

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثالثة

اسئلة دورات محلولة

بنى جبرية ٣

A 2 Z LIBRARY

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ، علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

السؤال الأول: (30 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M -مودول، ولتكن N مجموعة جزئية من M ، ولتكن A مثالية يسارية من الحلقة R . برهن أن المجموعة:

$$AN = \{x \in M \mid x = \sum_{i=1}^n a_i x_i \ ; \ a_i \in A, x_i \in N, n \in \mathbb{Z}^+\}$$

تشكل مودول جزئي من M .

2- ليكن M و N مودولين فوق حلقة $(R, +, \cdot)$ ، ولنرمز بـ 0 و $0'$ لصفري M و N على الترتيب، وليكن $f: M \rightarrow N$ -هومومورفيزم. إذا كان M_1 مودول جزئي من M برهن أن $f(M_1)$ مودول جزئي من N .

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة. برهن أن التطبيق $f: R^3 \rightarrow R^2$ المعرفة بالشكل:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in R$$

R -ايبومورفيزم، ثم استنتج أن $D = \{(0, 0, x_3) \mid x_3 \in R\}$ مودول جزئي من R^3 وأن $R^3/D \cong R^2$.

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M -مودول، ولتكن $M_1, \dots, M_n$ مودولات جزئية من M بحيث أن $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ ، ولتكن $N_1, \dots, N_n$ مودولات جزئية من $M_1, \dots, M_n$ على الترتيب، وليكن $N = N_1 + \dots + N_n$. إذا

كان $f: M \rightarrow M/N$ -ايبومورفيزم معرف بالشكل $f(x) = x + N$ بين أن:

$$M/N = f(M_1) \oplus \dots \oplus f(M_n)$$

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- ليكن M مودول حر فوق حلقة واحدة $(R, +, \cdot)$ ، ولتكن S قاعدة للمودول M . برهن أن $M \cong F$ (حيث F المودول الحر على S).

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، ونفرض أن $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ متتالية تامة من المودولات فوق R والهومومورفيزمات. برهن أن:

$$B / \text{Im } f \cong C$$

ب - لنأخذ المتتالية:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, A') \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(M, A) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(M, A'')$$

برهن أن $\text{Im } f_* = \ker g_*$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2025-3-4

f.a.c

بشكل جبري (3)

السؤال الأول: [30]

1- ا- واضح أن $(0 \in AN) \neq AN \subseteq M$

$$\forall x_1, x_2 \in AN \Rightarrow x_1 = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad x_2 = \sum_{j=1}^m a'_j x'_j$$

$$a_i, a'_j \in A, \quad x_i, x'_j \in N, \quad n, m \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{j=1}^m a'_j x'_j = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{j=1}^m (-a'_j) x'_j \in AN$$

$$\forall x \in AN, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_i \in A, x_i \in N, n \in \mathbb{Z}^+ - 3$$

$$\Rightarrow \lambda x = \lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_i) x_i \in AN$$

مما سبق يتبع أن AN مودول جزئي في M .

2- ا- واضح أن: $(f(0) = 0 \in f(M_1))$ و $f(M_1) \subseteq N$ و $f(M_1) \neq \emptyset$

$$\forall y_1, y_2 \in f(M_1) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in M_1; \quad y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$$

$$\Rightarrow y_1 - y_2 = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) \in f(M_1)$$

$$\forall y \in f(M_1), \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x \in M_1; \quad y = f(x)$$

$$\Rightarrow \lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in f(M_1)$$

مما سبق يتبع أن $f(M_1)$ مودول جزئي في N .

السؤال الثاني: [30]

1- هو مودول جزئي لأن:

$$1) \quad \forall (x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3) \in R^3 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2, x_3) + (x'_1, x'_2, x'_3)) &= f(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3) \\ &= (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2) = (x_1, x_2) + (x'_1, x'_2) \\ &= f(x_1, x_2, x_3) + f(x'_1, x'_2, x'_3) \end{aligned}$$

$$2) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\lambda(x_1, x_2, x_3)) = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

$$= (\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda(x_1, x_2) = \lambda f(x_1, x_2, x_3)$$

ف عاملاً لأن:

$$\forall (y_1, y_2) \in R^2 \Rightarrow \exists (y_1, y_2, 0) \in R^3; \quad f(y_1, y_2, 0) = (y_1, y_2)$$

وبالتالي f إسومو موزم

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 0) \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Ker } f = \{ (0, 0, 0) \mid x_3 \in \mathbb{R} \} = D$$

وبما أن f نواة f مودول جزئي من $\mathbb{R}^3$ فإن D كذلك، وبما أن f هو مودول جزئي غامر لنواة D فإن $\mathbb{R}^3/D \cong \mathbb{R}^2$ (النتيجة) $\mathbb{R}^2$ لدينا $\sum_{i=1}^n f(M_i) \subseteq M/N$ ، كما أنه:

$$\forall x+N \in M/N \Rightarrow x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n x_i, x_i \in M_i$$

$$\Rightarrow x+N = (\sum_{i=1}^n x_i) + N = \sum_{i=1}^n (x_i + N) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \in \sum_{i=1}^n f(M_i)$$

$$\Rightarrow M/N \subseteq \sum_{i=1}^n f(M_i)$$

وضه $M/N = \sum_{i=1}^n f(M_i)$ ، ولبرهن أن $f(M_1), \dots, f(M_n)$ مستقلة إذا كان:

$$\sum_{i=1}^n f(z_i) = N, z_i \in N$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (z_i + N) = N = (\sum_{i=1}^n z_i) + N = N$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n z_i \in N \Rightarrow \sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n x_i, x_i \in N_i \Rightarrow$$

$$x_i \in M_i, \forall i=1, \dots, n$$

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n, \text{ فإن:}$$

$$z_i = x_i, i=1, \dots, n \Rightarrow f(z_i) = f(x_i), i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow f(z_i) = x_i + N = N$$

وبالتالي $f(M_1), \dots, f(M_n)$ مستقلة، وضه $M/N = f(M_1) \oplus \dots \oplus f(M_n)$

الخطوة التالية: [35]

من النظرية السابقة فإن المخطط التالي:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\gamma} & M \\ \downarrow f & \nearrow h & \\ F & & \end{array}$$

حيث γ الاحتواء القانوي.

وبالتالي $\gamma = f \circ h$ ، وكذلك h هو مودول جزئي من M ، وذلك لأن:

وإن h غامر لأنه: $\text{Im } h$ مودول جزئي من M ، وبذلك:

$$\begin{aligned} \forall s \in S \Rightarrow s &= \gamma(s) = (h \circ f)(s) = h(f(s)) \\ &= h(f_s) \in \text{Im } h \Rightarrow S \subseteq \text{Im } h \end{aligned}$$

وبما أن S تولد M ، فإن $\text{Im } h = M$ ، أي أن h غامر.

وإن h متباين لأنه:

$$\forall \theta \in \text{Ker } h \Rightarrow 0 = h(\theta) = \sum_{s \in S} \theta(s) \gamma(s) = \sum_{s \in S} \theta(s) s$$

وبما أن $\theta \in F$ ، و $\theta(s) = 0$ من أجل جميع عناصر S فاعداً مدته منها،

نصف متقارن خطياً وبالتالي $n = 1, \dots, n$; $\theta(x_i) = 0$ أي أن $16 = 0$
وبالتالي $h = 16$ أي أن h متباينة.
حاصلت في أن h البرمجة فقدم، ومنه $M \approx F$

12 - إذا كانت المتكافئة ثالثة لجان $g: B \rightarrow C$ هو مورفزم خاص

5 و $\text{Im } f = \text{Ker } g$ ، وبالتالي $B / \text{Im } f \cong C$ برهنة بيان

$$\forall \theta \in \text{Im } f_* \Rightarrow \exists \theta_1 \in \text{Hom}(M, A') ; \theta = f_* (\theta_1) \quad - \text{c}$$

$$\Rightarrow \theta = f \circ \theta_1 \quad \text{ويعني:}$$

$$g_*(0) = g \circ 0 = g \circ (f \circ 0, 1) = (g \circ f \circ 0, 1) = 0$$

$$\Rightarrow 0 \in \text{Ker } g_* \Rightarrow \text{Im } f_* \subseteq \text{Ker } g_*$$

$$\forall \theta \in \text{Ker } g_* \Rightarrow g_*(\theta) = 0 \Rightarrow g \circ \theta = 0 \Rightarrow (g \circ \theta)(x) = 0 \quad \forall x \in M$$

$$\Rightarrow g(\phi(x)) = 0 \Rightarrow \phi(x) \in \ker g = \text{Im } f$$

$$\Rightarrow \exists a' \in A'; \quad \Theta(a') = f(a)$$

دستگاه f متجانس a' و b' $\rightarrow \varphi(a')$

الأنه إذا كان يوجد $a' \in A'$ حيث $g(x) = f(b')$ فإن $f(a') = f(b')$

7. ویاں کای

ولنفرض التطبيق $\sigma_1: M \rightarrow A'$ حيث $\sigma_1(x) = a'$ ، فإن $\sigma_1 \in \text{Hom}(M, A')$

زکون

$$\sigma(x) = f(a) = f(\sigma_1(x)) = (f \circ \sigma_1)(x) \Rightarrow \sigma = f \circ \sigma_1$$

$$\Rightarrow u = f_*(0_1) \Rightarrow 0 \in \text{Im } f_* \Rightarrow \text{Ker } g_* \subseteq \text{Im } f_*$$

$$\text{Im } f_* = \text{Ker } g_*$$

السؤال الأول: (25 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M - R مودول، وليكن M_1, M_2 مودولين جزئيين من M . برهن أن $M_1 \cap M_2$ مودل جزئي من M .

2- ليكن M مودل فوق حلقة $(R, +, \cdot)$ ، وليكن n عدد صحيح موجب. بين أن التطبيق $f: M^n \rightarrow M$ المعرفة بالشكل $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ هو - R ايبومورفيزم.

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وليكن M, M' مودولين فوق R ، ولتكن $\{x'_1, \dots, x'_n\}$ قاعدة M' ، وليكن $f: M \rightarrow M'$ - R ايبومورفيزم. بين أنه يوجد مودول جزئي حر N من M بحيث يكون $M = N \oplus \ker f$.

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وليكن M - R مودول، ولتكن $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n; n \geq 2\}$ مجموعة جزئية منتهية من M بحيث أن $M = \langle S \rangle$. بين أن المجموعة $S \setminus \{x_k\}$ مولدة لـ M ، حيث:

$$x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i x_i; \quad \lambda_i \in R, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

السؤال الثالث: (35 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، ويفرض أن المخطط التالي من المودولات فوق R

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

والهومومورفيزمات تبادلي $p \downarrow \quad q \downarrow \quad r \downarrow$ وأن سطره متتاليتان تامتان. برهن ما يلي:

$$A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C'$$

$$g \circ f = 0 \quad \text{أ -}$$

ب - إذا كان r, p, f' مونومورفيزمات فإن q يكون مونومورفيزم.

2- ليكن M مودول فوق حلقة تبديلية واحدة $(R, +, \cdot)$. بين أنه يوجد - R هومومورفيزم $\theta: M \rightarrow M^{**}$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حاتم

2024-7-14

$$\forall x, y \in M_1 \cap M_2 \Rightarrow x, y \in M_1 \text{ و } x, y \in M_2 \quad -2$$

$$\Rightarrow x - y \in M_1 \text{ و } x - y \in M_2 \Rightarrow x - y \in M_1 \cap M_2 \quad \checkmark$$

$$\forall x \in M_1 \cap M_2, \lambda \in R \Rightarrow x \in M_1 \text{ و } x \in M_2 \quad -3$$

$$\Rightarrow \lambda x \in M_1 \text{ و } \lambda x \in M_2 \Rightarrow \lambda x \in M_1 \cap M_2 \quad \checkmark$$

مما سبق نستنتج أن $M_1 \cap M_2$ هو فضاء جزئي من M .

2) f هو مورفزم لأنه :

$$1) \forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in M^n \Rightarrow$$

$$f((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) = f(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \checkmark$$

$$= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = f(x_1, \dots, x_n) + f(y_1, \dots, y_n)$$

$$2) \forall (x_1, \dots, x_n) \in M^n, \lambda \in R \Rightarrow$$

$$f(\lambda(x_1, \dots, x_n)) = f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda x_1 \quad \checkmark$$

$$= \lambda f(x_1, \dots, x_n)$$

f عاكس لأنه :

$$\forall y \in M \Rightarrow \exists (y, \dots, y) \in M^n ; f(y, \dots, y) = y \quad \checkmark$$

مما سبق نرى أن f إيزومورفزم.

