$

من (2) نجد:

$$-2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

بالتالي $\phi(x) = 0$ عندئذ $-2y = -2y - \phi(x)$

$$\varphi(x) = c; c \in \mathbb{C}$$

$$v = 2xy + c; c \in \mathbb{C}$$

(2) (17 درجة). ليكن $f(z) = (2e^x \cos y) + i(2e^x \sin y)$ تابع معرف في جميع نقاط المستوى العقدي والمطلوب:

1. أوجد $u = \text{Ref}(z)$ و $v = \text{Imf}(z)$ ، ثم أوجد صورة المستقيم $x = 0$ وفق f . (6 درجات)

2. أثبت أن f يحقق معادلتى كوشي-ريمان في جميع نقاط المستوى العقدي، وماذا تستنتج؟ (8 درجات)

3. أوجد $\bar{f}(z)$. (3 درجات)

الحل: $f(z) = (2e^x \cos y) + i(2e^x \sin y)$

1. (درجتان) $u = \text{Ref}(z) = 2e^x \cos y$ ، $v = \text{Imf}(z) = 2e^x \sin y$ (درجتان)

• (4 درجات) نعوض $x = 0$ نجد $u = 2 \cos y$ و $v = 2 \sin y$ نلاحظ أن $u^2 + v^2 = 4$

بالتالي صورة المستقيم $x = 0$ هي دائرة مركزها O ونصف قطرها 2 في المستوى Ouv .

2. (6 درجات) نلاحظ بأن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^x \cos y$$

نلاحظ بأن $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ بالتالي معادلتى كوشي-ريمان محققة.

• (درجتان) المشتقات الجزئية مستمرة وتحقق معادلتى كوشي-ريمان في جميع نقاط المستوى العقدي بالتالي التابع f اشتقاقي في جميع نقاط المستوى العقدي التابع تحليلي في جميع نقاط المستوى العقدي.

$$3. \quad \bar{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = (2e^x \cos y) + i(2e^x \sin y) = 2e^z = f(z) \quad \dots \dots (3 \text{ درجات})$$

(3) (23 درجة). ليكن $f(z) = \bar{z}$ تابع معرف في جميع نقاط المستوى العقدي والمطلوب:

1. ماذا تمثل المجموعة $E = \{z; z \in \mathbb{C} \text{ \& } |\text{Im}(f(z))| > 0\}$ في المستوى العقدي. (2 درجات)

2. أثبت بأن التابع $g(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ ليس له نهاية عند الصفر. (5 درجات)

3. أوجد المحل الهندسي للنقاط $M(z)$ الممثلة بالمعادلة $|z - i|^2 = \text{Re}(f(z))$. (6 درجات)

4. أوجد معادلة القطعة المستقيمة C الواصلة بين العديدين $z_0 = 1$ و $z_1 = 1 + i$ ثم أوجد $\int_C f(z) dz$. (10 درجات)

الحل:

1. تمثل المجموعة

$$E = \{z; z \in \mathbb{C} \text{ \& } |\text{Im}(f(z))| > 0\} = \{z; z \in \mathbb{C} \text{ \& } |\text{Im}(\bar{z})| > 0\} = \{z = x + iy; |y| > 0\}$$

جميع نقاط المستوى العقدي ماعدا المحور الحقيقي

E ليست منطقة لأنها ليست مجموعة مترابطة

2. ليكن $g(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ ، لنأخذ المتتاليتين $(z_n)_{n \geq 1}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$ حيث $z_n = \frac{1}{n}$ و $w_n = \frac{i}{n}$

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow g(z_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow g(w_n) = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$$

نلاحظ بأن $1 \neq -1$ بالتالي التابع $g(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ ليس له نهاية عند الصفر.

طريقة ثانية: $g(z) = \frac{\bar{z}}{z} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{2xy}{x^2 + y^2}i$

$$u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

$$v(x, y) = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

الدالة $u(x, y)$ ليس لها نهاية عند $(0,0)$ من خلال أخذ المسارين المختلفين:

المسار الأول: $y = 0, x \rightarrow 0$

المسار الثاني: $x = 0, y \rightarrow 0$

كذلك $v(x, y)$ ليس لها نهاية عند $(0,0)$ من خلال أخذ مسارين مختلفين مثلاً

المسار الأول: $y = 2x; x \rightarrow 0$

المسار الثاني: $y = x; x \rightarrow 0$

نستنتج بأن التابع $g(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ ليس له نهاية عند الصفر.

3. نضع $z = x + iy$ في العلاقة $|z - i|^2 = \text{Re}(f(z)) = x$ نجد $|x + i(y - 1)|^2 = \text{Re}(f(z)) = x$

$$x^2 + (y - 1)^2 = x$$

$$x^2 - x + (y - 1)^2 = 0$$

نتم إلى مربع كامل نجد: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$ المحل الهندسي هو عبارة عن دائرة مركزها $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ونصف قطرها $r = \frac{1}{2}$.

