

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الثالثة

اسئلة ووراك محلولة

معادلات تفاضلية جزئية

A 2 Z LIBRARY

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ، علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى
للعام الدراسي 2024-2025

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح مايلي:

1. مسألة القيم الحدية

2. معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الثانية ناقصية

3. المعنى الفيزيائي للمسألة

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = u(2,t) = 0$$

ثانياً:

بفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة منتظمة C عبر أنبوب رفيع G ذو مقطع منتظم A . استنتج المعادلة التفاضلية التي تعبر عن تركيز المادة الكيميائية في كل نقطة من نقاط الأنبوب.

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً: بفرض لدينا خيط مرن و مشدود ومثبت في نهايته، طوله l ، يزاح عن وضع التوازن ليأخذ الشكل $f(x) = \cos x$ ثم يترك

1. أوجد موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t .
2. اكتب العلاقة التي تعطي الطاقة الكلية للخيط. (استنتاج هذه العلاقة غير مطلوب).
3. بين فيما اذا كانت حركة الخيط متخامدة أم لا (مع التفسير).

ثانياً: بفرض لدينا سلك متجانس معزول الجوانب، طوله l ، درجة حرارة كل نقطة من نقاطه u_0 . نسحب هذا السلك ونضعه بدرجة حرارة u_1 . اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند زمن $0 < t$. (ايجاد حل النموذج غير مطلوب)

مدرسة المقرر : د. منال نادر حسين

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مع

سلام تحويج مقر - معادلات تفاضلية جزئية
الطلاب حسني رياضيات الدورة الفصلية الأولى 2024 - 2025

45

الأول الأول : أولاً :

1- مسألة القيم الحسية معادلة تقاضية ^(٦) ~~مفردة~~ شروط حسية (صحة التبع أدقته عند الحدود) ويكون عند الشروط الحسية قبل أعال مرتبة لتتقارب مع النسبة للعرض

2- معادلة تقاضية ^(٧) ~~مفردة~~ شروط حسية

2. معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية عاقصة هي معادلة من الشكل

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G$$

$$B^2 - 4AC < 0 \quad \text{فقط}$$

3 - النموذج الرياضي الذي يصف حركة خط من لوله $l=2$ مثبت في مركزه حيث
أنه العطر الابتدائي للخط يمتد بالتابع (l_m) والسرعة الابتدائية لكون نقطة ارتفاع
الخط تقطع بالتابع $(\psi(x))$

ثانياً: لفضاء G المجال المفتوح (a, b)

ثابتة عبر المقطع A غير كل نقطة لا مستوفى تركيز المادة الكيميائية

ثابتة عند المقطع A في كل نقطة x وبين فناء التركيز يتصرف طيفر λ . ولكن $A(x,t)$ ثابتة
للانشتقاق ومستمرة وتعبير تركيز المادة في النقطة واللحظة t بالذي كمية مادة العيقات
الموجودة في سطح الانبوب بين $a \leq x$ نقطتين B
 C يات في اللحظة $t+h$ يكون له تأثيره
التي تجري سرعة c

$$\text{also } \int_{-\infty}^{\infty} A u(s,t) ds$$

$$\int_a^{a+h} A u(s, t) ds = \int_a^{a+h} A u(s, t+h) ds \quad (5)$$

با توجه به اینکه $u(x, t) = u(x+h, t+h)$ و $u(x, t) = u(x, t+h)$ داریم:

$$0 = u_+(m+ch, t+h) + C u_-(m+ch, t+h) \quad (5)$$

you'd

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (5)$$

$$u(x,0) = \cos x, \quad u_t(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct) \quad (5)$$

$$u_{\pm}(x,t) = c f' - c g'$$

دوال افسیایه

$$u(n,0) = f(n) + g(n) = \cos n$$

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \cos x$$

$$f'(u) + g'(u) = -\sin u \Rightarrow \cancel{f'(u)}$$

$$y(n) \pm f(n) = \frac{1}{2} \cos n \in f'(n) = -\frac{1}{2} \sin n \quad (5) \in f'(n) +$$

$$\Rightarrow u(n+2) \geq \frac{1}{2} (\cos(n+2b) + \cos(n-2b))$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (u_t^2 + c u_n^2) dx \quad (5) \quad -2$$

$$\frac{dE}{dt} = c^2 (u_t(L,t) u_n(L,t) - u_t(0,t) u_n(0,t)) \quad -3$$

$$\Leftrightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Leftrightarrow u_t(0,t) = u_t(L,t) \quad \text{الشرط الثاني} \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow E(t) = \text{constant}$$

