كلية **العلوم**

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

اسئلة دورات محلولة

ميكانيك١

جامعة طرطوس
كليـــة العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الاول من العام الدراسي 2024 / 2025 الاسم:

السنة الثالثة نموذج **A**

أسئلة مقرر ميكانيك1

العلامة:90 المدة: ساعتين

السؤال الأول (80=4*20 درجة)

واحدة فقط من الاجابات التالية صحيحة اخترها:

-1 يستند سلم $[AB]$ بطرفه A على الارض وبطرفه B الى جدار ويصنع زاوية مع الأرض قدرها $\varphi = wt$ ولتكن M نقطة من السلم تبعد عن A مسافة قدرها a وعن B مسافة قدرها b فان معادلة مسارها هي:

(A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	(B) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	[✓ (C)] $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	(D) $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$

-2 نقطة مادية تتحرك بالسرعة $v = 3t^2 - 4t + 1$ وفي لحظة البدء كانت فاصلتها المنحنية $s = 6$ فان قانون حركتها يعطى العلاقة:

(A) $s = t^3 - 2t^2 + t - 6$	(B) $s = t^3 - 2t^2 + t$	[✓ (C)] $s = t^3 - 2t^2 + t + 6$	(D) $s = 6t - 4$

-3 نقطة مادية تتحرك في المستوي xoy وفق المعادلات $\begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{27}{2}t^3 + 1 \end{cases}$ فان معادلة راسم الخطا تعطى بالعلاقة:

(A) $y = \frac{1}{2}x^3 + 1$	(B) $y = \frac{81}{2}x^3 + 1$	[✓ (C)] $x = 3$	(D) $y = \frac{81}{2}$

-4 اذا كان $\gamma_n = \gamma_\tau = 0$ فان الحركة:

(A) منحنية منتظمة	(B) مستقيمة متغيرة بانتظام	(C) منحنية متغيرة بانتظام	[✓ (D)] مستقيمة منتظمة

-5 نقطة مادية تتحرك حركة متغيرة بانتظام بتسارع مقداره $2m/s^2$، في لحظة البدء كانت فاصلتها المنحنية -3 وسرعتها -5 عندئذ تعطى المعادلة الزمنية للحركة بالعلاقة:

(A) $s = 2t^2 - 5t - 3$	(B) $s = 2t^2 - 3t - 5$	(C) $s = t^2 - 3t - 5$	[✓ (D)] $s = t^2 - 5t - 3$

يتحرك جسيم على محيط دائرة نصف قطرها $1m$ بتسارع مماسي مقداره $1m/s^2$ ومبتدئا من السكون من النقطة A أجب عن السؤالين التاليين:

-6 سرعة الجسيم عند عودته الى A :

[✓ (A)] $2\sqrt{\pi}$	(B) $2\sqrt{2\pi}$	(C) $\sqrt{\pi}$	(D) غير

			ذلك

7- تسارعه العددي يساوي:

[✓ (A)] $\sqrt{1+16\pi^2}$	(B) 4π	(C) $\sqrt{\pi}$	(D) غير ذلك

نقطة مادية تتحرك وفق المعادلة الزمنية التالية $x = -t^2 + 6t + 7$ أجب عن الأسئلة الثلاثة التالية:

8- سرعتها العددية على الفترة الزمنية $[0,3]$ هي مقدار:

[✓ (A)] موجب	(B) سالب	(C) ينعدم ويملك اشارتين مختلفتين	(D) غير ذلك

9- تسارعها العددي على الفترة الزمنية $[0,3]$ هو مقدار:

(A) موجب تماما	[✓ (B)] سالب تماما	(C) ينعدم ويملك اشارتين مختلفتين	(D) غير ذلك

10- نوع الحركة :

(A) تقدمية متسارعة	[✓ (B)] تقدمية متباطئة.	(C) تراجعية متسارعة.	(D) تراجعية متباطئة.

نقطة مادية تتحرك حركة اهتزازية وفق المعادلة الزمنية التالية $x = -4 + 5\cos \pi t$ أجب عن الأسئلة الأربعة التالية:

11- مركز الاهتزاز هو:

2 (A)	-4 [✓ (B)]	π (C)	5 (D)

12- سعة الاهتزاز هي:

2(A)	-4 (B)	π (C)	[✓ 5 (D)]

13- دور الحركة هو:

[✓ 2 (A)]	-4 (B)	π (C)	5 (D)

14- تواتر الحركة يساوي:

2 (A)	(B) $\frac{1}{2}$	(C) $\frac{1}{\pi}$	(D) $\frac{1}{5}$

نقطة مادية تتحرك حركة اهتزازية وفق المعادلة الزمنية التالية $s = 5.e^{3t}$ بحيث أن الزاوية ين التسارع المماسي والكلي تساوي 60 درجة أجب عن الأسئلة الخمسة التالية:

15- سرعة النقطة تساوي:

(A) $5s$	[✓ (B) $3s$]	(C) $15s$	(D) s

16- تسارعها المماسي يساوي:

(A) $18s$	(B) $3s$	(C) $15s$	[✓ (D) $9s$]

17- تسارعها الكلي يساوي:

(A) $9s\sqrt{3}$	(B) $3s$	(C) $15s$	[✓ (D) $18s$]

18- تسارعها الناظمي يساوي:

(A) $25s$	(B) $25s\sqrt{3}$	(C) $s\sqrt{3}$	[✓ (D) $9s\sqrt{3}$]

19- نصف قطر التقوس يساوي:

(A) s	(B) $3s$	(C) $s\sqrt{3}$	[✓ (D) $\frac{s}{\sqrt{3}}$]

20- في الحركات الخاضعة لقانون السطوح يكون القانون الأساسي للحركة هو:

(A) $-mc^2u^2[u''_\theta - u] = F_r$	(B) $-mc^2u^2[u - u''_\theta] = F_r$	(C) $mc^2u^2[u + u''_\theta] = F_\theta$	[✓ (D) $-mc^2u^2[u''_\theta + u] = F_r$]

السؤال الثاني(10=5*2 درجة)

نقطة مادية كتلتها $m = 1$ تتحرك حركة خاضعة لقانون السطوح على المنحني:

$$\begin{cases} x = a.\cos\varphi \\ y = a.\sin\varphi \end{cases}$$ حيث $a \in R$, $xy' - x'y = c$

واحدة فقط من الاجابات التالية صحيحة اخترها:

21- المعادلة الزمنية لحركة النقطة هي:

[✓ (A)] $\varphi = \frac{c}{a^2}t$	(B) $\frac{c^2}{a}t$	(C) $\frac{a^2}{c}t$	(D) $\frac{a}{c^2}t$

22- بفرض $\varphi = \omega.t$ حيث $\omega \in R$, $xy' - x'y = c$ فان كمية الحركة تساوي:

[✓ (A)] $a.\omega$	(B) $a.\omega^2$	(C) $a^2.\omega$	(D) $\frac{a}{\omega}$

انتهت الأسئلة

طرطوس الواقع في الخميس 2025/2/4 **مدرّسة المقرر: د. سراب محمود**

سلم تصحيح امتحان ميكانيك 1

للسنة الثالثة رياضيات نموذج (A)

السؤال الأول (20x4)

1- C

2- C

3- C

4- D

5- D

6- A

7- A

8- A

9- B

10- B

11- B

12- D

13- A

14- B

15- B

16- D

17- D

18- D

19- D

20- D

السؤال الثاني: (2x5)

21- A

22- A

جامعة طرطوس
كليـــة العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الاول من العام الدراسي 2024 / 2025 الاسم:

السنة الثالثة نموذج B

أسئلة مقرر ميكانيك1

العلامة:90 المدة: ساعتين

السؤال الأول (20*4=80 درجة)

واحدة فقط من الاجابات التالية صحيحة اخترها:

يتحرك جسيم على محيط دائرة نصف قطرها $1m$ بتسارع مماسي مقداره $1m/s^2$ ومبتدئا من السكون من النقطة A أجب عن السؤالين التاليين:

1- سرعة الجسيم عند عودته الى A :

[✓ (A)] $2\sqrt{\pi}$	(B) $2\sqrt{2\pi}$	(C) $\sqrt{\pi}$	(D) غير ذلك

2- تسارعه العددي يساوي:

[✓ (A)] $\sqrt{1+16\pi^2}$	(B) 4π	(C) $\sqrt{\pi}$	(D) غير ذلك

3- يستند سلم $[AB]$ بطرفه A على الأرض وبطرفه B الى جدار ويصنع زاوية مع الأرض قدرها $\varphi = wt$ ولتكن M نقطة من السلم تبعد عن A مسافة قدرها a وعن B مسافة قدرها b فان معادلة مسارها هي:

(A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	(B) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	[✓ (C)] $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	(D) $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$

4- نقطة مادية تتحرك بالسرعة $v = 3t^2 - 4t + 1$ وفي لحظة البدء كانت فاصلتها المنحنية $s = 6$ فان قانون حركتها يعطى العلاقة:

(A) $s = t^3 - 2t^2 + t - 6$	(B) $s = t^3 - 2t^2 + t$	[✓ (C)] $s = t^3 - 2t^2 + t + 6$	(D) $s = 6t - 4$

5- نقطة مادية تتحرك في المستوي xoy وفق المعادلات $\begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{27}{2}t^3 + 1 \end{cases}$ فان معادلة راسم الخطا تعطى بالعلاقة:

(A) $y = \frac{1}{2}x^3 + 1$	(B) $y = \frac{81}{2}x^3 + 1$	[✓ (C)] $x = 3$	(D) $y = \frac{81}{2}$

6- اذا كان $\gamma_n = \gamma_\tau = 0$ فان الحركة:

(A) منحنية منتظمة	مستقيمة متغيرة بانتظام (B)	(C) منحنية متغيرة بانتظام	[✓ (D)] مستقيمة منتظمة

7- نقطة مادية تتحرك حركة متغيرة بانتظام بتسارع مقداره $2m/s^2$ ، في لحظة البدء كانت فاصلتها المنحنية -3 وسرعتها -5 عندئذ تعطى المعادلة الزمنية للحركة بالعلاقة:

(A) $s=2t^2-5t-3$	(B) $s=2t^2-3t-5$	(C) $s=t^2-3t-5$	[✓ (D)] $s=t^2-5t-3$

نقطة مادية تتحرك وفق المعادلة الزمنية التالية $x=-t^2+6t+7$ أجب عن الأسئلة الثلاثة التالية:

8- سرعتها العددية على الفترة الزمنية $[0,3]$ هي مقدار:

[✓ (A)] موجب	(B) سالب	(C) ينعدم ويملك اشارتين مختلفتين	(D) غير ذلك

9- تسارعها العددي على الفترة الزمنية $[0,3]$ هو مقدار:

(A) موجب تماما	[✓ (B)] سالب تماما	(C) ينعدم ويملك اشارتين مختلفتين	(D) غير ذلك

10- نوع الحركة :

(A) تقدمية متسارعة.	[✓ (B)] تقدمية متباطئة.	(C) تراجعية متسارعة.	(D) تراجعية متباطئة.

نقطة مادية تتحرك حركة اهتزازية وفق المعادلة الزمنية التالية $x=-4+5\cos\pi t$ أجب عن الأسئلة الأربعة التالية:

11- مركز الاهتزاز هو:

(A) 2	[✓ (B)] -4	(C) π	(D) 5

12- سعة الاهتزاز هي:

(A)2	(B) -4	(C) π	[✓ (D)] 5

13- دور الحركة هو:

[✓ (A)] 2	(B) -4	(C) π	(D) 5

14- تواتر الحركة يساوي:

(A) 2	[✓ (B) $\frac{1}{2}$]	(C) $\frac{1}{\pi}$	(D) $\frac{1}{5}$

نقطة مادية تتحرك حركة اهتزازية وفق المعادلة الزمنية التالية $s = 5.e^{3t}$ بحيث أن الزاوية ين التسارع المماسي والكلي تساوي 60 درجة أجب عن الأسئلة الخمسة التالية:

15- سرعة النقطة تساوي:

(A) $5s$	[✓ (B) $3s$]	(C) $15s$	(D) s

16- تسارعها المماسي يساوي:

(A) $18s$	(B) $3s$	(C) $15s$	[✓ (D) $9s$]

17- تسارعها الكلي يساوي:

(A) $9s\sqrt{3}$	(B) $3s$	(C) $15s$	[✓ (D) $18s$]

18- تسارعها الناظمي يساوي:

(A) $25s$	(B) $25s\sqrt{3}$	(C) $s\sqrt{3}$	[✓ (D) $9s\sqrt{3}$]

19- نصف قطر التقوس يساوي:

(A) s	(B) $3s$	(C) $s\sqrt{3}$	[✓ (D) $\frac{s}{\sqrt{3}}$]

20- في الحركات الخاضعة لقانون السطوح يكون القانون الأساسي للحركة هو:

(A) $-mc^2u^2[u''_\theta - u] = F_r$	(B) $-mc^2u^2[u - u''_\theta] = F_r$	(C) $mc^2u^2[u + u''_\theta] = F_\theta$	[✓ (D) $-mc^2u^2[u''_\theta + u] = F_r$]

السؤال الثاني(10=5*2 درجة)

نقطة مادية كتلتها $m=1$ تتحرك حركة خاضعة لقانون السطوح على المنحني:

$$\begin{cases} x = a.\cos\varphi \\ y = a.\sin\varphi \end{cases}$$ حيث $a \in R$, $xy' - x'y = c$

واحدة فقط من الاجابات التالية صحيحة اخترها:

21- المعادلة الزمنية لحركة النقطة هي:

[✓ (A) $\varphi=\frac{c}{a^2}t$]	(B) $\frac{c^2}{a}t$	(C) $\frac{a^2}{c}t$	(D) $\frac{a}{c^2}t$

22- بفرض $\varphi=\omega.t$ حيث $\omega\in R$, $xy'-x'y=c$ فان كمية الحركة تساوي:

[✓ (A) $a.\omega$]	(B) $a.\omega^2$	(C) $a^2.\omega$	(D) $\frac{a}{\omega}$

انتهت الأسئلة

طرطوس الواقع في الخميس 2025/2/4 **مدرّسة المقرر: د. سراب محمود**

سلم تصحيح امتحان ميكانيك 1
للسنة الثالثة / رياضيات نموذج (B)

السؤال الأول 80=(20 x 4)

A - 1
A - 2
C - 3
C - 4
C - 5
D - 6
D - 7
A - 8
B - 9
B - 10
B - 11
D - 12
A - 13
B - 14
B - 15
D - 16
D - 17
D - 18
D - 19
D - 20

السؤال الثاني 10=(2x5)

A - 21
A - 22

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات ـالسنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية 2024- 2023

المدة: ساعتين
الدرجة : 90

السؤال الأول (20 درجة):

برهن أن تغير الطاقة الحركية لنقطة مادية خلال انتقال محدود لهذه النقطة يساوي عمل القوى المؤثرة في النقطة الموافق لذلك الانتقال.(الصيغة التكاملية لنظرية الطاقة الحركية).

السؤال الثاني (25 درجة):

نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المحور $\overline{ox}$ تخضع لقوة جاذبة معطاة بالعلاقة: $F = \frac{-mk^2}{x^3}$

علماً أن k ثابت وأن النقطة المادية بدأت حركتها من الموضع a وبدون سرعة ابتدائية والمطلوب:

1) أوجد المعادلة التفاضلية لهذه الحركة.

2) أوجد قانون حركة هذا الجسم.

السؤال الثالث (20 درجة):

لدينا كرة متجانسة D ثقلها P تقع على مستوي يميل على الأفق بزاوية قدرها $\alpha = 30°$ وهذه الكرة مربوطة بخيط مثبت من الطرف الأعلى للمستوي بحيث يبقى الخيط موازي للمستوي وتكون الكرة متوازنة. والمطلوب: أوجد رد فعل المستوي على الكرة و أوجد قوة شد الخيط.

السؤال الرابع (25 درجة):

نقطة مادية تخضع لحقل يشتق من تابع قوى:

$$U(x, y, z) = \frac{y^2 - x^2}{y}$$

1) عين خطوط قوى هذا الحقل وعين خطوط السوية.

2) عين العمل الذي ينجزه هذا الحقل عندما تنتقل النقطة المادية على القطع المكافىء $x^2 = 4 + y$ بين الموضعين $x_1 = -1$ و $x_2 = 0$.

3) عين مواضع توازن هذه النقطة المادية الخاضعة للحقل المشتق من تابع قوى.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (20 درجة)

برهن أن تغير الطاقة الحركية لنقطة مادية خلال انتقال محدود للنقطة المادية يساوي عمل القوى المؤثرة في هذه النقطة الموافق لذلك الانتقال. (الصيغة التكاملية للطاقة الحركية).

الحل: القانون الأساسي في الحركة:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$$

5

نضرب طرفي المعادلة داخلياً بـ $\vec{v}$

$$m\,\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\vec{F}\cdot\vec{v} \qquad (1)$$

3

$\vec{F}\cdot\vec{v}$ هي الاستطاعة.

أي أن مشتق الطاقة الحركية لنقطة مادية بالنسبة للزمن يساوي الاستطاعة.

نضرب طرفي العلاقة (1) بـ dt

3

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\vec{F}\cdot\vec{v}\cdot dt$$

بملاحظة:

$$\vec{v}\cdot dt=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot dt=dr$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (2)$$

3

أي أن تفاضل الطاقة الحركية لنقطة مادية يساوي العمل الجزئي للقوة المؤثرة في هذه النقطة.

تسمى المعادلة (2) بمعادلة الطاقة الحركية.

3

إذا درسنا انتقال محدود للنقطة المادية في الموضع M_0 حيث تكون سرعة النقطة v_0 إلى الموضع M حيث تكون سرعتها v نجد بمكاملة طرفي العلاقة (2):

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\int_{M_0}^{M}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

3

وهي الصيغة التكاملية للطاقة الحركية وتنص على:

تغير الطاقة الحركية لنقطة مادية خلال انتقال محدود للنقطة المادية يساوي عمل القوى المؤثرة في هذه النقطة الموافق لذلك الانتقال

السؤال الثاني (25 درجة)

نقطة مادية كتلتها m تتحرك على المحور ox تخضع لقوة جاذبة معطاة بالعلاقة

$$F = -\frac{mk^2}{x^3}$$

علماً أن k ثابت وأن النقطة المادية بدأت حركتها من الموضع a وبدون سرعة ابتدائية

والمطلوب: 1) أوجد المعادلة التفاضلية لهذه الحركة.

2) أوجد قانون حركة هذا الجسم.

الحل: باستخدام القانون الأساسي في التحريك: ⑤

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}$$

$$m x'' = -\frac{mk^2}{x^3}$$

$$\boxed{x'' = -\frac{k^2}{x^3}}$$ ⑤ وهي المعادلة التفاضلية لهذه الحركة

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{k^2}{x^3}$$

نضرب الطرفين بـ dx : $dx\frac{dx'}{dt} = -\frac{k^2}{x^3}dx \Leftarrow$

$$x'dx' = -\frac{k^2}{x^3}dx \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \frac{x'^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{k^2}{x^2} + c$$ ③

$$x'^2 = \frac{k^2}{x^2} + c_1 \quad ; \quad c_1 = 2c$$

من شروط البدء في اللحظة $t=0$ $\begin{Bmatrix} x=a \\ x'=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow c_1 = -\frac{k^2}{a^2}$

$$x'^2 = \frac{k^2}{x^2} - \frac{k^2}{a^2} \Rightarrow x'^2 = \frac{k^2(a^2-x^2)}{x^2a^2} \Rightarrow x' = \pm\frac{k}{xa}\sqrt{a^2-x^2}$$ ③

القوة جاذبة نختار الإشارة السالبة:

$$x' = -\frac{k}{xa}\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{xa}\sqrt{a^2-x^2}$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى قابلة للفصل:

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{k}{a}dt \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} -\sqrt{a^2-x^2} = -\frac{k}{a}t + c_2$$ ③

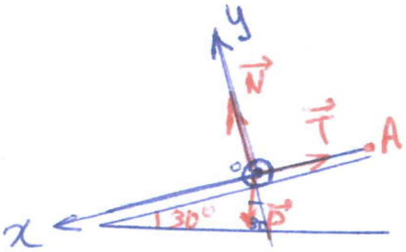
لنوجد c_2 : من شروط البدء $x=a \Rightarrow \sqrt{-a^2+a^2} = -\frac{k}{a}(0)+c_2 \Rightarrow 0 = c_2$ ③

$$\Rightarrow -\sqrt{a^2-x^2} = -\frac{k}{a}t \xrightarrow{\text{بالتربيع}} a^2 - x^2 = \frac{k^2}{a^2}t^2 \Rightarrow -x^2 = \frac{k^2}{a^2}t^2 - a^2$$

$$x^2 = a^2 - \frac{k^2}{a^2}t^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2 - \frac{k^2}{a^2}t^2}$$

وبما أنه معادلة حركة سنختار الإشارة الموجبة

$$\boxed{x = \sqrt{a^2 - \frac{k^2}{a^2}t^2}}$$ ③



السؤال الثالث { 20 درجة }:

لدينا كرة متجانسة D ثقلها P تقع على مستوٍ يميل على الأفق بزاوية قدرها $\alpha = 30°$ وهذه الكرة مربوطة بخيط مثبت من الطرف الأعلى للمستوي بحيث يبقى الخيط موازي للمستوي وتكون الكرة متوازنة والمطلوب :
أوجد رد فعل المستوي على الكرة وأوجد قوة شد الخيط .

الحل : طريقة أولى:

الكرة خاضعة ثلاث قوى: $\vec{T}$ قوة شد الخيط و $\vec{P}$ الثقل و $\vec{N}$ رد فعل المستوي لا
الكرة متوازنة ← بتطبيق علاقة الجيوب (علاقة لامي):

$$\frac{F_1}{\sin(\vec{F_2},\vec{F_3})} = \frac{F_2}{\sin(\vec{F_3},\vec{F_1})} = \frac{F_3}{\sin(\vec{F_1},\vec{F_2})}$$ ⑤

$$\frac{P}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{N}{\underset{\sin(120)}{\sin\frac{2\pi}{3}}} = \frac{T}{\underset{\sin(150)}{\sin\frac{5\pi}{6}}}$$

$$\underset{①}{\frac{P}{1}} = \underset{②}{\frac{N}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \underset{③}{\frac{T}{\frac{1}{2}}}$$ ⑤

$$②,① \Longrightarrow \boxed{N = \frac{\sqrt{3}}{2} P}$$ ⑤

$$③,① \Longrightarrow \boxed{T = \frac{P}{2}}$$ ⑤

طريقة ثانية: مجموع القوى = 0

$$\sum \vec{F} = 0 \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} = 0$$ ⑤

بالإسقاط على Ox :

⑤ $$P \sin 30 - T = 0 \Longrightarrow \boxed{T = \frac{P}{2}}$$ ⑤

بالإسقاط على oy :

$$-P \cos 30 + N = 0 \Longrightarrow \boxed{N = \frac{\sqrt{3}}{2} P}$$ ⑤

السؤال الرابع (25 درجة)

نقطة مادية تخضع لحقل يشتق من تابع قوى $U(x,y,z) = \frac{y^2-x^2}{y}$

1) عين خطوط قوى هذا الحقل وعين خطوط السوية

2) عين العمل الذي يجزه هذا الحقل عندما تنتقل النقطة المادية على القطع المكافئ $x^2=4+y$ بين الموصلين $x_1=-2$, $x_2=0$.

3) عين مواضع توازن هذه النقطة المادية الخاصة للحقل المشتق من تابع القوى.

الحل:

$$\vec{F} = F_x\vec{e_x}+F_y\vec{e_y}$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-2x}{y}$$ ③

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y.y-(y^2-x^2)}{y^2} = \frac{y^2+x^2}{y^2}$$ ③

خطوط القوى: $$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$ ③

$$\Rightarrow \frac{dx}{\frac{-2x}{y}} = \frac{dy}{\frac{y^2+x^2}{y^2}} \Rightarrow \boxed{\underbrace{(y^2+x^2)}_{M}dx+\underbrace{2xy}_{N}dy=0} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 2y\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2y\end{aligned}\right\}$$ المعادلة (1) تامة

$$y^2dx+\underset{\sim\sim}{x^2dx}+2xy\,dy=0$$

$$y^2dx+2xy\,dy+x^2dx=0$$

$$d(xy^2)+d(\frac{x^3}{3})=0 \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \boxed{xy^2+\frac{x^3}{3}=C}$$ ③

وهي خطوط القوى المطلوبة.

• خطوط السوية:

$$\boxed{U(x,y) = \frac{y^2-x^2}{y} = h}$$ ③

$$y^2-x^2-yh=0$$

$$y^2-yh+(\frac{h}{2})^2-(\frac{h}{2})^2-x^2=0$$

$$(y-\frac{h}{2})^2-x^2=0$$

معادلة خطوط السوية.

2) العمل الذي يجزه هذا الحقل

$$W=[U]_{M_1}^{M_2}=U(M_2)-U(M_1)$$ ③

M تنتقل على $x^2=4+y$

$x_1=-1 \Leftarrow 1=4+y \Leftarrow -3=y$ $\quad M_1(-1,-3)$

$x_2=0 \Leftarrow 0=4+y \Leftarrow -4=y$ $\quad M_2(0,-4)$

$$W = U(M_2) - U(M_1) = \left[\frac{y^2 - x^2}{y}\right]_{M_2} - \left[\frac{y^2 - x^2}{y}\right]_{M_1}$$ $M_2(0,-4)$, $M_1(-1,-3)$

$$W = \left(\frac{16-0}{-4}\right) - \left(\frac{9-1}{-3}\right) = -4 + \frac{8}{3} = \frac{-12+8}{3} = \frac{-4}{3}$$ ③

3) الشرط اللازم والكافي لتوازن هذه النقطة :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{y^2 + x^2}{y^2} = 0 \Rightarrow 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 0 \quad (2)$$ ③

نجد من تعويض ① بـ ② أي $1 = 0$ وهذا مستحيل

⇐ لا يوجد مواضع توازن لهذه النقطة المادية. ①

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى 2024- 2023

المدة: ساعتين
الدرجة : 90

السؤال الأول (20 درجة):

في الحركات الخاضعة لقانون السطوح استنتج عبارتي السرعة و التسارع في الاحداثيات القطبية مستقلتين عن الزمن.

السؤال الثاني (20 درجة):

ثلاث نقاط A, B, C تقع على التوالي على استقامة واحدة بحيث يكون $\overline{AB} = 10\,m$ و $\overline{BC} = 20\,m$. نرسم من B مستقيماً BZ بحيث يصنع مع BC زاوية $\frac{\pi}{3}$ و نرسم من C العمود على BZ في D. ولتكن $\vec{F}_1$ قوة مطبقة على DZ (من D متجهة إلى Z) قياسها $10\,kg$ والمطلوب : أوجد كل من القوتين $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ كي تتوازن النقطة D بحيث أن $\vec{F}_2$ متجهة من D نحو A و $\vec{F}_3$ متجهة من D نحو C.

السؤال الثالث (25 درجة):

سلك أملس على شكل سيكلوئيد معادلته: $s = 4a\sin\psi$ مثبت في مستو شاقولي بحيث يكون محوره شاقولي ورأسه للأعلى. ابتدأت نقطة مادية M كتلتها m حركتها من السكون من رأس السلك والمطلوب: 1) أوجد سرعة النقطة المادية اعتماداً على نظرية الطاقة الحركية علماً أن $y = \frac{s}{2}\sin\psi$ وأن a ثابت و ψ هي الزاوية المحصورة بين ناظم السلك و الثقل في تلك النقطة.

2) أوجد الضغط على السلك(رد الفعل) عند هذه النقطة.

السؤال الرابع (25 درجة):

ليكن لدينا حقل القوى: $\vec{F} = xy^2z^2\,\vec{e}_x + x^2yz^2\,\vec{e}_y + x^2y^2z\,\vec{e}_z$

1) برهن أن الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى ثم عين هذا التابع وعين سطوح السوية.

2) عين عمل الحقل $\vec{F}$ لنقطة مادية تنتقل بين الموضعين $M_1(1,1,0)$ و $M_2(2,1,-1)$

مع أطيب تمنياتي بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (20 درجة)

في الحركات الخاضعة لقانون السطوح استنتج عبارتي السرعة والتسارع في الاحداثيات القطبية مستقلتين عن الزمن.