السؤال الثاني : [30]

1) f : $M \rightarrow M'$ عاكس الفضايا ، وبالتالي f من أجل

العناصر $x_1, \dots, x_n$ في M' توجد عناصر $x_1, \dots, x_n$ في M

$$\text{حيث } f(x_i) = x_i' ; i = 1, \dots, n \quad \checkmark$$

لكن N هو المردم الجزئي من M المولد بالطبيعة $\{x_1, \dots, x_n\}$ ، فإن

هذه المجموعة متقلة خطياً لأنه إذا كان

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 ; \lambda_i \in R$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = f(0) = 0' \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = 0'$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i' = 0' \quad \checkmark$$

وبما أن $\{x_1', \dots, x_n'\}$ متقلة خطياً لأنها قاعدة لـ M' وبالتالي

$$\text{فإن } \lambda_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in M &\Rightarrow f(x) \in M' \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i' ; \lambda_i \in R \\ \Rightarrow f(x) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \\ \Rightarrow f\left(x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) &= 0' \Rightarrow x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \text{Ker } f \\ \Rightarrow x &\in N + \text{Ker } f \Rightarrow M \subseteq N + \text{Ker } f \Rightarrow M = N + \text{Ker } f \end{aligned}$$

وكذا العكس:

$$\begin{aligned} \forall y \in N \cap \text{Ker } f &\Rightarrow y \in N \text{ و } y \in \text{Ker } f \\ \Rightarrow y &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i ; \lambda_i \in R \text{ و } f(y) = 0' \\ \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) &= 0' \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = 0' \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i' &= 0' \Rightarrow \lambda_i = 0 ; i=1, \dots, n \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

أي أن $M = N \oplus \text{Ker } f$ وبالتالي $N \cap \text{Ker } f = \{0\}$

٢. لأن المجموعة $\{x_k\}$ تولد M لأنه

$$\begin{aligned} \forall x \in M &\Rightarrow x = \sum_{i=1}^n v_i x_i ; v_i \in R \\ \Rightarrow x &= v_k x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n v_i x_i = v_k \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i x_i \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n v_i x_i \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (v_k \lambda_i + v_i) x_i \end{aligned}$$

الخطوة التالية

١. إذا كان $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ متتالية تامة فإن $\text{Im } f = \text{Ker } g$ ، وبالتالي

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow f(x) \in \text{Ker } g \Rightarrow g(f(x)) = 0$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = 0 \Rightarrow g \circ f = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \theta \downarrow & & p \downarrow & & q \downarrow & & r \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\chi} & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

حيث θ التباين القانوني، θ الهومومورفزم الصفري، χ الهومومورفزم القانوني، فإن هذا المخطط بنيادي وخطية متتالية تامة.

$$\forall x \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x) = 0$$

و يثبت:

$$(\pi \circ \theta)(x) = \pi(\theta(x)) = \pi(0) = 0$$

$$(p \circ i)(x) = p(i(x)) = p(x)$$

$$f'(p(x)) = (f' \circ p)(x) = (q \circ f)(x) = q(f(x)) = q(0) = 0 \Rightarrow p(x) \in \text{Ker } f'$$

ولكن $\text{Ker } f' = \{0\}$ لأن f' قباين ، وبالتالي $p(x) = 0$ ، ومنه:

$$(\pi \circ \theta)(x) = (p \circ i)(x) = 0 \Rightarrow \pi \circ \theta = p \circ i$$

وبالتالي جأ أن p و r هونو مورفزمين في ايسو مورفزميان q هونو مورفزم احدهما في نظرية التمثيل (الأخرى)

12) نأخذ كل عنصر x من M لنفرض التطبيق $\theta_x: M^* \rightarrow R$ بالمثل.

$$\theta_x(f) = f(x) \quad \forall f \in M^*$$

إن $\theta_x \in M^{**}$ أي أن θ_x هونو مورفزم لأن:

$$1) \forall f, g \in M^* \Rightarrow \theta_x(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \theta_x(f) + \theta_x(g)$$

$$2) \forall f \in M^*, \lambda \in R \Rightarrow \theta_x(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \theta_x(f)$$

نبين أن التطبيق $\theta: M \rightarrow M^{**}$ المعرف بالمثل $\theta(x) = \theta_x$ هونو مورفزم:

$$1) \forall x, y \in M, f \in M^* \Rightarrow (\theta(x+y))(f) = \theta_{(x+y)}(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \theta_x(f) + \theta_y(f) = (\theta_x + \theta_y)(f) = (\theta(x) + \theta(y))(f) \Rightarrow \theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$$

$$2) \forall x \in M, \lambda \in R, f \in M^* \Rightarrow (\theta(\lambda x))(f) = \theta_{(\lambda x)}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \theta_x(f) = (\lambda \theta_x)(f) = (\lambda \theta(x))(f) \Rightarrow \theta(\lambda x) = \lambda \theta(x)$$

أي أن $\theta: M \rightarrow M^{**}$ هونو مورفزم.

السؤال الأول: (20 درجة) 1- ليكن M و N مودلين فوق حلقة واحدة $(R, +, \cdot)$ ، وليكن $f: M \rightarrow N$ هومومورفيزم، وليكن M_1 مودول جزئي من M . برهن أن $f^{-1}(f(M_1)) = M_1 + \ker f$.

2- لتكن M, N زمريتين جمعيتين تبديليتين. بين أن هومومورفيزم $f: M \rightarrow N$ يكون $\mathbb{Z}$ -هومومورفيزم، أي هومومورفيزم بين مودولين.

السؤال الثاني: (35 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M و N مودلين فوق R ، ولتكن $M_1, \dots, M_n$ مودولات جزئية من M بحيث أن $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ ، ولتكن $N_1, \dots, N_n$ مودولات جزئية من N بحيث أن $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_n$. بين أنه إذا كان $M_i \cong N_i$ ($i=1, \dots, n$) فإن $M \cong N$.

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وليكن M مودول R -مودول. بين أنه:

أ - إذا كانت S مجموعة جزئية من M بحيث أن $0 \in S$ ، فإن S مرتبطة خطياً.

ب - إذا كان L, N مودولين جزئيين من M بحيث أن $L \subseteq N$ ، وإذا كان للمودول الجزئي L متمم في M ، فإن للمودول الجزئي L متمم في N .

السؤال الثالث: (35 درجة) 1- ليكن M مودول حر فوق حلقة واحدة R ، ولتكن S مجموعة ما. برهن أنه يمكن كتابة كل

تطبيق $g: S \rightarrow M$ بشكل وحيد كتركيب لتطبيقات، ونحصل على المخطط التبادلي الآتي

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{g} & M \\ f \downarrow & \nearrow h & \\ F & & \end{array}$$

حيث h

هومومورفيزم وحيد.

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وبفرض أن $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \rightarrow 0$ متتالية تامة من المودولات فوق R والهومومورفيزمات. ولناخذ المتتالية:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, A') \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(M, A) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(M, A'')$$

برهن أن $\ker g_* \subseteq \text{Im } f_*$.

3- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة تبديلية واحدة، وليكن M و N مودلين فوق R . بين أن $M \otimes N \cong N \otimes M$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2024-2-19

على

التمرين (3)
سنة ثالثة، رياضيات
فصل أول

السؤال الأول: [20]

$$\begin{aligned} \forall x \in f^{-1}(f(M_1)) &\Rightarrow f(x) \in f(M_1) \\ \Rightarrow \exists x' \in M_1 ; f(x) &= f(x') \Rightarrow f(x) - f(x') = 0 \\ \Rightarrow f(x - x') &= 0 \Rightarrow x - x' \in \text{Ker } f \Rightarrow x \in M_1 + \text{Ker } f \\ \Rightarrow f^{-1}(f(M_1)) &\subseteq M_1 + \text{Ker } f \quad (*) \end{aligned}$$

من جهة ثانية فإنه:

$$\begin{aligned} \forall x \in M_1 &\Rightarrow f(x) \in f(M_1) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(M_1)) \\ \Rightarrow M_1 &\subseteq f^{-1}(f(M_1)) \end{aligned}$$

ولدينا $\{0_M\} \subseteq f(M_1)$ ومنه:

$$f^{-1}(\{0_M\}) \subseteq f^{-1}(f(M_1)) \Rightarrow \text{Ker } f \subseteq f^{-1}(f(M_1))$$

$$\Rightarrow M_1 + \text{Ker } f \subseteq f^{-1}(f(M_1)) \quad (**)$$

$$f^{-1}(f(M_1)) = M_1 + \text{Ker } f \quad \text{حيث (*) و (**)} \quad \text{نجد أن}$$

1- بما أن f هو مورفزم زمر فان:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in M$$

2- أولاً يمكن $x \in M$ و $n \in \mathbb{Z}$ فان:

$$f(nx) = nf(x) \quad \text{إذا كان } n \text{ عدداً صحيحاً موجباً فان:}$$

- إذا كان n عدداً صحيحاً سالباً، لنضع $n = -t$ حيث t عدد صحيح موجب، ويكون

$$f(nx) = f((-t)x) = f(-(tx)) = -f(tx)$$

$$= -tf(x) = (-t)(f(x)) = nf(x)$$

مما سبق نجد أن f - هو مورفزم.

السؤال الثاني: [35]

1- إذا افترضنا يوجد لدينا $f_i: M_i \rightarrow N_i$ ($i=1, \dots, n$) ايزومورفزم

على (الأقل)، كما أن كل عنصر x من M يكتب بسهولة وحيدة

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{و } x_i \in M_i$$

لنفرض التطبيق $f: M \rightarrow N$ بالشكل:

$$f(x_1 + \dots + x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$$

$$\forall x_i \in M_i, i=1, \dots, n$$

f معرفة جيداً لأن:

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i, y = \sum_{i=1}^n y_i \in M; \quad \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad 4$$

$$\Rightarrow x_i = y_i \quad \forall i=1, \dots, n \Rightarrow f_i(x_i) = f_i(y_i) \quad \forall i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) = f_1(y_1) + \dots + f_n(y_n)$$

$$\Rightarrow f(x_1 + \dots + x_n) = f(y_1 + \dots + y_n) \Rightarrow f(x) = f(y)$$

إذن f هو هومومورفيزم لأن:

$$1) \forall x, y \in M \Rightarrow x = x_1 + \dots + x_n, y = y_1 + \dots + y_n; x_i, y_i \in M_i, i=1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x+y) &= f((x_1 + \dots + x_n) + (y_1 + \dots + y_n)) \\ &= f((x_1 + y_1) + \dots + (x_n + y_n)) = f_1(x_1 + y_1) + \dots + f_n(x_n + y_n) \\ &= f_1(x_1) + f_1(y_1) + \dots + f_n(x_n) + f_n(y_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) + \\ &\quad f_1(y_1) + \dots + f_n(y_n) = f(x_1 + \dots + x_n) + f(y_1 + \dots + y_n) \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned} \quad 4$$

$$\begin{aligned} 2) \forall x \in M, \lambda \in R \Rightarrow x &= x_1 + \dots + x_n; x_i \in M_i, i=1, \dots, n \\ \Rightarrow f(\lambda x) &= f(\lambda(x_1 + \dots + x_n)) = f(\lambda x_1 + \dots + \lambda x_n) \\ &= f_1(\lambda x_1) + \dots + f_n(\lambda x_n) = \lambda f_1(x_1) + \dots + \lambda f_n(x_n) \\ &= \lambda(f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)) = \lambda f(x_1 + \dots + x_n) = \lambda f(x) \end{aligned} \quad 4$$

f قبايلي لأن:

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i, y = \sum_{i=1}^n y_i \in M; f(x) = f(y), x_i, y_i \in M_i, i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) = f_1(y_1) + \dots + f_n(y_n) \quad 3$$

$$\Rightarrow f_i(x_i) = f_i(y_i); i=1, \dots, n \quad (M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n)$$

$$\stackrel{f \text{ قبايلي}}{\Rightarrow} x_i = y_i; i=1, \dots, n \Rightarrow x = y$$

f عامر لأن:

$$\forall y \in N \Rightarrow y = y_1 + \dots + y_n; y_i \in N, i=1, \dots, n$$

$$\stackrel{f \text{ عامر}}{\Rightarrow} \exists x_i \in M_i; y_i = f_i(x_i); i=1, \dots, n \quad 3$$

$$\Rightarrow \exists x = x_1 + \dots + x_n \in M; y = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$$

$$= f(x_1 + \dots + x_n) = f(x)$$

مما سبق نجد أن f انيزومورفيزم و $M \cong N$

2] أ) ليكن $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ مجموعة جزئية منتهية من K حيث 0 أحد عناصرها، وليكن x_1 فإن:

$$1 \cdot x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$$

والأمثلة ليست كلها أصفار، حيث $1 = 1 + 0$ ، أي أن K مرتبطة خطياً وبالتالي K مرتبطة خطياً.

ب) بما أن للمودول الجزئي L قسماً في M ، وليكن L' فإن $M = L \oplus L'$

$$\Rightarrow M = L + L' \quad \text{و} \quad L \cap L' = \{0\}$$

نضع $L'' = N \cap L'$ فإن L' مودول جزئي من N ، ويمكن:

$$L + L'' = L + (N \cap L') = N \cap (L + L') = N \cap M = N$$

$$L \cap L'' = L \cap (N \cap L') = N \cap (L \cap L') = N \cap \{0\} = \{0\}$$

أي أن للمودول الجزئي L قسماً في N هو $N \cap L$.

السؤال الثالث [35]

1] ليكن F المودول الحر على K ، ولنفرض التطبيق $f: F \rightarrow M$ بالمثل.

$$h(\theta) = \sum_{s \in S} \theta(s) g(s) \quad \forall \theta \in F$$

والتطبيق $f: S \rightarrow F$ بالمثل.

$$f(s) = f_s \quad \forall s \in S$$

إن h معرف جيداً لأنه

$$\forall \theta, \theta' \in F; \theta = \theta' \Rightarrow \theta(s) = \theta'(s) \quad \forall s \in S$$

$$\Rightarrow \sum_{s \in S} \theta(s) g(s) = \sum_{s \in S} \theta'(s) g(s) \Rightarrow h(\theta) = h(\theta')$$

كان h هو مورفيزم لأن:

$$\forall \theta, \theta' \in F \Rightarrow h(\theta + \theta') = \sum_{s \in S} (\theta + \theta')(s) g(s)$$

$$= \sum_{s \in S} (\theta(s) + \theta'(s)) g(s) = \sum_{s \in S} \theta(s) g(s) + \sum_{s \in S} \theta'(s) g(s) = h(\theta) + h(\theta')$$

$$\forall \theta \in F, \lambda \in R \Rightarrow h(\lambda \theta) = \sum_{s \in S} (\lambda \theta)(s) g(s)$$

$$= \sum_{s \in S} \lambda \theta(s) g(s) = \lambda \left(\sum_{s \in S} \theta(s) g(s) \right) = \lambda h(\theta)$$

بحال أن التطبيق المعطى تبارك لأنه

$$\forall s \in S \Rightarrow (h \circ f)(s) = h(f(s)) = h(f_s) = \sum_{x \in S} f_s(x) g(x)$$

$$= g(s) \Rightarrow h \circ f = g$$

كما أن h وحيداً إذا كان $h': F \rightarrow M$ هو مورفزم آخر
حيث $h' \circ f = g$ ، فإنه:

$$\begin{aligned} h'(\theta) &= h' \left(\sum_{s \in S} \theta(s) f_s \right) = \sum_{s \in S} \theta(s) h'(f_s) \\ &= \sum_{s \in S} \theta(s) h'(f(s)) = \sum_{s \in S} \theta(s) (h' \circ f)(s) \\ &= \sum_{s \in S} \theta(s) g(s) = h(\theta) \Rightarrow h = h' \end{aligned}$$

