ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

مكتبة A to Z للخدمات الجامعية

كلية **العلوم**

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

اسئلة دورات محلولة

نظرية الاحتمالات

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم تصحيح لمقرر نظرية الاحتمالات
س2 رياضيات
امتحان الدورة الفصلية الأولى 2024-2025

السؤال الأول: [1] حسب صيغة بيز الأولى: A: يرمز لحدث كون المنتج معيب:

3 $P(A) = P(F_1)\,P(A|F_1) + P(F_2).\,P(A|F_2) + P(F_3).\,P(A|F_3)$

3 $= \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{100} + \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{100} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100} = 0.021$ 1

[2] حسب صيغة بيز الثانية: وكون F_1, F_2 أحداث مستقلة إذاً:

$P[(F_1 \cup F_2) \cap A] = P[(F_1 \cap A) \cup (F_2 \cap A)] = P(F_1 \cap A) + P(F_2 \cap A)$

إذاً

$P[(F_1 \cup F_2)|A] = \frac{P(F_1 \cap A) + P(F_2 \cap A)}{P(A)}$ 3

4 $= \left[\frac{5}{100}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2}\right] \Big/ \frac{21}{1000} = \frac{15}{21} = 0.714$ 1

السؤال الثاني:

$X = \{0,1,2,3\}$

$P(X=0) = \frac{C(6,3).\,\cancel{[illegible]}}{C(9,3)} = \frac{20}{84}$

$P(X=1) = \frac{C(6,2).\,C(3,1)}{C(9,3)} = \frac{45}{84}$ 5

$P(X=2) = \frac{C(6,1).\,C(3,2)}{C(9,3)} = \frac{18}{84}$

$P(X=3) = \frac{C(3,3)}{C(9,3)} = \frac{1}{84}$

X	0	1	2	3
$f(x)$	20/84	45/84	18/84	1/84

دالة التوزيع التراكمي

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \; x < 0 \\ 20/84 & ; \; 0 \le x < 1 \\ 65/84 & ; \; 1 \le x < 2 \\ 83/84 & ; \; 2 \le x < 3 \\ 1 & ; \; x \ge 3 \end{cases}$$ 3

$$E(X) = \sum x \cdot f(x) = 1$$ 2

$$E(X^2) = \sum x^2 \cdot f(x) = \frac{126}{84}$$ 2

$$\sigma^2 = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{126-84}{84} = \frac{42}{84}$$

3 $$P(2 \le X \le 5) = P(x=2) + P(x=3) = \frac{19}{84}$$

السؤال الثالث:

1 $$f_1(x) = \sum_{y=0}^{2} f(x,y) = \frac{6x+3}{84}$$ 4

$$f_2(x) = \sum_{x=0}^{3} f(x,y) = \frac{4y+12}{84}$$ 4

2 نلاحظ أن:

$$f(1,2) = \frac{4}{84}$$

$$f_1(1) = \frac{9}{84} \; , \; f_2(2) = \frac{20}{84}$$

5 $$f(1,2) \ne f_1(1) \cdot f_2(2)$$

وبالتالي X, Y غير مستقلين عشوائياً.

3 $$g_1(x|y=1) = \frac{f(x,y=1)}{f_2(1)} = \frac{2x+1}{16}$$ 3

$$g_2(y|x=0) = \frac{f(x=0,y)}{f_1(0)} = \frac{y}{3}$$ 3

$E(X|y=1) = \sum x\, g_1(x|y=1) = \frac{34}{16}$ $\boxed{4}$

$E(X^2|y=1) = \sum x^2 g_1(x|y=1) = \frac{86}{16}$ 3

$\mathrm{Var}(X|y=1) = E(X^2|y=1) - \{E(X|y=1)\}^2$

$= \frac{86}{16} - \frac{(34)^2}{(16)^2} =$ 3

السؤال الرابع

5 $f_X(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2};\ x \in]0,2[$ $\boxed{1}$

$f_Y(y) = \theta e^{-\theta y} = (0.5)\, e^{(-0.5)y};\ 0 < y < \infty$

$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}y}; & x \in]0,2[,\ y > 0 \\ 0; & \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$ 6

$\boxed{2}$

$P(0 < X < \frac{1}{2},\ y > 2)$

4 $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_2^{\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}y}\, dx\, dy = \frac{1}{4e}$ 3

$\boxed{3}$

$E(X.Y) = E(X) \cdot E(Y) = \frac{2+0}{2} \cdot \frac{1}{0.5}$ 2

4 $= (1)(2) = 2$ 2

السؤال الخامس :

$$y = g(x) = 5x + 3$$

$$f_y(y) = f_x\left(g^{-1}(y)\right) \left| \frac{d\left[g^{-1}(y)\right]}{dy} \right|$$ 5

3 $$= \begin{cases} \dfrac{\frac{y-3}{5} + 3}{10} \cdot \dfrac{1}{5} & ; \quad 8 < y < 18 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

2 $$= \begin{cases} \dfrac{y+12}{250} & ; \quad 8 < y < 18 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

سلم تصحيح مقرر نظرية الاحتمالات
س٣ رياضيات

الدورة التكميلية
12/9/2024

السؤال الأول: نفرض أن الحدث A هو كون الورقة العليا عند الخلط تحمل الرقم 10

$$P(A) = \frac{4 \times 51!}{52!} = \frac{4 \times 51!}{52 \times 51!} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