الحل: السرعة في الاحداثيات القطبية :

$$\vec{v} = r'\vec{e_r} + r\theta'\vec{e_\theta} \quad (1)$$ ③

في الحركات الخاضعة لقانون السطوح: $r^2\theta' = c \quad (2)$ ③

ندخل متحول جديد : $u = \frac{1}{r}$ ①

وبالتالي: (2) في $\theta' = \frac{c}{r^2} = cu^2$

$$r' = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$ ②

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$$

$$\Rightarrow r' = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\cdot cu^2 = -c\frac{du}{d\theta} = -cu'_\theta$$

نعوض في عبارة $\vec{v}$ بـ (1)

$$\vec{v} = -cu'_\theta\vec{e_r} + \frac{1}{u}\cdot cu^2\vec{e_\theta} = -cu'_\theta\vec{e_r} + cu\vec{e_\theta}$$

$$\boxed{v^2 = c^2(u'^2_\theta + u^2)}$$ ③ وهو دستور بينيه الأول

- التسارع في الاحداثيات القطبية بالأخذ بعين الاعتبار أن الحركة خاضعة لقانون السطوح وبالتالي التسارع مركزي :

$$\vec{\gamma} = (r'' - r\theta'^2)\vec{e_r}$$ ③

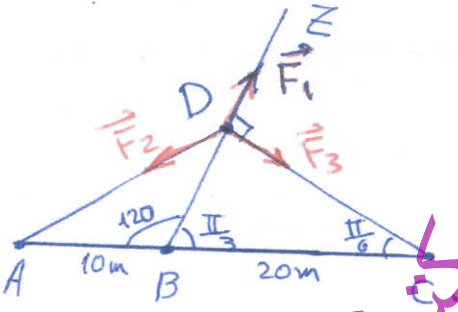
$$r'' = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr'}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -cu''_\theta\cdot\theta' = -cu''_\theta\cdot cu^2 = -c^2u^2u''_\theta$$ ②

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \left[-c^2u^2u''_\theta - \frac{1}{u}(c^2u^4)\right]\vec{e_r}$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = -c^2u^2(u''_\theta + u)\vec{e_r}}$$ ③ وهو دستور بينيه الثاني

السؤال الثاني (20 درجة)

A, B, C ثلاث نقاط تقع على التوالي على استقامة واحدة بحيث يكون $\overline{AB}=10m$ و $\overline{BC}=20m$ نرسم في B مستقيماً BZ بحيث يصنع مع BC زاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$ ونرسم من C العمود على BZ في D.. ولتكن $\vec{F_1}$ قوة مطبقة على DZ قياسها 10Kg والمطلوب: أوجد كلاً من القوتين $\vec{F_2}$ و $\vec{F_3}$ بحيث الأولى $\vec{F_2}$ متجهة من D نحو A والثانية $\vec{F_3}$ متجهة من D نحو C كي تتوازن النقطة D.



الحل:

- في المثلث القائم BDC لدينا $D\hat{C}B=\frac{\pi}{6}$ وبالتالي الضلع المقابل للزاوية 30 يساوي نصف الوتر أي أن $\overline{BD}=10m$
- في المثلث $A\hat{B}D$ يكون $\overline{AB}=\overline{BD}=10m$ فهو متساوي الساقين ⇐ زاويتا القاعدة متساويتين

$$\hat{A}=\hat{D}=\frac{180-120}{2}=\frac{60}{2}=30^\circ$$

وبالتالي الزاوية بين $(\vec{F_2},\vec{F_3})=90+30=120^\circ$

الزاوية بين $(\vec{F_2},\vec{F_1})=180-30=150^\circ$ ⑤

الزاوية بين $(\vec{F_3},\vec{F_1})=90^\circ$

لدينا علاقة الجيوب (لامي):

$$\frac{F_1}{\sin(F_2,F_3)}=\frac{F_2}{\sin(F_3,F_1)}=\frac{F_3}{\sin(\vec{F_1},\vec{F_2})}$$ ⑤

$$\frac{F_1}{\sin(120)}=\frac{F_2}{\sin 90}=\frac{F_3}{\sin 150}$$

$$\frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{F_2}{1}=\frac{F_3}{\frac{1}{2}}\Longrightarrow$$ ⑤

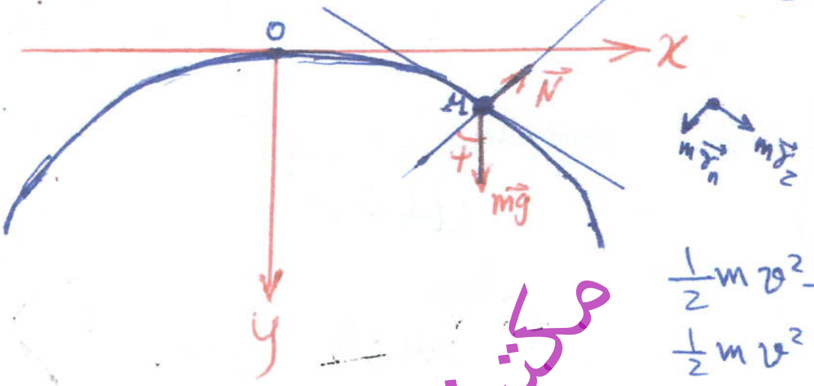
$$F_2=10\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{20}{\sqrt{3}}\ Kg$$

$$F_3=\frac{10\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{10}{\sqrt{3}}\ Kg$$ ⑤

السؤال الثالث (25 د/ع):

سلك أملس على شكل سيكلوئيد معادلته: $s = 4a\sin\psi$ مثبت في مستوٍ شاقولي بحيث يكون محور شاقولي ورأسه للأعلى. ابتدأت نقطة مادية M كتلتها m حركتها من السكون من رأس السلك والمطلوب: 1) أوجد سرعة النقطة المادية اعتماداً على نظرية الطاقة الحركية علماً أن $y=\frac{s}{2}\sin\psi$ وأن a ثابت و ψ هي الزاوية المحصورة بين ناظم السلك والثقل في تلك النقطة.

2) أوجد الضغط على السلك (رد الفعل) عند هذه النقطة.



الحل:

1) بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين الموضع الابتدائي وموضع آخر:

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=mgy$$ 5

$$\frac{1}{2}mv^2-0=mgy=mg\frac{s}{2}\sin\psi$$

$$v^2=2g\frac{s}{2}\sin\psi=g4a\sin^2\psi$$

4

$$\boxed{v^2=4ag\sin^2\psi}\Rightarrow\boxed{v=2\sqrt{ag}\sin\psi}\ ①$$

2) بتطبيق القانون الأساسي بالتحريك:

$$m\vec{\gamma}=\vec{F}=\vec{N}+m\vec{g}$$ 5

بإسقاط القانون الأساسي على الناظم:

$$m\gamma_n=-N+mg\cos\psi$$

$$m\frac{v^2}{\rho}=mg\cos\psi-N\Rightarrow N=+mg\cos\psi-m\frac{v^2}{\rho}\ ②$$

$$\rho=\frac{ds}{d\psi}=4a\cos\psi\ ③$$ 4 4

بتعويض ① و ③ في ②:

$$N=mg\cos\psi-m\frac{4ag\sin^2\psi}{4a\cos\psi}$$

$$N=mg\cos\psi-mg\sin^2\psi\cos^{-1}\psi$$

$$=mg(\cos^2\psi-\sin^2\psi)\cos^{-1}\psi$$

$$\boxed{N=mg\cos2\psi\cos^{-1}\psi}$$ 3

السؤال الرابع (25 درجة):

ليكن لدينا حقل القوى:

$$\vec{F} = xy^2z^2\,\vec{e_x} + x^2yz^2\,\vec{e_y} + x^2y^2z\,\vec{e_z}$$

1) برهن أن الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى ثم عين هذا التابع وعين سطوح السوية

2) عين عمل هذا الحقل لنقطة مادية تنتقل بين الموضعين $M_1(1,1,0)$ و $M_2(2,1,-1)$

الحل:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_x}{\partial y} &= 2xyz^2 = \frac{\partial F_y}{\partial x}\\ \frac{\partial F_x}{\partial z} &= 2xy^2z = \frac{\partial F_z}{\partial x}\\ \frac{\partial F_y}{\partial z} &= 2x^2yz = \frac{\partial F_z}{\partial y}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

⑤ $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى وليكن U

$\Leftarrow$ $\vec{F} = \vec{\text{grad}}\,U$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = xy^2z^2 \quad (1)$$

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = x^2yz^2 \quad (2)$$

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = x^2y^2z \quad (3)$$

نكامل (1) بالنسبة لـ x:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}(x^2y^2z^2) + \varphi(y,z)} \quad (4)$$ ③

نشتق (4) بالنسبة لـ y:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2yz^2 + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}$$

بالمقارنة مع (2):

$$x^2yz^2 = x^2yz^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \varphi(y,z) = C(z)$$

نعوض في (4):

$$\boxed{U = \frac{1}{2}(x^2y^2z^2) + C(z)} \quad (5)$$ ③

نشتق (5) بالنسبة لـ z:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x^2y^2z + C'_z$$

وبالمقارنة مع (3)

$$x^2y^2z = x^2y^2z + C'_z \Rightarrow C'_z = 0 \Rightarrow C(z) = C$$

نعوض في (5)

$$\boxed{U = \frac{1}{2}(x^2y^2z^2) + C}$$ ④ وهو تابع القوى

أو بطريقة ثانية:

⑤ $$dU = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = (xy^2z^2)\,dx + (x^2yz^2)\,dy + (x^2y^2z)\,dz$$

$$dU = \frac{1}{2}d(x^2y^2z^2) \Rightarrow \boxed{U = \frac{x^2y^2z^2}{2} + C}$$ ⑤

سطوح السوية $U = h \Leftarrow$ $\boxed{x^2y^2z^2 = h_1}$ ⑤

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = dU \Rightarrow W = [U]_{M_1}^{M_2} = \left[\frac{x^2y^2z^2}{2}\right]_{M_1(1,1,0)}^{(2,1,-1)}$$ ⑤

$$\Rightarrow W = \frac{(2)^2(1)^2(-1)^2}{2} - \frac{(1)^2(1)^2(0)^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = 2$$

جامعة طرطوس
كلية العـلـوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة التكميلية 2023- 2022

المدة: ساعتين
الدرجة : 90

السؤال الأول (35 درجة):

في حركة الكواكب حول الشمس، المطلوب:

1) استنتج عبارتي السرعة و التسارع في الإحداثيات القطبية مستقلتين عن الزمن.

2) إذا علمت أن نصف القطرالمتجهي في الحركة الخاضعة لقانون السطوح معطى بالعلاقة:

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

أوجد السرعة العددية ومتجه التسارع لهذه الحركة بدلالة r .

السؤال الثاني (30 درجة):

نقطة مادية M **تتحرك في المستو** xoy **فإذا كانت النسبة بين** v_x **مركبة السرعة على المحور الأفقي** $(o,\vec{e}_x)$ **و** v_r **مركبة السرعة على نصف القطر المتجهي** $(o,\vec{e}_r)$ **تساوي إلى ثابت** k **. المطلوب:**

1) عين نوع المسار و ناقش حسب قيم k .

2) أوجد النسبة بين v_y **مركبة السرعة على المحور الشاقولي** $(o,\vec{e}_y)$ **و** v_θ **مركبة السرعة على المحور** $(o,\vec{e}_\theta)$.

السؤال الثالث (25 درجة):

يوضع جسم على مستو أفقي أملس. يتحرك هذا الجسم تحت تأثير قوة أفقية وفق المحور $\overrightarrow{ox}$ **معطاة بالعلاقة :**

$$F = h\ \sin kt$$

حيث h , k **ثابتان**

و المطلوب:

1) أوجد المعادلة التفاضلية لهذه الحركة.

2) أوجد قانون حركة هذا الجسم.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

الدورة التكميلية 2022 - 2023

السؤال الأول (35 درجة)

في حركة الكواكب حول الشمس المطلوب :

1) استنتج عبارتي السرعة والتسارع في الاحداثيات القطبية مستقلتين عن الزمن. في الحركة الخاضعة لقانون السطوح

2) إذا علمت أن نصف القطر المتجه معطى بالعلاقة :

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

فأوجد السرعة العددية ومتجه التسارع لهذه الحركة بدلالة r .

الحل:

1) حركة الكواكب حول الشمس هي حركة خاضعة لقانون السطوح

السرعة في الاحداثيات القطبية :

$$\vec{v} = r' \vec{e_r} + r\theta' \vec{e_\theta} \quad (1)$$ ③

في الحركات الخاضعة لقانون السطوح

$$r^2\theta' = c \quad (2)$$ ③

لتحويل المشتقات بالنسبة للزاوية القطبية θ بدلاً من الزمن t ندخل متحولاً جديداً

$$u = \frac{1}{r}$$

وبالتالي (2) تصبح : $\theta' = cu^2$

$$r' = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$$

$$\Rightarrow r' = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot cu^2 = -c\frac{du}{d\theta} = -cu'_\theta$$ ②

نعوض في $\vec{v}$ أي (1) :

$$\vec{v} = -cu'_\theta \vec{e_r} + \frac{1}{u}\cdot cu^2 \vec{e_\theta} = -cu'_\theta \vec{e_r} + cu\vec{e_\theta}$$

$$\Leftarrow \boxed{v^2 = c^2(u'^2_\theta + u^2)}$$ ③

وهو دستور بينيه الأول .

التسارع في الاحداثيات القطبية بالأخذ بعين الاعتبار أن الحركة خاضعة لقانون السطوح وبالتالي فالتسارع مركزي أي ②

$$\vec{\gamma} = (r'' - r\theta'^2)\vec{e_r}$$ ③

$$r'' = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr'}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -cu''_\theta \cdot \theta' = -cu''_\theta \cdot cu^2 = -c^2u^2u''_\theta$$

$$\vec{\gamma} = \left[-c^2u^2u''_\theta - \frac{1}{u}(c^2u^4)\right]\vec{e_r} = -c^2u^2(u''_\theta + u)\vec{e_r}$$ ③ دستور بينيه الثاني

(2

$r^2 = a^2\cos 2\theta \Rightarrow r = a\sqrt{\cos 2\theta} \Rightarrow$

$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a}(\cos 2\theta)^{-\frac{1}{2}}$

$\grave{u} = \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{2}\right)(\cos 2\theta)^{-\frac{3}{2}}(-2\sin 2\theta) = \frac{1}{a}\sin 2\theta \cos^{-\frac{3}{2}} 2\theta$ ③

بتطبيق دستور بينيه الأول :

$v^2 = c^2(\grave{u}^2 + u^2) = c^2\left(\frac{1}{a^2}\sin^2 2\theta \cos^{-3} 2\theta + \frac{1}{a^2}\cos^{-1} 2\theta\right)$ ③

$v^2 = \frac{c^2}{a^2}\left[(1-\cos^2 2\theta)\cos^{-3} 2\theta + \cos^{-1} 2\theta\right] = \frac{c^2}{a^2}\left[\cos^{-3} 2\theta - \cos^{-1} 2\theta + \cos^{-1} 2\theta\right]$

$v^2 = \frac{c^2}{a^2\cos^3 2\theta} \Rightarrow v = \frac{c}{a\cos^{3/2} 2\theta} = \frac{c}{a\left(\frac{r}{a}\right)^3} = \frac{ca^2}{r^3}$, $\boxed{v = \frac{ca^2}{r^3}}$ ②

حساب شعاع التسارع :

بتطبيق دستور بينيه الثاني :

$\vec{\gamma} = -c^2u^2(\ddot{u}_\theta + u)\vec{er}$

لدينا :

$\grave{u} = \frac{1}{a}\sin 2\theta \cos^{-\frac{3}{2}} 2\theta$

$\Rightarrow \ddot{u} = \frac{1}{a}(2\cos 2\theta)\cos^{-\frac{3}{2}} 2\theta - \frac{3}{2}\frac{1}{a}\sin 2\theta \cdot \cos^{-\frac{5}{2}} 2\theta(-2\sin 2\theta)$ ③

$= \frac{2}{a}\cos^{-\frac{1}{2}} 2\theta + \frac{3}{a}\sin^2 2\theta \cdot \cos^{-\frac{5}{2}} 2\theta = \frac{2}{a}\cos^{-\frac{1}{2}} 2\theta + \frac{3}{a}(1-\cos^2 2\theta)\cos^{-\frac{5}{2}} 2\theta$

$= \frac{2}{a}\cos^{-\frac{1}{2}} 2\theta + \frac{3}{a}\cos^{-\frac{5}{2}} 2\theta - \frac{3}{a}\cos^{-\frac{1}{2}} 2\theta = \frac{-1}{a}\cos^{-\frac{1}{2}} 2\theta + \frac{3}{a}\cos^{-\frac{5}{2}} 2\theta$

$= -u + \frac{3}{a}a^5u^5 = -u + 3a^4u^5$ ③

بالتعويض :

$\vec{\gamma} = -c^2u^2(-u + 3a^4u^5 + u)\vec{er}$

$= -c^2u^2(3a^4u^5)\vec{er} = -3c^2a^4u^7\vec{er} = \frac{-3c^2a^4}{r^7}\vec{er}$ ②

السؤال الثاني (30 درجة)

نقطة مادية M تتحرك في المستو xoy فإذا كانت النسبة بين V_x مركبة السرعة على المحور الأفقي $(o, \vec{e_x})$ و V_r مركبة السرعة على نصف القطر المبحري $(o, \vec{e_r})$ تساوي إلى ثابت k. المطلوب :

1) عين نوع المسار وناقش حسب قيم k

2) أوجد النسبة بين v_y مركبة السرعة على المحور الشاقولي $(o, \vec{e_y})$ و v_θ مركبة السرعة على المحور $(o, \vec{e_\theta})$.

الحل: 1) لدينا :

$$\frac{v_x}{v_r} = k \Rightarrow v_x = k v_r$$

3

$$v_x = \dot{x} \quad , \quad v_r = \dot{r}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{e_x} + v_y \vec{e_y}$$ في الاحداثيات الديكارتية

و $$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$ في الاحداثيات القطبية 3

3 $$\Rightarrow \dot{x} = k\dot{r} \overset{\text{بالمكاملة}}{\Rightarrow} x = kr + c_1 \quad (*)$$

3 $$x = r\cos\theta \overset{\text{بالتعويض}}{\Rightarrow} r\cos\theta = kr + c_1 \Rightarrow r(k - \cos\theta) = c$$

$$\Rightarrow r = \frac{c}{k - \cos\theta} = \frac{c/k}{1 - \frac{1}{k}\cos\theta}$$

$$\boxed{r = \frac{P}{1 + e\cos\theta_1}}$$ 2 ; $P = \frac{c}{k}$, $e = \frac{1}{k}$; $\theta_1 = \pi - \theta$

$\cos\theta_1 = -\cos\theta$

وهي معادلة المسار

المناقشة

$e < 1$ قطع ناقص $\quad \frac{1}{k} < 1 \Rightarrow 1 < k$

$e > 1$ قطع زائد $\quad \frac{1}{k} > 1 \Rightarrow 1 > k$

$e = 1$ قطع مكافئ $\quad k = 1$

$e = 0$ دائرة $\Rightarrow$ لا يمكن (ام لاتتقدم).

2

(2

$$\frac{v_y}{v_\theta} = \frac{\dot{y}}{r\dot{\theta}}$$ 3

$$y = r\sin\theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$ 3

$$\frac{v_y}{v_\theta} = \frac{\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta}{r\dot{\theta}} = \frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}}\sin\theta + \cos\theta$$

(*)ص

$x = Kr + C_1 \quad , \quad x = r\cos\theta$

$r\cos\theta = Kr + C_1$

$\dot r\cos\theta - r\dot\theta\sin\theta = K\dot r$

$(K-\cos\theta)\dot r = -r\dot\theta\sin\theta \Rightarrow \boxed{\dfrac{\dot r}{r\dot\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta - K}}$ ③

نعوض في النسبة :

$$\frac{v_y}{v_\theta} = \frac{\dot r}{r\dot\theta}\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta - K} + \cos\theta = \frac{\sin^2\theta + \cos\theta(\cos\theta - K)}{\cos\theta - K}$$

$$\frac{v_y}{v_\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - K\cos\theta}{\cos\theta - K} = \frac{1 - K\cos\theta}{\cos\theta - K}$$ ③

السؤال الثالث (25 درجة)

يوضع جسم على مستو أفقي أملس. يتحرك هذا الجسم تحت تأثير قوة أفقية وفق المحور $\vec{ox}$ معطاة بالعلاقة :

$$F = h \sin kt$$

حيث k ، h ثابتان .

والمطلوب : أوجد قانون الحركة لهذا الجسم وأوجد المعادلة التفاضلية لهذه الحركة .

الحل :

$$m\vec{\gamma} = \Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{F} \quad ⑤$$

بالإسقاط على ox المحور الأفقي : $m\ddot{x} = h \sin kt$ ⑤

وهي المعادلة التفاضلية للحركة .

$$m\frac{dv}{dt} = h \sin kt$$

$$dv = \frac{h}{m} \sin kt \, dt$$

بالتكامل $\Longrightarrow$ $v = -\frac{h}{mk} \cos kt + c$

عندما $t = 0$ ، $v = v_0$ $\Leftarrow$ $c = v_0 + \frac{h}{mk}$

$$v = -\frac{h}{mk} \cos kt + v_0 + \frac{h}{mk}$$

$$v = \frac{h}{mk}(1 - \cos kt) + v_0 \quad ⑤$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{h}{mk}(1 - \cos kt) + v_0$$

$$dx = \frac{h}{mk}(1 - \cos kt)\,dt + v_0\,dt$$

بالتكامل $\Longrightarrow$ $x = \frac{h}{mk}t - \frac{h}{mk^2} \sin kt + v_0 t + C_1$ ⑤

في اللحظة $t = 0$ ، $x = 0$ $\Leftarrow$ $0 = C_1$

$$\boxed{x = \frac{h}{mk}t - \frac{h}{mk^2} \sin kt + v_0 t} \quad ⑤$$

وهو قانون الحركة المطلوب .

إذا الطالب وضع قانون الطاقة الحركية بدلاً من القانون الأساسي يأخذ ⑤

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية 2023 -2022

المدة: ساعتين
الدرجة : 90

السؤال الأول (25 درجة):

ادرس الحركة الدائرية لنقطة مادية (الموضع و السرعة والتسارع) في الإحداثيات الذاتية.

ثم بين متى تكون هذه الحركة متغيرة(متسارعة ومتباطئة) بانتظام ؟

السؤال الثاني (30 درجة):

لتكن لدينا النقطة المادية المعينة بنصف القطر المتجهي:

$$x(t) = t \ , \ y(t) = t^2 \ , \ z(t) = 0$$

و المطلوب : 1) حدد المسار ثم أوجد السرعة العددية لهذه النقطة.

2) احسب التسارع الكلي والمماسي والناظمي ونصف قطر التقوس.

3) أوجد متجه واحدة المماس $\vec{\tau}$ للمسار .

4) أوجد متجه واحدة الناظم الأساسي $\vec{n}$ للمسار.

السؤال الثالث (35 درجة):

نقطة مادية M كتلتها m تتحرك على المحور $\overrightarrow{ox}$ وتخضع لقوة جاذبة متناسبة عكساً مع مكعب البعد أي :

$$F = -\frac{mk^2}{x^3}$$

حيث k ثابت والمطلوب:

1) اكتب المعادلة التفاضلية للحركة، ثم أوجد معادلة الحركة .

2) أوجد الزمن اللازم لوصول النقطة إلى الموضع $x = 0$.

علماً أنه في اللحظة $(t = 0)$ تركت النقطة من الموضع $(x = a)$ بدون سرعة ابتدائية $(x' = 0)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

ميكانيك (1) الدورة الفصلية الثانية 2022- 2023

السؤال الأول (25 درجة) :

ادرس الحركة الدائرية لنقطة مادية (متجهات الموضع والسرعة والتسارع) في الاحداثيات الذاتية. ثم بين متى تكون هذه الحركة متغيرة (متسارعة ومتباطئة) بانتظام؟

الحل: لتكن s الفاصلة المنحنية للنقطة المادية M على الدائرة

$$s = s(t)$$

فيكون

$$ds = R\,d\theta$$ ③

حيث R نصف قطر الدائرة و $d\theta$ الزاوية المركزية الجزئية المقابلة لـ ds عنصر قوس من مسار الحركة الدائرية.

السرعة في الحركة الدائرية هي:

$$v = \frac{ds}{dt} = R.\frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta} = R\omega$$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = R\omega\vec{\tau}$$ ③

لدينا التسارع في الاحداثيات الذاتية يعطى بالعلاقة:

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$ ③

التسارع المماسي:

$$\gamma_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\varepsilon$$

$$\vec{\gamma}_\tau = R\varepsilon\vec{\tau}$$ ③

التسارع الناظمي:

$$\gamma_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$$

$$\vec{\gamma}_n = R\omega^2\vec{n}$$ ③

والتسارع :

$$\vec{\gamma} = R\varepsilon\vec{\tau} + R\omega^2\vec{n}$$

- نقول عن الحركة الدائرية بأنها متغيرة بانتظام إذا كان التسارع الزاوي ثابت:

$$\ddot{\theta} = \varepsilon = \varepsilon_0 = cte$$ ③

$$\dot{\theta} = \varepsilon_0 t + \omega_0$$

$$\theta = \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

$$\vec{OM} = R\,\vec{e_r}$$

$$\vec{v}(M) = R\omega\vec{e_\theta} = R(\varepsilon_0 t + \omega_0)\vec{e_\theta}$$

$$\vec{\gamma}(M) = -R\omega^2\vec{e_r} + R\varepsilon_0\vec{e_\theta}$$

تكون الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام متسارعة:

① $$\vec{v}.\vec{\gamma} = R\omega\vec{e_\theta}(-R\omega^2\vec{e_r} + R\varepsilon_0\vec{e_\theta}) = R^2\omega\varepsilon > 0 \Rightarrow \boxed{\omega.\varepsilon > 0}$$ ③

تكون الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام متباطئة إذا كان: $\boxed{\omega.\varepsilon < 0}$ ③

السؤال الثاني (30 درجة)

لتكن لدينا النقطة المادية المعينة بنصف القطر المتجه :

$$x(t) = t \quad , \quad y(t) = t^2 \quad , \quad z(t) = 0$$

والمطلوب : 1) حدد المسار ثم أوجد السرعة العددية لهذه النقطة 2) احسب التسارع الكلي والمماسي والناظمي ونصف قطر التقوس

3) أوجد متجه واحدة المماس $\vec{\tau}$ للمسار

4) أوجد متجه واحدة الناظم الأساسي $\vec{n}$ N للمسار .

الحل : 1) معادلة المسار 3 $\boxed{y = x^2}$ معادلة قطع مكافئ

2) 3

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{e_x} + 2t\,\vec{e_y} + 0\,\vec{e_z}$$

السرعة العددية : 3

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z'^2} = \sqrt{1+4t^2} = \frac{ds}{dt}$$

التسارع الكلي : 3

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0\,\vec{e_x} + 2\,\vec{e_y} + 0\,\vec{e_z}$$

$$\gamma = |\vec{\gamma}| = \sqrt{2^2} = 2$$

التسارع المماسي : 3

$$\gamma_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{8t}{2\sqrt{1+4t^2}} = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

التسارع الناظمي : 3

$$\gamma_n^2 = \gamma^2 - \gamma_\tau^2 = (2)^2 - \frac{(4t)^2}{1+4t^2} = \frac{4(1+4t^2)-16t^2}{1+4t^2}$$

$$\gamma_n^2 = \frac{4}{1+4t^2} \Rightarrow \gamma_n = \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$$

نصف قطر التقوس : 3

$$\gamma_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{1+4t^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{(1+4t^2)\sqrt{1+4t^2}}{2} = \frac{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

متجه واحدة المماس : 3

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{e_x} + \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{e_y} + 0\,\vec{e_z}$$

متجه الناظم (متجه تقوس المنحني) :

$$\vec{K} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \Big/ \frac{ds}{dt} = \vec{\tau}'/v$$

$$\vec{\tau}' = \frac{-8t}{2(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e_x} + \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e_y} + 0\,\vec{e_z} = \frac{-4t}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e_x} + \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e_y}$$

$$\vec{K} = \vec{\tau}'/v = \frac{-4t}{(1+4t^2)^2}\vec{e_x} + \frac{2}{(1+4t^2)^2}\vec{e_y}$$ 3

$$|\vec{K}| = \frac{1}{\rho} = \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

متجه واحدة الناظم الأساسي : 3

$$\vec{n} = \frac{\vec{K}}{|\vec{K}|} = \frac{-2t}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{e_x} + \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{e_y}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\left(-2t\,\vec{e_x} + \vec{e_y}\right)$$

السؤال الثالث (35 درجة)

نقطة مادية M كتلتها m تتحرك على المحور $\vec{ox}$ وتخضع لقوة جاذبة متناسبة عكساً مع مكعب البعد أي: $F = -\frac{mK^2}{x^3}$

حيث K ثابت والمطلوب:

1) اكتب المعادلة التفاضلية للحركة ثم أوجد معادلة الحركة.

2) أوجد الزمن اللازم لوصول النقطة إلى الموضع $x=0$.