وبالتالي h وحيد.

$$\forall \theta \in \text{Ker } g_* \Rightarrow g_*(\theta) = 0 \Rightarrow g \circ \theta = 0$$

$$= 1(g \circ \theta)(x) = 0 \quad \forall x \in M$$

$$\Rightarrow g(\theta(x)) = 0 \Rightarrow \theta(x) \in \text{Ker } g = \text{Im } f$$

$$\Rightarrow \exists a' \in A'; \theta(x) = f(a')$$

وبما أن f متباينة فإن a' وحيد. حيث $\theta(x) = f(a')$

الآن إذا كان يوجد $b' \in A'$ حيث $\theta(x) = f(b')$ فإن $f(a') = f(b')$ بالتالي $a' = b'$

ولنفرض انطبقت $\theta: M \rightarrow A'$ حيث $\theta(x) = a'$ ، فإن

$$\theta(x) = f(a') = f(\theta_1(x)) = (f \circ \theta_1)(x) \quad \theta_1 \in \text{Hom}(M, A')$$

$$\Rightarrow \theta = f \circ \theta_1 \Rightarrow \theta = f_* (\theta_1) \Rightarrow \theta \in \text{Im } f_*$$

$$\Rightarrow \text{Ker } g_* \subseteq \text{Im } f_*$$

إن انطبقت $g: M \times N \rightarrow N \otimes M$ المرفقات

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{g} & N \otimes M \\ f \downarrow & \nearrow h & \\ M \otimes N & & \end{array}$$

$$g(x, y) = y \otimes x$$

تتألف الخريطة، وبالتالي يوجد هو مورفزم وحيد

$$h: M \otimes N \rightarrow N \otimes M$$

$$h(x \otimes y) = y \otimes x$$

$$\begin{array}{ccc} N \times M & \xrightarrow{g'} & M \otimes N \\ f' \downarrow & \nearrow h' & \\ N \otimes M & & \end{array}$$

كما أن انطبقت $g': N \times M \rightarrow M \otimes N$ المرفقات

$$g'(y, x) = x \otimes y$$

تتألف الخريطة، وبالتالي يوجد هو مورفزم وحيد

$$h': N \otimes M \rightarrow M \otimes N$$

$$h'(y \otimes x) = x \otimes y$$

$$h \circ h' = \text{id}_{N \otimes M}, \quad h' \circ h = \text{id}_{M \otimes N}$$

$$M \otimes N \cong N \otimes M$$

السؤال الأول: (25 درجة) ليكن M و N مودلين فوق حلقة $(R, +, \cdot)$ ، وليكن N_1, N_2 مودولين جزئيين من N ، وليكن M_1 مودول جزئي من M ، ولنفرض أن $f: N \rightarrow M - R$ هومومورفيزم. برهن أن:

أ - $N_1 + N_2$ مودول جزئي من N .

ب - $f(f^{-1}(M_1)) = M_1 \cap \text{Im } f$.

السؤال الثاني: (35 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن $M - R$ مودول، ولتكن $M_1, \dots, M_n$ مودولات جزئية من M بحيث أن $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ ، ولتكن $N_1, \dots, N_n$ مودولات جزئية من $M_1, \dots, M_n$ على الترتيب، وليكن $N = N_1 + \dots + N_n$. إذا كان $f: M \rightarrow M/N - R$ ايبومورفيزم معرف بالشكل $f(x) = x + N$. بين أن:

$$M/N = f(M_1) \oplus \dots \oplus f(M_n)$$

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وليكن $M - R$ مودول، ولتكن $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n; n \geq 2\}$ مجموعة جزئية منتهية من M بحيث أن $M = \langle S \rangle$. بين ان المجموعة $\{x_k\} \setminus S$ مولدة لـ M ، حيث:

$$x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i x_i; \quad \lambda_i \in R, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

3- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن $M - R$ مودول، وليكن M_1, M_2 مودولين جزئيين من M بحيث أن M_1, M_2 نوثرين وبحيث $M = M_1 + M_2$. بين أن M نوثري.

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وبفرض أن المخطط التالي من المودولات فوق R

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

والهومومورفيزمات تبادلي $r \downarrow \quad q \downarrow \quad p \downarrow$ ، وأن سطريه متتاليتان تامتان. برهن أنه إذا كان r, p, g

$$A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C'$$

ايبومورفيزمات فإن q يكون ايبومورفيزم.

2 - ليكن M مودول فوق حلقة تبديلية واحدة $(R, +, \cdot)$ ، وليكن $\theta: M \rightarrow M^{**} - R$ هومومورفيزم معرف بالشكل $\theta(x) = \theta_x \quad \forall x \in M$ وحيث $\theta_x: M^* \rightarrow R$ معرف بالشكل $\theta_x(f) = f(x) \quad \forall f \in M^*$. إذا كان M مودول حر فوق R فبين أن θ يكون مونومورفيزم.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2023-9-18

السؤال الثاني: [25]

1- واضح أن $\emptyset \neq N_1 + N_2 \subseteq M$ لأن $0 \in N_1 + N_2$

2- $\forall x, y \in N_1 + N_2 \Rightarrow x = x_1 + x_2$ و $y = y_1 + y_2$ حيث $x_1, y_1 \in N_1$ و $x_2, y_2 \in N_2$
 $\Rightarrow x - y = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \in N_1 + N_2$
 حيث $x_1 - y_1 \in N_1$ و $x_2 - y_2 \in N_2$

3- $\forall x \in N_1 + N_2, \lambda \in R \Rightarrow x = x_1 + x_2$; $x_1 \in N_1, x_2 \in N_2$
 $\Rightarrow \lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in N_1 + N_2$
 حيث $\lambda x_1 \in N_1$ و $\lambda x_2 \in N_2$

$\forall y \in f(f^{-1}(N_1)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(N_1)$; $y = f(x)$
 $\Rightarrow y = f(x) \in N_1 \Rightarrow f(f^{-1}(N_1)) \subseteq N_1$

و كذلك فإن $f^{-1}(N_1) \subseteq M \Rightarrow f(f^{-1}(N_1)) \subseteq f(M) = \text{Im } f$

$f(f^{-1}(N_1)) \subseteq N_1 \cap \text{Im } f$ (*)

وهي نتيجة ثانية فإن:

$\forall y \in N_1 \cap \text{Im } f \Rightarrow y \in N_1$ و $y \in \text{Im } f$
 $\Rightarrow \exists x \in M$; $y = f(x) \Rightarrow f(x) \in N_1 \Rightarrow x \in f^{-1}(N_1)$

$\Rightarrow y = f(x) \in f(f^{-1}(N_1)) \Rightarrow N_1 \cap \text{Im } f \subseteq f(f^{-1}(N_1))$ (**)
 من (*) و (**) نتج أن:

السؤال الثاني: [35]

1- لدينا $\sum_{i=1}^n f(M_i) \subseteq M/N$ كما أن:

$\forall x + N \in M/N \Rightarrow x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n x_i$; $x_i \in M_i$ (لأن $M = M_1 + \dots + M_n$)
 $\Rightarrow x + N = (\sum_{i=1}^n x_i) + N = \sum_{i=1}^n (x_i + N) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \in \sum_{i=1}^n f(M_i)$
 $\Rightarrow M/N \subseteq \sum_{i=1}^n f(M_i)$

ومن هنا $M/N = \sum_{i=1}^n f(M_i)$ ولبرهن أن $f(M_1), \dots, f(M_n)$ مستقلة فإن $\sum_{i=1}^n f(z_i) = N$; $z_i \in M_i$ إذا كان $\sum_{i=1}^n (z_i + N) = N$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n z_i \in N \Rightarrow \sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n x_i$; $x_i \in N_i$ حيث $N_i \subseteq M_i \Rightarrow x_i \in M_i$
 وبما أن $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ فإن $z_i = x_i$ (لأن $z_i \in M_i$ و $x_i \in M_i$)

$\Rightarrow f(z_i) = f(x_i) = x_i + N = N$
 وبالتالي $f(M_1), \dots, f(M_n)$ مستقلة، ومنه:

$M/N = f(M_1) \oplus \dots \oplus f(M_n)$

2] إن المجموعة $\{x_k\}$ تولد M لأنه:

$$\forall x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n r_i x_i \quad ; \quad r_i \in R \Rightarrow x = r_k x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i x_i$$

$$= r_k \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i x_i \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i x_i$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (r_k \lambda_i) x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (r_k \lambda_i + r_i) x_i$$

تركيب خطي لعناصر $\{x_k\}$.

3] بما أن M_2 نوثيري و $M_1 \cap M_2$ هو دويل جزئي منه فإنه حسب

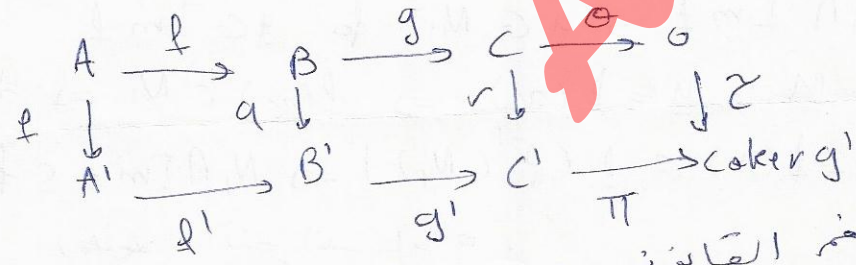
نظرية $M_2 / (M_1 \cap M_2)$ يكون نوثيري ، ولدنياً :

$$M / M_1 \cong (M_1 + M_2) / M_1 \cong M_2 / (M_1 \cap M_2)$$

أي أن M / M_1 نوثيري ، وبما أن M_1 نوثيري فإنه حسب نظرية

السؤال الثالث [30]

1] لنأخذ المخطط



حيث π الغمر القانوني ، χ الاحتواء القانوني ، θ الهمومورفزم
الصوري. فإن هذا المخطط تبادلي وسطويهما متتاليان تافهات ،
والفهم أن سطري المخطط متتاليان تافهات ، وأن χ هو همومورفزم ،
ولنبدأ أن المربع اليساري تبادلي ، أي لنثبت أن $\chi \circ \theta = \pi \circ r$
 $\forall x \in C \Rightarrow \exists b \in B ; x = g(b)$ ويكون:

$$\begin{aligned} (\chi \circ \theta)(x) &= \chi(\theta(x)) = \chi(0) = 0 \\ (\pi \circ r)(x) &= \pi(r(x)) = \pi(r(g(b))) = (\pi \circ r \circ g)(b) \\ &= (\pi \circ (g' \circ g))(b) = (\pi \circ g')(g(b)) = 0 \end{aligned}$$

لأن $\pi \circ g' = 0$ تركيب هو همومورفزم من متتاليتين متتالية تافه

$$\Rightarrow (\chi \circ \theta)(x) = (\pi \circ r)(x) = 0 \Rightarrow \chi \circ \theta = \pi \circ r$$

الآن بما أن P و r ايومورفزم من χ هو همومورفزم فإن q يكون ايومورفزم
احسب (1) من نظرية التمييز (الآتية)

2] لتكن M قاعدة للمودول الحر M ، فإن كل عنصر x من M يكتب بالشكل

$$x = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \dots + x_n s_n \quad ; \quad x_i \in R$$

ان θ متتالي لأنه

$$\forall x \in \text{Ker } \theta \Rightarrow \theta(x) = 0 \Rightarrow \theta_x = 0 \Rightarrow \theta_x(f) = 0 \quad \forall f \in V^* \\ \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j S_j\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_j f(S_j) = 0$$

وبالتالي من أجل عناصر تنوع القاعدة $f = S_{i'}$ ($i' = 1, \dots, n$)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_j S_{i'}^*(S_j) = 0 \Rightarrow \alpha_{i'} = 0 \quad ; \quad i' = 1, \dots, n$$

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i = \sum_{i=1}^n 0 S_i = 0$$

$$\Rightarrow \text{Ker } \theta = \{0\} \Rightarrow$$

θ متباين

وبما أن θ هو مورفزم فإن θ مورفزم.

المدة ساعتان
الدرجة العظمى: 90 درجة
اسم الطالب:

امتحان بنى جبرية 3
لطلاب السنة الثالثة - رياضيات
الدورة الفصلية الثانية

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

السؤال الأول: (25 درجة) 1- ليكن M و N مودولين فوق حلقة $(R, +, \cdot)$ ، ولنرمز بـ 0 و $0'$ لصفري M و N على الترتيب، وليكن $f: M \rightarrow N$ -هومومورفيزم. برهن أن $\ker f$ مودول جزئي من M .

2- ليكن M مودول فوق حلقة $(R, +, \cdot)$ ، ولتكن P, N, T مودولات جزئية من M ، بحيث أن $T \subseteq P$. برهن أن:

$$P \cap (N + T) = (P \cap N) + T$$

السؤال الثاني: (35 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M -مودول، وليكن N_1, N_2 مودولين جزئيين من M بحيث أن $M = N_1 \oplus N_2$. بين أن $M/N_1 \cong N_2$.

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وليكن M, N مودولين فوق R ، ولتكن $\{x_1, \dots, x_n\}$ ، $\{y_1, \dots, y_n\}$ قاعدتين لـ M و N على الترتيب.

أ - برهن أن كل عنصر من M يكتب كتركيب خطي وحيد لعناصر القاعدة $\{x_1, \dots, x_n\}$.

ب - بين أنه يوجد R -ايزومورفيزم وحيد للمودل M في المودول N من أجله $f(x_i) = y_i$ ($i = 1, \dots, n$).

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، ويفرض أن المخطط التالي من المودولات فوق R

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

والهومومورفيزمات تبادلي $r \downarrow$ $q \downarrow$ $p \downarrow$ وأن سطريه متتاليان تامتان. برهن أنه إذا كان r, p, f'

$$A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C'$$

مونومورفيزمات فإن q يكون مونومورفيزم.