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{nn}(x,t) \quad (5) \quad \text{معادلة الموجة}$$

$$u(x,0) = u_0 \quad (5) \quad 0 < x < l$$

$$u(0,t) = u(l,t) = u_1 \quad (5) \quad 0 < t$$

انتهى

ملاحظة: يمكن اكل بأي طريقة واردة في القرآن وتأخذ اطلاله على العلامة.

د. خالد ناصر

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة التكميلية
للعام الدراسي 2023-2024

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. المعادلة التفاضلية الجزئية
2. شروط ديريكليه الحدية
3. معادلة بواسون
4. التوابع التوافقية

ثانياً: بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس نصف لانتهائي معزول الجوانب و درجة حرارته الابتدائية U_0 . نضع احدى نهايتيه في وسط درجة حرارته $0^\circ C$. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t . (ايجاد حل النموذج غير مطلوب)

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً: بفرض لدينا خيط لانتهائي الطول، كان في البدء في وضع الراحة على المحور OX . نجعل بدايته $x = 0$. تتحرك بشكل دوري بعلاقة $A_0 \sin wt$. اوجد موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t .

ثانياً: باستخدام تحويل لابلاس اوجد حل المسألة التالية $u_x + u_t = x + t$

$$u(x,0) = u(0,t) = 1$$

حيث

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

مع تمنياتي لكم بالنجاح

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية
للعام الدراسي 2023-2024

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضع مايلي:

1. شروط برون الحدية
2. معادلة الحرارة

3. تحويل لابلاس للدالة $\frac{\sin at}{t}$

4. المعنى الفيزيائي للمسألة

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \quad u_t(x,0) = 4x, \quad u(x,0) = \sin x, \quad u(0,t) = 2t \quad x \in [0, \infty)$$

ثانياً:

استنتج الصيغة التي تعطي طاقة الذبذبات المستعرضة لوتر كتلته m وكثافته ρ .

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً:

بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس، طوله 20 متر، معزول الجوانب، و إحدى نهايتيه معزولة أيضاً، درجة حرارته الابتدائية 10°C . نضع النهاية غير المعزولة في ماء حرارته مثبتة 35°C . اكتب (بدون حل) النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك في كل لحظة.

ثانياً:

بأستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0$$

$$u(0, y) = f(y)$$

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

مع تمنياتي لكم بالنجاح



الدرجة: 90
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى
للعام الدراسي 2024-2023

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح مايلي:

1. شروط روبن الحدية

2. معادلة الموجة المتخامدة

3. تحويل لابلاس للدالة $e^{-x} \cos(2x)$

4. المعنى الفيزيائي للمسألة

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad u(x,0) = \phi(x), \quad u(0,t) = \eta(t) \quad x \in [0, \infty)$$

ثانياً:

بفرض لدينا خيط مرن مشدود (كثافته ثابتة ρ) وموضوع بشكل أفقي ومثبت في نهايتيه اليسارية L و اليمينية R . نزيح الخيط عن وضع التوازن ونتركه عندها نلاحظ موجة تعبر هذا الخيط. استنتج (مع الشرح) النموذج الرياضي الذي يصف الانزياح العمودي للخيط عن وضع التوازن في الموضع x واللحظة t .

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً:

بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس، طوله 20 متر، معزول الجوانب، و احدى نهايتيه معزولة أيضاً، درجة حرارته الابتدائية 10°C . نضع النهاية غير المعزولة في ماء حرارته مئونة 35°C . اكتب (بدون حل) النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك في كل لحظة.

ثانياً:

بفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة منتظمة $c = 3$ عبر أنبوب رفيع ذو مقطع منتظم A ، والتركيز الابتدائي لهذه المادة يعطى بدلالة التابع $\sin(x)$. بفرض أن هذه المادة مضمحلة بثابت $\lambda = 1$ ويوجد مصدر خارجي يعوض المادة المضمحلة يمثل بتابع t ، احسب تركيز المادة في كل نقطة من نقاط الأنبوب في كل لحظة t .