علماً أنه في اللحظة $t=0$ تركت النقطة من الموضع $(x=a)$ بدون سرعة ابتدائية $(x'=0)$

الحل:

نستخدم القانون الأساسي في التحريك: $m\vec{\gamma} = \vec{F}$ ⑤

بالإسقاط على المحور ox: $m x'' = \frac{-mK^2}{x^3}$

$$\boxed{x'' = -\frac{K^2}{x^3}}$$ ⑤ وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{K^2}{x^3}$$

نضرب الطرفين بـ dx

$$dx\frac{dx'}{dt} = -\frac{K^2}{x^3}dx$$

$$x'dx' = -\frac{K^2}{x^3}dx$$

بالمكاملة $\Rightarrow \frac{x'^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{K^2}{x^2} + c$ ⑤

$$x'^2 = \frac{K^2}{x^2} + c_1 \quad ; \; c_1 = 2c$$

من الشروط الابتدائية في اللحظة $t=0$ كانت $\left\{\begin{matrix} x=a \\ x'=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{c_1 = -\frac{K^2}{a^2}}$

$$x'^2 = \frac{K^2}{x^2} - \frac{K^2}{a^2} \Rightarrow x'^2 = \frac{K^2(a^2-x^2)}{x^2a^2} \Rightarrow x' = \pm\frac{K}{xa}\sqrt{a^2-x^2}$$ ⑤

بما أن القوة جاذبة نختار الإشارة السالبة.

$$x' = -\frac{K}{xa}\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{K}{xa}\sqrt{a^2-x^2}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى قابلة للفصل:

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{K}{a}dt$$

بالمكاملة:

$$-\sqrt{a^2-x^2} = -\frac{K}{a}t + C_2$$

لنوجد الثابت c_2 من شروط البدء

$$t=0 \Rightarrow x=a \Rightarrow \sqrt{-a^2-a^2} = -\frac{k}{a}(0)+c_2 \Rightarrow c_2=0$$

5

$$\Rightarrow -\sqrt{a^2-x^2} = -\frac{k}{a}t \Rightarrow \sqrt{a^2-x^2} = \frac{k}{a}t$$

$$\Rightarrow a^2-x^2 = \frac{k^2}{a^2}t^2 \Rightarrow -x^2 = \frac{k^2}{a^2}t^2 - a^2$$

$$x^2 = a^2 - \frac{k^2}{a^2}t^2$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2-\frac{k^2}{a^2}t^2}$$

بما أن المعادلة حركة سنختار الإشارة الموجبة :

$$\boxed{x = \sqrt{a^2-\frac{k^2}{a^2}t^2}}$$

5

2) لحساب الزمن :

$$x = \sqrt{a^2-\frac{k^2}{a^2}t^2} \Rightarrow x^2 = a^2-\frac{k^2}{a^2}t^2$$

$$x^2-a^2 = -\frac{k^2}{a^2}t^2 \Rightarrow a^2-x^2 = \frac{k^2}{a^2}t^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2-x^2} = \frac{k}{a}t$$

عندما $x=0$

$$\boxed{\frac{a^2}{k} = t}$$

5

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات ـــالسنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى 2023- 2022

المدة: ساعتين
الدرجة : 90

السؤال الأول (30 درجة):

ادرس حركة نقطة مادية تتحرك في الفضاء (متجهات الموضع و السرعة والتسارع) في الإحداثيات الكروية.

السؤال الثاني (60 درجة):

نقطة مادية تتحرك في المستو xoy والمطلوب:

A) أثبت أنه إذا كان التسارع مركزي فإن الحركة خاضعة لقانون السطوح.

B) إذا كانت النقطة المادية تتحرك وفق المسار:

$$r = 2a\cos\theta$$

حيث a ثابت والمطلوب:

1) برهن أن الحركة خاضعة لقانون السطوح إذا علمت أن المعادلة الزمنية للحركة:

$$t = 2\theta + \sin 2\theta$$

2) أوجد السرعة العددية و متجه تسارع هذه النقطة بدلالة نصف القطر المتجهي r .

3) إذا تحركت هذه النقطة تحت تأثير قوة $\vec{F}$ أثبت أن هذه القوة جاذبة وتتناسب مع r^5 .

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

جامعة طرطوس
كلية العـلـوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى 2023- 2022

المدة: ساعتين
الدرجة : 90

السؤال الأول (30 درجة):

ادرس حركة نقطة مادية تتحرك في الفضاء (متجهات الموضع و السرعة والتسارع) في الإحداثيات الكروية.

السؤال الثاني (60 درجة):

نقطة مادية تتحرك في المستو xoy والمطلوب:

A) أثبت أنه إذا كان التسارع مركزي فإن الحركة خاضعة لقانون السطوح.

B) إذا كانت النقطة المادية تتحرك وفق المسار:

$$r = 2a\cos\theta$$

حيث a ثابت والمطلوب:

1) برهن أن الحركة خاضعة لقانون السطوح إذا علمت أن المعادلة الزمنية للحركة:

$$t = 2\theta + \sin 2\theta$$

2) أوجد السرعة العددية و متجه تسارع هذه النقطة بدلالة نصف القطر المتجهي r .

3) إذا تحركت هذه النقطة تحت تأثير قوة $\vec{F}$ أثبت أن هذه القوة جاذبة وتتناسب مع r^5 .

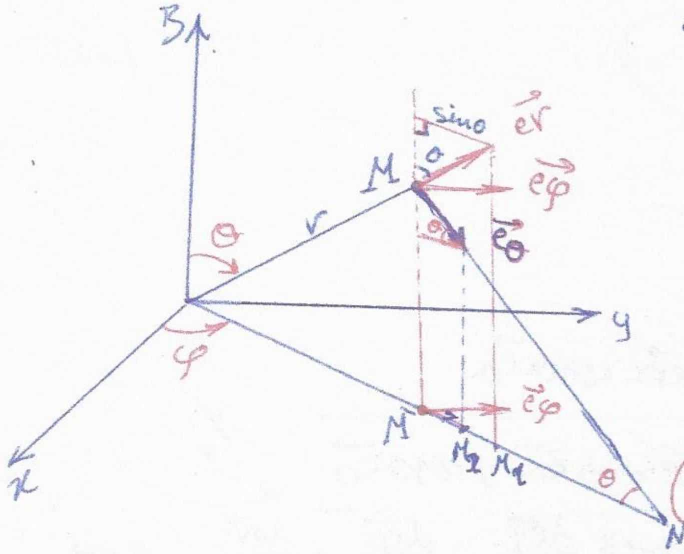
مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

ميكانيك (1) الدورة الفصلية الأولى 2022 - 2023

السؤال الأول (30 درجة)

ادرس حركة نقطة مادية تتحرك في الفضاء (متجهات الموضع والسرعة والتسارع) في الاحداثيات الكروية.



الحل:

الاحداثيات الكروية للنقطة المادية M هي

(r, θ, φ)

حيث r هو نصف القطر المتجه $r = |OM|$

و $\theta = (\widehat{\vec{e_z}, \vec{OM}})$ ، $0 \leq \theta \leq \pi$

و $\varphi = (\widehat{\vec{e_x}, \vec{OM'}})$ ، $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

⑥
$$\vec{e_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e_x} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e_y} + \cos\theta\,\vec{e_z}$$
$$\vec{e_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e_x} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e_y} - \sin\theta\,\vec{e_z}$$
$$\vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{e_x} + \cos\varphi\,\vec{e_y}$$

متجه الموضع: ③
$$\vec{OM} = r\vec{e_r} = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e_x} + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{e_y} + r\cos\theta\,\vec{e_z}$$

متجه السرعة:
$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\left(\frac{d\vec{e_r}}{d\theta}\cdot\dot{\theta} + \frac{d\vec{e_r}}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi}\right)$$ ③

$$\frac{d\vec{e_r}}{d\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e_x} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e_y} - \sin\theta\,\vec{e_z} = \vec{e_\theta}.$$

$$\frac{d\vec{e_r}}{d\varphi} = -\sin\theta\sin\varphi\,\vec{e_x} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e_y} = \sin\theta\,\vec{e_\varphi}$$

نعوض في علاقة السرعة:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}}$$ ③

متجه التسارع:

باشتقاق علاقة السرعة السابقة:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\,\vec{e_r} + \dot{r}\frac{d\vec{e_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} + \dot{r}\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$$
$$+ r\cos\theta.\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} + r\sin\theta\,\ddot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}$$ ③

وجدنا سابقاً أن:

$$\boxed{\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}}$$ ③

لنوجد : $\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta}.\dot\theta + \frac{d\vec{e_\theta}}{d\varphi}.\dot\varphi$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e_x} - \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e_y} - \cos\theta\,\vec{e_z} = -\vec{e_r}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{d\varphi} = -\cos\theta\sin\varphi\,\vec{e_x} + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e_y} = \cos\theta\,\vec{e_\varphi}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta.\dot\varphi\,\vec{e_\varphi}}$$

3

$$\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{e_\varphi}}{d\theta}}_{=0}.\dot\theta + \frac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi}.\dot\varphi = \frac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi}.\dot\varphi$$

$$\frac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi} = -\cos\varphi\,\vec{e_x} - \sin\varphi\,\vec{e_y} = -\sin\theta\,\vec{e_r} - \cos\theta\,\vec{e_\theta}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} = \dot\varphi(-\sin\theta\,\vec{e_r} - \cos\theta\,\vec{e_\theta}) = -\dot\varphi\sin\theta\,\vec{e_r} - \dot\varphi\cos\theta\,\vec{e_\theta}}$$

3

نعوض $\frac{d\vec{e_r}}{dt}$ ، $\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$ ، $\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}$ في علاقة التسارع :

$$\vec\gamma = \ddot r\,\vec{e_r} + \dot r(\dot\theta\,\vec{e_\theta} + \sin\theta\,\dot\varphi\,\vec{e_\varphi}) + \dot r\dot\theta\,\vec{e_\theta} + r\ddot\theta\,\vec{e_\theta} + r\dot\theta(-\dot\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta.\dot\varphi\,\vec{e_\varphi})$$
$$+ \dot r\sin\theta\,\dot\varphi\,\vec{e_\varphi} + r\cos\theta.\dot\theta.\dot\varphi\,\vec{e_\varphi} + r\sin\theta.\ddot\varphi\,\vec{e_\varphi} + r\sin\theta\,\dot\varphi(-\dot\varphi\sin\theta\,\vec{e_r}$$
$$- \dot\varphi\cos\theta\,\vec{e_\theta})$$

بفك الأقواس والترتيب نجد :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec\gamma = {} & (\ddot r - r\dot\theta^2 - r\sin^2\theta\,\dot\varphi^2)\vec{e_r} + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta - r\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2)\vec{e_\theta} + \\ & (2\dot r\sin\theta\,\dot\varphi + 2r\dot\theta\cos\theta\,\dot\varphi + r\sin\theta.\ddot\varphi)\vec{e_\varphi}\end{aligned}}$$

3

السؤال الثاني (60 درجة) :

نقطة مادية تتحرك في المستوي xoy والمطلوب :

$\boxed{A}$ برهن أنه إذا كان التسارع مركزي فإن الحركة خاضعة لقانون السطوح.

$\boxed{B}$ إذا كانت النقطة تتحرك وفق المسار :

$r = 2a\cos\theta$; a ثابت

المطلوب : ① برهن أن الحركة خاضعة لقانون السطوح إذا علمت أن المعادلة الزمنية للحركة $t = 2\theta + \sin 2\theta$

② أوجد السرعة العددية ومتجه تسارع هذه النقطة بدلالة نصف القطر المتجه r.

③ إذا تحركت هذه النقطة تحت تأثير قوة $\vec{F}$ أثبت أن هذه القوة جاذبة وتتناسب مع r^5.

حل :

$\boxed{A}$ التسارع في المستوي :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$$

5

$$\gamma_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

التسارع مركزي :

$$\Rightarrow \gamma_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

5

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow \boxed{r^2\dot{\theta} = c} \Longrightarrow$$ الحركة خاضعة لقانون السطوح

5

(أو بطريقة أخرى :

التسارع السطحي :

$$\vec{W} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{\gamma}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e_r} & \vec{e_\theta} & \vec{e_z} \\ r & 0 & 0 \\ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\vec{e_z} = \frac{1}{2}(r\gamma_\theta)\vec{e_z}$$

$$\dot{W} = \frac{1}{2}(r^2\dot{\theta})^{\cdot} = \frac{r}{2}\gamma_\theta = 0 \Rightarrow \boxed{r^2\dot{\theta} = c}$$ السرعة السطحية ثابتة

والحركة خاضعة لقانون السطوح)

$\boxed{B}$ ① تكون الحركة خاضعة لقانون السطوح إذا كان : $r^2\dot{\theta} = c$

$$r^2 = 4a^2\cos^2\theta$$

$$t = 2\theta + \sin 2\theta \xrightarrow{\text{باشتقاق الطرفين}} 1 = 2\dot{\theta} + 2\dot{\theta}\cos 2\theta = 2\dot{\theta}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{2(1+\cos 2\theta)} = \frac{1}{4\cos^2\theta}$$

5

$$r^2\dot{\theta} = 4a^2\cos^2\theta \cdot \frac{1}{4\cos^2\theta} = a^2 = c \Longrightarrow$$ الحركة خاضعة لقانون السطوح

5

② بما أن الحركة خاضعة لقانون السطوح نستخدم دستورا بينيه :

السرعة العددية : $v^2 = c^2(u'^2 + u^2)$ 5

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{2a}\cos^{-1}\theta \xRightarrow{\text{الاشتقاق}}$$

$$u' = \frac{1}{2a}\cos^{-2}\theta \sin\theta$$

$$u'' = \frac{1}{2a}(-2)\cos^{-3}\theta(-\sin\theta)\sin\theta + \frac{1}{2a}\cos^{-2}\theta(\cos\theta)$$ 5

$$u'' = \frac{1}{a}\cos^{-3}\theta\sin^2\theta + \frac{1}{2a}\cos^{-1}\theta = \frac{1}{a}\cos^{-3}\theta(1-\cos^2\theta) + \frac{1}{2a}\cos^{-1}\theta$$

$$u'' = \frac{1}{a}\cos^{-3}\theta - \frac{1}{a}\cos^{-1}\theta + \frac{1}{2a}\cos^{-1}\theta = \frac{1}{a}\cos^{-3}\theta - \frac{1}{2a}\cos^{-1}\theta = 8a^2u^3 - u$$

$$v^2 = c^2(u'^2 + u^2) = a^4\left(\frac{1}{4a^2}\cos^{-4}\theta\sin^2\theta + \frac{1}{4a^2}\cos^{-2}\theta\right)$$

$$v^2 = a^4\left(\frac{1}{4a^2}\cos^{-4}\theta(1-\cos^2\theta) + \frac{1}{4a^2}\cos^{-2}\theta\right) = a^4\left(\frac{1}{4a^2}\cos^{-4}\theta \cancel{-\frac{1}{4a^2}\cos^{-2}\theta} \cancel{+\frac{1}{4a^2}\cos^{-2}\theta}\right)$$

$$\boxed{v^2 = \frac{a^2}{4}\cos^{-4}\theta} \Rightarrow \boxed{v = \frac{a}{2}\cos^{-2}\theta} \Rightarrow \boxed{v = \frac{2a^3}{r^3}}$$ 5

التسارع : دستور بينيه الثاني : 5

$$\vec{\gamma} = -c^2u^2(u''+u)\vec{e_r}$$

$$\vec{\gamma} = -u^2a^4(8a^2u^3 - u + u)\vec{e_r} = -u^2a^4(8a^2u^3)\vec{e_r}$$

$$\vec{\gamma} = -8a^6u^5\vec{e_r} \Longrightarrow \boxed{\vec{\gamma} = \frac{-8a^6}{r^5}\vec{e_r}}$$ 5

③ بتطبيق القانون الأساسي في التحريك

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}$$ 5

بما أن الحركة خاضعة لقانون السطوح فإن

$$\vec{\gamma} = -c^2u^2(u''+u)\vec{e_r} \Longrightarrow \vec{\gamma} = \frac{-8a^6}{r^5}\vec{e_r}$$

$$\Longrightarrow m\gamma = F \Longrightarrow \boxed{F = \frac{-8ma^6}{r^5}}$$ 5

إشارة (-) تدل على أن هذه القوة جاذبة . وهذه القوة تتناسب عكساً مع r^5.

جامعة طرطوس
كلية العلــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية 2022- 2021

المدة: ساعتين
الدرجة : 90

السؤال الأول (25 درجة):

ينطلق قارب كتلته m بسرعة ابتدائية v_0 باتجاه معاكس لاتجاه تيار الماء وكانت قوة المقاومة تتناسب مع سرعة هذا القارب من الشكل $R = -m\mu v$ حيث μ ثابت موجب.

المطلوب : 1) أوجد المعادلة التفاضلية للحركة.

2) كم من الوقت يلزم كي تتناقص سرعة هذا القارب إلى نصف السرعة الإبتدائية.

السؤال الثاني (20 درجة):

برهن أن المشتق الزمني للعزم الحركي لنقطة مادية بالنسبة للنقطة o هو عزم محصلة القوى المؤثرة على النقطة المادية بالنسبة للنقطة o.

السؤال الثالث (20 درجة):

في حركة الأرض حول الشمس. برهن أن نسبة السرعة العددية في أقرب نقطة عن الشمس إلى السرعة العددية في أبعد نقطة عن الشمس هي $\frac{1+e}{1-e}$ حيث e التباعد المركزي للمسار.

السؤال الرابع (25 درجة):

M نقطة مادية تخضع لحقل قوى يشتق من تابع قوى: $U = xyz$

المطلوب: 1) عين خطوط قوى هذا الحقل و سطوح السوية .

2)عين العمل الذي ينجزه هذا الحقل عندما تتحرك هذه النقطة على المنحن:
$z = y \ , \ x = y^2 - 2$ ويزداد ترتيبها من 6 إلى 10 .

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الثاني (20 درجة)

برهن أن المشتق الزمني للعزم الحركي لنقطة مادية حول النقطة o هو عزم محصلة القوى المؤثرة على النقطة المادية حول النقطة o.

الحل: لنأخذ القانون الأساسي في التحريك:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$$ 5

نضرب طرفيه متجهياً (خارجياً) بنصف القطر المتجهي $\vec{r}$ المحدد للنقطة المادية

$$m\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right)=\vec{r}\times\vec{F}\quad(1)$$ 5

ولكن:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v})=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}+\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}=\underbrace{\vec{v}\times\vec{v}}_{=0}+\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}$$

نعوض في العلاقة (1)

$$m\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v})=\vec{r}\times\vec{F}\Rightarrow\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})=\vec{r}\times\vec{F}$$

$\vec{r}\times m\vec{v}$ هو عزم كمية الحركة بالنسبة للنقطة o أي هو العزم الحركي للنقطة المادية بالنسبة لـ o 5

$\vec{r}\times\vec{F}$ هو عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة للنقطة o

وبالتالي:

$$\frac{d}{dt}(\sigma_o)=M_o(\vec{F})$$ 5

أي أن المشتق الزمني للعزم الحركي لنقطة مادية حول مركز ما يساوي إلى عزم القوة المؤثرة في هذه النقطة بالنسبة لهذا المركز.

السؤال الأول (25 درجة)

ينطلق قارب بسرعة v_0 باتجاه معاكس لاتجاه تيار الماء وكانت قوة المقاومة تتناسب مع سرعة هذا القارب من الشكل $R=-m\mu.v$ (μ ثابت موجب)، فإذا كانت كتلة القارب m. والمطلوب:

1) أوجد المعادلة التفاضلية الحركة

2) كم من الوقت يلزم كي تتناقص سرعة القارب إلى نصف السرعة الابتدائية.

الحل: 1) بتطبيق المبدأ الأساسي في التحريك

$$m\vec{\gamma}=\vec{F}$$ 5

بالاسقاط على المحور ox:

$$m\ddot{x}=-m\mu v$$

$$\boxed{\ddot{x}=-\mu\dot{x}}$$ 5

2)

$$\frac{d\dot{x}}{dt}=-\mu\dot{x}\Rightarrow\frac{d\dot{x}}{\dot{x}}=-\mu dt$$

$$\ln|\dot{x}|=-\mu t+C_1\quad(1)$$ 5

لتعيين الثابت C_1 من شروط البدء

$t=0,\ v=v_0\ (x'=x'_0) \Rightarrow C_1=\ln|v_0|$

$\ln|v|=-\mu t+\ln|v_0|$ نعوض في (1)

$\ln\left|\frac{v}{v_0}\right|=-\mu t \Rightarrow v=v_0 e^{-\mu t}$ ⑤

متى تتناقص السرعة إلى نصف السرعة الابتدائية أي $v=\frac{1}{2}v_0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}v_0=v_0 e^{-\mu t} \Rightarrow \frac{1}{2}=e^{-\mu t} \Rightarrow \ln\frac{1}{2}=-\mu t$

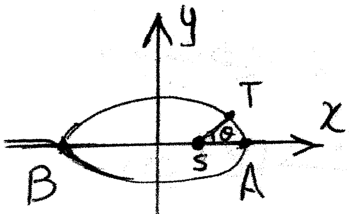
$\Rightarrow t=\frac{-\ln\frac{1}{2}}{\mu}=\frac{\ln 2}{\mu},\ \boxed{t=\frac{\ln 2}{\mu}}$ ⑤

وهو الزمن اللازم لكي تتناقص سرعة القارب إلى نصف السرعة الابتدائية.

السؤال الثالث (20 درجة)

في حركة الأرض حول الشمس برهن أن نسبة السرعة المددية في أقرب نقطة عن الشمس إلى السرعة العددية في أبعد نقطة عنها هي $\frac{1+e}{1-e}$ حيث e التباعد المركزي للمسار.

الحل: لدينا مسار حركة الأرض حول الشمس هو:



$$r=\frac{P}{1+e\cos\theta}$$ ③

وحركة الأرض مركزية حول الشمس وتخضع لقانون السطوح. من قانون بينيه الأول لدينا:

$$v^2=C^2(u'^2_\theta+u^2)$$ ③

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos\theta}{P},\quad u'_\theta=\frac{-e\sin\theta}{P}$$ ③

$$v^2=C^2\left[\frac{e^2\sin^2\theta}{P^2}+\frac{(1+e\cos\theta)^2}{P^2}\right]=\frac{C^2}{P^2}\left[e^2\sin^2\theta+1+2e\cos\theta+e^2\cos^2\theta\right]$$

$$v^2=\frac{C^2}{P^2}\left[e^2+2e\cos\theta+1\right]\quad (1)$$ ③

- في أقرب نقطة من الشمس يكون $\theta=0$ نعوض في (1)

$$v_A^2=\frac{C^2}{P^2}(1+e)^2$$ ③

$$P=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=a-\frac{c^2}{a}=a\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=a(1-e^2)$$

$$v_A^2=\frac{C^2(1+e)^2}{a^2(1-e^2)^2}=\frac{C^2(1+e)^2}{a^2(1-e)^2(1+e)^2}=\frac{C^2}{a^2(1-e)^2}$$

$$\boxed{v_A = \frac{c}{a(1-e)}}$$ سرعة الأرض في أقرب نقطة عن الشمس

③

عندما تكون الأرض في أبعد نقطة عن الشمس تكون $\theta = \pi$ تعوض في (1)

$$v_B^2 = \frac{c^2(1-e)^2}{p^2} = \frac{c^2(1-e)^2}{a^2(1-e)^2(1+e)^2} = \frac{c^2}{a^2(1+e)^2}$$

$$\boxed{v_B = \frac{c}{a(1+e)}}$$ ② سرعة الأرض في أبعد نقطة عن الشمس

$$\boxed{\frac{v_A}{v_B} = \frac{1+e}{1-e}}$$

إذا الطالب حل $|\vec{r}_A \times \vec{v}_A| = |\vec{r}_B \times \vec{v}_B|$ ③

$r_A \cdot v_A \sin\frac{\pi}{2} = r_B \cdot v_B \sin\frac{\pi}{2}$ ③

$\frac{v_A}{v_B} = \frac{r_B}{r_A}$ ③ , $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ ③

أقرب نقطة عن الشمس $\theta = 0$ $r_A = \frac{p}{1+e}$ ③

أبعد نقطة عن الشمس $\theta = \pi$ $r_B = \frac{p}{1-e}$ ③

$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\frac{p}{1-e}}{\frac{p}{1+e}}$ ②

السؤال الرابع (25 درجة)

M نقطة مادية تخضع لحقل قوى يشتق من تابع قوى

$U = xyz$

① عين خطوط قوى هذا الحقل وسطوح السوية

② عين العمل الذي ينجزه هذا الحقل عندما تتحرك هذه النقطة على المنحني

$x = y^2 - 2$ و $y = z$ ويزداد y ترتيباً من 6 إلى 10 .

الحل:

حقل القوى : $\vec{F} = F_x\,\vec{e}_x + F_y\,\vec{e}_y + F_z\,\vec{e}_z$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = yz$$

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = xz$$

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = xy$$

③

خطوط القوى :

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$

⑤

$$\underset{(1)}{\frac{dx}{yz}} = \underset{(2)}{\frac{dy}{xz}} = \underset{(3)}{\frac{dz}{xy}}$$

من الأولى والثانية :

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x} \Rightarrow x\,dx-y\,dy=0$$

$$\xRightarrow{\text{بالتكامل}} \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=C_1' \Rightarrow \boxed{x^2-y^2=C_1} \;(4) \;;\; C_1=2C_1'$$

3

ومن الثانية والثالثة :

$$\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y} \Rightarrow y\,dy=z\,dz$$

$$\xRightarrow{\text{بالتكامل}} \frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{2}=C_2' \Rightarrow \boxed{y^2-z^2=C_2} \;(5) \;;\; 2C_2'=C_2$$

3

فخطوط القوى هي المنحنيات التي تنشأ من تقاطع السطوح (4) و (5)

3

سطوح السوية :

$$\boxed{xyz=C}$$

3

2) العمل الذي ينجزه هذا الحقل

$$W=\vec{F}.\vec{dr}=\int_{M_1}^{M_2} dU=\left[U\right]_{M_1}^{M_2}=U(M_2)-U(M_1)$$

3

M يزداد ترتيبها من 6 إلى 10 على المنحني $x=y^2-2$, $z=y$

$y=6 \Rightarrow x=(6)^2-2=34$ و $z=6$

$M_1(34,6,6)$

$y=10 \Rightarrow x=100-2=98$, $z=10$

$M_2(98,10,10)$

$$W_{M_1\to M_2}=U(M_2)-U(M_1)=(98\times10\times10)-(34\times6\times6)=9800-1224$$

$$=8576$$

2

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى 2022- 2021

المدة: ساعتين
الدرجة : 90

السؤال الأول (30 درجة):

نلقي كرة ثقيلة كتلتها m شاقولياً نحو الأسفل في نهر بسرعة ابتدائية v_0 . تصل هذه الكرة إلى قعر النهر بعد مرور زمن قدره 4 ثوان. إذا علمت أن مسقط قوة مقاومة الماء على المحور الشاقولي النازل oy هو $R = -mk\,y'$ حيث k ثابت موجب وأن الحركة بدأت من سطح النهر . المطلوب :

1) أوجد المعادلة التفاضلية لحركة الكرة.

2) أوجد معادلة الحركة.

3) احسب عمق النهر.

السؤال الثاني (25 درجة):

نقطة مادية M كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لسلك على شكل قطع ناقص:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$

تؤثر في النقطة M قوة جاذبة متناسبة مع بعد النقطة عن مركز الجذب: $\vec{F} = -m\lambda^2\vec{r}$

والمطلوب: أوجد تكامل الطاقة لهذه النقطة علماً أنه في اللحظة $t = 0$ كانت النقطة أفقية وبدون سرعة ابتدائية .حيث أن λ, a, b ثوابت.

السؤال الثالث (35 درجة):

ليكن لدينا الحقل المعين بالمتجه:

$$\vec{F} = \left(y^2 - 2xz^2\right)\vec{e}_x + \left(2xy + 2z\right)\vec{e}_y + \left(2y - 2x^2z\right)\vec{e}_z$$

المطلوب: 1) هل الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى ؟ عين هذا التابع ثم عين سطوح السوية .

2) إذا كانت M نقطة تتحرك على القطوع $z = x\ ,\ x^2 = y + 4$ و تؤثر فيها القوة $\vec{F}$ احسب عمل $\vec{F}$ عندما تنتقل M من الموضع $x_1 = -2$ إلى الموضع $x_2 = 0$.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (30 درجة)

نلقي كرة ثقيلة كتلتها m شاقولياً نحو الأسفل في نهر بسرعة ابتدائية v_0. تصل هذه الكرة إلى قعر النهر بعد مرور زمن قدره T ثانية.

إذا علمت أن مسقط قوة مقاومة الماء على المحور الشاقولي النازل (oy) هو $R=-mk\acute{y}$ حيث K ثابت موجب. وأن الحركة بدأت في سطح النهر. والمطلوب:

1) أوجد المعادلة التفاضلية للحركة.

2) أوجد معادلة الحركة.

3) احسب عمق النهر.