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة تبديلية واحدة، وليكن M مودول حر فوق R بقاعدة منتهية $\{s_1, \dots, s_n\}$. بين أن M^* مودول

حر فوق R ، والمجموعة $\{s_1^*, \dots, s_n^*\}$ ، حيث:

$$s_i^*(s_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

تكون قاعدة منتهية لـ M^* .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2023-7-23

السؤال الأول: [25]

1. f وافي أن $\emptyset \neq \text{Ker } f \subseteq M$ $\forall f(0) = 0$ 3

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x_1) = 0', f(x_2) = 0' \quad (1)$$

$$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0' - 0' = 0' \quad (2)$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \text{Ker } f$$

$$\forall x \in \text{Ker } f, \lambda \in R \Rightarrow f(x) = 0' \quad (3)$$

$$\Rightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda 0' = 0' \Rightarrow \lambda x \in \text{Ker } f$$

على (1) و (2) و (3) فإن $\text{Ker } f$ مجموعة جزئية من M

لذا $\square$

$$P \cap N \subseteq P \Rightarrow (P \cap N) + T \subseteq P + T$$

$$P \cap N \subseteq N \Rightarrow (P \cap N) + T \subseteq N + T$$

$$\Rightarrow (P \cap N) + T \subseteq (P + T) \cap (N + T)$$

(4)

وفي جهة ثانية لدينا:

$$\forall x \in (P \cap N) + T \Rightarrow x \in P \text{ و } x \in N + T$$

$$\Rightarrow x = x_1 + x_2; \quad x_1 \in N \text{ و } x_2 \in T$$

$$\Rightarrow x_1 = x - x_2 \in P \quad (x \in P \text{ و } x_2 \in T \subseteq P)$$

$$\Rightarrow x_1 \in N \cap P \Rightarrow x \in (P \cap N) + T$$

$$\Rightarrow P \cap (N + T) \subseteq (P \cap N) + T \quad (5)$$

(**)

من (4) و (5) ننتج النتيجة.

السؤال الثاني: [35]

1. لتعرف التطبيق $f: N_2 \rightarrow M/N_1$ بالمثل:

$$f(x) = x + N_1 \quad \forall x \in N_2$$

وإن f معرف جيداً لأنه:

$$\forall x_1, x_2 \in N_2; \quad x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 + N_1 = x_2 + N_1 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

f هو مورفزم لأنه:

$$\forall x \in N_c, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda x + N_1 = \lambda(x + N_1) = \lambda f(x)$$

$$\forall x_1, x_2 \in N_2 \quad ; \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + N_1 = x_2 + N_1$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 \in N_1$$

و لكن $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ و $M = M_1 \oplus M_2$ ، وبالنسبة لـ $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\forall y \in M/N_1 \Rightarrow \exists x = x_1 + x_2 \in M$; $y = x + N_1$, $x_1 \in N_1$, $x_2 \in N_2$
 $\Rightarrow \exists x_2 \in N_2$; $y = x + N_1 = (x_1 + x_2) + N_1 = (x_1 + N_1) + (x_2 + N_1)$
 $= N_1 + (x_2 + N_1) = x_2 + N_1 = f(x_2)$ 3

[2] ليكن x عنصر حافى M . بما أن $\{x_1, \dots, x_n\}$ قاعدة M في

فرض M ، n ماتریس متماثل و x بردار n بعدی باشد. x را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad ; \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

و فرض کنیم $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$

وكان S متصلة خطياً لأنها قابلة لبيان $\lambda_1 - \mu_1 = 0$ $(\lambda_1 = 1, \dots, n)$

۱) $\mu_1 = \mu_2$ ، و نه جان x یکتب μ_1 کنده کیه خلی لغه

۲) $\mu_1 = \mu_2$ ، و نه جان x یکتب μ_1 کنده کیه خلی لغه

۳) $\mu_1 = \mu_2$ ، و نه جان x یکتب μ_1 کنده کیه خلی لغه

۴) $\mu_1 = \mu_2$ ، و نه جان x یکتب μ_1 کنده کیه خلی لغه

۵) $\mu_1 = \mu_2$ ، و نه جان x یکتب μ_1 کنده کیه خلی لغه

۶) $\mu_1 = \mu_2$ ، و نه جان x یکتب μ_1 کنده کیه خلی لغه

۷) $\mu_1 = \mu_2$ ، و نه جان x یکتب μ_1 کنده کیه خلی لغه

۸) $\mu_1 = \mu_2$ ، و نه جان x یکتب μ_1 کنده کیه خلی لغه

۹) $\mu_1 = \mu_2$ ، و نه جان x یکتب μ_1 کنده کیه خلی لغه

۱۰) $\mu_1 = \mu_2$ ، و نه جان x یکتب μ_1 کنده کیه خلی لغه

ولنفرض ان التطبيق $f: M \rightarrow N$ يكون

ان في صرف جبراً لذنه

$$\forall x, x' \in M; \quad x = x' \quad , \quad x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad x' = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \Rightarrow \lambda_i = \mu_i \quad \forall i=1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^n \mu_i y_i \Rightarrow f(x) = f(y)$$

ان + هو مورفزم

$$1) \forall x, x' \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad x' = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i; \quad \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x+x') &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) x_i\right) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) y_i \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i + \sum_{i=1}^n \mu_i y_i = f(x) + f(x') \end{aligned}$$

$$2) \forall x \in M, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i; \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\lambda x) &= f\left(\lambda \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)\right) = f\left(\sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i) x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i) y_i = \lambda \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\right) = \lambda f(x) \end{aligned}$$

ف صيانة

$$\forall x, x' \in M; \quad f(x) = f(x'), \quad x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

$$x' = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i; \quad \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^n \mu_i y_i \Rightarrow \lambda_i = \mu_i; \quad i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \Rightarrow x = x'$$

f خاص

$$\forall y \in N \Rightarrow y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i; \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in M;$$

مما سبق نجد ان $f: R \rightarrow R$ (نرمولفزم) وهو هيدرومورفزم

الكان $g: M \rightarrow N$ - انرمولفزم يثبت $g(x_i) = y_i$ (1, 2, ..., n) فبان

$$\forall x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i; \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(x) &= g\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = f(x) \\ \Rightarrow f &= g \end{aligned}$$

البرهان الثاني

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow \nu \\ 0 & \xrightarrow{\alpha} & A' & \xrightarrow{\varphi'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

5

حيث: التباين العائلي، و هو مورفزم الصغري، و
 الوحداء العائلي، فإن هذا المخطط تبادلي وخطيه متاليفان
 تامان. وفتح أن خطيه المخطط متاليفان تامان، وأن و هو مورفزم،
 ولنبين أن المربع الساري تبادلي، أي لنبين أن $P \circ \tau = \tau \circ P$.

$$\forall x \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x) = 0$$

3

ويكون

$$(\tau \circ P)(x) = \tau(P(x)) = \tau(0) = 0$$

$$(P \circ \tau)(x) = P(\tau(x)) = P(x)$$

لدينا

$$f'(P(x)) = (f' \circ P)(x) = (q \circ f)(x) = q(f(x)) = q(0) = 0$$

7

$$\Rightarrow P(x) \in \text{Ker } f'$$

ولكن $\text{Ker } f' = 0$ ، وبالتالي $P(x) = 0$ ، وفتح

$$(P \circ \tau)(x) = (P \circ \tau)(x) = 0 \Rightarrow (\tau \circ P)(x) = 0$$

بما أن P و τ مورفزم و هو مورفزم فإن q مورفزم
 (مب 2) في نظرية التباديات (الأربعة)

على كل عنصر x من M يكتب بصورة رجيعة بالشكل:

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j s_j \quad \alpha_j \in R$$

$$\Rightarrow s_i^*(x) = s_i^*\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j s_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j s_i^*(s_j) = \alpha_i$$

3

- وأن المجموعة $\{s_1^*, \dots, s_n^*\}$ مولدة لـ M^* لأنه

$$\forall f \in M^* \Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(s_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n s_i^*(x) f(s_i) = \sum_{i=1}^n f(s_i) s_i^*(x)$$

6

$$= \left(\sum_{i=1}^n f(s_i) s_i^*\right)(x) \Rightarrow f = \sum_{i=1}^n f(s_i) s_i^*$$

أي أن f تركيب قطري لعناصر $s_1^*, \dots, s_n^*$

- وأن المجموعة $\{s_1^*, \dots, s_n^*\}$ مستقلة خطياً لأنه

$$\text{إذا كان } \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i^* = 0 \text{ فإن:}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i s_i^*\right)(s_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

6

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i^*(s_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n \Rightarrow \lambda_j = 0$$

وبالتالي فإن المجموعة $\{s_1^*, \dots, s_n^*\}$ قاعدة متجهة لـ M^*

و M^* مولدة حر فوق R .

السؤال الأول: (25 درجة) 1- ليكن M و N مودولين فوق حلقة $(R, +, \cdot)$ ، ولنرمز بـ 0 و $0'$ لصفري M و N على الترتيب، وليكن $f: M \rightarrow N$ -هومومورفيزم. إذا كان M_1 مودول جزئي من M برهن أن $f(M_1)$ مودول جزئي من N .
2- ليكن M مودول فوق حلقة $(R, +, \cdot)$ ، ولتكن M_1, M_2, M_3 مودولات جزئية من M بحيث أن $M = \bigoplus_{i=1}^3 M_i$ ، ولنفرض أن

$$M_i = L_2 \cap L_3 \text{ حيث } L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 M_j, i=1,2,3. \text{ برهن أن } M_1 = L_2 \cap L_3.$$

السؤال الثاني: (35 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وليكن M, M' مودولين فوق R ، ولتكن $\{x'_1, \dots, x'_n\}$ قاعدة لـ M' ، وليكن $f: M \rightarrow M'$ -إيومورفيزم. بين أنه يوجد مودول جزئي حر N من M بحيث يكون $M = N \oplus \ker f$.
2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M -مودول، ولتكن $M_1, \dots, M_n$ مودولات جزئية من M بحيث أن $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ ، ولتكن $N_1, \dots, N_n$ مودولات جزئية من $M_1, \dots, M_n$ على الترتيب، وليكن $N = N_1 + \dots + N_n$. إذا كان $f: M \rightarrow M/N$ -إيومورفيزم معرف بالشكل $f(x) = x + N$. بين أن:
 $M/N = f(M_1) \oplus \dots \oplus f(M_n)$

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وبفرض أن $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ متتالية تامة من المودولات فوق R والهومومورفيزمات. برهن أن:

$$a - g \circ f = 0$$

$$b - B / \text{Im } f \cong C$$

2- ليكن M مودول حر فوق حلقة واحدة $(R, +, \cdot)$ ، ولتكن S قاعدة للمودول M . برهن أن $M \cong F$ (حيث F المودول الحر على S).

3- ليكن M مودول فوق حلقة تبديلية واحدة $(R, +, \cdot)$ ، وليكن $\theta: M \rightarrow M^{**}$ -هومومورفيزم معرف بالشكل $\theta_x(f) = f(x) \quad \forall f \in M^*$ ، حيث $\theta(x) = \theta_x \quad \forall x \in M$. إذا كان M مودول حر فوق R فبين أن θ يكون مونومورفيزم.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

عل

2023-2-13

واضح أن $f(M_1) \subseteq N$ لأن $f(0) = 0 \in f(M_1)$

$$\forall y_1, y_2 \in f(M_1) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in M_1 ; y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$$

$$\Rightarrow y_1 - y_2 = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) \in f(M_1)$$

$$\forall y \in f(M_1), \lambda \in R \Rightarrow \exists x \in M_1 ; y = f(x)$$

$$\Rightarrow \lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in f(M_1)$$

من (1) و (2) و (3) نرى أن $f(M_1)$ فوردون جزئي في N .

$$\forall x \in M_1 \Rightarrow x \in M_1 + M_3 = L_2 \quad \& \quad x \in M_1 + M_2 = L_3$$

$$\Rightarrow x \in L_2 \cap L_3 \Rightarrow M_1 \subseteq L_2 \cap L_3 \quad \dots (*)$$

وبالتالي بإمكان كتابة x بأحد الطرق الآتية:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 ; x_i \in M_i, i=1,2,3$$

$$x = x_1' + x_3' ; x_1' \in M_1, x_3' \in M_3$$

$$x = x_1'' + x_2'' ; x_1'' \in M_1, x_2'' \in M_2$$

من العلاقات (1) و (2) و (3) نلاحظ أن $M = \bigoplus_{i=1}^3 M_i$ ، أي أن

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

3

2

2

وذلك لأن:

</



(4) $x_2 = 0 \dots$
على قديني (1) و (3) نجد أنه مع ملاحظة أن $M = \bigoplus_{i=1}^3 M_i$ أن:

(5) $x_3 = 0 \dots$

(1) و (4) و (5) نجد أن $x = x_1 \in M_1$ ، وبفرضه:

$$L_2 \cap L_3 \subseteq M_1 \quad (**)$$

من (*) و (***) نجد أن $M_1 = L_2 \cap L_3$

السؤال الثاني: [35]

[[إن التعليل $f: M \rightarrow M'$ غامر من الفرضين، وبالتالي من أجل

العناصر $x_1, \dots, x_n$ يوجد عناصر $x_1', \dots, x_n'$ في M بحيث

$x_i' = f(x_i)$ ، $i=1, \dots, n$ ، وليكن N هو المولد الجزئي من M المولد بالعنصر

$\{x_1, \dots, x_n\}$. إن هذه مجموعة مستقلة خطياً لأنه، إذا كان:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \quad ; \quad \lambda_i \in R \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = 0'$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = 0' \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i' = 0'$$

وبما أن $\{x_1', \dots, x_n'\}$ قاعدة لـ M' فهي مستقلة خطياً، وبالتالي $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ،

وبالتالي هي قاعدة لـ N ، وبالتالي N مولد جزئي من M ، ويمكن:

$$\forall x \in M \Rightarrow f(x) \in M' \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i' ; \lambda_i \in R$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)$$

$$\Rightarrow f\left(x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = 0' \Rightarrow x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \text{Ker } f$$

$$\Rightarrow x \in N + \text{Ker } f \Rightarrow M \subseteq N + \text{Ker } f \Rightarrow M = N + \text{Ker } f$$