مدرسة المقرر : د. مثال ناصر حسين

مع تمنياتي لكم بالنجاح

السؤال الأول

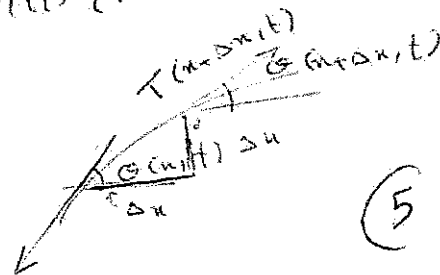
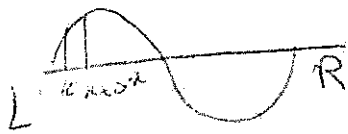
- أولاً: 1- هي شرط نظام بدلالة قيمة التابع مشتقته عند الحدود (5)
 2- صاد لة بالشكل $u_{tt} - c^2 u_{xx} + \gamma u_t = 0$ ، $u|_{t=0} = u|_{x=L} = 0$

3- $\mathcal{L}(e^{-\eta} \cos 2x) = F(s+1)$ (5)

$F(s) = (1) \frac{d}{ds} \mathcal{L}(\cos 2x) = (1) \frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2+4} \right) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$

$\Rightarrow F(s+1) = \frac{(s+1)^2-4}{((s+1)^2+4)^2}$

- 4- النموذج الرياضي الذي يصف حركة فيط من نقطة إلى أخرى في الفول حيث أن
 المطروح الدالة أي للفيط (نقطة من نقاطه) تكون $u(x)$ بالتابع $u(x)$
 في البداية لكل نقطة من نقاطه تكون التابع $u(x)$ وذلك بفرض
 أن السارية $x=0$ تفرك وقت التابع $u(t)$



- 5- شرح كل عنصر الرسم
 - الفرضيات المناسبة
 - الفول المطبقة على القطع الرسم

$u(x+\Delta x, t)$ و $u(x, t)$ في الأمت
 $\theta(x+\Delta x, t)$ و $\theta(x, t)$ في الأمت

$T(x+\Delta x, t)$ بزارية
 $T(x, t)$

5- محصلة القوى الأفقية صفرية
 $-T(x, t) \cos(\theta(x, t)) + T(x+\Delta x, t) \cos(\theta(x+\Delta x, t)) = 0$

بأنه $T(x, t) \cos \theta(x, t) = T(x+\Delta x, t) \cos \theta(x+\Delta x, t) = T$

فصلة القوى العمودية = الكتلة $\times$ التسارع

5 $T(x+\Delta x, t) \sin \theta(x+\Delta x, t) - T(x, t) \sin \theta(x, t) = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

لنقسم على T في

5 $\frac{\rho}{T} \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tan \theta(x+\Delta x, t) - \tan \theta(x, t)$
 $= u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x, t)$

5 $u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t)$

$c^2 = \frac{T}{\rho}$

السؤال الثاني :

أولى :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (5)$$

$$u_x(0,t) = 0 \quad (5)$$

$$u_x(20,t) = \frac{-h}{k} (u(20,t) - 35) \quad (5) \quad 0 \leq x \leq 20$$

$$u(x,0) = 10 \quad (5)$$

α^2 ثابت انتشار الحرارة

k خاص التوصيل الحراري

ثانياً :

$$u_t + 3u_x + u = t \quad (5)$$

$$u(x,0) = \sin x \quad (5)$$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{3} = \frac{du}{t-u} \quad (5)$$

$$x - 3t = u_1$$

$$\frac{dt - du}{1-t+u}$$

$$= dt \Rightarrow (1-t+u)e^t = k_2 \quad \Rightarrow F_1(x-3t, (1-t+u)e^t) = c$$

$$\Rightarrow u = e^{-t} F(x-3t) + t - 1 \quad (5)$$

$$u(x,0) = F(x) - 1 \Rightarrow F(x) = \sin x + 1 \Rightarrow u(x,t) = e^{-t} \sin(x-3t) + t - 1 + e^{-t}$$

النتيجة

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية
للعام الدراسي 2022-2023

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (40 درجة)

أولاً: وضح مايلي:

1. التابع المضمحل بشكل أسي

2. معادلة التوزيع الحراري لسلك

3. التابع التوافقي في كل مكان

4. تحويل لابلاس للدالة $\frac{\sin t}{t}$

5. المعنى الفيزيائي للمسألة

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 20$$

ثانياً: استنتج الصيغة التي تعطي طاقة الذبذبات المستعرضة لوتر كتلته m وكثافته ρ .