« 10 درجات للسؤال الأول »

السؤال الثاني: احتمال القفزة إلى اليمين $= \frac{3}{5}$ واحتمال القفزة إلى اليسار $= \frac{2}{5}$.

$$X = \{0, -2, +2\}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$P(X=-2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$$P(X=0) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$$

x	2	-2	0
$f(x)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$

$$E(X) = \sum x f(x) = 2 \times \frac{9}{25} + (-2) \cdot \frac{4}{25} + 0 \cdot \frac{12}{25}$$

$$E(X) = \frac{18-8}{25} = \frac{10}{25}$$

« 20 درجة للسؤال الثاني »

السؤال الثالث: نسبة الشفاء هي $p = 0.7$ ، $n = 20$ ، $q = 0.3$

1. X يتوزع وفق ثنائي الحد:

$$f(x) = \binom{20}{x} (0.7)^{x} (0.3)^{20-x}$$

2. احتمال شفاء 3 مرضى:

$$f(3) = \binom{20}{3} (0.7)^{3} (0.3)^{17} =$$

3. احتمال شفاء 50% من المرضى : $n = 10$

$$f(10) = \binom{20}{10}(0.7)^{10}(0.3)^{10}$$

4. $\mu = n.p = 20 \cdot \frac{7}{10} = 14$ ، $\sigma^2 = n.p.q = 20 \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{42}{10} = 4.2$

« السؤال الثالث 20 درجة »

السؤال الرابع: X متغير عشوائي مستمر توزيعه منتظم على المجال $[2,5]$

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-2} = \frac{1}{3} ; & 2<x<5 \\ 0 ; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$

2. $P(X<4) = \int_2^4 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}x \Big|_2^4$

$$= \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

« السؤال الرابع 10 درجات »

السؤال الخامس: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{81} ; & 0<x<3, 0<y<3 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$ « 30 درجة للسؤال الخامس »

1. $\int_0^3\int_0^3 \frac{x^2y^2}{81} dx\, dy = \int_0^3 \left[\frac{x^3}{3\times 81}\right]_0^3 y^2 dy = \frac{3^3}{3\times 3^4}\int_0^3 y^2 dy$

$$= \frac{3^3}{3\times 3^4} \cdot \frac{3^3}{3} = \frac{3^6}{3^6} = 1$$

2. الدوال الهامشية: $f_1(x) = \int_0^3 \frac{x^2y^2}{81} dy = \frac{x^2}{9}$ ، $f_2(y) = \int_0^3 \frac{x^2y^2}{81} dx = \frac{y^2}{9}$

3. $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v) = \begin{cases} 0 ; & x<0 \text{ or } y<0 \\ \frac{x^3y^3}{729} ; & 0<x<3, 0<y<3 \\ \frac{x^3}{27} ; & 0<x<3, y>3 \\ \frac{y^3}{27} ; & x>3, 0<y<3 \\ 1 ; & x>3, y>3 \end{cases}$

4. $P(0<x<2, 1<y<3)$

$$\int_1^3\int_0^2 \frac{x^2y^2}{81} dx\, dy = \int_1^3 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \frac{y^2}{81} dy$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_1^3 \cdot \frac{1}{81} = \frac{8}{3\cdot 3\cdot 81}\left[3^3 - 3\right]$$

$$= \frac{3\cdot 8}{9\cdot 81}(3^2-1)$$

$$= \frac{3\cdot 8\cdot 8}{9\cdot 81} = \frac{64}{234}$$

د. ديانا الحمد

جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم تصحيح لمقرر نظرية الاحتمالات -
الدورة الفصلية الثانية 2023/2024

قسم الرياضيات
س3

السؤال الأول: حيث $f(x) = 2e^{-2x}$ ، $0 < x < \infty$

1) لإيجاد التوقع الرياضي: $E(X) = \int_0^\infty x f(x)\,dx$ نقوم بخطوات التكامل بالتجزئة بالتفصيل لنحصل على $E(X) = \frac{1}{2}$

2) دالة التوزيع التجميعية: $F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$ وبالتالي: بعد إجراء هذا التكامل
$$F(x) = 1 - e^{-2x}$$

3) $P(X > x) = \frac{1}{2}$ عندئذ $F(x) = \frac{1}{2}$ ومنه $e^{-2x} = \frac{1}{2}$ أي أنه
$$x = \frac{\ln 2}{2}$$

/5 درجات لكل طلب/

السؤال الثاني: 1) $X = \{0, 1, 2\}$

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2)
$$E(X) = \sum x f(x) = 1$$
$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

/5 درجات لكل طلب/

السؤال الثالث: 1)
$$f(x) = \binom{10}{x}\left(\frac{7}{10}\right)^x\left(\frac{3}{10}\right)^{10-x}$$

2)
$$f(x=8) = \binom{10}{8}\left(\frac{7}{10}\right)^8\left(\frac{3}{10}\right)^2 \simeq 0.233$$

3) $x = 5$ وبالتالي
$$f(x=5) = \binom{10}{5}\left(\frac{7}{10}\right)^5\left(\frac{3}{10}\right)^5 = 0.103$$

4)
$$E(X) = np = 7, \quad \sigma^2(x) = n.p.q = 2.1$$

/5 درجات لكل طلب/

السؤال الرابع: (1)

$f(x) = F'(x) = \frac{1}{10}(x+3)$
$1 < x < 3$

(2)