كما أنه:

$$\forall y \in N \cap \text{Ker } f \Rightarrow y \in N \text{ و } y \in \text{Ker } f$$

$$\Rightarrow y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \text{ و } f(y) = 0' \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i' = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 ; i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow N \cap \text{Ker } f = \{0\}$$

$$M = N \oplus \text{Ker } f \quad \text{وفيه}$$

15

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \subseteq M/N$$

جواب السؤال

$$\forall x \in M/N \Rightarrow x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad \alpha_i \in M$$

$$\Rightarrow x+N = (\sum_{i=1}^n \alpha_i) + N \Rightarrow \sum_{i=1}^n (\alpha_i + N) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)$$

$$\Rightarrow M/N \subseteq \sum_{i=1}^n f(M_i)$$

في

وهذه $M/N = \sum_{i=1}^n f(M_i)$ لنرهن أن $f(M_1), \dots, f(M_n)$ متقلة إذا كان

$$\sum_{i=1}^n f(z_i) = N \quad ; \quad z_i \in M_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (z_i + N) = N \Rightarrow \sum_{i=1}^n z_i + N = N \Rightarrow \sum_{i=1}^n z_i \in N$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad ; \quad \alpha_i \in N_i \Rightarrow \alpha_i \in M_i$$

وبما أن $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ فإن

$$z_i = \alpha_i \quad ; \quad i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow f(z_i) = f(\alpha_i) = \alpha_i + N = N$$

وبالتالي $f(M_1), \dots, f(M_n)$ متقلة وهذه

$$M/N = f(M_1) \oplus \dots \oplus f(M_n)$$

السؤال الثالث [30]

1. f بيان انتالية ثابة فإن $\text{Im } f = \text{Ker } g$ ، وبالتالي

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow f(x) \in \text{Ker } g \Rightarrow g(f(x)) = 0$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = 0 \Rightarrow g \circ f = 0$$

2. f بيان انتالية ثابة فإن $\text{Im } f = \text{Ker } g$ ، وبالتالي

لنا $g: B \rightarrow C$ تطبق هو مورفزم خارج نواة $\text{Im } f$

$$B / \text{Im } f \cong C$$

3. إذا كان f من نظرية سابقة f حركتنا الخطط الآتي بتأري

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\gamma} & M \\ \downarrow & & \downarrow h \\ F & & \end{array}$$

حيث γ هو هتواء القانوني

و بالتالي $\gamma = f \circ h$ ، و h هو مورفزم

فإن h خارج نواة $\text{Im } h$ مودول جزئي من M و يوي f لأنه

$$\forall s \in S \Rightarrow s = \chi(s) = (h \circ f)(s) = h(f(s)) \\ = h(f_s) \in \text{Im } h \Rightarrow S \subseteq \text{Im } h$$

لذلك توجد M فإن $\text{Im } h = M$ أي أن h غامر. ✓

$$\forall \alpha \in \text{Ken } h \Rightarrow 0 = h(\alpha) = \sum_{s \in S} \alpha(s) \chi(s) = \sum_{s \in S} \alpha(s) s$$

بما أن $\alpha \in F$ و $\alpha(s) = 0$ من أجل جميع عناصر S قاعدة عند فئة

$$\text{هنا ، ولتكن } x_1, \dots, x_n \text{ فإن } \sum_{i=1}^n \alpha(x_i) x_i = 0$$

وبما أن S قاعدة فهي مستقلة خطياً ، وبالتالي $\alpha(x_i) = 0$; $i = 1, \dots, n$

أي أن $\alpha = 0$ ، وبالتالي $\text{Ken } h = \{0\}$ ، أي أن h متباينة .

فإن h إيزومورفزم ، وبالتالي $M \cong F$.

فإن لتكن S قاعدة M للعدد n ، فإن كل عنصر x من M يكتب

$$x = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n \text{ ; } \alpha_i \in F$$

$$\forall x \in \text{Ken } \theta \Rightarrow \theta(x) = 0 \Rightarrow \theta_x = 0 \Rightarrow \theta_x(f) = 0 \quad \forall f \in M$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j s_j\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_j f(s_j) = 0$$

وبالتالي من أجل $f = s_i^*$ ($i = 1, \dots, n$) عناصر توترية القاعدة S فإن :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j s_i^*(s_j) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{وبالتالي } x = \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i = \sum_{i=1}^n 0 s_i = 0 \text{ ومنه } \text{Ken } \theta = \{0\} \text{ وبالتالي}$$

θ متباينة ، وبما أن θ هو مورفزم فـ θ هو مورفزم .

الجمهورية العربية السورية

امتحان بنى جبرية 3

المدة ساعتان

جامعة طرطوس

لطلاب السنة الرابعة - رياضيات

الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم

الدورة التكميلية

اسم الطالب:

السؤال الأول: (25 درجة) 1- ليكن M و N مودلين فوق حلقة واحدة $(R, +, \cdot)$ ، وليكن $f: M \rightarrow N$ -هومومورفيزم،

وليكن M_1 مودول جزئي من M . برهن أن $f^{-1}(f(M_1)) = M_1 + \ker f$.

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M -مودول، ولتكن N مجموعة جزئية من M ، ولتكن A مثالية يسارية من الحلقة R . برهن أن المجموعة:

$$AN = \{x \in M \mid x = \sum_{i=1}^n a_i x_i ; a_i \in A, x_i \in N, n \in \mathbb{Z}^+\}$$

تشكل مودول جزئي من M .

السؤال الثاني: (35 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M, M' مودولين فوق R ، وليكن $f: M \rightarrow M'$ -هومومورفيزم. برهن أن:

$$M/\ker f \cong f(M)$$

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وليكن M -مودول، ولتكن $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n ; n \geq 2\}$ مجموعة جزئية منتهية من M بحيث أن $M = \langle S \rangle$. بين ان المجموعة $S \setminus \{x_k\}$ مولدة لـ M ، حيث:

$$x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n r_i x_i ; r_i \in R, k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

3- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M -مودول، وليكن L, N مودولين جزئيين من M بحيث أن $L \subseteq N$. بين أنه إذا كان للمودل الجزئي L متمم في M فإن للمودل الجزئي L متمم في N .

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وفرض أن المخطط التالي من المودولات فوق R

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

والهومومورفيزمات تبادلي $r \downarrow, q \downarrow, p \downarrow$ ، وأن سطريه متتاليتان تامتان. برهن أنه إذا كان r, p, g

$$A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C'$$

اييومورفيزمات فإن q يكون اييومورفيزم.

2 - ليكن M مودول فوق حلقة تبديلية واحدة $(R, +, \cdot)$. بين أنه يوجد -هومومورفيزم $\theta: M \rightarrow M^{**}$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2022-9-5

السؤال الأول: [25]

$$\begin{aligned} \forall x \in f^{-1}(f(M_1)) &\Rightarrow f(x) \in f(M_1) \Rightarrow \exists x' \in M_1; f(x) = f(x') \\ &\Rightarrow f(x - x') = 0 \Rightarrow x - x' \in \text{Ker } f \Rightarrow x \in M_1 + \text{Ker } f \\ &\Rightarrow f^{-1}(f(M_1)) \subseteq M_1 + \text{Ker } f \quad \dots (*) \end{aligned}$$

وضعية ثانية ثانية:

$$\begin{aligned} \forall x \in M_1 &\Rightarrow f(x) \in f(M_1) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(M_1)) \Rightarrow M_1 \subseteq f^{-1}(f(M_1)) \\ &\text{ولدينا } f^{-1}(f(M_1)) \subseteq f^{-1}(f(M_1)) \Rightarrow \text{Ker } f \subseteq f^{-1}(f(M_1)) \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$f^{-1}(f(M_1)) \supseteq M_1 + \text{Ker } f \quad \dots (**)$$

$$f^{-1}(f(M_1)) = M_1 + \text{Ker } f$$

$$(0_N \in AN) \quad \emptyset \neq AN \subseteq M$$

$$\forall x_1, x_2 \in AN \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad x_2 = \sum_{j=1}^m a'_j x'_j$$

حيث

$$a_i, a'_j \in A, \quad x_i, x'_j \in N, \quad n, m \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{j=1}^m a'_j x'_j = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{j=1}^m (-a'_j) x'_j \in AN$$

$$\forall x \in AN, \lambda \in R \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n a_i x_i; \quad a_i \in A, x_i \in N, n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow \lambda x = \lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_i) x_i \in AN$$

حيث A ذات مغايرة A مغلقة
فردول جزئي في M .

السؤال الثاني: [35]

$$1 \quad \text{لنأخذ التمثيل } \varphi: M/\text{Ker } f \rightarrow f(M)$$

$$\varphi(x + \text{Ker } f) = f(x) \quad \forall x \in M$$

حيث φ معرف جيداً لأنه:

$$\forall x_1, x_2 \in M; \quad x_1 + \text{Ker } f = x_2 + \text{Ker } f \Rightarrow x_1 - x_2 \in \text{Ker } f$$

$$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow \varphi(x_1 + \text{Ker } f) = \varphi(x_2 + \text{Ker } f)$$

- φ متباين لأنه:

$$\forall x_1, x_2 \in M; \quad \varphi(x_1 + \text{Ker } f) = \varphi(x_2 + \text{Ker } f)$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \text{Ker } f \Rightarrow x_1 + \text{Ker } f = x_2 + \text{Ker } f$$

ف خاصية: $\forall y \in f(M) \Rightarrow \exists x \in M ; y = f(x) \Rightarrow \exists x + \ker f \in M/\ker f$
 $y = f(x + \ker f)$

- ف هذ مورفزم لأنه:

$\forall x_1, x_2 \in M \Rightarrow f((x_1 + \ker f) + (x_2 + \ker f)) =$

$f(x_1 + x_2 + \ker f) = f(x_1) + f(x_2)$
 $= f(x_1 + \ker f) + f(x_2 + \ker f)$

$\forall x \in M, \lambda \in R \Rightarrow f(\lambda(x + \ker f)) = f(\lambda x + \ker f)$
 $= f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda f(x + \ker f)$

$M/\ker f \cong f(M)$ علاقة خذ أن ف اندومورفزم، وبالتالي

[2] إن المجموعة $\{x_k\}$ تولد M لأنه:

$\forall x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n r_i x_i ; r_i \in R \Rightarrow x = r_k x_k + \sum_{i=1, i \neq k}^n r_i x_i$
 $= r_k (\sum_{i=1, i \neq k}^n \lambda_i x_i) + \sum_{i=1, i \neq k}^n r_i x_i$
 $= \sum_{i=1, i \neq k}^n (r_k \lambda_i) x_i + \sum_{i=1, i \neq k}^n r_i x_i = \sum_{i=1, i \neq k}^n (r_k \lambda_i + r_i) x_i$

[3] بما أن للعزول الجزئي L صمما في M وليكن L' فإن $M = L \oplus L'$
 $\Rightarrow M = L + L' \quad L \cap L' = \{0\}$

لنضع $L'' = N \cap L'$ فإن L'' عزول جزئي في N ، ويكون:
 $L + L'' = L + (N \cap L') = N \cap (L + L') = N \cap M = N$
 $L \cap L'' = L \cap (N \cap L') = N \cap (L \cap L') = N \cap \{0\} = \{0\}$
 أي أن للعزول الجزئي L صمما في N هو $N \cap L'$

البيان الثالث: [30]
 [1] تأخذ الخطوط:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{\theta} & 0 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow \chi & & \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{\pi} & \text{coker } g' \end{array}$$

حيث π العز القانوني، χ هو عزاء القانوني، و φ هو مورفزم الايزومورفزم
 فإن هذا الخطط يتبادلي وطره متساويان تافسان.

طابق أن $\pi \circ \nu$ متتالية تافقات ، وأن χ مورفزم
ولنرى أن المربع المثلثي تبادلي ، أي لنرى $\chi \circ \pi = \pi \circ \nu$.

$$\forall x \in C, \text{ و بما أن } \nu \text{ غامر} \Rightarrow \exists b \in B; x = \nu(b) \quad \text{ب. يتكون}$$

$$(\chi \circ \pi)(x) = \chi(\pi(\nu(b))) = \chi(\nu(b)) = \chi(x)$$

$$(\pi \circ \nu)(x) = \pi(\nu(x)) = \pi(\nu(\nu(b))) = \pi(\nu(\pi(b))) = (\pi \circ \nu)(\pi(b)) = \pi(\pi(b)) = \pi(b) = \chi(x)$$

$$\Rightarrow (\chi \circ \pi)(x) = (\pi \circ \nu)(x) = \chi(x) = \pi(\nu(x)) = \pi \circ \nu$$

الآن بما أن ν, π إيزومورفزم من C مورفزم χ إيزومورفزم
من C إلى R التماثل - الأبيطة .

2) في أجل كل عنصر x من M ، نعرف التطبيق $\sigma_x: M^* \rightarrow R$

$$\sigma_x(f) = f(x) \quad \forall f \in M^* = \text{Hom}(M, R)$$

7. أن $\sigma_x \in M^{**} = \text{Hom}(M^*, R)$ ، أي أن σ_x هو مورفزم ، وذلك لأنه
1) $\forall f, g \in M^* \Rightarrow \sigma_x(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sigma_x(f) + \sigma_x(g)$

$$2) \forall f \in M^*, \lambda \in R \Rightarrow \sigma_x(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \sigma_x(f)$$

ولنرى أن التطبيق $\sigma: M \rightarrow M^{**}$ يعرف بالتالي: $\sigma(x) = \sigma_x$

يكون هو مورفزم .

$$1) \forall x, y \in M, \forall f \in M^* \Rightarrow (\sigma(x+y))(f) = \sigma_{(x+y)}(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \sigma_x(f) + \sigma_y(f) = (\sigma_x + \sigma_y)(f) = (\sigma(x) + \sigma(y))(f) \Rightarrow \sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$$

$$2) \forall x \in M, \lambda \in R, f \in M^* \Rightarrow (\sigma(\lambda x))(f) = \sigma_{(\lambda x)}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \sigma_x(f) = (\lambda \sigma_x)(f) = (\lambda \sigma(x))(f) \Rightarrow \sigma(\lambda x) = \lambda \sigma(x)$$

أي أن $\sigma: M \rightarrow M^{**}$ هو مورفزم .