السؤال الثاني: (50 درجة)

أولاً: بفرض لدينا خيط مرن و مشدود ومثبت في نهايته، يزاح عن وضع التوازن ليأخذ الشكل

$$f(x) = \sin \pi x \quad \text{ثم يترك. إذا علمت أن } c = \frac{1}{\pi}$$

1. أوجد موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t .

2. عين أول لحظة يعيد فيها الخيط وضعه الابتدائي.

ثانياً: بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس بطول 300cm معزول الجوانب و درجة حرارته الابتدائية

10°C . بفرض أن احدى نهايتيه معزولة والنهائية الأخرى غمرت في ماء درجة حرارته مثبتة على

25°C . اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t .

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

مع تمنياتي لكم بالنجاح

السؤال الأول :

أولاً : 1- التابع المضاعف بشكل أسّي هو تابع مكافئ $\frac{du}{dt} = 1u$; $1 < 0$

2- معادلة التوزيع الكاربي لـ u هي $u_t = \alpha^2 \Delta u$ حيث α^2 ثابت التناثر

3- التابع التوافقي u هو حل معادلة لابلاس $\Delta u = 0$

4- $\arctan \frac{1}{s} = \arctan \left(\frac{\sin t}{t} \right)$ مع تفسير بأي طريقة وردت

5- $u_t = \alpha^2 u_{xx}(x,t)$; $u(0,t) = 0$; $u(l,t) = 20$

النموذج الرياضي الذي يصف التوزيع الكاربي في سلك نحاسي مقبض طول l م

الجواب حرارة احد سرطحيه 0 وحرارة السطح الأخرى 20

ثانياً : $E = K + U$ (ن)
 كفاءة حركة

طاقة حركة عنصر dm من الخيط بوزن وحدة $u_t = u$ هي $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho dx (u_t)^2$

وبالتالي الطاقة الحركية لكامل الخيط $K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho [u_t(x,t)]^2 dx$

الطاقة الكامنة هي كالمعدل العامي بذله لكي ينتقل الخيط من وضع التوازن إلى الوضع

$u(x,t)$ - العنصر dx تحت تأثير قوى الشد

$$T_{xx} dx = T_x \Big|_{x+dx} - T_x \Big|_x \quad (n)$$

ليقطع خلال الزمن dt المسافة $u_t(x,t) dx$ وبالتالي العمل المبذول للخيط كله

$$\left\{ \int_0^L T_{xx} u_t dx \right\} dt = \left\{ T_x u_t \Big|_0^L - T \int_0^L u_{xx} u_t dx \right\} dt$$

$$= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L T (u_x)^2 dx + T \int_0^L u_{xx} u_t dx \right\} dt$$

لأن الطرفين جيبين بالسرعة صفرية $u_t(0,t) = u_t(l,t) = 0$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L T u_x^2(x,t) dx \Rightarrow E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho [u_t(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L T u_x^2(x,t) dx$$

السؤال الثاني

أولاً

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (5) ; c = \frac{1}{\pi}$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x \quad (5)$$

$$u_t(x, 0) = 0$$

يمكن إيجاد الحل بالطريقة من الطرف الأيمن في التمرين الأخير

$$u(x, t) = \frac{\sin(\pi(x - \frac{t}{\pi})) + \sin(\pi(x + \frac{t}{\pi}))}{2}$$

$$= \frac{\sin(\pi x - t) + \sin(\pi x + t)}{2} \quad (5)$$

(2) لتبين الصيغة التي حصل عليها غير كافية، نضعها في اختبار أن يكون

$$\frac{\sin(\pi x - t) + \sin(\pi x + t)}{2} = \sin \pi x \quad (5)$$

كل ما في كل دورين ودوره 2π، لذلك يجب أن يكون $t = 2\pi$ عند تحقق المعادلة السابقة.