4.

$$C: z = z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t; 0 \leq t \leq 1$$

$$z = z(t) = 1 + (1 + i - 1)t = 1 + it; 0 \leq t \leq 1$$

$$\dot{z}(t) = i$$

$$\int_C f(z) dz = \int_0^1 f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_0^1 (1 - it) i dt = \int_0^1 t + i dt = \int_0^1 t dt + i \int_0^1 dt = \frac{1}{2} + i$$

طريقة ثانية للحل: معادلة القطعة ديكارتياً $x = 1$ و $y \in [0, 1]$

$$\int_C f(z) dz = \int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_0^1 (1 - iy) i dy = i \int_0^1 dy + \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} + i$$

(4) (4 درجات). ادرس تقارب المتتالية العقدية $(z_n)_{n \geq 1}$ حيث $z_n = \frac{(1+i)^n}{2^n}$

$$z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$

المتتالية الهندسية $\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ متقاربة من الصفر لأن $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

السؤال الثاني: (34 درجة)

(1) 12 درجة (4 درجات لكل تمرين). أوجد ناتج ما يلي:

$$A = \text{Log}(1 + i), \quad B = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^8 - 1}{z^4 - 1}, \quad C = \text{sh}^{-1}(i)$$

الحل:

(1)

$$A = \text{Log}(1 + i) \quad \checkmark$$

$$A = \ln(|1+i|) + i(\text{Arg}(1+i)) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$B = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^8 - 1}{z^4 - 1} \quad \checkmark$$

$$B = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^8 - 1}{z^4 - 1} = \frac{0}{0} \text{ (عدم تعيين)}$$

نطبق أوبيتال

$$B = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^8 - 1}{z^4 - 1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{8z^7}{4z^3} = \lim_{z \rightarrow i} 2z^4 = 2$$

$$C = \text{sh}^{-1}(i) \quad \checkmark$$

$$\text{sh}^{-1}(z) = \log(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

$$C = \text{sh}^{-1}(i) = \log(i + \sqrt{i^2 + 1}) = \log(i) = \ln(|i|) + i(\text{Arg}(i) + 2\pi k) = \ln(1) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right); k \in \mathbb{Z}$$

(2) (درجة 22). ليكن $f(z) = e^z + 1$ تابع تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي والمطلوب:

1. أوجد قيمة التكامل $\int_{\gamma} f(z) dz$ حيث γ دائرة الوحدة والموجه بالاتجاه الموجب. (5 درجات)
2. أوجد قيمة التكامل $\int_C f(z) dz$ حيث C المنحني المعرف بالشكل $0 \leq x \leq 1; y = 2$. (5 درجات)
3. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{z} dz$ حيث C دائرة موجه بالاتجاه الموجب مركزها $z = 0$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$. (5 درجات)
4. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{(z-i)^3} dz$ حيث C دائرة موجه بالاتجاه الموجب مركزها $z = 0$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$. (7 درجات)

الحل

1. دائرة الوحدة (منحني بسيط مغلق موجه بالاتجاه الموجب) والدالة f تحليلية في جميع نقاط المستوي العقدي فهي تحليلية داخل دائرة الوحدة (منطقة بسيطة الترابط) وعلى محيطها بالتالي حسب مبرهنة كوشي نجد $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (e^z + 1) dz = \int_C (1 + e^x \cos y + i e^x \sin y)(dx + i dy) \\ &= \int_C (1 + e^x \cos 2 + i e^x \sin 2) dx = \int_0^1 (1 + e^x \cos 2 + i e^x \sin 2) dx = \int_0^1 1 + (\cos 2 + i \sin 2) e^x dx \\ &= \int_0^1 1 + e^{2i} e^x dx = \int_0^1 dx + e^{2i} \int_0^1 e^x dx = 1 + e^{2i}(e - 1) \end{aligned}$$

طريقة ثانية للحل:

بداية المنحني هو العدد العقدي $2i$

نهاية المنحني هو العدد العقدي $1 + 2i$

$$\int_C f(z) dz = \int_{2i}^{1+2i} (e^z + 1) dz = [e^z + z]_{2i}^{1+2i} = e^{1+2i} + 1 + 2i - e^{2i} - 2i = 1 + e^{2i}(e - 1)$$

3.

التابع المكامل $\frac{f(z)}{z}$ تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

f تابع تحليلي في المنطقة الداخلية للمنحني C البسيطة الترابط وعلى المنحني C البسيط المغلق الموجه بالاتجاه الموجب.

$z = 0$ يقع داخل المنحني C

نستخدم صيغة كوشي التكاملية الأولى.

$$\int_C \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i \times f(0) = 4\pi i$$

4.

التابع المكامل $\frac{f(z)}{(z-i)^3}$ تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.

$f(z) = e^z + 1 \Rightarrow f^{(1)}(z) = e^z, \quad f^{(2)}(z) = e^z$
 f تابع تحليلي في المنطقة الداخلية للمنحني C البسيطة الترابط وعلى المنحني C البسيط المغلق الموجه بالاتجاه الموجب.

$z = i$ يقع داخل المنحني C

$$n + 1 = 3 \Rightarrow n = 2$$

نستخدم صيغة كوشي التكاملية الثانية.

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi i \times f^{(2)}(i)}{2!} = e^i \pi i$$

✓ بعض التمارين تحلّ بأكثر من طريقة، فأی طريقة متبعة من قبل الطالب لحلّ تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

جميع المقررات وحري دراج



مكتبة
A to Z