السؤال الأول: (30 درجة) 1- ليكن M و N مودولين فوق حلقة $(R, +, \cdot)$ ، ولنرمز بـ 0 و $0'$ لصفري M و N على الترتيب، وليكن $f: M \rightarrow N$ -هومومورفيزم. إذا كان M_1 مودول جزئي من M برهن أن $f(M_1)$ مودول جزئي من N .

2- ليكن M مودل فوق حلقة $(R, +, \cdot)$ ، ولتكن S مجموعة جزئية غير خالية من M ، ولتكن $Ann_R(S) = \{\lambda \in R \mid \lambda x = 0 \quad \forall x \in S\}$. برهن أن $Ann_R(S)$ مثالية يسارية من R ، وإذا كان S مودول جزئي من M فإن $Ann_R(S)$ مثالية.

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M -مودول، وليكن N_1, N_2 مودولين جزئيين من M بحيث أن $M = N_1 \oplus N_2$. بين أن $M/N_1 \cong N_2$.

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وليكن M -مودول، ولتكن $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n \mid n \geq 2\}$ مجموعة جزئية منتبئية من M بحيث أن $M = \langle S \rangle$. بين أن المجموعة $S \setminus \{x_k\}$ مولدة لـ M ، حيث:

$$x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i x_i \quad ; \quad \lambda_i \in R \quad , \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

3- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M -مودول، وليكن M_1, M_2 مودولين جزئيين من M بحيث أن M_1, M_2 نوثرين وبحيث $M = M_1 + M_2$. بين أن M نوثري.

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وبفرض أن $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$ متتالية تامة من المودولات فوق R والهومومورفيزمات. برهن أن المتتالية:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M, A') \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(M, A) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(M, A'') \longrightarrow 0$$

الناجمة من المتتالية المفروضة تامة.

2- ليكن M مودول حر فوق حلقة واحدة R ، ولتكن S مجموعة ما. برهن أنه يمكن كتابة كل تطبيق $g: S \rightarrow M$ بشكل

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{g} & M \\ f \downarrow & \nearrow h & \\ F & & \end{array} \quad \text{حيث } h \text{ هومومورفيزم وحيد.}$$

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

علاء

السؤال الأول: [30]

1. (1) دافع أن $f(M_1) \subseteq N$ (لأن $f(0) = 0 \in N$)

$$\forall y_1, y_2 \in f(M_1) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in M_1, y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$$

$$\Rightarrow y_1 - y_2 = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) \in f(M_1) \quad \frac{5}{\in M_1}$$

$$\forall y \in f(M_1), \lambda \in R \Rightarrow \exists x \in M_1, y = f(x) \Rightarrow \lambda y = \lambda f(x)$$

$$= f(\lambda x) \in f(M_1) \quad \frac{5}{\in M_1}$$

2. 1- دافع أن $\text{Ann}_R(S') \subseteq R$ (لأن الحلقة بنجاليًا)

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \text{Ann}_R(S') \Rightarrow \lambda_1 x = 0, \lambda_2 x = 0 \quad \forall x \in S' \quad \frac{2}{\text{2}}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)x = \lambda_1 x - \lambda_2 x = 0 - 0 = 0 \quad \frac{4}{\text{4}}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \in \text{Ann}_R(S')$$

$$\forall \lambda \in \text{Ann}_R(S'), a \in R \Rightarrow \lambda x = 0 \quad \forall x \in S' \quad \frac{3}{\text{3}}$$

$$\Rightarrow (a\lambda)x = a(\lambda x) = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow a\lambda \in \text{Ann}_R(S') \quad \frac{4}{\text{4}}$$

= لبرهان أن $\text{Ann}_R(S')$ مثالية ~~بسيطة~~ بسيطة في R يكفي أن نبرهن
الخط:

$$\forall \lambda \in \text{Ann}_R(S'), a \in R \Rightarrow \lambda a \in \text{Ann}_R(S')$$

$$\forall x \in S, a \in R \Rightarrow ax \in S' \quad \frac{6}{\text{6}}$$

لدينا:

$$\forall \lambda \in \text{Ann}_R(S'), a \in R \Rightarrow \lambda x = 0 \quad \forall x \in S'$$

$$\Rightarrow (\lambda a)x = \lambda(ax) = 0 \Rightarrow \lambda a \in \text{Ann}_R(S')$$

أي أن $\text{Ann}_R(S')$ مثالية بسيطة من R وهي مثالية يسارية لئلا
وبالتالي $\text{Ann}_R(S')$ مثالية من R .

السؤال الثاني: [30]

1. لتعرف التوليف $f: N_2 \rightarrow M/N_1$ بالمكن:

$$f(x) = x + N_1 \quad \forall x \in N_2 \quad \frac{15}{(15)}$$

أثبت أن f معرف جيد لأنه:

$$\forall x_1, x_2 \in N_2 ; x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 + N_1 = x_2 + N_1 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

f هو مورفزم لأنه:

$$\forall x_1, x_2 \in N_2 \Rightarrow f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + N_1 \quad (1)$$

$$= (x_1 + N_1) + (x_2 + N_1) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$\forall x \in N_2, \lambda \in R \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda x + N_1 = \lambda(x + N_1) = \lambda f(x) \quad (2)$$

f متباين لأنه:

$$\forall x_1, x_2 \in N_2 ; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + N_1 = x_2 + N_2$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 \in N_1$$

و بما أن $x_1, x_2 \in N_2$ فإن $x_1 - x_2 \in N_2$ ، ومنه $x_1 - x_2 \in N_1 \cap N_2$ ولكن $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ لأن $M = N_1 \oplus N_2$ ، ومنه:

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

f كاسر لأنه:

$$\forall y \in M/N_1 \Rightarrow \exists x = x_1 + x_2 \in M ; y = x + N_1, x_1 \in N_1, x_2 \in N_2$$

$$\Rightarrow \exists x_2 \in N_2 ; y = x + N_1 = (x_1 + x_2) + N_1$$

$$= (x_1 + N_1) + (x_2 + N_1) = N_1 + (x_2 + N_1)$$

$$= x_2 + N_1 = f(x_2)$$

محاسنة يبيح أن f انومورفزم ، وبالتالي $M/N_1 \cong N_2$

[2] وان المجموعة $\{x_k\}$ تولد M لأنه:

$$\forall x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n v_i x_i ; v_i \in R \Rightarrow x = v_k x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n v_i x_i \quad (3)$$

$$= v_k \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i x_i \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n v_i x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (v_k \lambda_i) x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n v_i x_i$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (v_k \lambda_i + v_i) x_i$$

[3] بما أن M_2 نوثيري و $M_1 \cap M_2$ مورول جزئي منه، فإنه حسب النظرية السابقة، $M_2/(M_1 \cap M_2)$ يكون نوثيري، ولدينا:

$$M/M_1 \cong (M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2/(M_1 \cap M_2) \quad (4)$$

أي أن M/M_1 نوثيري ، وبما أن M_1 نوثيري فإنه حسب نظرية يكون M نوثيري.

السؤال الثالث:

1. ليكن أن المتتالية الأولى تامة. لدينا في العزمن f متباين g عام $Im f = Ker g$ و $g \circ f = 0$ فإن f متباين لأنه:

$$\forall \theta \in Ker f \Rightarrow f(\theta) = 0 \Rightarrow f \circ \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \quad (18)$$

وبالتالي $Ker f = \{0\}$ أي أن f متباين. وبالتالي المتتالية

$$0 \rightarrow Hom(M, A) \xrightarrow{f_*} Hom(M, A)$$

ليكن أن $Im f_* = Ker g_*$

$$\forall \theta \in Im f_* \Rightarrow \exists \theta_1 \in Hom(M, A') ; \theta = f_*(\theta_1) \Rightarrow \theta = f \circ \theta_1$$

$$g_*(\theta) = g \circ \theta = g \circ (f \circ \theta_1) = (g \circ f) \circ \theta_1 = 0 \Rightarrow \theta \in Ker g_*$$

$$\Rightarrow Im f_* \subseteq Ker g_*$$

$$\forall \theta \in Ker g_* \Rightarrow g_*(\theta) = 0 \Rightarrow g \circ \theta = 0 \Rightarrow (g \circ \theta)(x) = 0 \quad \forall x \in M$$

$$\Rightarrow g(\theta(x)) = 0 \Rightarrow \theta(x) \in Ker g = Im f$$

$$\Rightarrow \exists a' \in A' ; \theta(x) = f(a')$$

وبما أن f متباين فإن a' وحيد حيث $\theta(x) = f(a')$

$$f(a') = f(a'') \Rightarrow \theta(x) = f(a'') \Rightarrow a' = a''$$

ولنفرض التطبيق $\theta_1: M \rightarrow A'$ حيث $\theta_1(x) = a'$ فإن

$$\theta(x) = f(a') = f(\theta_1(x)) = (f \circ \theta_1)(x) \Rightarrow \theta = f \circ \theta_1$$

$$\Rightarrow \theta = f_*(\theta_1) \Rightarrow \theta \in Im f_* \Rightarrow Ker g_* \subseteq Im f_*$$

وفيه $Im f_* = Ker g_*$ وبالتالي فإن المتتالية

$$Hom(M, A') \xrightarrow{f_*} Hom(M, A) \xrightarrow{g_*} Hom(M, A'')$$

المتتالية العزمنة تامة

2. ليكن F المردون الحر على K ، ونعرف التطبيق $h: F \rightarrow M$ بالتالي

$$h(s) = \sum_{s \in S} \theta(s) g(s)$$

والتطبيق $f: S \rightarrow F$ بالتالي $f(s) = f_s$ فإن h معرف جيد لأنه:

$$\forall \theta, \theta' \in F ; \theta = \theta' \Rightarrow \theta(s) = \theta'(s) \quad \forall s \in S$$

$$\Rightarrow \sum_{s \in S} \theta(s) g(s) = \sum_{s \in S} \theta'(s) g(s) \Rightarrow h(\theta) = h(\theta')$$

ان h هو مصور ضم لأنه

$$1) \forall \theta, \theta' \in F \Rightarrow h(\theta + \theta') = \sum_{s \in S'} (\theta + \theta')(s) g(s) = \sum_{s \in S'} (\theta(s) + \theta'(s)) g(s) \\ = \sum_{s \in S'} \theta(s) g(s) + \sum_{s \in S'} \theta'(s) g(s) = h(\theta) + h(\theta')$$

$$2) \forall \theta \in F, \lambda \in R \Rightarrow h(\lambda \theta) = \sum_{s \in S'} (\lambda \theta)(s) g(s) \\ = \sum_{s \in S'} \lambda \theta(s) g(s) = \lambda \left(\sum_{s \in S'} \theta(s) g(s) \right) = \lambda h(\theta)$$

كما أن العكس يبادلي لأنه

$$\forall s \in S \Rightarrow (h \circ f)(s) = h(f(s)) = h(f_s) = \sum_{x \in S'} f_s(x) g(x) \\ = g(s) \Rightarrow h \circ f = g$$

كما أن h وحيد لأنه إذا كان $h' : F \rightarrow M$ هو مصور ضم آخر $h' \circ f = g$ فإنه

$$h'(\theta) = h' \left(\sum_{s \in S'} \theta(s) f_s \right) = \sum_{s \in S'} \theta(s) h'(f_s) \\ = \sum_{s \in S'} \theta(s) h'(f(s)) = \sum_{s \in S'} \theta(s) (h' \circ f)(s) \\ = \sum_{s \in S'} \theta(s) g(s) = h(\theta) \Rightarrow h' = h$$

وبالتالي h وحيد

الجمهورية العربية السورية	امتحان بنى جبرية 3	المدة ساعتان
جامعة طرطوس	لطلاب السنة الثالثة- رياضيات	الدرجة العظمى: 90 درجة
كلية العلوم	الدورة الفصلية الأولى	اسم الطالب:

السؤال الأول: (25 درجة) ليكن M و N مودولين فوق حلقة $(R, +, \cdot)$ ، وليكن N_1, N_2 مودولين جزئيين من N ، وليكن M_1 مودول جزئي من M ، ولنفرض أن $f: N \rightarrow M$ -هومومورفيزم. برهن أن:

أ- $N_1 + N_2$ مودول جزئي من N .

$$\text{ب- } f(N_2 \cap f^{-1}(M_1)) = f(N_2) \cap M_1$$

السؤال الثاني: (35 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M, M' مودولين فوق R ، وليكن $f: M \rightarrow M'$ -هومومورفيزم. برهن أن:

$$M/\ker f \cong f(M)$$

ثم استنتج أنه إذا كان $f': R^2 \rightarrow R$ -هومومورفيزم معرف بالشكل $f'(x_1, x_2) = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in R$ فإن $R \cong \text{coim} f'$.

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وليكن M, N مودولين فوق R ، ولتكن $\{x_1, \dots, x_n\}$ ، $\{y_1, \dots, y_n\}$ قاعدتين لـ M و N على الترتيب. بين أنه يوجد R -ايزومورفيزم وحيد للمودل M في المودول N بحيث يكون $f(x_i) = y_i$ ($i = 1, \dots, n$).

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وبفرض أن المخطط التالي من المودولات فوق R

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & p \downarrow & q \downarrow & r \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

والهومومورفيزمات تبادلي، وأن سطريه متتاليتان تامتان.

أ- برهن أنه إذا كان r, p, g ايزومورفيزمات فإن q يكون ايزومورفيزم.

ب- إذا كان M مودول فوق R ، ولناخذ المتتالية $\text{Hom}(M, A) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(M, B) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(M, C)$ برهن أن $\text{Im } f_* \subseteq \ker g_*$.