$P(1.3 < x < 2) = F(2) - F(1.3)$
$= 0.3255$

(3)

$P(x > 4) = 1 - P(x \le 4) = 1 - 1 = 0$

/ 5 درجات لكل طلب /

السؤال الخامس: (1)

$\int_0^2 \int_0^1 (x^3 y + \frac{\lambda}{16} y^2)\, dx\, dy = 1$ بايجاد $\boxed{\lambda = 3}$

(2)

$f_1(x) = \int_0^2 (x^3 y + \frac{3}{16} y^2)\, dy$
$= 2x^3 + \frac{1}{2} ; \quad 0 < x < 1$

$f_2(y) = \int_0^1 (x^3 y + \frac{3}{16} y^2)\, dx$ ،
$= \frac{y}{4} + \frac{3y^2}{16} ; \quad 0 < y < 2$ ،

(3)

$F(x,y) = \int_0^x \int_0^y f(u,v)\, du\, dv$
$= \frac{x^4 y^2}{8} + \frac{y^3 x}{16} ; \quad \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 2 \end{matrix}$

(4)

$P(0 < x < 0.5,\ 0 < y < 1)$
$= \int_0^{0.5} \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy = 0.039$

(5)

$E(U) = E(x + 2y) =$
$= \int_0^1 \int_0^2 (x+2y)(x^3 y + \frac{3}{16} y^2)\, dx\, dy$
$= 3.48$

/ 6 درجات لكل طلب /

د. ديانا أحمد

الجمهورية العربية السورية	مقرر نظرية الاحتمالات	المدة: ساعتان
جامعة طرطوس	س3 رياضيات	امتحان الدورة الفصلية الأولى
كلية العلوم	الدرجة العظمى: تسعون	6-2-2024

السؤال الأول: (15 درجة):
نقوم برمي قطعة نقود إذا ظهر الوجه H نقوم برمي حجر نرد، و إذا ظهر الوجه T نقوم برمي حجري نرد. ما احتمال الحصول على وجه واحد يحمل الرقم 6.

السؤال الثاني: (20 درجة):
ليكن X متغيرا عشوائيا متقطعا يخضع لتوزيع بواسون. إذا علمت أن $P(X=2)=\frac{2}{3}P(X=1)$

(١). أوجد دالة الكتلة الإحتمالية المتعلقة بالمتغير العشوائي X. ما هو توقع X ؟ و ماهو تباينه؟

(٢). أوجد $P(x \geq 3)$

السؤال الثالث: (20 درجة):
يجري أحد الطلاب اختبارا مكونا من 10 أسئلة. لكل سؤال ثلاثة خيارات. يحصل الطالب على نقطة واحدة إذا أجاب إجابة صحيحة على سؤال ما و يخسر نصف نقطة إذا أجاب إجابة خاطئة على سؤال ما. يعلم الطالب علما أكيدا الإجابة الصحيحة لثلاثة من الأسئلة العشرة في الإختبار و يجيب على الأسئلة السبعة المتبقية بشكل عشوائي. X متغير عشوائي يدل على عدد النقاط التي سوف يحصل عليها الطالب من إجاباته على الأسئلة السبعة بشكل عشوائي.

(١). أوجد قيم المتغير العشوائي X و أوجد دالة الكتلة الإحتمالية المتعلقة به $f(x)$ و أوجد توقعه.

(٢). ينجح الطالب إذا حصل على عدد من النقاط يساوي 4 أو أكثر نتيجة إجاباته على الأسئلة العشرة في الإختبار. أوجد احتمال نجاح الطالب في هذا المقرر.

السؤال الرابع: (15 درجة):
X متغير عشوائي مستمر يتبع توزيعا أسيا سالبا بمتوسط $\mu=2$.

(١). أوجد دالة الكثافة الإحتمالية المتعلقة بالمتغير العشوائي X.

(٢). اوجد $P(X \leq 1)$.

(٣). أوجد دالة التوزيع التجميعي $F(X)$ المتعلقة بالمتغير العشوائي X.

السؤال الخامس: (20 درجة):
(X,Y) متغير عشوائي ثنائي مستمر بتوزيع احتمالي مشترك يعطى بالعلاقة :

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^2}{81}, & 0<x<3,\ 0<y<3 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(١). تحقق من أن $f(x,y)$ دالة كثافة احتمالية مشتركة.

(٢). أوجد الدوال الهامشية $f_1(x), f_2(y)$

(٣). أوجد دالة التوزيع التجميعية المشتركة $F(x,y)$

(٤). أوجد $P(0<x<2, 1<y<4)$

مع تمنياتي بالتوفيق
د. ديانا أحمد

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم
القسم: الرياضيات

مقرر نظرية الاحتمالات
س 3 / رياضيات
الدرجة العظمى: ستون
دورة فصلية أولى
6/2/2024

السؤال الأول ((15 درجة))

F: حدث الحصول على الوجه H. إذاً $P(F)=\frac{1}{2}$ (5)

F^c: حدث الحصول على الوجه T، وإذاً $P(F^c)=\frac{1}{2}$

حسب صيغة بيز الأولى، لدينا:

(5) $$P(A)=P(F).P(A|F)+P(F^c).P(A|F^c)$$

(5) $$P(A)=\frac{1}{2}.\frac{1}{6}+\frac{1}{2}.\frac{10}{36}=\frac{16}{72}=\frac{2}{9}$$