<u>الحل:</u> 1) لنأخذ المحور الشاقولي oy متجهاً نحو الأسفل.

القوى المؤثرة على النقطة المادية هي قوة الثقالة $\vec{P}=m\vec{g}$

وقوة مقاومة الماء $\vec{R}$

القانون الأساسي للتحريك

$$m\vec{\gamma}=\vec{F}$$
$$m\vec{\gamma}=\vec{P}+\vec{R}$$

5

بالإسقاط على oy:

$$m\acute{\acute{y}}=mg-mk\acute{y}$$

المعادلة التفاضلية للحركة $\boxed{\acute{\acute{y}}=g-k\acute{y}}$ 5

(2

$$\frac{d\acute{y}}{dt}=g-k\acute{y}\Rightarrow\frac{d\acute{y}}{g-k\acute{y}}=dt$$

$$\xrightarrow{\text{بالمكاملة}}-\frac{1}{k}\int\frac{-kd\acute{y}}{g-k\acute{y}}=\int dt$$

$$-\frac{1}{k}\ln|g-k\acute{y}|=t+c_1$$

5

لنعين ثابت التكامل c_1: من شروط البدء في اللحظة $t=0$ ، $y=0,\acute{y}=v_0$

$$-\frac{1}{k}|g-kv_0|=c_1$$

$$\xrightarrow{\text{نعوض}}-\frac{1}{k}\ln|g-k\acute{y}|=t-\frac{1}{k}\ln|g-kv_0|$$

$$\ln\left|\frac{g-kv_0}{g-k\acute{y}}\right|=kt\Rightarrow\frac{g-kv_0}{g-k\acute{y}}=e^{kt}$$

$$g-kv_0=(g-k\acute{y})e^{kt}$$

$$g-kv_0=ge^{kt}-ke^{kt}\acute{y}\Rightarrow\boxed{\acute{y}=\frac{g}{k}-\frac{g-kv_0}{k}e^{-kt}}$$

5

$$\frac{dy}{dt}=\frac{g}{k}-\frac{g-kv_0}{k}e^{-kt}\Rightarrow dy=\left(\frac{g}{k}-\frac{g-kv_0}{k}e^{-kt}\right)dt$$

$$\Longrightarrow\quad y=\frac{g}{k}t+\left(\frac{g-kv_0}{k^2}\right)e^{-kt}+C_2$$

لتعيين C_2 : في اللحظة $t=0$ كان $y=0$

$$\Rightarrow\quad C_2=\frac{-(g-kv_0)}{k^2}$$

نعوض في y :

$$\boxed{y=\frac{g}{k}t+\left(\frac{g-kv_0}{k^2}\right)e^{-kt}-\frac{g-kv_0}{k^2}}\quad ⑤$$

وهي معادلة حركة الكرة .

3) لحساب عمق النهر :

وصلت الكرة إلى قعر النهر بعد مرور زمن قدره 4 ثانية :

$$\boxed{h=\frac{g}{k}\times 4+\left(\frac{g-kv_0}{k^2}\right)e^{-4k}-\frac{g-kv_0}{k^2}}\quad ⑤$$ وهو عمق النهر

السؤال الثاني (25 درجة)

لتكن M نقطة مادية كتلتها m ملازمة بدون احتكاك لسلك على شكل قطع ناقص $x=a\cos\theta$ ، $y=b\sin\theta$. تؤثر في النقطة M قوة جاذبة متناسبة مع بعد النقطة عن مركز الجذب $\vec{F}=-m\lambda^2\vec{r}$ أوجد تكامل الطاقة لهذه النقطة. علماً أنه في اللحظة $t=0$ كانت النقطة أفقية وبدون سرعة ابتدائية.

الحل : لكن U_1 هو عمل قوة الثقل :

$$U_1=\int\vec{P}.d\vec{r}=-\int mg\,dy=-mgy=-mgb\sin\theta\overset{\text{الطاقة الكامنة}}{\Longrightarrow}V_1=-U_1=mgb\sin\theta\quad ⑤$$

ولكن U_2 عمل القوة $\vec{F}=-m\lambda^2\vec{r}$

$$U_2=-\int m\lambda^2\vec{r}\,d\vec{r}=\frac{-m\lambda^2r^2}{2}=\frac{-m\lambda^2}{2}(x^2+y^2)=\frac{-m\lambda^2}{2}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)\quad ⑤$$

وبالتالي الطاقة الكامنة للقوة $\vec{F}$ هي :

$$V_2=-U_2=\frac{m\lambda^2}{2}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)$$

معادلة الطاقة (تكامل الطاقة) :

$T+V=c$ ⑤ , T الطاقة الحركية , V الطاقة الكامنة

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{m}{2}(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)\dot{\theta}^2\quad ⑤$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}m(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)\dot{\theta}^2+mgb\sin\theta+\frac{m\lambda^2}{2}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)=c$$

في اللحظة $t=0$ كانت $\theta=0$, $\dot{\theta}=0$

بالتعويض والاختصار :

$$0+0+\frac{m\lambda^2}{2}(a^2\cos^2 0+0)=c\Rightarrow c=\frac{m\lambda^2a^2}{2}$$

$$\Rightarrow\boxed{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)\dot{\theta}^2+2gb\sin\theta+\lambda^2(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-a^2)=0}\quad ⑤$$

وهو تكامل الطاقة .

السـؤال الثالث (35 درجة)

ليكن لدينا حقل القوى :

$$\vec{F}=(y^2-2xz^2)\vec{e_x}+(2xy+2z)\vec{e_y}+(2y-2x^2z)\vec{e_z}$$

① برهن أن الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى. عين هذا التابع ثم عين سطوح السوية

② إذا كانت M نقطة تتحرك على القطع $x^2=y+4$ و $z=x$ وتؤثر فيها القوة $\vec{F}$. احسب عمل $\vec{F}$ عندما تنتقل M من الوضع $x_1=-2$ إلى الوضع $x_2=0$.

الحل:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=2y=\frac{\partial F_y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_y}{\partial z}=2=\frac{\partial F_z}{\partial y}$$
$$\frac{\partial F_x}{\partial z}=-4xz=\frac{\partial F_z}{\partial x}$$

⑥

أي أن $\vec{rot}\,\vec{F}=\vec{0}$ وبالتالي $\vec{F}$ تشتق من تابع قوى.

لنعين تابع القوى وليكن U :

$$\vec{F}=\vec{grad}\,U$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}=F_x=y^2-2xz^2 \quad (1)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}=F_y=2xy+2z \quad (2)$$
$$\frac{\partial U}{\partial z}=F_z=2y-2x^2z \quad (3)$$

⑥

بمكاملة (1) بالنسبة لـ x :

$$U=y^2x-x^2z^2+\varphi(y,z) \quad (4)$$ ③

نشتق (4) بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial U}{\partial y}=2yx+\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y}$$

بالمقارنة مع (2)

$$2\cancel{x}y+2z=2y\cancel{x}+\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y}$$

بالمكاملة بالنسبة لـ y

$$2z=\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y}\Longrightarrow\varphi(y,z)=2yz+C(z)$$

نعوض في (4) :

$$U=y^2x-x^2z^2+2yz+C(z) \quad (5)$$ ③

باشتقاق (5) بالنسبة لـ z :

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-2x^2z+2y+C'_z$$

باستخدام (3) :

$$2y-2x^2z=-2x^2z+2y+C'_z$$
$$\Rightarrow C'_z=0\Rightarrow C_z=C$$

③

$$\boxed{U = y^2x - x^2z^2 + 2zy + C}$$ ③ نعوض في (5)

وهو تابع القوى

$U = C_1 \Rightarrow$ $\boxed{y^2x - x^2z^2 + 2zy = C_2}$; $C_2 = C - C_1$: سطوح السوية و ③

② بما أن F مشتق من تابع قوى فإن عمل القوة $\vec{F}$ هو :

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} dU \Rightarrow W = [U]_{M_1}^{M_2} = U(M_2) - U(M_1)$$ ⑤

بما أن M تتحرك على $x = z \ , \ x^2 = y + 4$

$M_1(-2, 0, -2) \quad z = -2 , \ y = 0 \Leftarrow x_1 = -2$

$M_2(0, -4, 0) \quad z = 0 , \ y = -4 \Leftarrow x_2 = 0$

$$W = [y^2x - x^2z^2 + 2zy]_{M_2} - [y^2x - x^2z^2 + 2zy]_{M_1}$$ ③

$$= 0 - (-16) = 16$$

إذا الطالب أوجد U بهذه الطريقة :

$$du = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$ ③

$$= (y^2 - 2xz^2)dx + (2xy + 2z)dy + (2y - 2x^2z)dz$$ ③

$$= y^2dx - 2xz^2dx + 2xydy + 2zdy + 2ydz - 2x^2zdz$$

$$= \underline{y^2dx + 2xydy} - \underline{2xz^2dx - 2x^2zdz} + \underline{2zdy + 2ydz}$$ ③

$$dU = d(xy^2) + d(-x^2z^2) + d(2yz)$$

$$\boxed{U = xy^2 - x^2z^2 + 2yz + C}$$ ③

جامعة طرطوس
كلية العــلــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية 2021- 2020

المدة: ساعتين
الدرجة : 90

السؤال الأول (35 درجة):

نقطة مادية تتحرك في المستو xoy بحركة خاضعة لقانون السطوح و إذا كان متجه التسارع يتناسب عكسا مع مكعب البعد r و يتجه نحو o (مبدأ الإحداثيات) و ثابت التناسب $c^2 \left(!+k^2\right)$ علماً أن c و k ثابتان و أنه في اللحظة $t = 0$ كانت $r = a \,,\theta = 0$ و كانت السرعة الإبتدائية $u'_0 = \dfrac{-k}{a}$ و حيث a ثابت . و المطلوب:

1) برهن أن المعادلة القطبية للحركة هي $r = a\,e^{k\theta}$.

2) برهن أن السرعة متناسبة عكساً مع البعد r .

السؤال الثاني (20 درجة):

تعطى معادلة زاوية الدوران لحركة بالعلاقة $\varphi = \dfrac{9}{32}t^3$ والمطلوب عين السرعة العددية و التسارع العددي لنقطة مادية تبعد عن مركز الدوران بمقدار $0.8\,m$ في اللحظة التي يتساوى فيها التسارع المماسي لهذه النقطة مع التسارع الناظمي .

السؤال الثالث (35 درجة):

M نقطة مادية تخضع لحقل قوى يشتق من التابع:

$$U\left(x,y,z\right) = xy + xz + yz$$

والمطلوب:

1) عين خطوط القوى لهذا الحقل وخطوط السوية.

2) عين العمل الذي ينجزه هذا الحقل بين النقطتين $M_1\left(-2,0,1\right)$ و $M_2\left(-1,1,3\right)$.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (35 درجة)

نقطة مادية تتحرك في المستوي xoy بحركة خاضعة لقانون السطوح وإذا كان متجه التسارع يتناسب عكساً مع مكعب البعد r ويتجه نحو o (مبدأ الاحداثيات) وثابت التناسب $c^2(1+k^2)$ حيث c ، k ثوابت والمطلوب :

1) برهن أن المعادلة القطبية للحركة هي $r = a e^{k\theta}$

2) برهن أن السرعة متناسبة عكساً مع البعد r .

الحل: لدينا بالفرض $\vec{\gamma} = -\frac{c^2(1+k^2)}{r^3}\vec{e_r}$

وبما أن الحركة خاضعة لقانون السطوح ⇐ نطبق دستوربينيه الثاني

$$\vec{\gamma} = -c^2u^2(u''+u)\vec{e_r}$$ 5

$$\Rightarrow -c^2u^3(1+k^2)\vec{e_r} = -c^2u^2(u''+u)\vec{e_r}$$ 5

$$u(1+k^2) = u''+u$$

$$u''+u(1-1+k^2)=0$$

$$u''-k^2u=0$$

المعادلة المميزة $\lambda^2-k^2=0 \Leftarrow \lambda=\pm k$

$$\Rightarrow u = c_1 e^{k\theta} + c_2 e^{-k\theta}$$ 5

في اللحظة $t=0$ كانت $\theta=0$ و $r=a$

$$\boxed{\frac{1}{a} = c_1+c_2} \quad (1)$$

$$u' = c_1 k e^{k\theta} - c_2 k e^{-k\theta}$$

في اللحظة $t=0$ و $\theta=0$ والسرعة الابتدائية $-\frac{k}{a}$

$$-\frac{k}{a} = c_1 k - c_2 k$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{a} = c_1 - c_2} \quad (2)$$

من (1)،(2) ⇐ $c_1=0$ ، $c_2=\frac{1}{a}$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{a}e^{-k\theta} \Rightarrow \boxed{r = a e^{k\theta}}$$ 5

2) دستوربينيه الأول

$$v^2 = c^2(u'^2+u^2)$$ 5

$$u = \frac{1}{a}e^{-k\theta} \Rightarrow u' = -\frac{k}{a}e^{-k\theta}$$

$$v^2 = c^2\left(\frac{k^2}{a^2} e^{-2k\theta} + \frac{1}{a^2} e^{-2k\theta}\right) = \frac{c^2(k^2+1)}{a^2} e^{-2k\theta}$$ ⑤

$$v^2 = \frac{c^2(k^2+1)}{a^2 e^{2k\theta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{c\sqrt{k^2+1}}{r}}$$ ⑤

السرعة متناسبة عكساً مع البعد r ..

السؤال الثاني (20 درجة)

تعطى معادلة زاوية الدوران لحركة بالعلاقة $\varphi = \frac{9}{32}t^3$ والمطلوب عين السرعة العددية والتسارع لنقطة مادية تبعد عن مركز الدوران بمقدار 0.8m في اللحظة التي يتساوى فيها التسارع المماسي لهذه النقطة مع التسارع الناظمي.

الحل:

$$\varphi = \frac{9}{32}t^3 \Rightarrow \omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{9}{32}(3)t^2 = \frac{27}{32}t^2$$ ③

السرعة العددية:

$$v = R\omega = (0.8)\frac{27}{32}t^2 = \frac{27}{40}t^2$$ ③

التسارع:

$$\gamma_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{27}{20}t$$ ③

$$\gamma_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{10}{8}\left(\frac{27}{40}t^2\right)^2$$ ③

$$\gamma_\tau = \gamma_n \Rightarrow \frac{27}{20}t = \frac{10}{8}\left(\frac{27}{40}\right)^2 t^4 \Rightarrow t^3 = \frac{64}{27} \Rightarrow \boxed{t = \frac{4}{3}s}$$ ①

نعوض t في علاقتي السرعة والتسارع:

السرعة العددية:

$$v = \frac{27}{40}\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{27}{40}\cdot\frac{16}{9} = \frac{48}{40} = \frac{12}{10} = 1.2\ ms$$ ②

$$\gamma = \sqrt{\gamma_\tau^2 + \gamma_n^2}$$ ③

$$\gamma_\tau = \frac{27}{20}\times\frac{4}{3} = \frac{9}{5}$$

$$\gamma_n = \frac{10}{8}\left(\frac{27}{40}\cdot\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{10}{8}\left(\frac{12}{10}\right)^2 = \frac{10}{8}(1.2)^2 = \frac{10}{8}(1.44) = \frac{14.4}{8}$$

نعوض.

$$\gamma = \sqrt{\gamma_\tau^2 + \gamma_n^2} = \sqrt{\frac{81}{25} + \frac{(14.4)^2}{64}}\ m/s^2$$ ②

السؤال الثالث (35 درجة)

M نقطة مادية تخضع لحقل قوى يشتق من التابع:

$$U(x,y,z) = xy + xz + yz$$

والمطلوب: 1) عين خطوط القوى لهذا الحقل وخطوط السوية.

2) عين العمل الذي ينجزه هذا الحقل بين النقطتين $M_1(-2,0,1)$ و $M_2(-1,1,3)$.

الحل: 1) لنوجد حقل القوى:

$$\vec{F} = F_x \vec{e_x} + F_y \vec{e_y} + F_z \vec{e_z}$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = y + z$$
$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = x + z$$
$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = x + y$$

⑥

ايجـ خطوط القوى:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$

$$\underset{①}{\frac{dx}{y+z}} = \underset{②}{\frac{dy}{x+z}} = \underset{③}{\frac{dz}{x+y}}$$

⑥

نطرح ① و ② ثم نطرح ② و ③ ثم نجمع ① و ② و ③

$$\underset{④}{\frac{d(x-y)}{-(x-y)}} = \underset{⑤}{\frac{d(y-z)}{-(y-z)}} = \underset{⑥}{\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}}$$

من ④ و ⑤:

$$\xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln\left(\frac{x-y}{c}\right) = \ln(y-z)$$

$$\Rightarrow \boxed{x - y = c(y-z)} \quad (1)$$ معادلة سطوح

⑤

من ⑤ و ⑥:

$$\frac{d(y-z)}{-(y-z)} = \frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} -\ln\left(\frac{y-z}{c_1}\right) = \frac{1}{2}\ln(x+y+z)$$

$$\Rightarrow -2\ln\left(\frac{y-z}{c_1}\right) = \ln(x+y+z)$$

$$\ln\frac{c_1^2}{(y-z)^2} = \ln(x+y+z) \Rightarrow$$

$$\frac{C_1^2}{(y-z)^2} = x+y+z \Rightarrow \boxed{(y-z)^2(x+y+z) = C_2}$$ ⑤ معادلة خطوط (2)

حيث $C_1^2 = C_2$

إذن تقاطع (1) و (2) يعطيان خطوط القوى.

خطوط السوية :

$$U = h$$

$$\Rightarrow \boxed{xy+xz+yz = h}$$ ⑤ وهي تمثل خطوط السوية

2) العمل الذي يحرزه هذا الحقل بين النقطتين $M_1(-2,0,1)$, $M_2(-1,1,3)$

$$U(M_1) = (xy+xz+yz)_{M_1} = -2(0)+(-2)1+(0)(1) = -2$$

$$U(M_2) = (xy+xz+yz)_{M_2} = (-1)1+(-1)3+(1)3 = -1$$

⑤ $$W_{M_1\to M_2} = U(M_2)-U(M_1) = -1+2 = 1.$$ ③

جامعة طرطوس
كلية العلــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى 2021- 2020

المدة: ساعتين
الدرجة : 90

السؤال الأول (35 درجة):

M نقطة مادية تتحرك على لولب والمطلوب :

1) ادرس حركة هذه النقطة (أوجد متجهات الموضع والسرعة و التسارع) في الإحداثيات الإسطوانية.

2) إذا تحركت M بفعل قوة مركزية $\vec{F}$ تتجه دوماً نحو النقطة الثابتة o وفق المعادلة :

$r\theta = k$ حيث k ثابت و $\theta = \left(\overrightarrow{ox},\overrightarrow{oM}\right)$, $r = oM$ والمطلوب:

أوجد عبارة القوة $\vec{F}$ المؤثرة في النقطة M كتابع لثابت السطوح c واستنتج أنها تتناسب عكساً مع مكعب بعدها عن النقطة o.

السؤال الثاني (30 درجة):

نقطة مادية M تتحرك في المستو xoy فإذا كانت النسبة بين v_x مركبة السرعة على المحور الأفقي $\left(o,\vec{e}_x\right)$ و v_r مركبة السرعة على نصف القطر المتجهي $\left(o,\vec{e}_r\right)$ تساوي إلى ثابت k . المطلوب:

1) عين نوع المسار و ناقش حسب قيم k .

2) أوجد النسبة بين v_y مركبة السرعة على المحور الشاقولي $\left(o,\vec{e}_y\right)$ و v_θ مركبة السرعة على المحور $\left(o,\vec{e}_\theta\right)$.

السؤال الثالث (25 درجة):

تدورعجلة بحركة منتظمة بواسطة محرك 90 دورة في الدقيقة و عند إطفاء المحرك أخذت العجلة تدور ببطيء (بحركة متغيرة بانتظام) حتى تتوقف بعد مرور 40 ثانية من إطفاء المحرك والمطلوب :أوجد عدد دورات العجلة خلال هذه الفترة الزمنية.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

امتحان الميكانيك (1) الدورة الفصلية الأولى 2020-2021

السؤال الأول (45 درجة)

M نقطة مادية تتحرك على لولب والمطلوب :

) ادرس حركة هذه النقطة (أوجد متجهات الموضع والسرعة والتسارع) في الإحداثيات الإسطوانية .

) إذا تحركت M بفعل قوة مركزية $\vec{F}$ تتجه دوماً نحو النقطة الثابتة O وفق المعادلة :

$r\theta = K$ حيث K ثابت و $\theta = (\vec{OX}, \vec{OM})$ و $r = OM$ والمطلوب :

وجد عبارة القوة $\vec{F}$ المؤثرة في النقطة M كتابع لثابت السطوح C مستنتجاً أن الانجذاب عكسـاً

ع مكعب بعدها عن النقطة O .

الحل : 1) في جملة إحداثيات ديكارتية Oxyz فإن المعادلات الوسيطة للحركة اللولبية هي :

$$x = R\cos\theta$$
$$y = R\sin\theta$$
$$z = b\theta$$

حيث R و b ثابتان و $\theta = \theta(t)$ تابع للزمن

في الإحداثيات الاسطوانية متجه الموضع هو :

$\vec{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$ ⑤

في الحركة اللولبية متجه الموضع هو :

$\vec{OM} = R\vec{e_r} + b\theta\vec{e_z}$ ⑤

حيث b خطوة اللولب المختزلة .

في الاحداثيات الاسطوانية متجه السرعة هو :

$\vec{v} = r'\vec{e_r} + r\theta'\vec{e_\theta} + z'\vec{e_z}$ ⑤

في الحركة اللولبية متجه السرعة هو :

$\vec{v}(M) = R\theta'\vec{e_\theta} + b\theta'\vec{e_z}$ ⑤ $\quad r' = 0$

له مركبتان إحداهما السرعة في الحركة الدائرية على $\vec{v_1} = R\theta'\vec{e_\theta}$

والأخرى السرعة في الحركة المستقيمة على $\vec{v_2} = b\theta'\vec{e_z}$

متجه السرعة واقع في المستوي المماس للاسطوانة

في الاحداثيات الاسطوانية متجه التسارع هو :

$\vec{\gamma} = (r'' - r\theta'^2)\vec{e_r} + (2r'\theta' + r\theta'')\vec{e_\theta} + z''\vec{e_z}$ ⑤

وبالتالي في الحركة اللولبية يكون متجه التسارع :

$\vec{\gamma} = -R\theta'^2\vec{e_r} + R\theta''\vec{e_\theta} + b\theta''\vec{e_z}$ ⑤

فللتسارع مركبتان :

مركبة الأولى للتسارع هي التسارع في الحركة الدائرية : $\vec{\gamma}_1 = -R\theta'^2\vec{e_r} + R\theta''\vec{e_r}$

المركبة الثانية هو التسارع في الحركة المستقيمة $\gamma_2 = b\theta''\vec{e_z}$

أو بشكل آخر للتسارع مركبتان :

مركبة مماسية : $\vec{\gamma}_\tau = R\theta''\vec{e_\theta} + b\theta''\vec{e_z}$

مركبة ناظمية : $\vec{\gamma}_n = -R\theta'^2\vec{e_r}$

2) بما أن القوة مركزية فالحركة خاضعة لقانون المساحات أي أن C

$\gamma_r = r'' - r\theta'^2 \Rightarrow \gamma = -C^2u^2(u''+u)\,\vec{e_r}$ ⑤ قانون بينيه الثاني

- من القانون الأساسي في التحريك $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ ⑤

$$\Rightarrow F_r = m\gamma_r$$

$$F = -mC^2u^2(u''_\theta + u)$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\theta}{k} \Rightarrow u'_\theta = \frac{1}{k} \Rightarrow u''_\theta = 0$$ ②

$$\Rightarrow \boxed{F = -mc^2u^3 = \frac{-mc^2}{r^3}}$$

أو بالشكل الشعاعي : $\boxed{\vec{F} = -\frac{mc^2}{r^3}\vec{e_r}}$ ③

أي أن القوة المركزية المؤثرة في النقطة M تتناسب عكساً مع مكعب بعدها عن O (r)

السؤال الثاني (20 درجة)

نقطة مادية M تتحرك في المستو xoy فإذا كانت النسبة بين v_x مركبة السرعة على المحور الأفقي $(o, \vec{e_x})$ و v_r مركبة السرعة على نصف القطر المتجه $(o, \vec{e_r})$ تساوي إلى ثابت K. المطلوب :

1) عين نوع المسار وناقش حسب قيم K

2) أوجد النسبة بين v_y مركبة السرعة على المحور الشاقولي $(o, \vec{e_y})$ و v_θ مركبة السرعة على المحور $(o, \vec{e_\theta})$.

الحل : 1) لدينا :

$$\frac{v_x}{v_r} = K \Rightarrow v_x = K v_r$$

$$v_x = \dot{x} \quad , \quad v_r = \dot{r}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{e_x} + v_y \vec{e_y}$$ في الاحداثيات الديكارتية

و $$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$ في الاحداثيات القطبية

③ $$\Rightarrow \dot{x} = K\dot{r} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} x = Kr + c_1 \quad (*)$$

③ $$x = r\cos\theta \xrightarrow{\text{تعويض}} r\cos\theta = Kr + c_1 \Rightarrow r(K - \cos\theta) = c$$

$$\Rightarrow r = \frac{c}{K - \cos\theta} = \frac{c/K}{1 - \frac{1}{K}\cos\theta}$$

$$\boxed{r = \frac{P}{1 + e\cos\theta_1}}$$ ② ; $P = \frac{c}{K}$, $e = \frac{1}{K}$; $\theta_1 = \pi\ \theta$
$\cos\theta_1 = -\cos\theta$

وهي معادلة المسار

المناقشة

$e < 1$ قطع ناقص $\quad \frac{1}{K} < 1 \Rightarrow 1 < K$

$e > 1$ قطع زائد $\quad \frac{1}{K} > 1 \Rightarrow 1 > K$

$e = 1$ قطع مكافئ $\quad K = 1$

$e = 0$ دائرة $\quad \Rightarrow$ لا يمكن (لا تتحقق).

②

2)

$$\frac{v_y}{v_\theta} = \frac{\dot{y}}{r\dot{\theta}}$$ ③

$$y = r\sin\theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$ ③

$$\frac{v_y}{v_\theta} = \frac{\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta}{r\dot{\theta}} = \frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}}\sin\theta + \cos\theta$$

$x = kr + c_1$, $x = r\cos\theta$ ص ★

$r\cos\theta = kr + c_1$

$\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta = k\dot{r}$

$(k-\cos\theta)\dot{r} = -r\dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow \boxed{\frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - k}}$ ②

لنعوض في النسبة :

$$\frac{v_y}{v_\theta} = \frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}}\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta - k} + \cos\theta = \frac{\sin^2\theta + \cos\theta(\cos\theta - k)}{\cos\theta - k}$$

$$\frac{v_y}{v_\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - k\cos\theta}{\cos\theta - k} = \frac{1 - k\cos\theta}{\cos\theta - k}$$ ②

السؤال الثالث (25 ع2017)

تدور عجلة بحركة منتظمة بواسطة محرك. 90 دورة في الدقيقة وعند إطفاء المحرك أخذت العجلة تدور ببطئ (بحركة متغيرة بانتظام) حتى تتوقف بعد مرور 40 ثانية من إطفاء المحرك والمطلوب! أوجد عدد دورات العجلة خلال هذه الفترة الزمنية ،

الحل :

كانت الحركة منتظمة $\Leftarrow \varphi = \omega t$

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{90(2\pi)}{60} = 3\pi$$ ⑤

وهي السرعة الزاوية .

$\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$ ⑤

عند إطفاء المحرك :

$\omega = \varepsilon t + \omega_0$

$0 = \varepsilon(40) + 3\pi$ ف $\omega_0 = 3\pi$, $\varphi_0 = 0$, $t = 40$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{-3\pi}{40}\ m/s^{-2}$ ⑤

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1}{2}\left(-\frac{3\pi}{40}\right)(40)^2 + 3\pi(40) + 0$$

$$= \frac{1}{2}(-3\pi)(40) + 3\pi(40) = -60\pi + 120\pi = 60\pi$$ ⑤

$\varphi = 60\pi$

$\varphi = 2\pi n$ و n عدد الدورات

$60\pi = 2\pi n \Rightarrow n = \frac{60\pi}{2\pi} = 30$ دورة ⑤

جامعة طرطوس
كلية العلـوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية 2020- 2019

المدة: ساعتين
الدرجة : 90

السؤال الأول (25 درجة):

نقطة مادية تتحرك على محيط دائرة نصف قطرها r تحت تأثير ثقلها . و المطلوب: أوجد تكامل الطاقة لهذه النقطة .علماً أنه في اللحظة $t = 0$ كانت النقطة المادية أفقية وبدون سرعة ابتدائية.