ثانياً

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx} \quad (5) \quad u_x(0, t) = 0 \quad (5)$$

$$u_x(300, t) = -\frac{h}{k} (u(300, t) - 25) \quad (5)$$

$$u(x, 0) = 10 \quad (5) \quad 0 \leq x \leq 300$$

α^2 ثابت انتفاخ - التمدد

h معامل التوصيل الحراري

انتهاج

د. محمد حسين

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى
للعام الدراسي 2022-2023

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح مايلي:

1. التابع المضمحل بشكل أسي

2. شروط نيومن الحدية

3. معادلة التوزيع الحراري لسلك في حال الاستقرار

4. التابع $e^x \cos y$ تابع توافقي في كل مكان

5. تحويل لابلاس للدالة $\frac{\sin at}{t}$

6. المعنى الفيزيائي للمسألة

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$$

ثانياً:

بفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة منتظمة C عبر أنبوب رفيع G ذو مقطع منتظم A . استنتج المعادلة التفاضلية التي تعبر عن تركيز المادة الكيميائية في كل نقطة من نقاط الأنبوب.

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً:

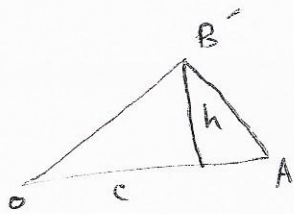
بفرض لدينا خيط مرن و مشدود ومثبت في نهايته، طوله l ، يزاح عن وضع التوازن مسافة قدرها h في نقطة تبعد مسافة C عن إحدى نهايتيه ثم يترك. عين موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t .

ثانياً:

بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس، طوله 10 متر، معزول الجوانب، و إحدى نهايتيه معزولة أيضاً، درجة حرارته الابتدائية صفر. نضع النهاية غير المعزولة في ماء حرارته مثبتة 20°C . اكتب (بدون حل) النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك في كل لحظة.

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

مع تمنياتي لكم بالنجاح



$$u_{tt} = \alpha^2 u_{nn}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$$u(n,0) = \begin{cases} \frac{h}{c} n & 0 \leq n \leq c \\ -\frac{h}{p-c} (n-p) & c \leq n \leq p \end{cases}$$

$$u_t(n,t) \Big|_{t=0} = 0$$

$$X'' - \lambda X = 0 \quad T'' - \alpha^2 \lambda T = 0 \quad u(n,t) = X(n)T(t)$$

كل من $\lambda > 0, \lambda = 0$ غير مقبولة

$$X = c_1 \cos \sqrt{\lambda} n + c_2 \sin \sqrt{\lambda} n$$

$$X(0) = c_1 = 0$$

$$X(p) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} p = 0 \quad c_2 \neq 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} p = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} p = n\pi$$

$$T = c_3 \cos \alpha \sqrt{\lambda} t + c_4 \sin \alpha \sqrt{\lambda} t \quad \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{p}$$

$$T'(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0 \Rightarrow c_4 \alpha \sqrt{\lambda} \cos \alpha \sqrt{\lambda} t = 0$$

$$u(n,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi n}{p} \cos \frac{n\pi \alpha}{p} t$$

~~الخطأ~~

$$u(n,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi n}{p}$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p u(n,0) \sin \frac{n\pi n}{p} dn = \frac{2}{p} \left(\int_0^c \frac{h}{c} n \sin \frac{n\pi n}{p} dn + \int_c^p -\frac{h}{p-c} (n-p) \sin \frac{n\pi n}{p} dn \right)$$

$$= \frac{2h p^2}{n^2 \pi^2 c (p-c)} \sin \frac{n\pi c}{p}$$

$$u_t(n,t) = \alpha^2 u_{nn}$$

$$u_n(0,t) = 0$$

$$u_x(100,t) = -\frac{h}{k} (u(100,t) - 20)$$

$$u(n,0) = 0$$

$$0 \leq n \leq 100$$

كل من α^2 ثابت - انحراف ، k معامل التوصيل الحراري

ص

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية
للعام الدراسي 2021-2022

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية من النوع الزائدي
2. شروط ديريكليه الحدية
3. معادلة الموجة المتخامدة
4. معادلة بواسون

ثانياً: بفرض لدينا خيط لانهائي الطول، كان في البدء في وضع الراحة على المحور OX . نجعل بدايته $x = 0$ تتحرك بشكل دوري بعلاقة $A_0 \sin wt$. اكتب النموذج الرياضي الذي يعبر عن موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t . حل النموذج غير مطلوب

ثالثاً: استنتج الصيغة التي تعطي طاقة الذبذبات المستعرضة لوتر كتلته m وكثافته ρ .