السؤال الثاني ((20 درجة))

X يخضع لتوزيع بواسون. دالة الكتلة الإحتمالية المتعلقة به

$$f(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}\ ;\ x=0,1,2,\ldots$$

(1) من العلاقة: $P(X=2)=\frac{2}{3}P(X=1)$ نحل المعادلة:

$$\frac{e^{-\mu}.\mu^2}{2!}=\frac{2}{3}\frac{e^{-\mu}\mu}{1!}\Rightarrow\frac{\mu^2}{2}=\frac{2\mu}{3}$$

(5) $$\boxed{\mu=\frac{4}{3}}\Rightarrow f(x)=\boxed{\frac{e^{-\frac{4}{3}}(\frac{4}{3})^x}{x!}}$$

(5) $$E(X)=\mu=\frac{4}{3}$$

(5) $$\sigma^2=\mu=\frac{4}{3}$$

(2)

$$P(X\geq 3)=1-P(X\leq 2)$$

$$=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$$

(5) $$=1-\frac{e^{-\frac{4}{3}}(\frac{4}{3})^0}{0!}-\frac{e^{-\frac{4}{3}}(\frac{4}{3})^1}{1!}-\frac{e^{-\frac{4}{3}}(\frac{4}{3})^2}{2!}$$

$$=1-e^{-\frac{4}{3}}\left[1+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}.\frac{1}{2}\right]$$

$$\simeq 0.105$$

السؤال الثالث :: (15 درجة)

1 قيم المتغير العشوائي :

$$X = \{-3.5, -2, -0.5, +1, +2.5, +4, +5.5, +7\}$$

5

دالة الكتلة الاحتمالية تعطى وفق الجدول :

x	$f(x)$
-3.5	$\frac{2^7}{3^7} = 0.058$
-2	$\binom{7}{1} \cdot \frac{2^6}{3^7} = 0.204$
-0.5	$\binom{7}{2} \frac{2^5}{3^7} = 0.307$
1	$\binom{7}{3} \frac{2^4}{3^7} = 0.2526$
2.5	$\binom{7}{4} \frac{2^3}{3^7} = 0.128$
4	$\binom{7}{5} \frac{2^2}{3^7} = 0.0384$
5.5	$\binom{7}{6} \frac{2}{3^7} = 0.006$
7	$\binom{7}{7} \frac{1}{3^7} = 0.0004$

3

$$E(X) = \sum x f(x)$$
$$= 0$$

2

2 ينجح الطالب حال حصوله على 4 فما فوق . حيث من 3 نتيجة معرفة الأ كثر بثلاثة من الأسئلة بالتالي ينجح الطالب عندما $X \geq 1$.

5

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2.5) + P(X=4) + P(X=5.5) + P(X=7) = 0.429$$

((15 درجة))

السؤال الرابع : X يتبع توزيعاً أسياً دالة الكثافة الاحتمالية :

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} \quad , \quad 0 < x < \infty$$

$$2 = \mu = \frac{1}{\theta}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \qquad (1)$$

5

(2)

5 $$P(X \leq 1) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} = \left[-e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^1$$

$$= -e^{-\frac{1}{2}} + 1 \simeq 0.393$$

(3)

5 $$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}u}\, du = 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \quad ; 0 < x < \infty$$

السؤال الخامس ((25 درجة))

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{81} & ; 0 < x < 3, 0 < y < 3 \\ 0 ; & \text{otherwise} \end{cases}$$

(1) نلاحظ أنه

$$\int_0^3 \int_0^3 \frac{x^2 y^2}{81} = 1$$ 5

إذاً $f(x,y)$ دالة كثافة احتمالية مشتركة.

(2)

5 $$f_1(x) = \int_0^3 \frac{x^2 y^2}{81}\, dy = \frac{x^2}{9} \quad ; 0 < x < 3$$

5 $$f_2(y) = \int_0^3 \frac{x^2 y^2}{81}\, dx = \frac{y^2}{9} \quad ; 0 < y < 3$$

(3)

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^y f(u,v)\, du\, dv$$

وبدراسة الحالات المختلفة نجد أنه :

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 , y \leq 0 \\ \frac{x^3 y^3}{729} & ; 0 < x < 3 , 0 < y < 3 \\ \frac{x^3}{27} & ; 0 < x < 3 , y \geq 3 \\ 1 & ; x \geq 3 , y \geq 3 \end{cases}$$

5

الجمهورية العربية السورية	مقرر نظرية الاحتمالات	المدة: ساعتان
جامعة طرطوس	س3 رياضيات	امتحان الدورة الفصلية الثانية
كلية العلوم	الدرجة العظمى: تسعون	7-8-2023

السؤال الأول: ((*40* درجة)) اختر الإجابة الصحيحة
(دون الحرف الدال على الجواب الصحيح فقط و اتبع نمط الترقيم الورد في السؤال):

(١). نريد تكوين لجنة مكونة من مهندس و أربعة فنيين في شركة فيها 6 مهندسين و 10 فنيين :

ا. عدد الطرق التي يمكن بواسطتها تكوين اللجنة السابقة هي :
A). 3400   B). 3780   C). 1260   D). ليس أي مماسبق