السؤال الثاني (30 درجة):

ليكن لدينا حقل القوى:

$$\vec{F} = yz\vec{e}_x + zx\vec{e}_y + xy\vec{e}_z$$

1) أوجد خطوط قوى هذا الحقل.

2) هل الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى؟ إن وجد يطلب تعينه.

السؤال الثالث (35 درجة):

سلك أملس على شكل قطع مكافئ معادلته : $y = 4ax^2$ موضوع في مستو شاقولي. تنزلق على هذا السلك كرة صغيرة كتلتها m و المطلوب: أثبت أن ضغط الكرة على السلك (رد الفعل)عند أي نقطة يتناسب مع انحناء السلك عند نفس النقطة.

علماً أن الكرة بدأت حركتها بدون سرعة ابتدائية من الوضع (x_0, y_0) .

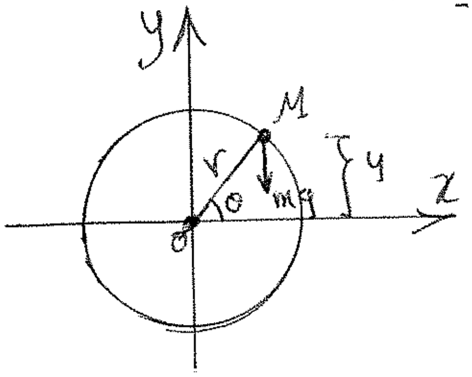
مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

مقرر الميكانيك (1) الدورة الفصلية الثانية 2020 - 2019

السؤال الأول (25 درجة)

نقطة مادية تتحرك على محيط دائرة نصف قطرها r تحت تأثير ثقلها. والمطلوب: أوجد تكامل الطاقة لهذه النقطة. علماً أنه في اللحظة $t = 0$ كانت النقطة المادية أفقية وبدون سرعة ابتدائية.



الحل:

ليكن U هو عمل القوة $m\vec{g}$ المؤثرة على النقطة

$$U = -mgy$$ ⑤

لدينا $y = r\sin\theta$ ⟸

$$U = -mgr\sin\theta$$

الطاقة الكامنة $U = -V$

$$\Rightarrow V = mgr\sin\theta$$ ③

والطاقة الحركية $T = \frac{1}{2}mv^2$ ⑤

لدينا السرعة في الحركة الدائرية $v = r\dot{\theta}$

حيث $\dot{\theta}$ السرعة الزاوية

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$ ③

وبالتالي تكامل الطاقة:

$$T + V = C$$ ⑤

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr\sin\theta = C$$ ③

من شروط البدء

$$c = 0 \Leftarrow \left\{\begin{array}{l}\theta = 0\\ \dot{\theta} = 0\end{array}\right\} \Leftarrow t = 0$$ ①

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr\sin\theta = 0}$$ وهو تكامل الطاقة

السؤال الثاني (30 درجة)

لكن لدينا حقل القوى :

$$\vec{F} = yz\,\vec{e}_x + zx\,\vec{e}_y + xy\,\vec{e}_z$$

1) أوجد خطوط قوى هذا الحقل.

2) هل الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى؟ إن وجد نطلب تعيينه.

الحل :

1)

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy}$$

① ② ③

⑤

من الأولى والثانية :

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Longrightarrow x\,dx = y\,dy$$

$\Longrightarrow$ بالمكاملة $\quad \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{2} \Rightarrow \boxed{x^2 = y^2 + C_1}$ (1) ③

معادلة سطح (1)

من الثانية والثالثة :

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} \Longrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + \frac{C_2}{2}$$

$\Longrightarrow \boxed{y^2 = z^2 + C_2}$ (2) ③ معادلة سطح (2)

إن تقاطع (1) و(2) يعطيان خطوط القوى. ③

2) حتى يشتق $\vec{F}$ من تابع قوى يجب أن يتحقق : ③

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

أو ($\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = 0$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = z = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = y = \frac{\partial F_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = x = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$ ③

والحقل يشتق من تابع قوى U أي أن : $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U$

$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = yz \quad (1)$

$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = zx \quad (2)$ ③

$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = xy \quad (3)$

لإيجاد تابع القوى يوجد طريقتان :

طريقة (1) :

نكامل (1) بالنسبة لـ x :

$$U = yzx + \varphi(y,z) \quad (4) \quad ③$$

نشتق (4) بالنسبة لـ y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = zx + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}$$

بالمقارنة مع (2)

$$zx = zx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

بالمكاملة بالنسبة لـ y :

$$\varphi(y,z) = C(z)$$

نعوض $\varphi(y,z)$ في (4)

$$U = yzx + C(z) \quad (5) \quad ②$$

نشتق (5) بالنسبة لـ z

$$\frac{\partial U}{\partial z} = yx + C'_z$$

بالمقارنة مع (3) :

$$xy = yx + C'_z \Rightarrow C'_z = 0 \Rightarrow C(z) = C$$

نعوض في (5) :

$$\boxed{U = xyz + C} \quad ②$$

وهو تابع القوى المطلوب .

طريقة (2) :

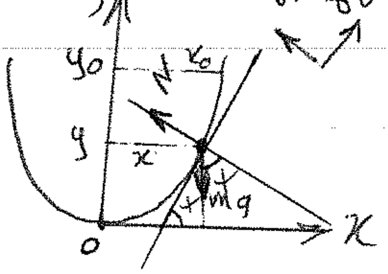
$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \quad ③$$

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz \quad ②$$

$$dU = d(xyz) \Rightarrow \boxed{U = xyz + C} \quad ②$$

السؤال الثالث (35 درجة)

سلك أملس على شكل قطع مكافئ معادلته : $y = 4ax^2$ موضوع في مستوٍ شاقولي . تنزلق على هذا السلك كرة صغيرة كتلتها m والمطلوب أثبت أن ضغط الكرة على السلك (رد الفعل) عند أي نقطة يتناسب مع انحناء السلك عند نفس النقطة . علماً بأن الكرة بدأت حركتها بدون سرعة ابتدائية من الوضع (x_0, y_0) .



الحل :

بتطبيق القانون الأساسي بالتحريك :

$$m\vec{\gamma} = \vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} \quad ⑤$$

بإسقاط العلاقة على الناظم :

$$m\gamma_n = N - mg\cos\psi$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = N - mg\cos\psi \Longrightarrow$$

$$\boxed{N = mg\cos\psi + m\frac{v^2}{\rho}} \quad (1)$$ ⑤

لنوجد v^2 : من معادلة الطاقة الحركية :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mg(y_0 - y)$$

$$\boxed{v^2 = 2g(y_0 - y)} \quad (2)$$ ⑤

لنوجد نصف قطر التقوس ρ :

$$y = 4ax^2$$

$$y' = 8ax = \tan\psi$$

$$y'' = 8a$$

⑤ $$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(1+(8a)^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{8a} = \frac{(1+\tan^2\psi)^{\frac{3}{2}}}{8a} = \frac{1}{8a\cos^3\psi} \quad (3)$$ ⑤

بتعويض (2) و (3) في (1) :

$$\rho N = \rho mg\cos\psi + mv^2$$

$$\rho N = \frac{1}{8a\cos^3\psi}mg\cos\psi + 2mg(y_0 - y)$$

$$= \frac{1}{8a\cos^2\psi}mg + 2mg(y_0 - y) \quad (4)$$ ⑤

لدينا :

$$\frac{1}{\cos^2\psi} = 1 + \tan^2\psi = 1 + (8a)^2x^2 = 1 + 64a^2x^2$$

$$= 1 + 64a^2\frac{y}{4a} = 1 + 16ay$$

نعوض في (4) :

$$\rho N = \frac{1}{8a}(1 + 16ay)mg + 2mgy_0 - 2mgy$$

$$= \frac{1}{8a}mg + 2ymg + 2mgy_0 - 2mgy$$

$$\boxed{\rho N = mg\left(\frac{1}{8a} + 2y_0\right) = const}$$ ⑤

أي أن رد الفعل N (ضغط الكرة) يتناسب مع الانحناء $\frac{1}{\rho}$

طرطوس
ة العلوم
سم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى 2020- 2019

المدة: ساعتين
الدرجة : 90

السؤال الأول (25 درجة):

نقطة مادية تتحرك على المنحن :

$$r = a\cos\theta$$

وفق المعادلة التالية :

$$t = \frac{1}{4}(2\theta + \sin 2\theta)$$

1) أوجد معادلة مسار هذه النقطة. ثم برهن أن الحركة خاضعة لقانون السطوح.

2) أوجد السرعة العددية و متجه تسارع هذه النقطة بدلالة r .

السؤال الثاني (30 درجة):

نقطة مادية كتلتها m تتحرك على سلك دائري بدون احتكاك, نصف قطر دائرته a . تركت هذه النقطة بدون سرعة ابتدائية لتتحرك على هذا السلك من الوضع الشاقولي والمطلوب:

1) أوجد رد فعل السلك.

2) عين الزاوية التي من أجلها تترك(تنفك) النقطة هذا السلك.

3) عين السرعة التي تترك بها النقطة السلك.

السؤال الثالث (15 درجة):

يوضع جسم على مستو أفقي أملس. يتحرك هذا الجسم تحت تأثير قوة أفقية وفق المحور $\overrightarrow{ox}$ معطاة بالعلاقة :

$$F = h\ \sin kt$$

حيث h , k ثابتان

و المطلوب أوجد قانون الحركة لهذا الجسم.

السؤال الرابع (20 درجة):

ادرس حركة نقطة مادية (متجهات الموضع و السرعة والتسارع) في الإحداثيات القطبية.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

ؤال الأول (25 درجة)

قطة مادية تتحرك على المنحنى :

$$r = a\cos\theta$$

وفق المعادلة التالية :

$$t = \frac{1}{4}(2\theta + \sin 2\theta)$$

1) أوجد معادلة مسار هذه النقطة . ثم برهن أن الحركة خاضعة لقانون السطوح .

2) أوجد السرعة العددية ومتجه التسارع لهذه النقطة بدلالة r .

الحل:

1)

$$r = a\cos\theta \Longrightarrow x^2+y^2 = a^2 \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2)^2 = a^2x^2$$

$$x^2+y^2 = ax \quad ③$$

$$x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\boxed{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}}$$

المسار هو دائرة مركزها $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ ونصف قطرها $\frac{a}{2}$.

هل الحركة خاضعة لقانون السطوح ؟

$$r^2\theta' \overset{?}{=} c \quad \text{ثابت} \quad ③$$

$$4t = 2\theta + \sin 2\theta \xRightarrow{\text{بالاشتقاق}} 4 = 2\theta' + 2\theta'\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow 2 = \theta'(1+\cos 2\theta) \Rightarrow \theta' = \frac{2}{1+\cos 2\theta} = \frac{2}{2\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta' = \frac{1}{\cos^2\theta}} \quad ③$$

$$r^2\theta' = a^2\cos^2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} = a^2 = c \quad \text{ثابت} \quad ②$$

والحركة خاضعة لقانون السطوح .

2) السرعة في الحركة الخاضعة لقانون السطوح :

$$v^2 = c^2(u'^2_\theta + u^2) \quad ③$$

$$u = \frac{1}{a}\cos^{-1}\theta \Rightarrow u'_\theta = \frac{1}{a}\cos^{-2}\theta \cdot \sin\theta$$

$$u''_\theta = \frac{2}{a}\cos^{-3}\theta\sin^2\theta + \frac{1}{a}\cos^{-1}\theta = \frac{2}{a}\cos^{-3}\theta(1-\cos^2\theta) + \frac{1}{a}\cos^{-1}\theta$$

$$u''_\theta = \frac{2}{a}\cos^{-3}\theta - \frac{2}{a}\cos^{-1}\theta + \frac{1}{a}\cos^{-1}\theta$$

$$u''_\theta = \frac{2}{a}\cos^{-3}\theta - \frac{1}{a}\cos^{-1}\theta \quad ②$$

$= a\left(\frac{1}{a^2}\cos\theta\sin^2\theta + \frac{1}{a^2}\cos^{-2}\theta\right)$

$= a^4\left(\frac{1}{a^2}(1-\cos^2\theta)\cos^{-4}\theta + \frac{1}{a^2}\cos^{-2}\theta\right) = a^2\left(\cos^{-4}\theta - \cos^{-2}\theta + \cos^{-2}\theta\right)$

$= a^2\cos^{-4}\theta \Rightarrow v = a\cos^{-2}\theta$ ②

$\Rightarrow \boxed{v = \frac{a}{\cos^2\theta}}$, $v = \frac{a^3}{r^2}$ ② وهي السرعة العددية :

التسارع :

$\vec{\gamma} = -u^2C^2(u''+u)\,\vec{e_r}$ ③

لدينا :

$u'' = \frac{2}{a}\cos^{-3}\theta - \frac{1}{a}\cos^{-1}\theta = 2a^2u^3 - u$

نعوض في التسارع :

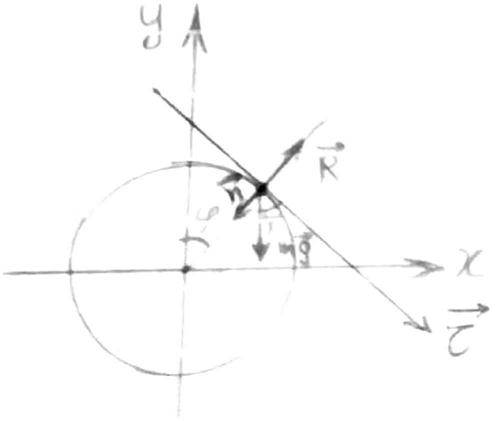
$\vec{\gamma} = -u^2a^4(2a^2u^3 - u + u)\,\vec{e_r}$

$\vec{\gamma} = -2a^6u^5\,\vec{e_r}$, $\vec{\gamma} = \frac{-2a^6}{r^5}\,\vec{e_r}$ ②

سؤال الثاني (30 درجة) :

نقطة مادية كتلتها m تتحرك على سلك دائري بدون احتكاك، نصف قطر دائرته a . تركت هذه النقطة بدون سرعة ابتدائية لتتحرك على هذا السلك من الوضع الشاقولي والمطلوب :

1) أوجد رد فعل السلك .
2) عين الزاوية التي من أجلها تترك (تنفك) النقطة هذا السلك .
3) عين السرعة التي تترك بها النقطة السلك .



الحل: القانون الأساسي في الحركة :

$m\vec{\gamma} = \vec{F} = \vec{P} + \vec{R}$ ⑤

بالإسقاط على المماس :

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = mg\sin\varphi$ (1) ③

بالإسقاط على الناظم :

$m\frac{v^2}{\rho} = mg\cos\varphi - R$ (2) ③

لدينا : $v = a\dot{\varphi}$ نعوض في (1) ③

$ma\ddot{\varphi} = mg\sin\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{g}{a}\sin\varphi$

$\ddot{\varphi}\, d\varphi = \frac{g}{a}\sin\varphi\, d\varphi$

$\frac{d\dot{\varphi}}{dt}.d\varphi = \frac{g}{a}\sin\varphi\, d\varphi$

$\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = \frac{g}{a}\sin\varphi\, d\varphi$

بالمكاملة $\Longrightarrow \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = -\frac{g}{a}\cos\varphi + C$

في اللحظة $t=0$ كان $\varphi=0$, $\dot{\varphi}=0$ $\Leftarrow$ $\frac{g}{a}=C$ $\Leftarrow$

$\boxed{\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{a}(1-\cos\varphi)}$ (3) ③

من (2) :

$m\frac{a^2\dot{\varphi}^2}{a} = mg\cos\varphi - R \Rightarrow R = mg\cos\varphi - ma\dot{\varphi}^2$

$R = mg\cos\varphi - m(2g(1-\cos\varphi)) = mg\cos\varphi - 2mg + 2mg\cos\varphi$

$R = 3mg\cos\varphi - 2mg$

$\boxed{R = mg(3\cos\varphi - 2)}$ ③ وهو رد الفعل

• **طريقة أخرى لحساب رد الفعل R :**

كان بالإمكان حساب السرعة v بتطبيق نظرية الطاقة الحركية

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgy = mg(a - a\cos\varphi)$$ ③

$$v^2 = 2g(a - a\cos\varphi)$$ ③

من العلاقة (2) :

$$R = mg\cos\varphi - \frac{mv^2}{a} = mg\cos\varphi - \frac{m}{a}(2ga - 2ga\cos\varphi)$$

$$= mg\cos\varphi - 2gm + 2mg\cos\varphi = 3mg\cos\varphi - 2mg$$

$$\Rightarrow \boxed{R = mg(3\cos\varphi - 2)}$$ ③

2) تنفك هذه النقطة عن السلك عندما :

$$R = 0 \Rightarrow 3mg\cos\varphi = 2mg$$ ③

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{2}{3} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{2}{3} = 48^{\circ},10$$ ③

3) عندما تنفك عن السلك $\Leftarrow \cos\varphi = \frac{2}{3}$

$$\dot\varphi^2 = \frac{2g}{a}(1 - \cos\varphi) = \frac{2g}{a}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2g}{3a} \Rightarrow$$

$$\dot\varphi = \sqrt{\frac{2g}{3a}}$$ ③

وهي السرعة المطلوبة : $v = a\dot\varphi = a\sqrt{\frac{2g}{3a}} = \sqrt{\frac{2ag}{3}}$ ①

1/2

الثالث (15 درجة)

يوضع جسم على مستوٍ أفقي أملس. يتحرك هذا الجسم تحت تأثير قوة أفقية وفق المحور $\vec{OX}$ معطاة بالعلاقة:

$$F = h \sin kT$$

حيث k ، h ثابتان.

المطلوب: أوجد قانون الحركة لهذا الجسم.

الحل:

$$m\vec{\gamma} = \Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}$$ ⑤

بالإسقاط على ox المحور الأفقي:

$$m\ddot{x} = h \sin kt$$

$$m\frac{dv}{dt} = h \sin kt$$

$$dv = \frac{h}{m} \sin kt \, dt$$

بالتكامل $\Longrightarrow$ $v = -\frac{h}{mk} \cos kt + c$

عندما $t = 0$ ، $v = v_0$ $\Leftarrow$ $c = v_0 + \frac{h}{mk}$

$$v = -\frac{h}{mk} \cos kt + v_0 + \frac{h}{mk}$$

$$v = \frac{h}{mk}(1 - \cos kt) + v_0$$ ⑤

$$\frac{dx}{dt} = \frac{h}{mk}(1 - \cos kt) + v_0$$

$$dx = \frac{h}{mk}(1 - \cos kt)\,dt + v_0\,dt$$

بالتكامل $\Longrightarrow$ $x = \frac{h}{mk} t - \frac{h}{mk^2} \sin kt + v_0 t + c_1$

في اللحظة $t = 0$ ، $x = 0$ $\Leftarrow$ $0 = c_1$

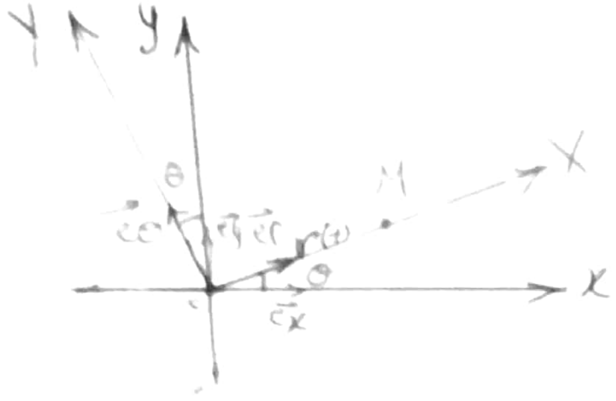
$$\boxed{x = \frac{h}{mk} t - \frac{h}{mk^2} \sin kt + v_0 t}$$ ⑤

وهو قانون الحركة المطلوب.

إذا الطالب وضع قانون الطاقة الحركية يأخذ ⑤ علامات بدلاً من القانون الأساسي

السؤال الرابع (20 درجة) :

ادرس حركة نقطة مادية (شعاع الموضع والسرعة والتسارع) في الإحداثيات القطبية .



الحل :

شعاع الموضع ③ $\vec{OM} = r(t)\,\vec{e_r}$

$\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y}$ ②

$\vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y}$ ②

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = -\dot\theta\sin\theta\,\vec{e_x} + \dot\theta\cos\theta\,\vec{e_y} = \dot\theta\,\vec{e_\theta}$$ ②

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot\theta\cos\theta\,\vec{e_x} - \dot\theta\sin\theta\,\vec{e_y} = -\dot\theta\,\vec{e_r}$$ ②

السرعة :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt}$$ ②

$$\boxed{\vec{v} = \dot r\,\vec{e_r} + r\dot\theta\,\vec{e_\theta}}$$ ③

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\theta^2}$$

التسارع :

$$\vec{\gamma} = \ddot r\,\vec{e_r} + \dot r\frac{d\vec{e_r}}{dt} + \dot r\dot\theta\,\vec{e_\theta} + r\ddot\theta\,\vec{e_\theta} + r\dot\theta\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$$ ②

$$\vec{\gamma} = \ddot r\,\vec{e_r} + \dot r\dot\theta\,\vec{e_\theta} + \dot r\dot\theta\,\vec{e_\theta} + r\ddot\theta\,\vec{e_\theta} - r\dot\theta^2\,\vec{e_r}$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\,\vec{e_r} + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\,\vec{e_\theta}}$$ ②

حيث : التسارع الناظمي : $\gamma_r = \ddot r - r\dot\theta^2$

التسارع المماسي : $\gamma_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta$

$$\gamma = |\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_r^2 + \gamma_\theta^2}$$

جامعة طرطوس
كلية العلـوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثالثة 2018- 2019

المدة: ساعتين
الدرجة : 90

السؤال الأول (15 درجة):

تتحرك نقطة مادية على دائرة نصف قطرها R بتسارع مماسي ثابت b . في لحظة البدء كانت النقطة في الموضع $s = 0$ وسرعتها معدومة والمطلوب: في أية لحظة زمنية تصبح المركبة المماسية للتسارع مساوية للمركبة الناظمية له. ثم احسب طول القوس المقطوعة s خلال تلك الفترة.

السؤال الثاني (25 درجة):

نقطة مادية تتحرك في المستو xoy وفق المعادلة :

$$r = ae^{k\theta}$$

بحيث تكون سرعتها العددية: $v = \dfrac{b^2}{r}$ **(حيث a و b ثوابت)**

1) برهن أن الحركة خاضعة لقانون السطوح حول o .

2) أوجد تسارع هذه النقطة بدلالة r .

السؤال الثالث (30 درجة):

ليكن لدينا حقل القوى:

$$\vec{F} = \frac{-2xy^2}{x^2 + y^2}\vec{e}_x + \frac{y\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2}\vec{e}_y$$

1) عين خطوط قوى هذا الحقل.

2) هل الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى؟

السؤال الرابع (20 درجة):

لدينا كرة وزنها W مربوطة بخيطين إلى نقطتين ثابتتين ,الأول يصنع مع الشاقول زاوية θ والثاني يصنع مع الشاقول زاوية φ في حال التوازن. أوجد بدلالة θ و φ قوة شدي الخيطين.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (15 درجة)

تتحرك نقطة مادية على دائرة نصف قطرها R بتسارع مماسي ثابت b. في لحظة البدء كانت النقطة في الموضع (s=0) وسرعتها معدومة، والمطلوب في أي لحظة زمنية تصبح المركبة المماسية للتسارع مساوية للمركبة الناظمية له، ثم احسب طول القوس المقطوعة s خلال تلك الفترة.

الحل:

من فرضيات المسألة في اللحظة $t=0$ كانت $s=0$ و $v=0$.

ولدينا $\gamma_\tau = b$ و $\rho = R$

$$\gamma_\tau = \frac{dv}{dt} = b \Rightarrow dv = b\,dt \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} v = bt + c_1$$ ③

$$t=0 \Rightarrow v=0 \Rightarrow 0 = b.0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow \boxed{v=bt}$$

حساب اللحظة الزمنية التي تصبح المركبة المماسية للتسارع مساوية للمركبة الناظمية له

بفرض التسارعات متساويات

$$\gamma_\tau = \gamma_n$$ ③

$$\gamma_\tau = \gamma_n \Rightarrow b = \frac{v^2}{R} \Rightarrow b = \frac{b^2 t^2}{R} \Rightarrow t^2 = \frac{R}{b} \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{R}{b}}}$$ ③ وحدة زمن

- حساب طول القوس المقطوعة خلال تلك الفترة:

$$\frac{ds}{dt} = v \Rightarrow s = \int v\,dt = \int bt\,dt$$ ③

$$\Rightarrow s = \frac{bt^2}{2} + c_2$$

في اللحظة $t=0 \Rightarrow s=0 \Rightarrow 0 = \frac{b}{2}(0) + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

$$\Rightarrow s = \frac{bt^2}{2} = \frac{b}{2}\left(\frac{R}{b}\right) = \frac{R}{2}$$ ③ وحدة طول

وهي طول القوس المقطوعة خلال تلك الفترة.

السؤال الثاني (25 درجة)

نقطة مادية تتحرك في المستوي xoy وفق المعادلة :

$$r = a e^{k\theta}$$

بحيث تكون سرعتها العددية $v = \frac{b^2}{r}$

والمطلوب ① برهن أن الحركة خاضعة لقانون السطوح حول o

② أوجد تسارع هذه النقطة بدلالة r .

الحل: لدينا السرعة في الإحداثيات القطبية :

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$ ⑤

نعوض v بقيمتها :

$$\frac{b^4}{r^2} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

$$r = a e^{k\theta} \Rightarrow \dot{r} = a k \dot{\theta} e^{k\theta}$$

بالتعويض :

$$\frac{b^4}{r^2} = a^2 k^2 \dot{\theta}^2 e^{2k\theta} + r^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{b^4}{r^2} = k^2\dot{\theta}^2 r^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

$$b^4 = k^2\dot{\theta}^2 r^4 + r^4\dot{\theta}^2 = r^4\dot{\theta}^2(k^2+1)$$ ⑤

$$\Rightarrow r^4\dot{\theta}^2 = \frac{b^4}{k^2+1} \Rightarrow \boxed{r^2\dot{\theta} = \frac{b^2}{\sqrt{k^2+1}} = c}$$

$\Longleftarrow$ الحركة خاضعة لقانون السطوح حول o

إيجاد التسارع :

باستخدام قانون بينيه الثاني : $\vec{\gamma} = -c^2u^2(u+u'')\vec{e_r}$ ⑤

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a}e^{-k\theta} \Rightarrow u' = -\frac{k}{a}e^{-k\theta}$$

$$\Rightarrow u'' = \frac{k^2}{a}e^{-k\theta} \Rightarrow u + u'' = \frac{1}{a}e^{-k\theta} + \frac{k^2}{a}e^{-k\theta} = \frac{e^{-k\theta}}{a}(k^2+1)$$

$$u + u'' = \frac{(k^2+1)}{r}$$

بالتعويض بقانون بينيه الثاني : ⑤

$$\boxed{\vec{\gamma} = -\frac{c^2}{r^3}(k^2+1)\vec{e_r}}$$

السؤال الثالث (30 درجة)

ليكن لدينا حقل القوى
$$\vec{F} = \frac{-2xy^2}{x^2+y^2}\,\vec{e_x} + \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\,\vec{e_y}$$

1) أوجد خطوط قوى هذا الحقل.
2) هل الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى ؟

الحل :

1) لإيجاد خطوط القوى :

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y}$$ ④

$$\frac{dx}{-2xy} = \frac{dy}{x^2-y^2}$$

$$\underbrace{(x^2-y^2)}_{M}dx + \underbrace{2xy}_{N}dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= -2y\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2y\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$ المعادلة غير تامة ④

لنوجد عامل التكميل لتصبح المعادلة تامة :

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -4y \Rightarrow \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-4y}{2xy} = \frac{-2}{x}$$

عامل التكميل :

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx} = e^{\int \frac{-2}{x} dx} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{x^2}} \Longrightarrow$$ نضرب طرفي المعادلة بـ μ ④

$$\frac{x^2-y^2}{x^2}dx + \frac{2xy}{x^2}dy = 0$$

$$dx - \frac{y^2}{x^2}dx + \frac{2xy}{x^2}dy = 0$$

$$dx + \frac{2xy\,dy - y^2dx}{x^2} = 0 \Longrightarrow dx + d\left(\frac{y^2}{x}\right) = 0$$

بالمكاملة : خطوط القوى

$$\boxed{x + \frac{y^2}{x} = C}$$ ④

$$x^2 + y^2 - Cx = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{C^2}{4}$$

وتمثل خطوط القوى دوائر مركزها $(\frac{C}{2};0)$ ، ونصف قطرها $\frac{C}{2}$

② إذا كان $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى يجب أن يكون

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$ ④

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2xy^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{-4xy(x^2+y^2) - 2y(-2xy^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{-4x^3y - 4xy^3 + 4xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$ ④

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^3y + 2xy^3 - 2x^3y + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$ ④

نلاحظ أن $\frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x} \Leftarrow$ $\vec{F}$ لا يشتق من تابع قوى. ②

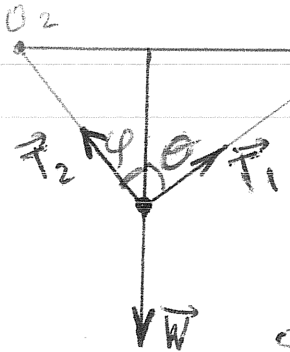
إذا الطالب وضع القانون $rot\,\vec{F} = 0$ يأخذ ④ درجات

بدلاً من $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$

السؤال الرابع (20 درجة)

لدينا كرة وزنها W مربوطة بخيطين إلى نقطتين ثابتتين ، الأول يصنع مع الشاقول زاوية θ والثاني يصنع مع الشاقول زاوية φ في حال التوازن أوجد بدلالة θ , φ قوة شدي الخيطين .