2- ليكن M مودول فوق حلقة تبديلية واحدة $(R, +, \cdot)$. بين أنه يوجد R -هومومورفيزم $\theta: M \rightarrow M^{**}$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2022-2-20

السؤال الأول: [25]

1. (أ) ولنفرض أن $M_1 + M_2 \subseteq M$ و $0 \in M_1 + M_2$ لأن $0 \in M_1 + M_2$

$$\forall x, y \in M_1 + M_2 \Rightarrow x = x_1 + x_2 \text{ و } y = y_1 + y_2 ; \quad x_1, y_1 \in M_1 \text{ و } x_2, y_2 \in M_2$$

$$\Rightarrow x - y = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \\ = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \in M_1 + M_2$$

$\begin{matrix} \xrightarrow{M_1} & & \xrightarrow{M_2} \end{matrix}$

$$\forall x \in M_1 + M_2, \lambda \in R \Rightarrow x = x_1 + x_2 ; x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$$

$$\Rightarrow \lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in M_1 + M_2$$

$\begin{matrix} \xrightarrow{M_1} & & \xrightarrow{M_2} \end{matrix}$

مما سبق نجد أن $M_1 + M_2$ مودول جزئي في M .

$$\forall y \in f(M_2 \cap f^{-1}(M_1)) \Rightarrow \exists x \in M_2 \cap f^{-1}(M_1) ; y = f(x)$$

$$\Rightarrow x \in M_2 \text{ و } x \in f^{-1}(M_1) \Rightarrow f(x) \in f(M_2) \text{ و } f(x) \in M_1$$

$$\Rightarrow y \in f(M_2) \cap M_1 \Rightarrow f(M_2 \cap f^{-1}(M_1)) \subseteq f(M_2) \cap M_1$$

وكذلك فإن:

$$\forall y \in f(M_2) \cap M_1 \Rightarrow y \in f(M_2) \text{ و } y \in M_1 \Rightarrow \exists x \in M_2 ; y = f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) \in M_1 \Rightarrow x \in M_2 \text{ و } x \in f^{-1}(M_1)$$

$$\Rightarrow x \in M_2 \cap f^{-1}(M_1) \Rightarrow y = f(x) \in f(M_2 \cap f^{-1}(M_1))$$

$$\Rightarrow f(M_2) \cap M_1 \subseteq f(M_2 \cap f^{-1}(M_1)) \quad (**)$$

$$f(M_2 \cap f^{-1}(M_1)) = f(M_2) \cap M_1 \text{ نجد أن } (*) \text{ و } (**) \text{ معاً}$$

السؤال الثاني: [35]

1. لنأخذ التطبيق $f: M \rightarrow f(M)$ المعرف بـ $f(x) = x + \text{Ker } f$

$$f(x + \text{Ker } f) = f(x) \quad \forall x \in M$$

إن f معرف جيداً لأنه:

$$\forall x_1, x_2 \in M ; x_1 + \text{Ker } f = x_2 + \text{Ker } f \Rightarrow x_1 - x_2 \in \text{Ker } f$$

$$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow f(x_1 + \text{Ker } f) = f(x_2 + \text{Ker } f)$$

3

وهذا يثبت أن f معرف جيداً.

$$\forall x_1, x_2 \in M ; f(x_1 + \text{Ker } f) = f(x_2 + \text{Ker } f)$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0' \Rightarrow x_1 - x_2 \in \text{Ker } f$$

$$\Rightarrow x_1 + \text{Ker } f = x_2 + \text{Ker } f$$

ϕ كامرئانه:

$$\forall y \in f(M) \Rightarrow \exists x \in M ; y = f(x) \Rightarrow \exists x + \text{Ker } f \in M / \text{Ker } f$$

$$y = \phi(x + \text{Ker } f)$$

ϕ همومورفيزم لانه:

$$1) \forall x_1, x_2 \in M \Rightarrow \phi((x_1 + \text{Ker } f) + (x_2 + \text{Ker } f)) = \phi((x_1 + x_2) + \text{Ker } f)$$

$$= f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \phi(x_1 + \text{Ker } f) + \phi(x_2 + \text{Ker } f)$$

$$2) \forall x \in M, \lambda \in R \Rightarrow \phi(\lambda(x + \text{Ker } f)) = \phi(\lambda x + \text{Ker } f)$$

$$= f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \phi(x + \text{Ker } f)$$

مما يثبت ان ϕ ايزومورفيزم، وبالتالي

$$M / \text{Ker } f \cong f(M)$$

و ان f' كامرئانه:

$$\forall x \in R \Rightarrow \exists (0, x) \in R^2 ; f'(0, x) = x$$

وبالتالي حسب النظرية السابقة

$$R^2 / \text{Ker } f' \cong f'(R^2) = R \Rightarrow \text{coim } f' \cong R$$

2] بما ان $\{x_1, \dots, x_n\}$ قاعده M فان كل عنصر x من M يكتب

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i ; \lambda_i \in R$$

بصورة وحيدة بالتالي

ونعرف التطبيق f بالتالي:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$$

ان f معرف جيداً، ويمكن f همومورفيزم لانه

$$1) \forall x, x' \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i ; x' = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i ; \lambda_i, \mu_i \in R$$

$$\Rightarrow f(x + x') = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) y_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i + \sum_{i=1}^n \mu_i y_i = f(x) + f(x')$$

$$2) \forall x \in M, \lambda \in R \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i ; \lambda_i \in R$$

$$\Rightarrow f(\lambda x) = f\left(\lambda \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)\right) = f\left(\sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i) x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n (\lambda \lambda_i) y_i = \lambda \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\right) = \lambda f(x)$$

f متباين لانه:

$$\forall x, x' \in M ; f(x) = f(x') ; x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i ; x' = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = \sum_{i=1}^n \mu_i y_i \Rightarrow \mu_i = \lambda_i \quad ; \quad i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \Rightarrow x = x_1$$

فخاصة لأنه : $\forall y \in N \Rightarrow y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$ و $\lambda_i \in R \Rightarrow \exists x \in M ; x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$

$$\Rightarrow f(x) = y$$

صاحبة جانب f - R - انومورفزم . وهو هو لأنه :
 انما كان $g: M \rightarrow N$ انومورفزم آخر بـ $(i=1, \dots, n)$ $g(x_i) = y_i$

جانب : $\forall x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in R$

جانب : $g(x) = g(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = f(x)$

$$\Rightarrow \sum f = g$$

البيان الثاني : [30]

1.1) لتأخذ المخطط :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{\theta} & 0 \\ p \downarrow & & q \downarrow & & r \downarrow & & \downarrow \tau \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{\pi} & \text{coker } g' \end{array}$$

حيث π القبر القائي ، τ الاحتواء القائي ، θ الهمومورفزم الصفرية .

جانب هنا المخطط تبادلي وسطحي متاليتان تامتان .

والمنح أن سطحي المخطط متاليتان تامتين ، وأن τ هو همومورفزم ولينين

أن المربع البيني تبادلي ، أي لينين أن $\tau \theta = \pi \circ r$

5 $\forall x \in C$, $x = g(b)$ $\Rightarrow$ وبأن g غامر $\Rightarrow$ $\exists b \in B$ $\Rightarrow$ $x = g(b)$ $\Rightarrow$ τ يكون

$$(\tau \theta)(x) = \tau(\theta(x)) = \tau(0) = 0$$

$$(\pi \circ r)(x) = \pi(r(x)) = \pi(r(g(b))) = (\pi \circ r \circ g)(b)$$

$$= \pi \circ (g' \circ q)(b) = (\pi \circ g')(q(b)) = 0$$

$$\pi \circ g' = 0 \quad \text{لأن}$$

$$\Rightarrow (\chi \circ \theta)(x) = 1 \pi \circ r(x) = 0 = 0 - \pi \circ \chi$$

وبالتالي بان f و r ايسومورفزم و χ هومومورفزم فان q يكون ايسومورفزم
 اعب نظرية التباديل - الأربعة .

$$\forall \theta \in \text{Im } f_{\star} \Rightarrow \exists \theta_1 \in \text{Hom}(M, A') ; \theta = f_{\star}(\theta_1) \quad (c)$$

$$\Rightarrow \theta = f \circ \theta_1$$

$$g_{\star}(\theta) = g \circ \theta = g \circ (f \circ \theta_1) = (g \circ f)(\theta_1) = 0 \quad \text{لأن } g \circ f = 0$$

$$\Rightarrow \theta \in \text{Ker } g_{\star} \Rightarrow \text{Im } f_{\star} \subseteq \text{Ker } g_{\star}$$

[2] من أجل كل x في M ، نعرف التطبيق :

$$\sigma_x : M^{\star} \longrightarrow R$$

$$\sigma_x(f) = f(x) \quad \forall f \in M^{\star} = \text{Hom}(M, R)$$

1) $\sigma_x \in M^{\star\star} = \text{Hom}(M^{\star}, R)$ أي أن σ_x هومومورفزم لأنه :

$$1) \forall f, g \in M^{\star} \Rightarrow \sigma_x(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sigma_x(f) + \sigma_x(g)$$

$$2) \forall f \in M^{\star}, \lambda \in R \Rightarrow \sigma_x(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \sigma_x(f)$$

ولنرى أن التطبيق $\sigma : M \longrightarrow M^{\star\star}$ المعرف بالمكان

$$\sigma(x) = \sigma_x \quad \text{يكون هومومورفزم .}$$

$$1) \forall x, y \in M, f \in M^{\star} \Rightarrow (\sigma(x+y))(f) = \sigma_{x+y}(f)$$

$$= f(x+y) = f(x) + f(y) = \sigma_x(f) + \sigma_y(f)$$

$$= (\sigma_x + \sigma_y)(f) = (\sigma(x) + \sigma(y))(f)$$

$$\Rightarrow \sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$$

$$2) \forall x \in M, \lambda \in R, f \in M^{\star} \Rightarrow (\sigma(\lambda x))(f) = \sigma_{\lambda x}(f)$$

$$= f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \sigma_x(f)$$

$$= \lambda \sigma(x)(f) \Rightarrow \sigma(\lambda x) = \lambda \sigma(x)$$

أي أن $\sigma : M \longrightarrow M^{\star\star}$ هومومورفزم .

السؤال الأول: (25 درجة) 1- ليكن M و N مودلين فوق حلقة واحدة $(R, +, \cdot)$ ، وليكن $f: M \rightarrow N$ -هومومورفيزم،

وليكن M_1 مودول جزئي من M . برهن أن $f^{-1}(f(M_1)) = M_1 + \ker f$.

2- ليكن M مودل فوق حلقة $(R, +, \cdot)$ ، ولتكن N_1, N_2, N_3 مودولات جزئية من M . برهن أن:

$$N_1 + (N_2 \cap N_3) = (N_1 + N_2) \cap (N_1 + N_3)$$

السؤال الثاني: (35 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M -مودول، ولتكن $M_1, \dots, M_n$ مودولات جزئية من

M بحيث أن $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ ، ولتكن $N_1, \dots, N_n$ مودولات جزئية من $M_1, \dots, M_n$ على الترتيب، وليكن

$N = N_1 + \dots + N_n$. إذا كان $f: M \rightarrow M/N$ -هومومورفيزم معرف بالشكل $f(x) = x + N$. بين أن:

$$M/N = f(M_1) \oplus \dots \oplus f(M_n)$$

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M, M' مودلين فوق R ، وليكن $f: M \rightarrow M'$ -هومومورفيزم. برهن أن:

$$M/\ker f \cong f(M)$$

السؤال الثالث: (30 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، ويفرض أن $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \rightarrow 0$

متتالية تامة من المودولات فوق R والهومومورفيزمات. برهن أن المتتالية:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, A') \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(M, A) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(M, A'') \rightarrow 0$$

الناتجة من المتتالية المفروضة تامة.

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة تبديلية واحدة، وليكن M مودول حر فوق R بقاعدة منتهية $\{s_1, \dots, s_n\}$. بين أن M^* مودول

حر فوق R ، والمجموعة $\{s_1^*, \dots, s_n^*\}$ ، حيث:

$$s_i^*(s_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

تكون قاعدة منتهية لـ M^* .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

عل

2021-7-28

$$\forall x \in f^{-1}(f(M_1)) \Rightarrow f(x) \in f(M_1)$$

$$\Rightarrow \exists x' \in M_1 \text{ ; } f(x) = f(x') \Rightarrow f(x - x') = 0$$

$$\Rightarrow x - x' \in \text{Ker } f \Rightarrow x \in M_1 + \text{Ker } f \quad b$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(M_1)) \subseteq M_1 + \text{Ker } f \quad \dots (*)$$

وفاية ثانية:

$$\forall x \in M_1 \Rightarrow f(x) \in f(M_1) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(M_1))$$

$$\Rightarrow M_1 \subseteq f^{-1}(f(M_1))$$

ولنا $\{0_N\} \subseteq f(M_1)$ وفية:

$$f^{-1}(\{0_N\}) \subseteq f^{-1}(f(M_1)) \Rightarrow \text{Ker } f \subseteq f^{-1}(f(M_1))$$

وبالتالي كان:

$$M_1 + \text{Ker } f \subseteq f^{-1}(f(M_1)) \quad \dots (**)$$

$$f^{-1}(f(M_1)) = M_1 + \text{Ker } f \quad \text{من } (*) \text{ و } (**)$$

$$\forall x \in N_1 + (N_2 \cap N_3) \Rightarrow x = x_1 + x_2 \text{ ; } x_1 \in N_1, x_2 \in N_2 \cap N_3$$

$$\Rightarrow x_1 \in N_1, x_2 \in N_2 \text{ و } x_2 \in N_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + x_2 \in N_1 + N_2 \\ x = x_1 + x_2 \in N_1 + N_3 \end{cases} \quad b$$

$$\Rightarrow x \in (N_1 + N_2) \cap (N_1 + N_3) \Rightarrow N_1 + (N_2 \cap N_3) \subseteq (N_1 + N_2) \cap (N_1 + N_3)$$

ولنا:

$$\forall x \in (N_1 + N_2) \cap (N_1 + N_3) \Rightarrow x \in N_1 + N_2 \text{ و } x \in N_1 + N_3$$

$$\Rightarrow x = x_1 + x_2 \text{ ; } x_1 \in N_1 \text{ و } x_2 \in N_2$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 \in N_1 + N_3 \Rightarrow x_2 \in N_3 \Rightarrow x_2 \in N_2 \cap N_3$$

$$\Rightarrow x = x_1 + x_2 \in N_1 + (N_2 \cap N_3)$$

$$\Rightarrow (N_1 + N_2) \cap (N_1 + N_3) \subseteq N_1 + (N_2 \cap N_3) \quad \dots (***)$$