ب. إذا كان المهندسين حسب الإختصاص هم مهندسين اثنين طبوغرافيا، مهندس إنشائي، مهندسين اثنين ميكانيك، مهندس عمارة، فإن احتمال أن تضم اللجنة السابقة مهندس عمارة أو مهندس ميكانيك إضافة للفنيين الأربعة هو:
A). $\frac{1}{2}$ B). $\frac{2}{15}$ C). $\frac{3}{4}$ D). ليس أي مماسبق

(٢). عند رمي حجر نرد 4 مرات إن احتمال الحصول على أرقام مختلفة هو :
A). 1   B). $\frac{5}{18}$ C). $\frac{4}{18}$ D). ليس اي مماسبق

(٣). صندوق فيه 3 كرات حمراء و 5 كرات بيضاء اختيرت عينة من 4 كرات. X متغير عشوائي يمثل عدد الكرات الحمراء في العينة قيم المتغير العشوائي X هي :
A). $X=\{1,2,3\}$ B). $X=\{0,1,2,3\}$ C). $X=\{0,1,2,3,4\}$ D). ليس أي مماسبق

(٤). X متغير عشوائي مستمر بدالة كثافة احتمالية $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{6}x, & x\in[2,4] \\ 0, & x\notin[2,4] \end{cases}$ عندئذ :

ا. A). $f(0\le x\le 10)=\frac{5}{12}$ B). $f(0\le x\le 10)=1$ C). $f(0\le x\le 10)=\frac{1}{12}$ D). ليس أي مماسبق

ب. A). $F(3)=\frac{1}{12}$ B). $F(3)=1$ C). $F(3)=\frac{5}{12}$ D). ليس أي مماسبق

(٥). عند سحب ورقة من أوراق اللعب. يعتبر اللاعب فائزا إذا سحب ورقة تحمل أحد الأرقام $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ و يعتبر خاسرا خلاف ذلك. X متغير عشوائي يأخذ القيمة 1 للربح و القيمة 0 للخسارة.

ا. الدالة المولدة للعزوم في التوزيع الاحتمالي السابق هي:
A). $M_x(t)=\frac{4}{13}e^t+\frac{9}{13}$ B). $M_x(t)=\frac{9}{13}e^t+\frac{4}{13}$ C). $M_x(t)=\frac{10}{13}e^t+\frac{3}{13}$ D). ليس أي مماسبق

ب. توقع أن يفوز اللاعب هو:
A). $\mu=\frac{4}{13}$ B). $\mu=\frac{9}{13}$ C). $\mu=\frac{1}{2}$ D). ليس اي مماسبق

(٦). X متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بدالة كتلة إحتمالية

$$f(x)=\frac{e^{-0.4}(0.4)^x}{x!}$$

ا. $E(X)=$
A). 2   B). -0.4 C). 0.5   D). ليس أي مماسبق

ب. $\sigma^2=$
A). 0.4   B). 8   C). 4   D). ليس أي مماسبق

تابع في الصفحة الثانية

السؤال الثاني : ((15 درجة))

(x,y) متغير عشوائي ثنائي مستمر له دالة كثافة احتمالية مشتركة $f(x,y)$. إذا كان $U = a_1X + a_2Y$ أثبت أن التوقع $E(U) = a_1E(X)+a_2E(Y)$ و التباين $Var(U) = a_1^2Var(X)+a_2^2Var(Y)+2a_1a_2Cov(X,Y)$ حيث $Cov(X,Y) = E(x,y) - E(x)E(y)$.

السؤال الثالث: ((35 درجة))

لدينا الدالة التالية

$f(x,y) = x^3y + \frac{\lambda}{16}y^2$ حيث $0 < x < 1, 0 < y < 2$

1) أوجد λ حتى تكون $f(x,y)$ دالة كثافة احتمالية مشتركة للشعاع العشوائي المستمر .
2) أوجد الدوال الهامشية $f_1(x)$ و $f_2(y)$.
3) أوجد دالة التوزيع الإحتمالي التجميعية التراكمية $F(x,y)$.
4) أوجد دالة التوزيع الإحتمالي الشرطي $g_1(x \mid y)$
5) إذا علمت أن $P(0 < x < x_1, 0 < y < 1) = \frac{5}{128}$ أوجد x_1.
6) أوجد التوقع الرياضي للدالة $U(x,y) = x + 2y$.

مع تمنياتي بالتوفيق
د. ديانا احمد

جامعة طرابلس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم تصحيح مقرر نظرية الاحتمالات
الدورة الفصلية الثانية
7-8-2023

السؤال الأول: ((40 درجة، 4 درجات لكل اختيار صحيح))

(1) أ. $\boxed{C}$
ب. $\boxed{A}$

(2) $\boxed{B}$

(3) $\boxed{B}$

(4) أ. $\boxed{B}$ ويقبل $\boxed{D}$
ب. $\boxed{C}$ ويقبل $\boxed{D}$

(5) أ. $\boxed{B}$
ب. $\boxed{B}$

(6) أ. $\boxed{D}$
ب. $\boxed{A}$

السؤال الثاني: ((15 درجة، 7 لاثبات التوقع، 8 لاثبات التباين))