الحل :



القوى المؤثرة هي قوة الثقل $\vec{W}$

قوة الشد للخيط الأول $\vec{T_1}$

قوة الشد للخيط الثاني $\vec{T_2}$

بما أن الكرة في حال توازن ← نطبق علاقة لامي (علاقة الجيوب)

$$\underset{①}{\frac{T_1}{\sin(\pi-\varphi)}} = \underset{②}{\frac{T_2}{\sin(\pi-\theta)}} = \underset{③}{\frac{W}{\sin(\theta+\varphi)}}$$ ⑤ ⑤

وبالتالي من ① و ③ نجد :

$$\frac{T_1}{\sin(\varphi)} = \frac{W}{\sin(\theta+\varphi)} \rightarrow \boxed{T_1 = \frac{W \sin\varphi}{\sin(\theta+\varphi)}}$$ ⑤

$$\frac{T_2}{\sin\theta} = \frac{W}{\sin(\theta+\varphi)} \rightarrow \boxed{T_2 = \frac{W \sin\theta}{\sin(\theta+\varphi)}}$$ ⑤

جامعة طرطوس
كلية العــلــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى 2018- 2019

المدة: ساعتين
الدرجة : 90

السؤال الأول (30 درجة):

نقطة مادية تتحرك وفق المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

أوجد المسار الذي ترسمه هذه النقطة ثم أوجد متجه السرعة والسرعة العددية والمعادلة الزمنية للحركة $s = s(t)$ واحسب نصف تقوس المسار وأوجد متجه التسارع.

السؤال الثاني (20 درجة):

أنبوب دقيق على شكل قطع مكافئ معادلته: $y = 2ax^2$ موضوع في مستو شاقولي. و M نقطة مادية كتلتها m قذفت من رأس القطع بسرعة ابتدائية v_0 وواصلت سيرها داخل الأنبوب. إذا كان N رد الفعل الناظمي للإنبوب على النقطة المادية و ρ نصف قطر التقوس و g تسارع الجاذبية الأرضية و المطلوب أثبت أن:

$$\rho N = \frac{mg}{4a} + v_0^2 = \text{const}$$

السؤال الثالث (25 درجة):

ليكن لدينا حقل القوى: $\vec{F} = \left(4xy - 3x^2z^2\right)\vec{e}_x + \left(4y + 2x^2\right)\vec{e}_y + \left(1 - 2x^3z\right)\vec{e}_z$

1) برهن أن الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى ثم عين هذا التابع وعين سطوح السوية.

2) عين عمل الحقل $\vec{F}$ بين النقطتين $M_1(1,1,-1)$ و $M_2(2,2,-1)$

السؤال االرابع (15 درجة):

نقطة مادية تخضع لحقل يشتق من تابع قوى:

$$U(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2}{x}$$

أوجد مواضع توازن هذه النقطة

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (30 درجة)

نقطة مادية تتحرك وفق المعادلتين التاليتين :

$$x = a\cos^3 t$$
$$y = a\sin^3 t$$

أوجد المسار الذي ترسمه هذه النقطة ثم أوجد السرعة والسرعة العددية والمعادلة الزمنية للحركة واحسب نصف قطر تقوس المسار وأوجد متجه الناظم

الحل :

المسار :

$$x = a\cos^3 t \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}\cos t$$
$$y = a\sin^3 t \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}\sin t$$

بالتربيع والجمع :

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$
$$\Rightarrow \boxed{x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}} \quad ④$$

وهي المعادلة الديكارتية للمسار وتمثل سيكلوئيد .

السرعة :

$$\vec{v} = \acute{x}\vec{e_x} + \acute{y}\vec{e_y}$$
$$\acute{x} = -3a\cos^2 t\sin t \qquad \acute{y} = 3a\sin^2 t\cos t$$
$$\boxed{\vec{v} = -3a\cos^2 t\sin t\,\vec{e_x} + 3a\sin^2 t\cos t\,\vec{e_y}} \quad ④$$

السرعة العددية :

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2} = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}$$
$$\boxed{v = 3a\cos t\sin t} \quad ③$$

المعادلة الزمنية للحركة : $s = s(t)$

$$v = \frac{ds}{dt} = 3a\cos t\sin t$$
$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t 3a\cos t\sin t\,dt = \frac{3}{2}a\int_0^t \sin 2t\,dt = \left[-\frac{3}{4}a\cos 2t\right]_0^t$$
$$= -\frac{3}{4}a(\cos 2t - 1) = \frac{3}{4}a(1 - \cos 2t) = \frac{3}{2}a\sin^2 t$$
$$\boxed{s(t) = \frac{3}{2}a\sin^2 t} \quad ④$$

لإيجاد نصف قطر تقوس المسار يجب إيجاد متجه واحدة المماس $\vec{\tau}$ ومتجه الناظم ؟

متجه واحدة المماس :

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\acute{x}\vec{e_x} + \acute{y}\vec{e_y}}{v} = \frac{-3a\cos^2 t\sin t\,\vec{e_x} + 3a\sin^2 t\cos t\,\vec{e_y}}{3a\cos t\sin t}$$

متجه واحدة المماس :

$\vec{\tau} = -\cos t\,\vec{e_x} + \sin t\,\vec{e_y}$ ④

متجه الناظم :

$$\vec{K} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\tau}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}\Big/\frac{ds}{dt} = \frac{\vec{\tau}}{v}$$

$$= \frac{\sin t\,\vec{e_x} + \cos t\,\vec{e_y}}{3a\cos t\sin t} = \frac{1}{3a\cos t}\,\vec{e_x} + \frac{1}{3a\sin t}\,\vec{e_y}$$ ④

طويلة متجه الناظم

$$k = |\vec{K}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3a\cos t}\right)^2 + \left(\frac{1}{3a\sin t}\right)^2} = \frac{1}{3a\sin t\cos t}$$

فيكون نصف قطر تقوس المسار :

$$\rho = \frac{1}{k} = 3a\sin t\cos t = \frac{3}{2}a\sin 2t$$ ③

متجه التسارع :

$x'' = 6a\cos t\sin^2 t - 3a\cos^3 t$

$y'' = 6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t$

$$\vec{\gamma} = x''\,\vec{e_x} + y''\,\vec{e_y} = (6a\cos t\sin^2 t - 3a\cos^3 t)\,\vec{e_x} + (6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t)\,\vec{e_y}$$ ④

طريقة أخرى لحساب ρ :

إذا الطالب وجد γ التسارع ثم أوجد نصف قطر التقوس بهذه الطريقة :

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v}\wedge\vec{\gamma}|}$$ ②

$v^3 = (3a\cos t\sin t)^3 = 27a^3\cos^3 t\sin^3 t$ ③

$$\vec{v}\wedge\vec{\gamma} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3a\cos^2 t\sin t & 3a\sin^2 t\cos t & 0 \\ 6a\sin^2 t\cos t - 3a\cos^3 t & 6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= [-18a^2\sin^2 t\cos^4 t + 9a^2\cos^2 t\sin^4 t - 18a^2\sin^4 t\cos^2 t + 9a^2\sin^2 t\cos^4 t]\,\vec{k}$$ ④

$$\vec{v}\wedge\vec{\gamma} = -9a^2\sin^2 t\cos^4 t - 9a^2\cos^2 t\sin^4 t = -9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) = -9a^2\sin^2 t\cos^2 t$$

$$\rho = \frac{27a^3\cos^3 t\sin^3 t}{9a^2\sin^2 t\cos^2 t} = 3a\cos t\sin t = \frac{3}{2}a\sin 2t$$ ②

- إذا الطالب كتب $\rho = \frac{v^2}{\gamma_n}$ ②

$\gamma_\tau = \frac{dv}{dt} = 3a(\cos^2 t - \sin^2 t) = 3a\cos 2t$ ③

$\gamma^2 = \gamma_\tau^2 + \gamma_n^2 \Rightarrow \gamma_n^2 = \gamma^2 - \gamma_\tau^2$ ②

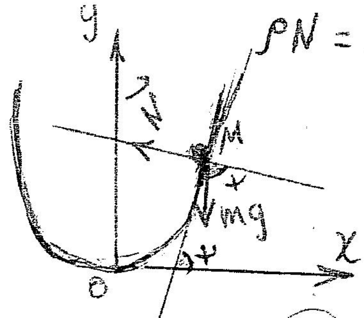
يُوجد γ^2 فيأخذ الطالب ②

وعند التعويض وحساب ρ يأخذ الطالب ②

السؤال الثاني (20 درجة)

أنبوب دقيق على شكل قطع مكافئ معادلته $y = 2ax^2$ موضوع في مستوٍ شاقولي و M نقطة مادية كتلتها m قذفت من رأس القطع بسرعة ابتدائية v_0 و واجلة سيرها داخل الأنبوب. إذا كان N رد الفعل الناظمي للإنبوب على النقطة و ρ نصف قطر التقوس و g تسارع الجاذبية الأرضية والمطلوب أثبت أن:

$$\rho N = \frac{mg}{4a} + v_0^2 = \text{const}$$



الحل:

إن قانون الطاقة بين o والوضع العام M :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgy$$

$$v^2 - v_0^2 = -2gy \qquad (1) \quad ④$$

$$m\vec{\gamma} = \vec{N} + m\vec{g} \quad ②$$

من القانون الأساسي في التحريك (قانون نيوتن):

بالإسقاط على الناظم:

$$m\gamma_n = N - mg\cos\psi$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = N - mg\cos\psi$$

$$N\rho = mg\rho\cos\psi + mv^2 \qquad (2) \quad ④$$

ولنعين نصف قطر التقوس ρ :

$$y = 2ax^2$$

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

$$y' = 4ax = \tan\psi$$

$$y'' = 4a$$

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(1+16a^2x^2)^{3/2}}{4a} \quad ④ \qquad (3)$$

$$\cos^2\psi = \frac{1}{1+\tan^2} = \frac{1}{\sqrt{1+16a^2x^2}}$$

بتعويض (3) و (1) في (2)

$$N\rho = mg\,\frac{(1+16a^2x^2)^{3/2}}{4a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+16a^2x^2}} + m\left(v_0^2 - 2g(2ax^2)\right) \quad ④$$

$$N\rho = \frac{mg}{4a}(1+16a^2x^2) + mv_0^2 - 4mgax^2$$

$$= \frac{mg}{4a} + \cancel{4mgax^2} + mv_0^2 - \cancel{4mgax^2} = \frac{mg}{4a} + mv_0^2$$

$$\boxed{N\rho = \frac{mg}{4a} + mv_0^2 = \text{const}} \quad ②$$

السؤال الثالث (25 درجة)

ليكن لدينا حقل القوى : $\vec{F} = (4xy - 3x^2z^2)\vec{e_x} + (4y + 2x^2)\vec{e_y} + (1 - 2x^3z)\vec{e_z}$

1) برهن أن الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى ثم عين هذا التابع وعين سطوح السوية

2) عين عمل الحقل $\vec{F}$ بين النقطتين $M_1(1,1,-1)$ ، $M_2(2,2,-1)$

الحل :

1)

$$③\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = 4x \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = -6x^2z \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} ③$$

(إذا الطالب أوجد المعين $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{rot}\vec{F} = 0$ يأخذ الطالب ⑥ درجات)

⇐ الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى U لنعينه :

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}\, U$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 4xy - 3x^2z^2 \quad (1)$$

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 4y + 2x^2 \quad (2)$$

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = 1 - 2x^3z \quad (3)$$

نكامل (1) بالنسبة لـ x :

$$U = 2x^2y - x^3z^2 + \varphi(y,z) \quad (4) \quad ③$$

نشتق (4) بالنسبة لـ y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2x^2 + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}$$

بالمقارنة مع (2) :

$$2x^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4y + 2x^2 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4y$$

بالمكاملة بالنسبة لـ y :

$$\varphi = 2y^2 + C(z) \quad ③$$

نعوض في (4)

$$U = 2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + C(z) \quad (5)$$

نشتق (5) بالنسبة لـ z :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -2x^3z + C'_z$$

بالمقارنة مع (3)

$$-2x^3z + C'_z = 1 - 2x^3z \Rightarrow C'_z = 1 \Rightarrow C = z$$

نعوض في (5) :

$$\boxed{U = 2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z} \quad ③$$

سطوح السوية :

$$U = 2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z = C \quad ①$$

إذا الطالب اوجد تابع القوى بهذه الطريقة :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$ ③

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$= (4xy - 3x^2z^2)dx + (4y + 2x^2)dy + (1 - 2x^3z)dz$$ ③

$$= (4xy\,dx + 2x^2dy) + (-3x^2z^2dx - 2x^3z\,dz) + 4y\,dy + dz$$ ③

$$= d(2x^2y) + d(-x^3z^2) + d(2y^2) + dz$$ ③

بالمكاملة =

$$\Longrightarrow V = 2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z$$ ③

(2

$$dW = \vec{F}\cdot\vec{dr} = dV$$ ③ $$W = [V]_{M_1}^{M_2} = \left[2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z\right]_{M_1(1,1,-1)}^{M_2(2,+2,-1)}$$

$$\Longrightarrow W = \left[2(2)^2(+2) - (2)^3(-1)^2 + 2(+2)^2 + (-1)\right] - \left[2(1)^2(1) - (1)^3(-1)^2 + 2(1)^2 + (-1)\right]$$

$$= [16 - 8 + 8 - 1] - [2 - 1 + 2 - 1] = 15 - 2 = 13$$ ③

السؤال الرابع (15 درجة)

نقطة مادية تخضع لحقل يشتق من تابع قوى :

$$V(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{x}$$

أوجد مواضع توازن هذه النقطة .

الحل :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{x^2} = 0 \quad (1) \quad \textcircled{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2y}{x} = 0 \quad (2) \quad \textcircled{5}$$

والحل المشترك لـ (1) و(2) :

من (2) $\Leftarrow$ $y=0$ $\Leftarrow$ من (1) $x^2=y^2$ $\Leftarrow$ $x=0$

ويوجد موضع توازن وحيد هو (0,0) مبدأ الاحداثيات ⑤

جامعة طرطوس
كلية العلـوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية 2015- 2016

المدة: ساعتين
الدرجة : 75

السؤال الأول (20 درجة):

في حركة الكواكب حول الشمس استنتج عبارتي السرعة والتسارع في الإحداثيات القطبية مستقلين عن الزمن.

السؤال الثاني (25 درجة):

مظلي كتلته m ترك ليسقط بدون سرعة ابتدائية في وسط مقاوم حيث تتناسب قوة المقاومة مع مربع السرعة و ثابت التناسب هو mk و المطلوب:

أوجد سرعة المظلي ثم أوجد المعادلة الزمنية للحركة.

السؤال الثالث (30 درجة):

ليكن: $\vec{F} = \left(4xy - 3x^2z^2\right)\vec{e}_x + \left(4y + 2x^2\right)\vec{e}_y + \left(1 - 2x^3z\right)\vec{e}_z$

1) برهن أن الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى ثم عين هذا التابع و عين سطوح السوية.

2) عين عمل الحقل $\vec{F}$ بين النقطتين $M_1\left(1,1,-1\right)$ و $M_2\left(2,2,-1\right)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

1 ـ المسألة الأولى (20 درجة)

في حركة الكواكب حول الشمس استنتج قانونا السرعة والتسارع في الإحداثيات القطبية مستقلين عن الزمن t.

الحل:

حركة الكواكب خاضعة لقانون السطوح (1) $r^2\theta' = c$ ③

السرعة في الإحداثيات القطبية (2) $\vec{v} = r'\vec{e_r} + r\theta'\vec{e_\theta}$ ③

لتحويل المشتقات بالنسبة للزاوية θ بدلاً من الزمن t ندخل متحول جديداً:

① $u = \frac{1}{r}$ (3)

وبالتالي يصبح شرط الخضوع لقانون السطوح (1):

$$\theta' = cu^2$$

$$r' = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$$

$$r' = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot cu^2 = -c\frac{du}{d\theta} = -cu'_\theta \quad ②$$

$$\vec{v} = -cu'_\theta\vec{e_r} + cu\vec{e_\theta}$$

$$\boxed{v^2 = c^2(u'^2_\theta + u^2)} \quad ③$$ دستور بينيه

التسارع في الإحداثيات القطبية بالأخذ بعين الاعتبار أن الحركة خاضعة لقانون السطوح

$$\vec{\gamma} = (r'' - r\theta'^2)\vec{e_r} \quad ③$$

$$r'' = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr'}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -cu''_\theta\cdot cu^2 = -c^2u^2u''_\theta \quad ②$$

$$\vec{\gamma} = [-c^2u^2u''_\theta - \frac{1}{u}(c^2u^4)]\vec{e_r} = -c^2u^2(u''_\theta + u)\vec{e_r}$$

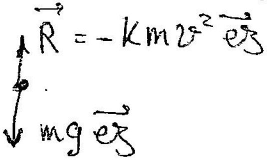
$$\boxed{\vec{\gamma} = -c^2u^2(u''_\theta + u)\vec{e_r}} \quad ③$$ دستور بينيه الثاني.

المسألة الثانية (25 درجة)

مظلي كتلته m ترك ليسقط بدون سرعة ابتدائية في وسط مقاوم حيث تتناسب قوة المقاومة مع مربع السرعة وثابت التناسب هو mK ، والمطلوب :
أوجد سرعة المظلي ثم أوجد المعادلة الزمنية للحركة .

الحل : $\vec{R} = -mkv^2\vec{e_z}$ ③

$oz \downarrow$ شاقولي هابط



$\vec{R} = -Kmv^2\vec{e_z}$

$mg\vec{e_z}$

القانون الأساسي في التحريك :

$$m\vec{\gamma} = \sum \vec{F} = \vec{R} + m\vec{g} \quad ⑤$$

بالإسقاط

$$m\frac{dv}{dt} = mg - mkv^2 \quad ③$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{\frac{g}{k} - v^2} = kdt \Rightarrow$$

بالتكامل

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{a^2 - v^2} = Kt + C \quad ③ \; ; \; a^2 = \frac{g}{k} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right| = kt + C \Rightarrow \ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right| = 2akt + C_1 \; ; C_1 = 2aC$$

$$\ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right| = 2\sqrt{kg}\; t + C_1$$

لنوجد C_1 : في اللحظة $t = 0$ كان $v = 0$

$$C_1 = \ln\left|\frac{a}{a}\right| = \ln 1 = 0$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right| = 2bt \; ; \; b = \sqrt{kg}$$

$$\frac{a+v}{a-v} = e^{2bt} \Rightarrow a + v = (a-v)e^{2bt}$$

$$v(1 + e^{2bt}) = a(e^{2bt} - 1) \Rightarrow v = a\frac{e^{2bt} - 1}{1 + e^{2bt}} = a\frac{e^{bt} - e^{-bt}}{e^{bt} + e^{-bt}}$$

$$\boxed{v = a\,th(bt)}$$ ③ سرعة المظلي

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{g}{k}}\; th(\sqrt{gk}\; t)}$$

معادلة الحركة :

$$③ \; \frac{dz}{dt} = a\frac{sh(bt)}{ch(bt)} \Rightarrow z = \frac{a}{b}\int \frac{b\,sh(bt)}{ch(bt)}dt$$

$$\Rightarrow z = \frac{a}{b}\ln|ch(bt)| + C_2$$

لإيجاد C_2 : $t = 0$ كان $z = 0$ ، $ch(0) = 1$

$$\ln|ch(0)| = \ln(1) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\boxed{z = \frac{a}{b}\ln|ch(bt)|} \; . \; a = \sqrt{\frac{g}{k}} \; , \; b = \sqrt{kg}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{\frac{g}{k}}}{\sqrt{kg}} = \sqrt{\frac{g}{k^2 g}} = \frac{1}{k} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{k}\ln|ch(\sqrt{gk}\; t)|}$$ معادلة الحركة

السؤال الثالث: (30 درجة)

حقل يتعين بالمتجه :

$$\vec{F} = (4xy - 3x^2z^2)\,\vec{e_x} + (4y + 2x^2)\,\vec{e_y} + (1 - 2x^3z)\,\vec{e_z}$$

1) برهن أن الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى ثم عين هذا التابع وعين سطوح التسوية

2) عين العمل الذي ينجزه الحقل $\vec{F}$ بين النقطتين $M_1(1,1,-1)$ و $M_2(2,-2,-1)$

الحل:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 4x$$

③ $$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = -6x^2z$$ ③

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0$$

⟸ الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى U لنعينه :

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}\, U$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 4xy - 3x^2z^2 \quad (1)$$

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 4y + 2x^2 \quad (2)$$ ③

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = 1 - 2x^3z \quad (3)$$

نكامل (1) بالنسبة لـ x :

$$U = 2x^2y - x^3z^2 + \varphi(y,z) \quad (4)$$ ③

نشتق (4) بالنسبة لـ y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2x^2 + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}$$

بالمقارنة مع (2) :

$$2x^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4y + 2x^2 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4y$$

بالمكاملة بالنسبة لـ y :

$$\varphi = 2y^2 + C(z)$$ ③

نعوض في (4)

$$U = 2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + C(z) \quad (5)$$

نشتق (5) بالنسبة لـ z

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -2x^3z + C'(z)$$ ③

بالمقارنة مع (3) :

$$1 - 2x^3z = -2x^3z + C'_z \Rightarrow C'_z = 1 \Rightarrow C = z$$

سطوح التسوية

$$\boxed{U = 2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z} ③ \longrightarrow \boxed{U = 2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z = C} ③$$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = dU ③ \Rightarrow W = [U]_{M_1}^{M_2} = \left[2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z\right]_{M_1}^{M_2}$$ ③

$$= U(M_2) - U(M_1) = 13$$

إذا الطالب حل بالطريقة التالية لايجاد U :

$$du = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$ ③

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz$$ ③

$$= (4xy - 3x^2z^2)dx + (4y + 2x^2)dy + (1 - 2x^3z)dz$$ ③

$$= (4xy\,dx + 2x^2dy) - (3x^2z^2dx + 2x^3z\,dz) + 4y\,dy + dz$$

$$= d(2x^2y) + d(-x^3z^2) + d(2y^2) + dz$$ ③

الحل

$$\Rightarrow U = 2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z$$ ③

جامعة طرطوس
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الاستثنائية 2015- 2016

المدة: ساعتين
الدرجة : 75

السؤال الأول (30 درجة):

نقطة مادية تتحرك على منحن معينة بنصف القطر المتجهي:

$$\overrightarrow{oM}=\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\overrightarrow{e_x}+t^2\overrightarrow{e_y}+\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\overrightarrow{e_z}$$

و المطلوب : 1) أوجد السرعة العددية لهذه النقطة.

2)احسب التسارع المماسي و التسارع الكلي و التسارع الناظمي ونصف قطر التقوس.

3) أوجد متجه واحدة المماس $\vec{\tau}$.

4) أوجد متجه واحدة الناظم الأساسي $\vec{n}$.

السؤال الثاني (20 درجة):

مظلي كتلته m ترك ليسقط بدون سرعة ابتدائية في وسط مقاوم حيث تتناسب قوة المقاومة مع مربع السرعة و ثابت التناسب هو mk و المطلوب:

أوجد سرعة المظلي ثم أوجد المعادلة الزمنية للحركة.

السؤال الثالث (25 درجة):

ليكن: $\vec{F}=\left(4xy-3x^2z^2\right)\vec{e}_x+\left(4y+2x^2\right)\vec{e}_y+\left(1-2x^3z\right)\vec{e}_z$

1) برهن أن الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى ثم عين هذا التابع و عين سطوح السوية.

2) عين عمل الحقل $\vec{F}$ بين النقطتين $M_1\left(1,1,-1\right)$ و $M_2\left(2,2,-1\right)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (30 درجة)

نقطة مادية تتحرك على منحن معينة بنصف القطر المتجهي :

$$\vec{OM} = \left(\frac{t^3}{3}+t\right)\vec{e_x} + t^2\vec{e_y} + \left(\frac{t^3}{3}-t\right)\vec{e_z}$$

والمطلوب : 1) أوجد السرعة العددية لهذه النقطة

2) احسب التسارع المماسي والتسارع الكلي والتسارع الناظمي ونصف قطر التقوس.

3) أوجد متجه واحدة المماس $\vec{\tau}$

4) أوجد متجه واحدة الناظم الأساسي $\vec{n}$.

الحل:

$\vec{v} = (t^2+1)\vec{e_x} + 2t\,\vec{e_y} + (t^2-1)\vec{e_z}$ ③

$v^2 = |\vec{v}|^2 = (t^2+1)^2 + (2t)^2 + (t^2-1)^2 = t^4+2t^2+1+4t^2+t^4-2t^2+1$

السرعة العددية $v^2 = 2t^4+4t^2+2 = 2(t^2+1)^2 \Rightarrow \boxed{v=\sqrt{2}\,(t^2+1)}$ ③

التسارع الكلي :

$\vec{\gamma} = 2t\,\vec{e_x} + 2\,\vec{e_y} + 2t\,\vec{e_z}$ ③

$\gamma^2 = 4t^2+4+4t^2 = 8t^2+4 = 4(2t^2+1)$

التسارع المماسي :

$\boxed{\gamma_\tau = \frac{dv}{dt} = 2\sqrt{2}\,t}$ ③

التسارع الناظمي

$\gamma_n^2 = \gamma^2 - \gamma_\tau^2 = 4(2t^2+1) - 8t^2 - 4 \Rightarrow \boxed{\gamma_n = 2}$ ③

نصف قطر التقوس :

$\gamma_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{\gamma_n} = \frac{2(t^2+1)^2}{2} = (t^2+1)^2$

$\boxed{\rho = (t^2+1)^2}$ ③

متجه واحدة المماس

$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{t^2+1}{\sqrt{2}(t^2+1)}\vec{e_x} + \frac{2t}{\sqrt{2}(t^2+1)}\vec{e_y} + \frac{t^2-1}{\sqrt{2}(t^2+1)}\vec{e_z}$ ③

متجه الناظم الأساسي :

$\vec{K} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}\Big/\frac{ds}{dt} = \frac{\vec{\tau}'}{v}$

$\vec{\tau}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_x} + \frac{2t}{\sqrt{2}(t^2+1)}\vec{e_y} + \frac{t^2-1}{\sqrt{2}(t^2+1)}\vec{e_z}\right)' = \frac{2\sqrt{2}(t^2+1) - 4\sqrt{2}t^2}{2(t^2+1)^2}\vec{e_y} + \frac{2\sqrt{2}t(t^2+1) - 2\sqrt{2}t(t^2-1)}{2(t^2+1)^2}\vec{e_z}$

$= \frac{\sqrt{2}(t^2+1-2t^2)}{(t^2+1)^2}\vec{e_y} + \frac{\sqrt{2}t(t^2+1-t^2+1)}{(t^2+1)^2}\vec{e_z} = \frac{\sqrt{2}(1-t^2)}{(t^2+1)^2}\vec{e_y} + \frac{2\sqrt{2}t}{(t^2+1)^2}\vec{e_z}$

متجه الناظم الأساسي :

$\vec{K} = \frac{\vec{\tau}'}{v} = \frac{(1-t^2)}{(t^2+1)^3}\vec{e_y} + \frac{2t}{(t^2+1)^3}\vec{e_z}$ ③

$|\vec{K}| = k = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{(t^2+1)^2}$

متجه واحدة الناظم الأساسي :

$\boxed{\vec{n} = \frac{\vec{K}}{|\vec{K}|} = \frac{1-t^2}{t^2+1}\vec{e_y} + \frac{2t}{t^2+1}\vec{e_z}}$ ③

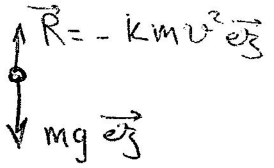
السؤال الثاني (20 درجة)

مظلي كتلته m ترك ليسقط بدون سرعة ابتدائية في وسط مقاوم حيث تتناسب قوة المقاومة مع مربع السرعة وثابت التناسب هو mK والمطلوب :

أوجد سرعة المظلي ثم أوجد المعادلة الزمنية للحركة.