من (*) و (***) نتج النتيجة

سواء ان كانت

$$\{M_i\}_{i=1}^n \subseteq M/N \quad \text{فإن} \quad \sum_{i=1}^n f(M_i) \subseteq M/N$$

$$\forall x+N \in M/N \Rightarrow x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n x_i \quad ; \quad x_i \in M_i \quad ; \quad i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow x+N = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + N = \sum_{i=1}^n (x_i + N) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \in \sum_{i=1}^n f(M_i)$$

$$\Rightarrow M/N \subseteq \sum_{i=1}^n f(M_i)$$

وهذه هي النتيجة $M/N = \sum_{i=1}^n f(M_i)$. البرهان أن $f(M_1), \dots, f(M_n)$ مستقلة

$$\sum_{i=1}^n f(z_i) = N \quad ; \quad z_i \in M_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (z_i + N) = N \Rightarrow \sum_{i=1}^n z_i + M = N$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n z_i \in N \Rightarrow \sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n x_i \quad ; \quad x_i \in N_i$$

$$N_i \subseteq M_i \Rightarrow x_i \in M_i$$

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$$

$$z_i = x_i \quad ; \quad i=1, 2, \dots, n \Rightarrow f(z_i) = f(x_i) = x_i + N = N \quad (x_i \in N_i)$$

$$1/N = f(M_1) \oplus \dots \oplus f(M_n) \quad \text{وهذه هي النتيجة} \quad f(M_1), \dots, f(M_n)$$

$$\varphi: M/\ker f \rightarrow f(M) \quad \text{التطبيق} \quad \varphi(x + \ker f) = f(x)$$

$$\varphi(x + \ker f) = f(x) \quad \forall x \in M$$

ان φ هو تطبيق واحد

$$\forall x_1, x_2 \in M \quad x_1 + \ker f = x_2 + \ker f \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f$$

$$\Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0' \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow \varphi(x_1 + \ker f) = \varphi(x_2 + \ker f)$$

البيان لان

$$\forall x_1, x_2 \in M \quad \varphi(x_1 + \ker f) = \varphi(x_2 + \ker f)$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0'$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f \Rightarrow x_1 + \ker f = x_2 + \ker f$$

$$\theta(x) = f(a') = f(\theta_1(x)) = (f \circ \theta_1)(x) \Rightarrow \theta = f \circ \theta_1$$

$$\Rightarrow \theta = f_A(\theta_1) \Rightarrow \theta \in \text{Im } f_A \Rightarrow \text{Ken } g_A \subseteq \text{Im } f_A$$

ومن ثم $\text{Im } f_A = \text{Ken } g_A$ ، وبالتالي فإن التالي:

$$\text{Hom}(M, A') \xrightarrow{f_A} \text{Hom}(M, A) \xrightarrow{g_A} \text{Hom}(M, A'')$$

2- كل عنصر x في M يكتب بصورة وحيدة بالشكل:

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j s_j \quad ; \alpha_j \in R$$

$$\Rightarrow s_i^*(x) = s_i^*\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j s_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j s_i^*(s_j) = \alpha_i$$

- إن المجموعة $\{s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*\}$ مولدة لـ M^* لأنه:

$$\forall f \in M^* \quad , \quad f: M \longrightarrow R$$

$$\Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(s_i) = \sum_{i=1}^n s_i^*(x) f(s_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n f(s_i) s_i^*(x) = \left(\sum_{i=1}^n f(s_i) s_i^*\right)(x)$$

$$\Rightarrow f = \sum_{i=1}^n f(s_i) s_i^*$$

أي أن f تركيب عملي لعناصر $\{s_1^*, \dots, s_n^*\}$

- إن المجموعة $\{s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*\}$ مستقلة فطرية لأنه:

$$\text{إذا كان } \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i^* = 0 \quad , \quad \text{فإن}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i s_i^*\right)(s_j) = 0 \quad ; \quad j=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i^*(s_j) = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad ; \quad i=1, \dots, n$$

• بالتالي فإن المجموعة $\{s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*\}$ قاعدة فطرية لـ M^* ، و M^*

هو دالة هر فوق R .

السؤال الأول: (25 درجة) 1- ليكن M و N مودولين فوق حلقة $(R, +, \cdot)$ ، وليكن $f: M \rightarrow N$ هومومورفيزم، وليكن N_1 مودول جزئي من N . برهن أن $f(f^{-1}(N_1)) = N_1 \cap \text{Im } f$.

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M مودول، وليكن N مجموعة جزئية من M ، ولتكن A مثالية يسارية من الحلقة R . برهن أن المجموعة:

$$AN = \{x \in M \mid x = \sum_{i=1}^n a_i x_i ; a_i \in A, x_i \in N, n \in \mathbb{Z}^+\}$$

تشكل مودول جزئي من M .

السؤال الثاني: (35 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ما، وليكن M مودول، وليكن N_1, N_2 مودولين جزئيين من M بحيث أن $M = N_1 \oplus N_2$. بين أن $M/N_1 \cong N_2$.

2- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وليكن M, M' مودولين فوق R ، ولتكن $\{x'_1, \dots, x'_n\}$ قاعدة لـ M' ، وليكن $f: M \rightarrow M'$ - ابيومورفيزم. بين أنه يوجد مودول جزئي حر N من M بحيث يكون $M = N \oplus \ker f$.

السؤال الثالث: (20 درجة) 1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة واحدة، وبفرض أن المخطط التالي من المودولات فوق R

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ p \downarrow & & r \downarrow & & q \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

والهومومورفيزمات تبادلي:

وأن سطره متتاليتان تامتان. برهن أنه إذا كان r, p, f' مونومورفيزمات فإن q يكون مونومورفيزم.

2- ليكن M مودول فوق حلقة تبديلية واحدة $(R, +, \cdot)$ ، وليكن $\theta: M \rightarrow M^{**}$ - هومومورفيزم معرف بالشكل $\theta_x(f) = f(x) \quad \forall f \in M^*$ ، وإذا كان M مودول حر فوق R فبين أن θ يكون مونومورفيزم.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

عل

السؤال الأول: [30]

بن جمة (3)

جدة ثانية، صيا

$$\forall y \in f(f^{-1}(N_1)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(N_1) ; y = f(x)$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in N_1 \Rightarrow f(f^{-1}(N_1)) \subseteq N_1$$

وكذلك فإن

$$f^{-1}(M) \subseteq M \Rightarrow f(f^{-1}(N_1)) \subseteq f(M) = \text{Im } f$$

وفيه:

$$f(f^{-1}(N_1)) \subseteq M_1 \cap \text{Im } f \quad (*)$$

ومن جهة ثانية فإن

$$\forall y \in N_1 \cap \text{Im } f \Rightarrow y \in N_1 \text{ و } y \in \text{Im } f = f(M)$$

$$\Rightarrow \exists x \in M ; y = f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) \in N_1 \Rightarrow x \in f^{-1}(N_1)$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in f(f^{-1}(N_1))$$

$$\Rightarrow N_1 \cap \text{Im } f \subseteq f(f^{-1}(N_1)) \quad (**)$$

في (*) و (**) بداية البرهان جمة.

$$2. \text{ اضع أن } AN \subseteq M \text{ (لأن } 0_M \in AN \text{)} \quad (1)$$

$$\forall x_1, x_2 \in AN \Rightarrow x_1 = \sum_{i=1}^n a_i x_i, x_2 = \sum_{j=1}^m a_j x_j \quad (2)$$

$$6. a_i, a_j \in A, x_i, x_j \in N, n, m \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{حيث}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{j=1}^m a_j x_j = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{j=1}^m (-a_j) x_j \in AN$$

$$\forall x \in AN, \lambda \in R \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n a_i x_i ; a_i \in A, x_i \in N, n \in \mathbb{Z}^+ \quad (3)$$

$$6. \Rightarrow \lambda x = \lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_i) x_i \in AN$$

$\in A$ لأن A مثالية ياركا

صاحبة نتيج أن AN مودول جزئي في M .

السؤال الثاني: [40]

$$1. \text{ لتعرف انطبق } M/N_1 \text{ على } f: N_2 \rightarrow M/N_1 \text{ بالمثل}$$

$$f(x) = x + N_1$$

$$\forall x \in N_2$$

فان f معرف جيداً لأنه :
 $\forall x_1, x_2 \in N_2 ; x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 + N_1 = x_2 + N_1 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

f هو مورفزم لأنه

$$\forall x_1, x_2 \in N_2 \Rightarrow f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + N_1 = (x_1 + N_1) + (x_2 + N_1) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$\forall x \in N_2, \lambda \in R \Rightarrow f(\lambda x) = (\lambda x) + N_1 = \lambda(x + N_1) = \lambda f(x)$$

f قياسي لأنه :
 $\forall x_1, x_2 \in N ; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + N_1 = x_2 + N_1$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 \in N_1$$

وبما أن $x_1, x_2 \in N_2$ فإن $x_1 - x_2 \in N_2$ ، ومنه :

$$x_1 - x_2 \in N_1 \cap N_2$$

ولكن $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ لأن $M = N_1 \oplus N_2$ ، ومنه

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

f عامر لأنه :

$$\forall y \in M/N_1 \Rightarrow \exists x = x_1 + x_2 \in M \text{ ، } y = x + N_1, x_1 \in N_1, x_2 \in N_2$$

$$\Rightarrow \exists x_2 \in N_2, y = x + N_1 = (x_1 + x_2) + N_1$$

$$= (x_1 + N_1) + (x_2 + N_1) = N_1 + (x_2 + N_1)$$

$$= x_2 + N_1 = f(x_2)$$

بحسب ما سبق أن f ايزومورفزم ، وبالتالي $M/N_1 \cong N_2$

2. إن التطبيقة $M \rightarrow M'$: f عامر من العنصرين وبالتالي من أجل

العناصر $x'_1, \dots, x'_n$ من M' توجد عناصر $x_1, \dots, x_n$ من M فيه

$$f(x_i) = x'_i \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

ليكن N هو المولد الجزئي من M المولد بالمجموعة $\{x_1, \dots, x_n\}$. وهذه

المجموعة متقلة خطياً لأنه إذا كان :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \quad ; \quad \lambda_i \in R$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = f(0)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x'_i = 0$$

وبما أن $x'_1, \dots, x'_n$ قاعدة لـ M' فهي متقلة خطياً ، وبالتالي $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

أي أن المجموعة $\{x_1, \dots, x_n\}$ قاعدة لـ N ، وبالتالي N مولد جزئي

من M ، ويكون :

$$\forall x \in M \Rightarrow f(x) \in M' \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i' ; \lambda_i \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)$$

$$\Rightarrow f\left(x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = 0' \Rightarrow x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \text{Ker } f$$

$$\Rightarrow x \in M + \text{Ker } f \Rightarrow M \subseteq N + \text{Ker } f \Rightarrow M = N + \text{Ker } f$$

حالة:

$$y \in N \cap \text{Ker } f \Rightarrow y \in N \text{ و } y \in \text{Ker } f$$

$$\Rightarrow y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i ; \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ و } f(y) = 0'$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = 0' \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = 0'$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i' = 0' \Rightarrow \lambda_i = 0 ; i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow y = 0$$

$$M = N \oplus \text{Ker } f \text{ ، و } N \cap \text{Ker } f = \{0\}$$

السؤال الثالث:

1/ نأخذ الخطط

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{\gamma} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow \theta & & \downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow r \\ 0 & \xrightarrow{\gamma} & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

حيث θ التماثل القوي، θ هو مورفزم المهيمن، γ الاحتواء القوي
فإن هذا الخطط تبادل ومرتبة متساوية
وأنه أن خطط متساوية، وأن θ هو مورفزم، ولين أن
الترتيب التبادلي، أي لنين أن

$$P \circ \gamma = \gamma \circ \theta$$

$$\forall x \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x) = 0$$

$$(\gamma \circ \theta)(x) = \gamma(\theta(x)) = \gamma(0) = 0$$

$$(P \circ \gamma)(x) = P(\gamma(x)) = P(0) = 0$$

$$f'(\gamma(x)) = (f' \circ \gamma)(x) = (q \circ f)(x) = q(f(x)) = q(0) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma(x) \in \text{Ker } f'$$

ولكن $\text{Ker } f' = \{0\}$ ، ف $\gamma(x) = 0$ ، وبذلك $P(x) = 0$ ، وبذلك

$$(\gamma \circ \theta)(x) = (P \circ \gamma)(x) = 0 \Rightarrow \gamma \circ \theta = P \circ \gamma$$

فما إذا كان P و r مودور في $\mathcal{R}$ و $\mathcal{H}$ أي مودور في $\mathcal{R}$ فإن q مودور في $\mathcal{R}$
 وأيضاً (ج) في نظرية القسمة بالـ $\mathcal{R}$ الأربعة ١

لأن $\mathcal{R}$ قاعدة ط للمودول M ، فإن كل عنصر x من M يكتب بالـ

$$x = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n \quad ; \quad s_i \in \mathcal{S}, \alpha_i \in \mathcal{R}$$

فإن $\mathcal{H}$ متباين لأنه

$$\forall x \in \text{Ker } \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H}(x) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}_x = 0 \Rightarrow \mathcal{H}_x(f) = 0 \quad \forall f \in M^*$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j s_j\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_j f(s_j) = 0$$

والنتيجة من أجل $f = s_i^*$ ($i=1, \dots, n$) عناصر ثبوت القاعدة $\mathcal{S}$ ، فإن

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j s_j^*(s_j) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i = \sum_{i=1}^n 0 s_i = 0 \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{H} = \{0\}$$

$\Rightarrow \mathcal{H}$ متباين

وإذاً $\mathcal{H}$ هو مودور في $\mathcal{R}$ و $\mathcal{H}$ مودور في $\mathcal{R}$