أولاً

$$E(U) = E(a_1X + a_2Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (a_1x + a_2y)\,dx\,dy$$

$$= a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)\,dx + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)\,dy$$

$$= a_1 E(X) + a_2 E(Y)$$

ثانياً

$$U^2 = a_1^2 X^2 + a_2^2 Y^2 + 2a_1a_2XY$$

$$E(U) = a_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)\,dx + a_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_2(y)\,dy + 2a_1a_2 \int_{-\infty} \int_{-\infty} xy f(x,y)\,dx\,dy$$

$$E(U^2) = a_1^2 E(X^2) + a_2^2 E(Y^2)$$

$$\mathrm{Var}(U) = E(U^2) - \{E(U)\}^2$$

$$= a_1^2\left[E(X^2) - \{E(X)\}^2\right] + a_2^2\left[E(Y^2) - \{E(Y)\}^2\right]$$

$$+ 2a_1a_2\left[E(XY) - E(X)E(Y)\right]$$

$$= a_1^2\,\mathrm{Var}(X) + a_2^2\,\mathrm{Var}(Y) + 2a_1a_2\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

السؤال: (35 درجة) 6 الأول، 6 الثاني، 6 الثالث، 6 الرابع، 5 الخامس

$$\int_0^2\int_0^1 \left(x^3 y + \frac{\lambda}{16} y^2\right)dx\,dy = 1 \quad \boxed{1}$$

$$\boxed{\lambda = 3}$$

$$\boxed{f_1(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{f_2(y) = \frac{y}{4} + \frac{3}{16}y^2}$$

الطالب $f_1(x) = \int_0^2 \left(x^3 y + \frac{3}{16}y^2\right)dy$ $\boxed{2}$

الطالب $f_2(y) = \int_0^1 \left(x^3 y + \frac{3}{16}y^2\right)dx$

$$F(x,y) = \int_0^y\int_0^x \left(u^3 v + \frac{3}{16}v^2\right)du\,dv \quad \boxed{3}$$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0; & x<0,\ y<0 \\ \dfrac{x^4 y^2}{8} + \dfrac{y^3 x}{16}; & 0<x<1,\ 0<y<2 \\ \dfrac{y^2}{8} + \dfrac{y^3}{16}; & 1<x,\ 0<y<2 \\ 1; & x>1,\ y>2 \end{cases}$$

$$g_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{x^3y + \frac{3}{16}y^2}{\frac{y}{4} + \frac{3}{16}y^2}$$ 4

$$P(0<x<x_1, 0<y<1)$$ 5

$$\int_0^1\int_0^{x_1} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{5}{128}$$

نحل كالآتي

$$\frac{x_1^4}{8} + \frac{1}{16}x_1 = \frac{5}{128}$$

الحل بالتجريب $\boxed{x_1 = 0.5}$

$$E\{U\} = \int_0^2\int_0^1 (x+2y)\left(x^3y + \frac{3}{16}y^2\right)dx\,dy$$ 6

$$= 3.48$$

او بطريقة أخرى:

$$E(U) = E(X) + 2E(Y)$$

الجمهورية العربية السورية	مقرر نظرية الاحتمالات	المدة: ساعتان
جامعة طرطوس	س3 رياضيات	امتحان الدورة الفصلية الأولى
كلية العلوم	الدرجة العظمى: تسعون	31-1-2023

السؤال الأول: ((40 درجة)) اختر الإجابة الصحيحة
(دون الحرف الدال على الجواب الصحيح فقط و اتبع نمط الترقيم الوارد في السؤال):

(١). نريد تكوين لجنة مكونة من مهندسين اثنين و ثلاثة فنيين في شركة فيها 6 مهندسن و 10 فنيين :

ا. عدد الطرق التي يمكن بواسطتها تكوين اللجنة السابقة هي ؟
A). 1575 B). 1570 C). 1800 D). ليس أي مماسبق

ب. إذا كان المهندسين حسب الإختصاص هم :مهندسين اثنين طبوغرافيا، مهندس إنشائي، مهندسين اثنين ميكانيك، مهندس عمارة، فإن احتمال أن تضم اللجنة السابقة مهندس عمارة و مهندس ميكانيك إضافة للفنيين الثلاثة هو:
A). $\frac{1}{2}$ B). $\frac{2}{15}$ C). $\frac{3}{4}$ D). ليس أي مماسبق

(٢). عند رمي حجري نرد معا 16 مرة إن احتمال الحصول على وجهين يحملان الرقم 6 مرة واحدة على الأقل هو :
A). $1-(\frac{35}{36})^{16}$ B). $(\frac{35}{36})^{16}$ C). $1-(\frac{5}{6})^{16}$ D). ليس أي مماسبق

(٣). عند خلط أوراق اللعب إن احتمال أن تترتب الأوراق ذات اللون الأحمر معا و الأوراق ذات اللون الأسود معا هو :
A). $\frac{26!.26!}{52!}$ B). $\frac{3!.26!.26!}{52!}$ C). $\frac{2!.26!.26!}{52!}$ D). ليس أي مماسبق

(٤). لدينا أربع بطاقات مرقمة بالأرقام $\{2,4,6,8\}$ (رقم لكل بطاقة)، نسحب بطاقتين عشوائيا معا. X متغير عشوائي يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين. f دالة التوزيع الإحتمالي المتعلقة بالمتغير X عندئذ:

ا. A). $f(10)=\frac{2}{3}$ B). $f(10)=\frac{1}{6}$ C). $f(10)=\frac{1}{3}$ D). ليس أي مماسبق
ب. A). $F(10)=\frac{2}{3}$ B). $F(10)=\frac{1}{6}$ C). $F(10)=\frac{1}{3}$ D). ليس أي مماسبق

(٥). عند سحب ورقة من أوراق اللعب. يعتبر اللاعب فائزا إذا سحب ورقة تحمل أحد الأرقام $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ و يعتبر خاسرا خلاف ذلك. X متغير عشوائي يأخذ القيمة 1 للربح و القيمة 0 للخسارة.