الحل : $\vec{R} = -mkv^2\vec{e_z}$ ③

$oz\downarrow$ شاقولي هابط



المبدأ الأساسي في التحريك :

$$m\vec{\gamma} = \Sigma\vec{F} = \vec{R} + m\vec{g}$$ ⑤

بالإسقاط :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - mkv^2$$ ③

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - Kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{\frac{g}{K} - v^2} = Kdt \xRightarrow{\text{بالتكامل}} \int\frac{dv}{a^2 - v^2} = Kt + C$$

حيث $a^2 = \frac{g}{K} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{g}{K}}$

$$\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right| = Kt + C \Rightarrow \ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right| = 2aKt + C_1 \;;\; C_1 = 2aC$$

$$\ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right| = 2\sqrt{Kg}\,t + C_1$$ ②

لنوجد C_1 : في اللحظة $t=0$ كان $v=0$

$$C_1 = \ln\left|\frac{a}{a}\right| = \ln 1 = 0 \Rightarrow \ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right| = 2bt \;;\; b = \sqrt{Kg}$$

$$\Rightarrow \frac{a+v}{a-v} = e^{2bt} \Rightarrow a + v = (a-v)e^{2bt}$$

$$\Rightarrow v(1 + e^{2bt}) = a(e^{2bt} - 1) \Rightarrow v = a\frac{e^{2bt} - 1}{1 + e^{2bt}} \overset{\frac{e^{-bt}}{e^{-bt}}}{=} a\frac{e^{bt} - e^{-bt}}{e^{bt} + e^{-bt}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = a\,th(bt)}$$ ③ سرعة المظلي

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{g}{k}}\,th(\sqrt{gk}\,t)}$$

معادلة الحركة :

$$\frac{dz}{dt} = a\frac{Sh(bt)}{ch(bt)} \xRightarrow{\text{بالتكامل}} z = \frac{a}{b}\int b\frac{Sh(bt)}{ch(bt)}dt$$ ①

$$\Rightarrow z = \frac{a}{b}\ln|ch(bt)| + C_2$$

لايجاد C_2 : $t=0$ كان $ch(0) = 1 \Leftarrow$

$$\ln|ch(0)| = \ln|1| = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\boxed{z = \frac{a}{b}\ln|ch(bt)|}$$ ③ $a = \sqrt{\frac{g}{k}}\,,\; b = \sqrt{kg}$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{\frac{g}{k}}}{\sqrt{kg}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}\sqrt{kg}} = \frac{\sqrt{g}}{k\sqrt{g}} = \frac{1}{k} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{k}\ln|ch(\sqrt{gk}\,t)|}$$ معادلة الحركة

السؤال الثالث (25 درجة)

لتكن : $\vec{F} = (4xy - 3x^2z^2)\vec{e_x} + (4y + 2x^2)\vec{e_y} + (1 - 2x^3z)\vec{e_z}$

1) برهن أن الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع سوى ثم عين هذا التابع وعين سطوح السوية

2) عين عمل الحقل $\vec{F}$ بين النقطتين $M_1(1,1,-1)$ ، $M_2(2,2,-1)$

الحل:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 4x$$

③ $$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = -6x^2z$$ ③

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0$$

← الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع سوى U لتعيين :

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\, U$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 4xy - 3x^2z^2 \quad (1)$$

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 4y + 2x^2 \quad (2)$$

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = 1 - 2x^3z \quad (3)$$

③

نكامل (1) بالنسبة لـ x :

$$U = 2x^2y - x^3z^2 + \varphi(y,z) \quad (4)$$

③

نشتق (4) بالنسبة لـ y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2x^2 + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}$$

بالمقارنة مع (2) :

$$2x^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4y + 2x^2 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4y$$ ③

بالمكاملة بالنسبة لـ y :

$$\varphi = 2y^2 + c(z)$$

نعوض في (4)

$$U = 2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + c(z) \quad (5)$$ ③

نشتق (5) بالنسبة لـ z :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -2x^3z + c'(z)$$

بالمقارنة مع (3) :

$$1 - 2x^3z = -2x^3z + c'(z) \Rightarrow c'(z) = 1 \overset{\text{بالمكاملة}}{\Rightarrow} c = z$$

$$\boxed{U = 2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z}$$ ②

③ $$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = dU \Rightarrow W = [U]_{M_1}^{M_2} = \left[2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z\right]_{M_1}^{M_2}$$

$$= U(M_2) - U(M_1) = 13$$ ②

7

إذا الطالب حل لإيجاد التابع U حل بالطريقة :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$ ③

$$= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$ ③

$$= (4xy - 3x^2z^2)dx + (4y + 2x^2)dy + (-2x^3z)dz$$

$$= 4xy\,dx + 2x^2dy + (-3x^2z^2dx - 2x^3z\,dz) + 4y\,dy + dz$$ ③

$$= d(2x^2y) + d(-x^3z^2) + d(2y^2) + dz$$ ③

$$\Rightarrow u = 2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z$$ ②

جامعة طرطوس
كلية العلـوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (1)
لطلاب الرياضيات -السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى 2015- 2016

المدة: ساعتين
الدرجة : 75

السؤال الأول (30 درجة):

نقطة مادية تتحرك، على منحن معينة بنصف القطر المتجهي:

$$\overrightarrow{oM} = \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\overrightarrow{e_x} + t^2\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\overrightarrow{e_z}$$

و المطلوب: 1) أوجد السرعة العددية لهذه النقطة.

2)احسب التسارع المماسي و التسارع الكلي و التسارع الناظمي ونصف قطر التقوس.

3) أوجد متجه واحدة المماس $\vec{\tau}$.

4) أوجد متجه واحدة الناظم الأساسي $\vec{n}$.

السؤال الثاني (20 درجة):

تقذف كرة كتلتها m من مبدأ الاحداثيات O في وسط غير مقاوم بسرعة ابتدائية v_0 ، تميل عن الأفق بزاوية ثابتة α و المطلوب:

1) أوجد معادلات الحركة ثم أوجد المسار الذي ترسمه هذه الكرة.

2) أوجد أبعد نقطة تصل اليها هذه القذيفة على الأرض

السؤال الثالث (25 درجة):

M نقطة مادية تخضع لحقل قوى يشتق من التابع:

$$U(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{y}$$

والمطلوب 1) عين خطوط القوى لهذا الحقل وخطوط السوية.

2) عين العمل الذي ينجزه هذا الحقل عندما يتغير ترتيب M من $1 \longrightarrow 2$ على المنحن $y^2 = x + 2$

3) عين مواضع توازن هذه النقطة.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (30 درجة)

$$\vec{OM} = \left(\frac{t^3}{3}+t\right)\vec{e_x} + t^2\vec{e_y} + \left(\frac{t^3}{3}-t\right)\vec{e_z}$$

المطلوب: 1) أوجد السرعة العددية لهذه النقطة 2) احسب التسارع المماسي والتسارع الناظمي والتسارع الكلي ونصف قطر التقوس 3) أوجد متجه واحدة المماس 4) أوجد متجه واحدة الناظم الأساسي.

الحل: 1) متجه السرعة:

③ $\vec{v} = (t^2+1)\vec{e_x} + 2t\,\vec{e_y} + (t^2-1)\vec{e_z}$

$v^2 = |\vec{v}|^2 = (t^2+1)^2 + (2t)^2 + (t^2-1)^2 = t^4+2t^2+1+4t^2+t^4-2t^2+1$

$= 2t^4+4t^2+2 = 2(t^4+2t^2+1) = 2(t^2+1)^2$

$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2}(t^2+1)}$ السرعة العددية ③

③ $\vec{\gamma} = 2t\,\vec{e_x} + 2\,\vec{e_y} + 2t\,\vec{e_z}$

التسارع الكلي: $\gamma^2 = 4t^2+4+4t^2 = 8t^2+4 = 4(2t^2+1)$ ③

التسارع المماسي: $\boxed{\gamma_\tau = \frac{dv}{dt} = 2\sqrt{2}\,t}$ ③

التسارع الناظمي: $\gamma_n^2 = \gamma^2 - \gamma_\tau^2 = 4(2t^2+1) - 8t^2 =$ [illegible]

نصف قطر التقوس: $\rho = \frac{v^2}{\gamma_n} = \frac{2(t^2+1)^2}{2} = (t^2+1)^2,\ \boxed{\rho = (t^2+1)^2}$ ③

متجه واحدة المماس: $\vec{\tau} = \frac{\vec{r'}}{|\vec{r'}|} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \boxed{\frac{t^2+1}{\sqrt{2}(t^2+1)}\vec{e_x} + \frac{2t}{\sqrt{2}(t^2+1)}\vec{e_y} + \frac{t^2-1}{\sqrt{2}(t^2+1)}\vec{e_z}}$ ③

متجه الناظم الأساسي: $\vec{K} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}$ [illegible] $= \frac{\vec{\tau'}}{v}$

$\vec{\tau'} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_x} + \frac{2t}{\sqrt{2}(t^2+1)}\vec{e_y} + \frac{t^2-1}{\sqrt{2}(t^2+1)}\vec{e_z}\right)' = \frac{2\sqrt{2}(t^2+1) - 4\sqrt{2}t^2}{2(t^2+1)^2}\vec{e_y} + \frac{2\sqrt{2}t(t^2+1) - 2\sqrt{2}t}{2(t^2+1)}$

$= \frac{\sqrt{2}(t^2+1-2t^2)}{(t^2+1)^2}\vec{e_y} + \frac{2\sqrt{2}t(t^2+1-(t^2-1))}{(t^2+1)^2}\vec{e_z} = \frac{\sqrt{2}(1-t^2)}{(t^2+1)^2}\vec{e_y} + \frac{2\sqrt{2}t}{(t^2+1)^2}\vec{e_z}$

متجه الناظم الأساسي:

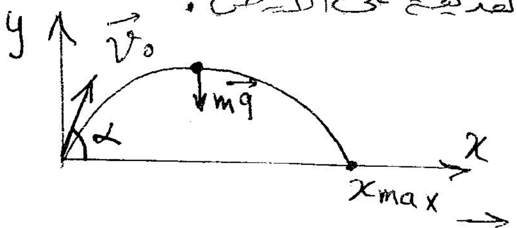
$\vec{K} = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^3}\vec{e_y} + \frac{2t}{(t^2+1)^3}\vec{e_z}$ ③

$|\vec{K}| = k = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{(t^2+1)^2}$

متجه واحدة الناظم الأساسي: $\boxed{\vec{n} = \frac{\vec{K}}{k} = \frac{1-t^2}{t^2+1}\vec{e_y} + \frac{2t}{t^2+1}\vec{e_z}}$ ③

المسألة الثانية (20 درجة)

نقطة مادية كتلتها m قذفت من مبدأ الاحداثيات o في وسط غير مقاوم بسرعة ابتدائية v_0 تميل على الأفق بزاوية ثابتة α. أوجد معادلات الحركة ثم أوجد المسار الذي ترسمه هذه النقطة وأوجد أبعد نقطة تصل إليها القذيفة على الأرض.



الحل:

القانون الأساسي في التحريك :

$$m\vec{\gamma} = \vec{F}$$ ③

القوة المؤثرة في النقطة المادية هي الثقل $\vec{mg}$

$m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{F} \Rightarrow m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x}=0 , \dot{x}=C_1$ الاسقاط على ox

$m\ddot{y}=-mg \Rightarrow \ddot{y}=-g\ \dot{y}=-gt+C_2$ الاسقاط على oy

من شروط البدء : $\vec{v}_0(v_0\cos\alpha , v_0\sin\alpha)$ ، والوضع الابتدائي $\vec{x}_0(0,0)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0\cos\alpha \\ \dot{y} = -gt+v_0\sin\alpha \end{cases}$$

بالمكاملة :

$$x=(v_0\cos\alpha)t+C'_1$$
$$y=-\frac{1}{2}gt^2+(v_0\sin\alpha)t+C'_2$$

باستخدام شروط البدء : $C'_2=0 , C'_1=0$

معادلات الحركة $\begin{cases} x=(v_0\cos\alpha)t & (1) \\ y=-\frac{1}{2}gt^2+(v_0\sin\alpha)t & (2) \end{cases}$ ④

لحساب المسار : نحذف الوسيط t من معادلات الحركة

من (1) $\Longrightarrow t=\frac{x}{v_0\cos\alpha} \xrightarrow{\text{نعوض في (2)}} \boxed{y=-\frac{1}{2}g\left(\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}\right)+x\,tg\alpha}$ ③

المسار قطع مكافئ.

- عندما تصل القذيفة إلى الأرض ⟸ $y=0$ ⟸

$$-\frac{1}{2}gt^2+(v_0\sin\alpha)t=0 \Rightarrow$$

② إما $t=0$ (في البداية)

أو $\boxed{t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}}$ (في النهاية) وهو زمن الوصول إلى الأرض.

نعوض في x للحصول على أبعد نقطة تصل إليها القذيفة.

$$x_{max}=v_0\cos\alpha\left(\frac{2v_0\sin\alpha}{g}\right)=\frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$$ ④

السؤال الثالث

M نقطة مادية تخضع لحقل قوى يشتق من التابع :

$$U = \frac{x^2+y^2}{y}$$

1- عين خطوط القوى وخطوط السوية لهذا الحقل

2- عين العمل الذي ينجزه هذا الحقل عندما M يتغير ترتيبا من 1 ← 2 على المنحني $=x+2$

3- عين مواضع توازن هذه النقطة المادية.

الحل :

$$\vec{F} = F_x \vec{e_x} + F_y \vec{e_y}$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{y}$$ ③

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y \cdot y - (x^2+y^2)}{y^2} = \frac{y^2-x^2}{y^2}$$ ③

خطوط القوى :

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \Longrightarrow$$ ③

$$\frac{dx}{\frac{2x}{y}} = \frac{dy}{\frac{y^2-x^2}{y^2}} \Longrightarrow \boxed{(x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= -2y\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2y\end{aligned}\right\}$$ المعادلة (1) ليست تامة

لإيجاد عامل التكامل :

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-2y-2y}{2xy} = \frac{-4y}{2xy} = \frac{-2}{x}$$

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}} = e^{\int \frac{-2}{x} dx} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2} \quad , \quad \boxed{\mu = \frac{1}{x^2}}$$ ③ عامل التكامل

نضرب طرفي المعادلة (1) بعامل التكامل :

$$\frac{x^2-y^2}{x^2}dx + \frac{2xy}{x^2}dy = 0 \Longrightarrow dx - \frac{y^2}{x^2}dx + \frac{2xy}{x^2}dy = 0$$

$$dx + d\left(\frac{y^2}{x}\right) = 0 \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \boxed{x + \frac{y^2}{x} = C}$$

بالإتمام إلى مربع كامل :

$$x^2+y^2-Cx = 0 \Longrightarrow x^2 - Cx + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = 0$$

$$\boxed{\left(x-\frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2}$$ ③

خطوط القوى هي دوائر مركزها $\left(\frac{C}{2}, 0\right)$ ونصف قطرها $\frac{C}{2}$.

خطوط السوية $\boxed{\frac{x^2+y^2}{y}=h}$

$$x^2+y^2-hy+\left(\frac{h}{2}\right)^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2=0$$

$$\Longrightarrow x^2+\left(y-\frac{h}{2}\right)^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

خطوط السوية تمثل دوائر مركزها $\left(0,\frac{h}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{h}{2}$ ③

2) العمل الذي ينجزه هذا الحقل المشتق من تابع قوى U

$$W=U(B)-U(A)$$

لدينا M يتغير ترتيبا من 1 ← 2 على المنحني $y^2=x+2$

$A(-1,1)\ ,\ x=-1 \Leftarrow (1)^2=x+2 \Leftarrow y=1$

$B(2,2)\ ,\ x=2 \Leftarrow (2)^2=x+2 \Leftarrow y=2$

③

$$W_{A\to B}=U(B)-U(A)=\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)_B-\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)_A=\left(\frac{4+4}{2}\right)-\left(\frac{1+1}{1}\right)=4-2=2$$

3) الشرط اللازم والكافي لتوازن هذه النقطة هي :

$$F_x=\frac{\partial U}{\partial x}=0\quad,\quad F_y=\frac{\partial U}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{2x}{y}=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{y^2}=1-\left(\frac{x}{y}\right)^2=0 \quad (2)$$

من (1) $\Leftarrow \frac{x}{y}=0 \Leftarrow$ نعوض في (2)

$1-0=0$ مستحيل

الجملة مستحيلة الحل وبالتالي لا يوجد مواضع توازن لهذه النقطة ②.

امتحان مقرر ميكانيك (١)

كلية العلـوم الثانية — لطلاب الرياضيات ـالسنة الثالثة — المدة: ساعتين
قسم الرياضيات — الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٤- ٢٠١٥ — الدرجة : ٧٥

السؤال الأول (٢٠ درجة):

في الحركات الخاضعة لقانون السطوح استنتج عبارتي السرعة والتسارع في الإحداثيات القطبية مستقلين عن الزمن (دستورا بينيه).

السؤال الثاني (٢٥ درجة):

تقذف كرة شاقولياً نحو الأعلى بسرعة $98\frac{m}{s}$ **من سطح بناء ارتفاعه** $100\,m$ **و المطلوب:**

١) أوجد أعلى ارتفاع تصل إليه الكرة وأوجد الزمن اللازم لوصولها إلى هذا الارتفاع.

٢) عين سرعة الكرة عندما تعود إلى الأرض ثم أوجد الزمن الكلي الذي استغرقته في ذلك.

السؤال الثالث (٣٠ درجة):

لتكن لدينا النقطة المادية المعينة:

$$x(t) = t \quad , y(t) = t^2 \quad , z(t) = 0$$

و المطلوب:

١) حدد المسار.

٢) أوجد عبارة شعاع واحدة المماس $\vec{\tau}$**.**

٣) أوجد عبارة شعاع واحدة الناظم الأساسي $\vec{n}$ **.**

٤) أوجد نصف قطر تقوس المسار كتابع لـ t **.**

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (20 درجة)

في الحركات الخاضعة لقانون السطوح استنتج عبارتي السرعة والتسارع في الإحداثيات القطبية مستقلين عن الزمن (دستورا بينيه).

الحل:

السرعة في الإحداثيات القطبية: ③

$$\vec{v} = r'\vec{e_r} + r\theta'\vec{e_\theta} \quad (1)$$

في الحركات الخاضعة لقانون السطوح:

$$r^2\theta' = C \quad ③ \quad (2)$$

لتحويل المشتقات بالنسبة للزاوية القطبية θ بدلاً من الزمن t ندخل متحولاً جديداً:

$$u = \frac{1}{r} \quad ③$$

وبالتالي يصبح شرط الخضوع لقانون السطوح (2) كما يلي:

$$\theta' = Cu^2$$

$$r' = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$$

$$\Rightarrow r' = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot Cu^2 = -C\frac{du}{d\theta} = -Cu'_\theta \quad ①$$

بالتعويض في (1):

$$\vec{v} = -Cu'_\theta\vec{e_r} + Cu\vec{e_\theta}$$

دستور بينيه الأول:

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = C^2(u'^2_\theta + u^2)} \quad ③$$

التسارع في الإحداثيات القطبية بالأخذ بعين الاعتبار أن الحركة خاضعة لقانون السطوح:

$$\vec{\gamma} = (r'' - r\theta'^2)\vec{e_r} \quad ③$$

$$r'' = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr'}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -Cu''_\theta\cdot Cu^2 = -C^2u^2u''_\theta \quad ①$$

$$\vec{\gamma} = \left[-C^2u^2u''_\theta - \frac{1}{u}(C^2u^4)\right]\vec{e_r} = -C^2u^2(u''_\theta + u)\vec{e_r}$$

دستور بينيه الثاني:

$$\boxed{\vec{\gamma} = -C^2u^2(u''_\theta + u)\vec{e_r}} \quad ③$$

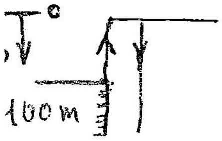
السؤال الثاني (25 درجة)

تقذف كرة شاقوليا نحو الأعلى بسرعة $98\ m/s$ من سطح بناء ارتفاعه $100m$ والمطلوب :

1) أوجد أعلى ارتفاع تصل إليه الكرة وأوجد الزمن اللازم لوصولها إلى هذا الارتفاع .

2) عين سرعة الكرة عندما تعود إلى الأرض ثم أوجد الزمن الكلي الذي استغرقته في ذ

الحل :



1) القانون الأساسي في التحريك :

③ $m\vec{\gamma} = m\vec{g}$

$\frac{dv}{dt} = g \xrightarrow{\text{بالتكامل}} v = gt + c$

عندما $t=0$ كان $v = -98$

$v = gt - 98$

$\boxed{z' = gt - 98}$ ③

$\xrightarrow{\text{بالتكامل}} z = \frac{1}{2}gt^2 - 98t + z_0$

من شروط البدء في $t=0$ كان $z = -100$

$\boxed{z = \frac{1}{2}gt^2 - 98t - 100}$ ③

في أعلى ارتفاع تكون $\Leftarrow v = z' = 0$

$gt_1 - 98 = 0$

$\Rightarrow t_1 = \frac{98}{g} = \frac{98}{9,8} = 10s$ ③

لإيجاد أعلى ارتفاع نعوض الزمن t_1

$z = \frac{1}{2}(9,8)(10)^2 - 98(10) - 100 = \frac{980}{2} - 980 - 100 = -590\ m$ ③

2) في مرحلة العودة إلى الأرض :

$m z'' = m g \Rightarrow z'' = g \xrightarrow{\text{بالتكامل}} z' = gt + c$

عندما $t=0$ كان $z' = 0 \Leftarrow c = 0$

③ $\boxed{z' = gt} \xrightarrow{\text{بالتكامل}} z = \frac{1}{2}gt^2 + c_1$

في اللحظة $t=0$ كان $z=0$ وبالتالي $c_1 = 0 \Leftarrow$ $\boxed{z = \frac{1}{2}gt^2}$

زمن العودة : $590 = \frac{1}{2}(9,8)t_2^2 \Rightarrow t_2^2 = \frac{1180}{9,8} = 120,4$

$t_2 \simeq 11s$ ②

$\Rightarrow z' = gt \Rightarrow z' = 9,8(11) = 107,8\ m/s$ ③

وهي سرعة الكرة عندما تعود إلى الأرض

والزمن الكلي : $t = t_1 + t_2 = 10 + 11 = 21s$ ②

وهو الزمن الكلي الذي استغرقته الكرة .

السؤال الثالث (30 درجة)

لتكن لدينا المعادلات الزمنية :

$$x(t) = t \quad , \quad y(t) = t^2 \quad , \quad z(t) = 0$$

والمطلوب : 1) حدد المسار

2) أوجد عبارة شعاع واحدة المماس $\vec{\tau}$

3) أوجد عبارة شعاع واحدة الناظم $\vec{n}$

4) أوجد نصف قطر تقوس المسار كتابع لـ t .

الحل :

1) معادلة المسار : $\boxed{y = x^2}$ ④ قطع مكافئ

2) شعاع واحدة المماس $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \frac{\frac{d\vec{OM}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|} = \frac{\frac{d\vec{OM}}{dt}}{\frac{dS}{dt}} \quad ; \quad OM = t\,\vec{e_x} + t^2\,\vec{e_y}$$ ③

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{e_x} + 2t\,\vec{e_y} \;③ \;, \quad v = \left|\frac{d\vec{OM}}{dt}\right| = \sqrt{1 + (2t)^2} = \sqrt{1+4t^2} = (1+4t^2)^{\frac{1}{2}}$$ ③

وبالتالي شعاع واحدة المماس :

$$\vec{\tau} = \frac{1}{(1+4t^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\vec{e_x} + 2t\,\vec{e_y}\right)$$ ③

3) شعاع واحدة الناظم :

شعاع الناظم $\vec{K}$: $\frac{ds}{dt} = v = (1+4t^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\vec{K} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \Big/ \frac{ds}{dt}$$ ③

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{-4t}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{e_x} + \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{e_y} = \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\left[-2t\,\vec{e_x} + \vec{e_y}\right]$$ ③

$$\vec{K} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \Big/ (1+4t^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{(1+4t^2)^2}\left[-2t\,\vec{e_x} + \vec{e_y}\right]$$ ③

قطر التقوس

$$k = |\vec{K}| = \frac{2}{(1+4t^2)^2}\sqrt{4t^2+1} = \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

شعاع واحدة الناظم التالي :

$$\vec{n} = \frac{\vec{K}}{|\vec{K}|} = \frac{\vec{K}}{k} = \frac{1}{(1+4t^2)^{\frac{1}{2}}}\left[-2t\,\vec{e_x} + \vec{e_y}\right]$$ ③

4) نصف قطر التقوس :

$$\rho = \frac{1}{|\vec{K}|} = \frac{1}{k} = \frac{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$$ ②

② ياضي $\rho = \frac{v^2}{\gamma_n}$

امتحان مقرر ميكانيك (١)

كلية العلـــوم الثانية	لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة	المدة: ساعتين
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الأولى ٢٠١٤- ٢٠١٥	الدرجة : ١٠٠

السؤال الأول (٢٠ درجة):

ادرس الحركة الدائرية لنقطة مادية (متجهات الموضع و السرعة والتسارع) في الإحداثيات القطبية.

السؤال الثاني (١٥ درجة):

M نقطة مادية تتحرك وفق المعادلة $s = b\,e^{kt}$ بحيث أن الزاوية المتشكلة بين التسارع الكلي و المماس هي (60°) وتبقى الزاوية ثابتة طوال الحركة. عين سرعة النقطة و كذلك تسارعها الكلي و المماسي و الناظمي و نصف قطر تقوس المسار كتوابع لـ s .

السؤال الثالث (٣٠ درجة):

نقطة مادية تتحرك على المنحني :

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

بحركة خاضعة لقانون السطوح.

أوجد السرعة العددية و متجه التسارع بدلالة r .

السؤال الرابع (٣٠ درجة):

ليكن لدينا الحقل المعين بالمتجه:

$$\bar{F} = \frac{-2xy^2}{x^2+y^2}\,\bar{e}_x + \frac{y\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}\,\bar{e}_y.$$

والمطلوب: ١) عين خطوط القوى.

٢) هل الحقل $\bar{F}$ يشتق من تابع قوى ؟ عين هذا التابع إن وجد.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

امتحان مقرر ميكانيك (1)

كلية العلـوم الثانية
قسم الرياضيات

لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثالثة 2014- 2015

المدة: ساعتين
الدرجة : 75

السؤال الأول (20 درجة):

ادرس الحركة الدائرية لنقطة مادية (متجهات الموضع و السرعة والتسارع) في الإحداثيات القطبية.

السؤال الثاني (30 درجة):

يقفز مظلي من طائرة بسرعة ابتدائية v_0 عند فتح المظلة كان $(t = 0 \ ; x = 0, v = v_0)$ باتجاه الشاقول. و المطلوب أوجد معادلة حركة المظلي إذا علمت أن مسقط مقاومة الهواء على المحور ox المتجه نحو الأسفل يساوي: $R = -mk^2x'$

حيث: m كتلة المظلي مع مظلته و k ثابت.

السؤال الثالث (25 درجة):

M نقطة مادية تخضع لحقل قوى يشتق من التابع:

$$U(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x}$$

والمطلوب:

1) عين خطوط القوى لهذا الحقل وخطوط السوية.

2) عين العمل الذي ينجزه هذا الحقل بين النقطتين $M_1(-2,0)$ و $M_2(-1,1)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

السؤال الأول (20 درجة)

1) درس الحركة الدائرية لنقطة مادية (متجهات الموضع والسرعة والتسارع) في الإح
القطبية

الحل :

M نقطة مادية تتحرك حركة دائرية أي تتحرك على دائرة نصف قطرها
متجه الموضع في الاحداثيات القطبية :

$$\vec{OM} = r\vec{e_r} = R\vec{e_r}$$ ⑤

متجه السرعة في الاحداثيات القطبية :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

السرعة الزاوية $\dot{\theta} = \omega$ و $\dot{r} = 0$.

متجه السرعة في الحركة الدائرية هي :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} = R\omega\vec{e_\theta}$$ ⑤

متجه التسارع في الاحداثيات القطبية

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta}$$ ③

وبالتالي متجه التسارع في الاحداثيات القطبية للحركة الدائرية هي :

$$\vec{\gamma}(M) = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$$ ⑤

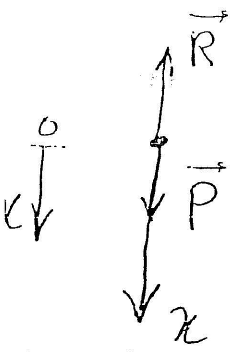
حيث $\ddot{\theta}$ التسارع الزاوي $= \frac{d^2\theta}{dt^2} = \varepsilon$.