ا. الدالة المولدة للعزوم في التوزيع الإحتمالي السابق هي:
A). $M_x(t)=\frac{4}{13}e^t+\frac{9}{13}$ B). $M_x(t)=\frac{9}{13}e^t+\frac{4}{13}$ C). $M_x(t)=\frac{10}{13}e^t+\frac{3}{13}$ D). ليس أي مماسبق

ب. توقع أن يفوز اللاعب هو:
A). $\mu=\frac{4}{13}$ B). $\mu=\frac{9}{13}$ C). $\mu=\frac{1}{2}$ D). ليس أي مماسبق

(٦). X متغير عشوائي مستمر يتبع توزيع أسي السالب بدالة كثافة إحتمالية $f(x)=0.5e^{-0.5x}$:

ا. $E(X)=$
A). 2 B). -2 C). 0.5 D). ليس أي مماسبق

ب. $\sigma^2=$
A). -2 B). 8 C). 4 D). ليس أي مماسبق

تابع في الصفحة الثانية

السؤال الثاني : ((10 درجة))

1) إذا كانت $F_1, F_2, ..., F_n$ أحداث مستقلة مثنى مثنى و $F_1 \bigcup F_2 \bigcup .... \bigcup F_n = \Omega$ حيث Ω هو فضاء العينة و A حدث ما أثبت أن

أولا :

$$P(A) = P(F_1).P(A|F_1) + ...P(F_n).P(A|F_n)$$

ثانيا :

$$P(F_i|A) = \frac{P(F_i).P(A|F_i)}{P(F_1).P(A|F_1)+......P(F_n).P(A|F_n)} \text{ حيث } i \in \{1, 2, ..., n\}$$

2) أثبت أن توزيع ثنائي الحد $b(x, n, p)$ يتحول إلى توزيع بواسون حيث $\mu = np$، إذا كانت p تقترب من الصفر و عدد مرات تكرار التجربة كبير جدا $n \to \infty$.

السؤال الثالث: ((10 درجة))

في مجتمع ما إن احتمال أن يكون فرد بمصاب بمرض معين هو 0.1. يوجد اختبار طبي للتحقق من إصابة شخص ما بهذا المرض. إن احتمال أن يعطي الإختبار نتيجة إيجابية (مصاب) مع كون الشخص مصاب فعلا هو 0.8 و احتمال أن يعطي الإختبار نتيجة إيجابية (مصاب) مع كون الشخص غير مصاب فعلا هو 0.2. تم اختيار شخص بشكل عشوائي من إفراد هذا المجتمع المدروس و إجراء الإختبار له إذا كانت T هو حدث كون نتيجة الاختبار إيجابية و S هو حدث كون الشخص مصاب و H هو حدث كون الشخص غير مصاب.

1) أوجد احتمال أن تكون نتيجة الإختبار إيجابية.

2) أوجد احتمال أن يكون الشخص مصاب علما أن نتيجة الإختبار إيجابية.

السؤال الرابع: ((30 درجة))

لدينا الدالة التالية

$$f(x, y) = x^3y + \frac{\lambda}{16}y^2 \text{ حيث } 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

1) أوجد λ حتى تكون $f(x, y)$ دالة كثافة احتمالية مشتركة للشعاع العشوائي المستمر (x, y).

2) أوجد الدوال الهامشية $f_1(x)$ و $f_2(y)$.

3) أوجد دالة التوزيع التجميعية (التراكمية) $F(x, y)$.

4) أوجد دالة التوزيع الإحتمالي الشرطي $g_1(x \mid y)$

5) أوجد $P(0 < x < 0.5, 0 < y < 1)$.

6) أوجد التوقع الرياضي للدالة $U(x, y) = x + 2y$.

مع تمنياتي بالتوفيق

د. ديانا احمد

السؤال الأول

٢ درجات لكل اختيار صحيح

(١) أ. $\boxed{C}$

ب. $\boxed{B}$

(٢) $\boxed{A}$

(٣) $\boxed{C}$

(٤) أ. $\boxed{C}$

ب. $\boxed{A}$

(٥) أ. $\boxed{B}$

ب. $\boxed{B}$

(٦) أ. $\boxed{A}$

ب. $\boxed{C}$

السؤال الثاني

(1 أولاً

(3) ثلاث درجات

$$P_2 = P(A\cap F_1) + P(A\cap F_2) + \cdots + P(A\cap F_n) =$$

$$P(A\cap(F_1 \cup \cdots \cup F_n)) = P(A\cap\Omega) = P(A).$$

ثانياً

درجتين

$$P(F_i\mid A) = \frac{P(F_i\cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(F_i)\,P(A\mid F_i)}{P(F_1)\cdot P(A\mid F_1) + \cdots + P(F_n)\cdot P(A\mid F_n)}$$

(2 عشر درجات

$$b(x,n,p) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$p = \frac{\mu}{n}$$

$$b(x,n,p) = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}\, p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{\mu^{x}}{x!}\left[\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^{x}}\cdot \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} b(x,n,p) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mu^{x}}{x!}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^{x}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{x}}\right]$$

$$= \frac{\mu^{x}}{x!}\, e^{-\mu} = \text{poisson}(\mu)$$

السؤال الثالث

$$P(S) = 0.1$$

$$P(H) = 0.9$$

$$P(T\mid S) = 0.8$$

$$P(T\mid H) = 0.2$$

(1

$$P(T) = P(S)\cdot P(T\mid S) + P(H)\cdot P(T\mid H)$$

عشر درجات

$$= (0.1)(0.8) + (0.9)(0.2)$$

$$= 0.08 + 0.18 = 0.26$$

(2

$$P(S\mid T) = \frac{P(S)\cdot P(T\mid S)}{P(T)} = \frac{0.08}{0.26}$$

$$= \frac{8}{26} = \frac{4}{13}$$

$$\simeq 0.3076$$

عشر درجات

السؤال الرابع

عشر درجات لكل مطلب

$\boxed{1}$

$$\int_0^2\int_0^1 \left(x^3 y + \frac{\lambda}{16}y^2\right) dx\,dy = 1$$

$$\int_0^2 \left[\frac{x^4}{4}y + \frac{\lambda}{16}y^2 x\right]_0^1 dy = \int_0^2 \left(\frac{y}{4} + \frac{\lambda}{16}y^2\right) dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{8} + \frac{\lambda}{16}\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{8} + \frac{\lambda}{16}\cdot\frac{8}{3} = 1$$

$$\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{3} = 1 - \frac{4}{8} \Rightarrow \frac{\lambda}{6} = \frac{4}{8} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{8}\cdot\frac{6}{1}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{6}{2} = 3}$$

$\boxed{2}$

$$f_1(x) = \int_0^2 \left(x^3 y + \frac{3}{16}y^2\right) dy$$

$$= \left[\frac{x^3 y^2}{2} + \frac{y^3}{16}\right]_0^2$$

$$\boxed{f_1(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}} \quad 0<x<1$$

$$f_2(y) = \int_0^1 \left(x^3 y + \frac{3}{16}y^2\right) dx = \left[\frac{x^4}{4}y + \frac{3}{16}y^2 x\right]_0^1$$

$$\boxed{f_2(y) = \frac{y}{4} + \frac{3}{16}y^2} \quad 0<y<2$$

$\boxed{3}$

$$F(x,y) = 0 \qquad x<0,\ y<0$$

$$F(x,y) = \int_0^y\int_0^x \left(u^3 v + \frac{3}{16}v^2\right) du\,dv$$

$$= \int_0^y \left(\frac{x^4}{4}v + \frac{3}{16}v^2 x\right) dv = \frac{x^4}{8}y^2 + \frac{y^3}{16}x$$

$$= \frac{x^4}{8}y^2 + \frac{y^3}{16}x$$

$$0<x<1$$

$$0<y<2$$

$$F(x,y)=\int_0^y\int_0^1 (u^3 v+\frac{3}{16}v^2)\,du\,dv=\int_0^y\left[\frac{u^4}{4}v+\frac{3}{16}v^2u\right]_0^1 dv=\int_0^y\left(\frac{v}{4}+\frac{3}{16}v^2\right)dv$$

$$=\frac{y^2}{8}+\frac{y^3}{16}\quad 1\le x,\ 0<y<2$$

$$F(x,y)=\begin{cases}0\ ; & x<0,\ y<0\\ \frac{x^4y^2}{8}+\frac{y^3x}{16}\ ; & 0<x<1,\ 0<y<2\\ \frac{y^2}{8}+\frac{y^3}{16}\ ; & 1\le x,\ 0<y<2\\ 1\ ; & x>1,\ ,\ y>2\end{cases}$$

$$g_1(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{x^3y+\frac{3}{16}y^2}{\frac{y}{4}+\frac{3}{16}y^2}\qquad \boxed{4}$$

$$P(0<x<0.5,\ 0<y<1)=\int_0^1\int_0^{0.5}(x^3y+\frac{3}{16}y^2)\,dx\,dy\qquad \boxed{5}$$

$$=\int_0^1\left[\frac{x^4}{4}y+\frac{3}{16}y^2x\right]_0^{\frac12}dy=\int_0^1\left(\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}y+\frac{3}{16}y^2\cdot\frac{1}{2}\right)dy$$

$$=\left[\frac{1}{64}\frac{y^2}{\cancel{2}}+\frac{3}{16}\frac{y^3}{3}\cdot\frac{1}{2}\right]_0^1=\frac{1}{128}+\frac{1}{32}=\frac{1}{128}+\frac{4}{128}$$

$$=\frac{5}{128}$$

$$E\{U\}=\int_0^2\int_0^1(x+2y)\cdot(x^3y+\frac{3}{16}y^2)\,dx\,dy\qquad \boxed{6}$$

أو طريقة أخرى

$$E\{U\}=E(X)+2E(Y)=\int_0^1 x(2x^3+\frac{1}{2})dx+2\int_0^2 y\left(\frac{y}{4}+\frac{3}{16}y^2\right)dy$$

$$=\int_0^1(2x^4+\frac{1}{2}x)\,dx+2\int_0^2\left(\frac{y^2}{4}+\frac{3}{16}y^3\right)dy$$

$$=\left[\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^2\right]_0^1+2\left[\frac{y^3}{12}+\frac{3}{64}y^4\right]_0^2$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{1}{4}+\frac{16}{12}+3\frac{32}{64}\approx 3.48$$