التسارع المماسي $\vec{\gamma_\theta} = R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} = R\varepsilon\vec{e_\theta}$ ②

التسارع الناظمي $\vec{\gamma_r} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r} = -R\omega^2\vec{e_r}$

ؤال الثالث (30 درجة)

لقوى المؤثرة الثقل $\vec{P}=m\vec{g}$ وقوة مقاومة الهواء $\vec{R}$



⑤ القانون الأساسي في التحريك $m\vec{\gamma}=\vec{F}$

$$m\ddot{x} = mg - mK^2\dot{x}$$

$$\ddot{x} = g - k^2\dot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x}+k^2\dot{x}=g}$$ ⑤

عادلة تفاضلية من المرتبة الثانية .

ريقة أولى : معادلة تفاضلية بأمثال ثابتة حلها مجموع حلين عام للمتجانسة ابدو

وحل خاص لغير المتجانسة (مع طرف ثاني)

$$\ddot{x}+K^2\dot{x}=0$$ ③

المعادلة المميزة $\lambda^2+K^2\lambda=0$

لها جذرين حقيقيين $\lambda_1=0 , \lambda_2=-k^2$ ③

الحل العام هو $x_1=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$

نعوض $x_1=C_1e^{0t}+C_2e^{-K^2t}=C_1+C_2e^{-K^2t}$ ③

نوجد الثوابت بعد ايجاد الحل الخاص.

لطرف الثاني عبارة عن كثير حدود من الدرجة صفر [illegible] الحل الخاص من الشكل

$$x_2=A_0t$$

$$\dot{x}_2=A_0 , \ddot{x}_2=0$$

نعوض في المعادلة التفاضلية الأصلية :

$$k^2A_0=g \Rightarrow A_0=\frac{g}{k^2}$$ ③

الحل الخاص : $\boxed{x_2=\frac{g}{k^2}t}$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هي $x=x_1+x_2$

$$\boxed{x=C_1+C_2e^{-k^2t}+\frac{g}{k^2}t}$$ (*) ③

[illegible] الثوابت C_1 ، C_2 :

السؤال الرابع (25 درجة)

$$U(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{x}$$

خطوط القوى

لدينا حقل القوى :

$$\vec{F} = F_x \vec{e_x} + F_y \vec{e_y}$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{x^2} = 1 - \frac{y^2}{x^2}$$ ④

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{x}$$

خطوط القوى هي :

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$ ⑤

$$\frac{dx}{\frac{x^2-y^2}{x^2}} = \frac{dy}{\frac{2y}{x}} \Longrightarrow \underbrace{2xy}_{M}\, dx + \underbrace{(y^2-x^2)}_{N}\, dy = 0 \quad (1)$$ ③

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 2x \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= -2x \end{aligned}\right\}$$ المعادلة (1) غير تامة

لنجاد عامل التكميل $\mu(y)$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{2x+2x}{-2xy} = -\frac{2}{y}$$ ①

$$\mu : e^{\int \frac{-2}{y}dy} = e^{\ln\frac{1}{y^2}} \Longrightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{y^2}}$$ ③ عامل التكميل

نضرب طرفي المعادلة (1) بعامل التكميل

$$\frac{2xy}{y^2}dx + \frac{y^2-x^2}{y^2}dy = 0$$

$$2\frac{x}{y}dx + dy - \frac{x^2}{y^2}dy = 0$$

$$\underbrace{2\frac{x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy}\ + dy = 0 \Longrightarrow d\left(\frac{x^2}{y}\right) + dy = 0 \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} \boxed{\frac{x^2}{y} + y = C}$$ ③ خطوط القوى

$$x^2 + y^2 - cy = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 - cy + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 0 \Longrightarrow x^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4}$$

⟸ خطوط القوى هي دوائر مركزها $\left(0, \frac{c}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{c}{2}$

سطوح السوية : $U = h$; $\boxed{\frac{x^2+y^2}{x} = h}$ ③

2) العمل الذي ينجزه هذا الحقل:

$$W_{M_1 \to M_2} = U(M_2) - U(M_1) = \frac{(-1)^2+(1)^2}{-1} - \frac{(-2)^2+(0)^2}{-2} = -2+2 = 0$$ ③

كلية العلوم الثانية
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (١)
لطلاب الرياضيات –السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٤-٢٠١٥

المدة: ساعتين
الدرجة : ٧٥

السؤال الأول (٢٠ درجة):

في الحركات الخاضعة لقانون السطوح استنتج عبارتي السرعة والتسارع في الإحداثيات القطبية مستقلين عن الزمن (دستورا بينيه).

السؤال الثاني (٢٥ درجة):

تقذف كرة شاقولياً نحو الأعلى بسرعة $98\frac{m}{s}$ من سطح بناء ارتفاعه $100\,m$ و المطلوب:

١) أوجد أعلى ارتفاع تصل إليه الكرة و أوجد الزمن اللازم لوصولها إلى هذا الارتفاع.
٢) عين سرعة الكرة عندما تعود إلى الارض ثم اوجد الزمن الكلي الذي استغرقته في ذلك.

السؤال الثالث (٣٠ درجة):

لتكن لدينا النقطة المادية المعينة:

$$x(t) = t \quad , y(t) = t^2 \quad , z(t) = 0$$

و المطلوب:

١) حدد المسار.

٢) أوجد عبارة شعاع واحدة المماس $\vec{\tau}$.

٣) أوجد عبارة شعاع واحدة الناظم الأساسي $\vec{n}$.

٤) أوجد نصف قطر تقوس المسار كتابع لـ t.

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

ـؤال الأول (20 درجة)

في الحركات الخاضعة لقانون السطوح استنتج عبارتي السرعة والتسارع في الإحداثيات القطبية مستقلين عن الزمن (دستورا بينيه)

الحل:

السرعة في الإحداثيات القطبية: $\vec{v} = r'\vec{e_r} + r\theta'\vec{e_\theta}$ (1) ③

في الحركات الخاضعة لقانون السطوح: (2) ③ $r^2\theta' = c$

لتحويل المشتقات بالنسبة للزاوية القطبية θ بدلاً من الزمن t ندخل متحولاً جديداً

$$u = \frac{1}{r} \quad ③$$

وبالتالي يصبح شرط قانون السطوح (2) كالتالي: $\theta' = cu^2$

$$r' = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{d\theta}{dt} = \theta' \ ; \ \boxed{\theta' = \frac{c}{r^2} = cu^2}$$

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$$

$$r' = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot cu^2 = -c\frac{du}{d\theta} = -cu'_\theta \quad ①$$

بالتعويض في (1):

$$\vec{v} = -cu'_\theta \vec{e_r} + cu\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = c^2(u'^2_\theta + u^2)} \quad ③$$: دستور بينيه الأول

التسارع في الإحداثيات القطبية بالأخذ بعين الاعتبار أن الحركة خاضعة لقانون السطوح:

$$\vec{\gamma} = (r'' - r\theta'^2)\vec{e_r} \quad ③$$

$$r'' = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr'}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -cu''_\theta \cdot cu^2 = -c^2u^2u''_\theta \quad ①$$

$$\vec{\gamma} = \left[-c^2u^2u''_\theta - \frac{1}{u}(c^2u^4)\right]\vec{e_r} = -c^2u^2(u''_\theta + u)\vec{e_r}$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = -c^2u^2(u''_\theta + u)\vec{e_r}} \quad ③$$: دستور بينيه الثاني

مكتبة الشروق

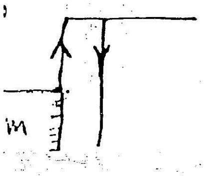
لسؤال الثاني (25 درجة)

يقذف كرة شاقوليا نحو الأعلى بسرعة 98 m/s من سطح بناء ارتفاعه 100m ، المطلو

أوجد أعلى ارتفاع تصل إليه الكرة ، وأوجد الزمن اللازم لوصولها إلى هذا الارتفاع .

) عين سرعة الكرة عندما تعود إلى الأرض ثم أوجد الزمن الكلي الذي استغرقته .

ل :



القانون الأساسي في التحريك :

③ $m\vec{\gamma} = m\vec{g}$

$\vec{\gamma} = \vec{g} \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = g \xrightarrow{\text{بالتكامل}} v = gt + C \Rightarrow C = v_0$

ندما $t = 0$ كان $v = -98$

$v = gt - 98$

$\boxed{\dot{z} = gt - 98}$ ③

$\xrightarrow{\text{بالتكامل}} z = \frac{1}{2}gt^2 - 98t + z_0$

ن شرط البدء في $t = 0$ كان $z = -100$

$\boxed{z = \frac{1}{2}gt^2 - 98t - 100}$ ③

أعلى ارتفاع تكون $v = \dot{z} = 0 \Leftarrow$

$gt_1 - 98 = 0$

$\Rightarrow t_1 = \frac{98}{g} = \frac{98}{9,8} = 10\,s$ ③

يجاد أعلى ارتفاع نعوض الزمن t_1 :

$z = \frac{1}{2}(9,8)(10)^2 - 98(10) - 100 = \frac{980}{2} - 980 - 100 = -590\,m$

) في مرحلة العودة إلى الأرض :

$m\ddot{z} = mg \Rightarrow \ddot{z} = g \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \dot{z} = gt + C$

عندما $t = 0$ كان $\dot{z} = 0 \Leftarrow C = 0$

③ $\boxed{\dot{z} = gt} \xrightarrow{\text{بالتكامل}} z = \frac{1}{2}gt^2 + C_1$

في اللحظة $t = 0$ كان $z = 0$ ، بالتالي $C_1 = 0 \Leftarrow$ $\boxed{z = \frac{1}{2}gt^2}$

زمن العودة : $590 = \frac{1}{2}(9,8)t_2^2 \Rightarrow t_2^2 = \frac{1180}{9,8} = 120,4$

$t_2 \simeq 11s$ ②

$\Rightarrow \dot{z} = gt \Rightarrow \dot{z} = 9,8(11) = 107,8\,m/s$

وهي سرعة الكرة عندما تعود إلى الأرض

والزمن الكلي :

$t = t_1 + t_2 = 10 + 11 = 21S$

وهو الزمن الكلي الذي استغرقته الكرة .

كلية العلـوم الثانية
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (١)
لطلاب الرياضيات – مستوى ٥
٢٠١٣- ٢٠١٤

المدة: ساعة ونصف
الدرجة : ٦٠

السؤال الأول (١٥ درجة):

في الحركات الخاضعة لقانون السطوح استنتج عبارتي السرعة والتسارع في الإحداثيات القطبية مستقلين عن الزمن (دستورا بينيه).

السؤال الثاني (١٥ درجة):

نقطة مادية كتلتها m قذفت من o مبدأ الإحداثيات بسرعة بدء $\overline{v_0}$ تميل عن الأفق بزاوية ثابتة α .أوجد معادلات الحركة ثم أوجد المسار الذي ترسمه هذه النقطة.

السؤال الثالث (١٠ درجة):

نقطة مادية تتحرك على المنحني:

$$x = \frac{a}{\cos\theta}$$

$$y = b\,\mathrm{tg}\,\theta$$

و المعادلة الزمنية للحركة هي :

$$e\,\mathrm{tg}\,\theta - \ln \mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = nt \qquad ; \; e = \frac{c}{a}$$

برهن أن راسم الخطى يعطى بالعلاقة:

$$x^2 + \left(y - \frac{ac}{b}n\right)^2 = \frac{a^4 n^2}{b^2}$$

o

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

ليكن:

$$\bar{F} = \left(4xy - 3x^2z^2\right)\bar{e}_x + \left(4y + 2x^2\right)\bar{e}_y + \left(1 - 2x^3z\right)\bar{e}_z$$

١) برهن أن الحقل $\bar{F}$ يشتق من تابع قوى وعين هذا التابع.

٢) عين عمل الحقل $\bar{F}$ بين النقطتين $M_1(1,1,-1)$ و $M_2(2,2,-1)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

لسؤال الأول

ي الحركات الخاضعة لقانون السطوح ، استنتج عبارتي السرعة والتسارع ي الاحداثيات القطبية مستقلين عن الزمن (دستورا بينيه)

الحل :

لتحويل المشتقات بالنسبة للزاوية القطبية θ عوضا بدلا من t ندخل متحول جديد

$$\boxed{u = \frac{1}{r}}$$

لدينا السرعة في الاحداثيات القطبية تعطى بالعلاقة :

$$\vec{V} = r' \vec{e_r} + r\theta' \vec{e_\theta}$$

ولدينا الحركة خاضعة لقانون السطوح أي أن :

$$r^2 \theta' = c \Rightarrow \theta' = \frac{c}{r^2} \Rightarrow \boxed{\theta' = cu^2}$$

$$r' = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2} \quad \left(r = \frac{1}{u} \text{ من المتحول الجديد} \right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta' = cu^2 \quad , \quad \frac{du}{d\theta} = u'_\theta$$

نعوض في السرعة ؛ العلاقات المستخرجة بدلالة u

$$\vec{V} = -c u'_\theta \vec{e_r} + c u \vec{e_\theta}$$

⇐ السرعة المدرية :

$$\boxed{V^2 = c^2(u'^2_\theta + u^2)}$$

(أثبت من $V^2 = c^2u'^2_\theta + c^2u^2$) ⇐

وهو دستور بينيه الأول

ويعبر عن سرعة النقطة في الاحداثيات القطبية عندما تكون الحركة خاضعة لقانون السطوح حيث المشتقات مأخوذة بالنسبة لـ θ وليس لـ t

التسارع: في الحركات الخاضعة لقانون السطوح التسارع مركزي فقط أي محمول على نصف القطر المتجهي

$$\vec{\gamma} = (r'' - r\theta'^2)\,\vec{e_r}$$

$$r'' = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr'}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = -cu''_\theta \cdot cu^2$$

$$\Rightarrow r'' = -c^2u^2u''_\theta$$

$$\vec{\gamma} = (-c^2u^2u''_\theta - \frac{1}{u}c^2u^2)\,\vec{e_r}$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = -c^2u^2(u''_\theta + u)\,\vec{e_r}}$$

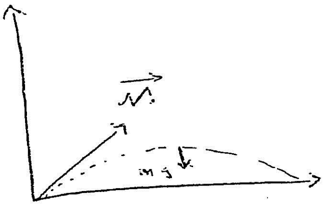
هو دستور بينيه الثاني .

هو المطلوب

سؤال الثاني :

لة مادية كتلتها m تقذف من o مبدأ الإحداثيات بسرعة بدئية $\vec{v_0}$ تميل عن الأفق
وية ثابتة α . أوجد معادلات الحركة ثم أوجد المسار الذي ترسمه هذه النقطة

لحل :



طبق القانون الأساسي في التحريك : ① $m\vec{\gamma} = \sum \vec{F}$

قوى المؤثرة على النقطة المادية هي الثقل
شاقولي ⟸ فإن مسقطه على ox 0 } ⟸ $m\vec{\gamma} = -m\vec{g}$

$m\vec{\gamma} = -mg\,\vec{e_y}$

إسقاط العلاقة ① على المحاور الإحداثية :

$f_x = m x'' \Rightarrow x'' = 0$

$f_y = m y'' \Rightarrow y'' = -g$ توضيح $(\cancel{m} y'' = -\cancel{m} g)$

بالمكاملة :

$x' = c_1$

$y' = -g t + c_2$

لدينا من شروط البدء $v_0 (v_0 \cos\alpha , v_0 \sin\alpha)$

$x' = v_0 \cos\alpha$

$y' = -g t + v_0 \sin\alpha$

بالمكاملة

$x = v_0 t \cos\alpha + a$

$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha + b$

من شروط البدء $t = 0$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ⟸

$0 = a + b$

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\alpha \\ y &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha \end{aligned}\right\}$$ وهي معادلات الحركة

بحذف الوسيط t من معادلات الحركة $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + x \tan\alpha}$$

y تابع من الدرجة الثانية لـ x ⇐ المسار قطع مكافئ

السؤال الثالث:

نقطة مادية تتحرك على المنحني $x = \frac{a}{\cos\theta}$

$y = b\, tg\theta$

المعادلة الزمنية للحركة هي:

$$e\, tg\theta - \ln tg\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = nt \; ; \; e = \frac{c}{a}$$

برهن أن تابع الخطي يمثل بالعلاقة:

$$x^2 + \left(y - \frac{ac}{b} n\right)^2 = \frac{a^2 n^2}{b^2}$$

الحل:

$$x' = \frac{a \sin\theta \cdot \theta'}{\cos^2\theta}$$

$$y' = \frac{b\theta'}{\cos^2\theta}$$

باشتقاق طرفي المعادلة الزمنية للحركة

$$\frac{e\theta'}{\cos^2\theta} - \frac{\theta'}{\cos\theta} = n \Rightarrow \theta' = \frac{n\cos^2\theta}{e - \cos\theta}$$

نفرض X كبيرة هي x' (مشتق x [illegible])

$$X = x' = \frac{a \sin\theta . n\cos^2\theta}{\cos^2\theta\,(e - \cos\theta)} \quad (1)$$

$$y = y' = \frac{bn\cos^2\theta}{\cos^2\theta\,(e-\cos\theta)} \qquad (2)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{b}{a}\frac{x}{y} \qquad (3)$$

من (2)

$$ey - y\cos\theta = bn \Rightarrow \cos\theta = \frac{ey-bn}{y}$$

نربع (3) و (4)

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{y^2} + \frac{(e^2y^2 - b^2n)^2}{y^2} = 1$$

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 + (e^2y^2 + b^2n^2 - 2eybn) = y^2$$

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 + e^2y^2 + y^2 + b^2n^2 - 2eybn = 0$$

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 + (e^2-1)y^2 + b^2n^2 - 2eybn = 0$$

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}(e^2-1)y^2 - \frac{2a^2ne}{b}y + n^2a^2 = 0 \quad ; \quad e-1 = \frac{c}{a} -$$

$$\Rightarrow \frac{c^2-a^2}{a^2} =$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2can}{b}y + \left(\frac{can}{b}\right)^2 - \left(\frac{can}{b}\right)^2 + n^2a^2 = 0$$

$$x^2 + \left(y - \frac{can}{b}\right)^2 - \frac{c^2a^2n^2}{b^2} + \frac{n^2a^2b^2}{b^2} = 0$$

$$x^2 + \left(y - \frac{cna}{b}\right)^2 + \frac{n^2a^2}{b^2}\left(\underbrace{b^2-c^2}_{b^2-c^2}\right) = 0$$

$$\boxed{x^2 + \left(y - \frac{cna}{b}\right)^2 = \frac{n^2a^4}{b^2}}$$

السؤال الرابع:

ليكن $\vec{F} = (4xy - 3x^2z^2)\vec{e}_x + (4y + 2x^2)\vec{e}_y + (1 - 2x^3z)\vec{e}_z$

١- بين أن الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى وعين هذا التابع

- عين عمل الحقل $\vec{F}$ بين النقطتين $M_1(1,1,-1)$ و $M_2(2,2,-1)$

الحل: ١- $\overrightarrow{\text{rot}\,F} = \vec{0}$ أي

$$\frac{\partial \vec{F}_y}{\partial x} = \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial y} = 4x$$

$$\frac{\partial \vec{F}_y}{\partial z} = \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{F}_z}{\partial x} = \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial z} = -6x^2z$$

$\vec{F}$ يشتق من تابع قوى؛

بالتالي الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى $U \Leftarrow \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}\,u}$

$$F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F_x = 4xy - 3x^2z^2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F_y = 4y + 2x^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = F_z = 1 - 2x^3z \quad (3)$$

نكامل (1) بالنسبة لـ X

$u = 2x^3y - x^3z^2 + \varphi(y,z)$ (4)

نشتق (4) بالنسبة لـ y

$2x^2 + \frac{\partial \varphi(y-z)}{\partial y}$

نقارن مع (2)

$2x^2 + \frac{\partial \varphi(y+z)}{\partial y} = 4y + 2x^2 \Rightarrow \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = 4y$

نكامل بالنسبة لـ y

$\varphi(y,z) = 2y^2 + c(z)$

$u = 2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + c(z)$ (5)

نشتق (5) بالنسبة لـ z ونقارن مع (3)

$-2x^3z + \frac{\partial c(z)}{\partial z} = 1 - 2x^3z \Rightarrow \frac{\partial c(z)}{\partial z} = 1$

نكامل بالنسبة لـ z

$c(z) = z$

⇐ الناتج هو (بالتعويض)

$$\boxed{u = 2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z}$$

$$dw = \vec{F}\cdot\vec{dr} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$dw = du = d[2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z]$$

$$w = [2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z]_{(1,1,-1)}^{(2,2,-1)}$$

$$\left[\,2(2)^2(2) - 8(-1)^2 + 2(2)^2 + (-1)\right] - \left[\,2(1)^2(1) - (1)^3(-1)^2 + 2(1) + (-1)\right]$$

$$= (16 - 8 + 8 - 1) - (2 - 1 + 2 - 1) = 15 - 2 = 13$$

كلية العلـــوم الثانية
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك (١)
لطلاب الرياضيات – مستوى ٥
٢٠١٣-٢٠١٤

المدة: ساعة ونصف
الدرجة : ٦٠

السؤال الأول (٢٠ درجة):

نقطة مادية تتحرك على المنحني :

وفق المعادلة التالية :

$$r = a\cos\theta$$

$$t = \frac{1}{4}\left(2\theta + \sin 2\theta\right)$$

١) أوجد معادلة مسار هذه النقطة، ثم برهن أن الحركة خاضعة لقانون السطوح.

٢) أوجد السرعة العددية و متجه تسارع هذه النقطة.

السؤال الثاني (٢٠ درجة):

حلقة صغيرة كتلتها m مرتبطة بنابض مرن عامل مرونته k وطوله في وضع الراحة l_0 تتحرك بدون احتكاك على محور افقي ox علما أن الجملة $oxyz$ هي جملة محاور نظامية وأن مبدأ الجملة o هو وضع الجملة في حالة التوازن (الراحة) و المطلوب :

١) اكتب المعادلة التفاضلية لحركة الحلقة .

٢) تركت الحلقة بدون سرعة ابتدائية و بفاصلة ابتدائية $x = a$ فحدد حركتها فيما بعد .

السؤال الثالث (٢٠ درجة):

ليكن: $\vec{F} = \left(4xy - 3x^2z^2\right)\vec{e}_x + \left(4y + 2x^2\right)\vec{e}_y + \left(1 - 2x^3z\right)\vec{e}_z$

١) برهن أن الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى وعين هذا التابع.

٢) عين عمل الحقل $\vec{F}$ بين النقطتين $M_1\,(1,1,-1)$ و $M_2\,(2,2,-1)$

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

د. هالا محمد

ـسؤال الثالث (۲ / ۲ / ج ۱)

قطعة مادية تتحرك على منحنى :

$$r = a\cos\theta$$

وفق المعادلة التالية :

$$t = \frac{1}{4}(2\theta + \sin 2\theta)$$

) برهن أن الحركة خاضعة لقانون السطوح وأوجد المسار .

) أوجد السرعة العددية ومنحه التسارع لهذه النقطة .

الحل :

إيجاد المسار :

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$x^2 = r^2\cos^2\theta$

$y^2 = r^2\sin^2\theta$

$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2\cos^2\theta$

$r^2 =$

$$x^2 + y^2 = a^2\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2} \Rightarrow (x^2+y^2)^2 = a^2x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = ax$$

بالإتمام إلى مربع كامل :

$$x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \quad ③$$

المسار هنا دائرة مركزها $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ ونصف قطرها $\frac{a}{2}$

ـ هل الحركة خاضعة لقانون السطوح ؟

$$r^2\theta' \overset{?}{=} c \text{ ثابت} \quad ③$$

$$r^2 = a^2\cos^2\theta$$

$$4t = 2\theta + \sin 2\theta$$

$$4 = 2\theta' + 2\theta'\cos 2\theta$$

$$2 = \theta'(1 + \cos 2\theta) \Rightarrow \theta' = \frac{2}{1+\cos 2\theta} = \frac{2}{2\cos^2\theta}$$

$$\boxed{\theta' = \frac{1}{\cos^2\theta}} \quad ③$$

$$r^2\theta' = a^2\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta} = a^2 = c \text{ ثابت}$$

والحركة خاضعة لقانون السطوح : ③

$$u = \frac{1}{a}\cos^{-1}\theta$$

$$u' = \frac{1}{a}\cos^{-2}\theta\cdot\sin\theta$$

$$u'' = \frac{2}{a}\cos^{-3}\theta\cdot\sin^2\theta + \frac{1}{a}\cos^{-1}\theta$$

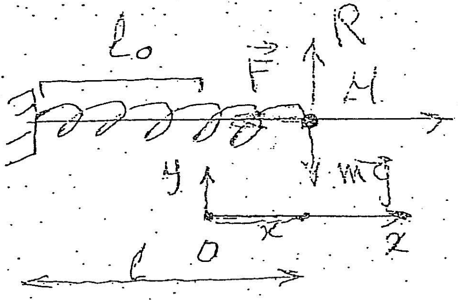
سؤال الثاني (20 درجة)

حلقة صغيرة كتلتها m مربوطة بنابض مرن عامل مرونته K وطوله في وضع الراحة l_0 . تتحرك بدون احتكاك على محور أفقي ox علماً أن الجملة oxyz جملة محاور نظامية وأن مبدأ الجملة o هو وضع الحلقة في حالة الراحة والمطلوب

كتب المعادلة التفاضلية لحركة الحلقة

تركت الحلقة بدون سرعة ابتدائية وبفاصلة ابتدائية $x = a$ حدد حركتها فيما بعد

الحل :



لإيجاد المعادلة التفاضلية نطبق المبدأ الأساسي في التحريك للنقطة M

$$m\vec{\gamma} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}$$ ⑤

حيث : $\vec{F}$ قوة مرونة النابض

$$\vec{F} = -K(l - l_0)\vec{e_x}$$
$$\vec{F} = -Kx\,\vec{e_x}$$
$$\vec{OM} = x\,\vec{e_x}$$
$$\vec{v}(M) = \dot{x}\,\vec{e_x}$$
$$\vec{\gamma}(M) = \ddot{x}\,\vec{e_x}$$

$$m\ddot{x}\,\vec{e_x} = -mg\,\vec{e_y} + R\,\vec{e_y} - Kx\,\vec{e_x}$$

بالإسقاط على ox :

$$m\ddot{x} = -Kx \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0}$$ ⑤

وهي المعادلة التفاضلية لحركة الحلقة m

2) لإيجاد حركة الحلقة M نحل المعادلة التفاضلية للحركة

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

حل هذه المعادلة : ⑤

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

باستخدام شروط البدء

$$t = 0\,,\ x = a \Rightarrow a = A\cdot 1 + B\cdot 0 \Rightarrow a = A$$

$$t = 0\,,\ \dot{x} = 0 \Rightarrow (-A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega t)_{t=0} = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = a\cos\omega_0 t} \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$ ⑤

وهي حركة توافقية اهتزازية

(20 درجة)

$\vec{F} = (4xy - 3x^2z^2)\vec{e_x} + (4y + 2x^2)\vec{e_y} + (1 - 2x^3z)\vec{e_z}$

- برهن أن الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى ؟ عين هذا التابع
- عين عمل الحقل $\vec{F}$ بين النقطتين $M_1(1,1,-1)$ و $M_2(2,2,-1)$

الحل:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 4x$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = -6x^2z$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0$$

③

إذا الطالب وضع $\vec{rot}\,\vec{F} = 0$ يأخذ ③ درجات إضافية

بالتالي الحقل $\vec{F}$ يشتق من تابع قوى U

$$\vec{F} = \vec{grad}\,U$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 4xy - 3x^2z^2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 4y + 2x^2 \quad (2)$$

③

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 1 - 2x^3z \quad (3)$$

نكامل (1) بالنسبة لـ x

$$U = 2x^2y - x^3z^2 + \varphi(y,z) \quad (4)$$

نشتق (4) بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2x^2 + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}$$

بالمقارنة مع (2)

$$2x^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4y + 2x^2 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4y$$

بالمكاملة بالنسبة لـ y

$$\varphi = \frac{4}{2}y^2 + c(z) = 2y^2 + c(z)$$ ②

نعوض في (4)

$U = 2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + C(z)$ (5) ③

نشتق (5) بالنسبة لـ z :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -2x^3z + C'_z$$

بالمقارنة مع (3) :

$$1 - 2x^3z = -2x^3z + C'_z \Rightarrow C'_z = 1 \Rightarrow \boxed{C = z}$$

$$\boxed{U = 2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z}$$ ③

③ $dW = \vec{F}\cdot\vec{dr} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz($

$dW = dU = d(2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z)$

$$W = \left[2x^2y - x^3z^2 + 2y^2 + z\right]_{(1,1,-1)}^{(2,2,-1)}$$

$$= \left(2(2)^2(2) - (2)^3(-1)^2 + 2(2)^2 - 1\right) - \left(2(1)^2(1)^2 - (1)^3(-1)^2 + 2(1)^2 - 1\right)$$

$$= (16 - 8 + 8 - 1) - (2 - 1 + 2 - 1) = 15 - 2 = 13$$ ③

مع التمنيات

بالتوفيق والنجاح

مكتبة

A to Z