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً:

باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المسألة التالية $u_x + u_t = x + t$

$$u(x,0) = u(0,t) = 1$$

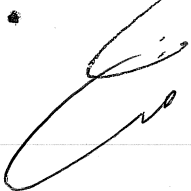
حيث

ثانياً:

بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس طويل جداً، معزول الجوانب، موضوع في درجة حرارة صفر. نرفع حرارة إحدى نهايتيه درجة واحدة ونحافظ عليها في هذه الدرجة. أوجد حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t وذلك إذا علمت أن ثابت الانتشار هو 1.

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين



سليم تصنيع معادلات تفاضلية جزئية
الطلاب سلاو رياضيات 2
2022 - 2021

سؤال الأول:

أولاً: 1- إذا كانت من الشكل (5) $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + fu = G$ حيث $B^2 - 4AC < 0$

(5) 2- من شروط تكون معادلة صيغة لابلاس عند الحدود

(5) 3- من الشروط $u_{tt} - c^2 u_{xx} + \gamma u = 0$; $\gamma > 0$ ، $\gamma < 0$ ، $\gamma = 0$ يمثل معادلات

(5) 4- هي معادلة لابلاس مع طرف ثانٍ: $\Delta u = f$

ثانياً: (5) $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $0 < x < l$ $0 < t$

(5) $u(x, 0) = 0$
 $u_t(x, 0) = 0$ $\&$ $u(x, t) < M$

(5) $u(0, t) = A_0 \sin \omega t$

$E = K + U$
الطاقة الحركية الطاقة الكامنة

ثالثاً:

طاقة حركة عنصر dm من الخيط يتحرك بسرعة $y = y_t$ هي $\frac{1}{2} dm (y_t)^2 = \frac{1}{2} \rho dy (y_t)^2$

وبالتالي الطاقة الحركية لكامل الخيط $K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho [y_t(x, t)]^2 dx$ (2)

الطاقة الكامنة هي فلكس العمل الفاعل بذلة لكي ينتقل الخيط من موضع التوازن إلى الموضع (m, t)

والعمل dm تحت محصلة قوتها $T u_{xx} dx = T u_x \Big|_{x+\Delta x} - T u_x \Big|_x$ (2)

نضرب خلال الزمن dt الباقية $u_t(x, t) dt$ وبالتي العمل المزدول الخيط

$\int_0^L T u_{xx} u_t dx \Big|_0^t = \left\{ T u_x u_t \Big|_0^L - T \int_0^L u_{xx} u_{xt} dx \right\} dt$

$= -\frac{1}{2} \int_0^L T (u_x)^2 dx \Big|_0^t + \int_0^t T u_x u_t \Big|_0^L dt$ (2)

بالتي $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$

الطاقة الكامنة $U = \frac{1}{2} \int_0^L T u_x^2(x, t) dx$ (2)

$\Rightarrow E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho [y_t(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L T u_x^2(x, t) dx$

$$u_x + u_t = x + t$$

السؤال التالي:

$$\hat{u}_x + s \hat{u}(x, s) - u(x, 0) = \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2} \Rightarrow \hat{u}_x + s \hat{u}(x, s) = \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2} + 1$$

$$\mu = s \Rightarrow \hat{u}(x, s) = e^{-sx} \left(c + \int \left(\frac{x}{s} + \frac{1}{s^2} + 1 \right) e^{sx} dx \right) =$$

$$c e^{-sx} + \frac{1}{s} + \frac{x}{s^2}$$

$$\hat{u}(0, s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{s} = c + \frac{1}{s} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \hat{u}(x, s) = \frac{1}{s} + \frac{x}{s^2}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = 1 + xt$$

$$u_t = u_{xx} \quad x > 0, t > 0$$

$$u(0, t) = 1$$

$$u(x, 0) = 0$$

$$s \hat{u}(x, s) - u(x, 0) = \hat{u}_{xx}(x, s)$$

$$\hat{u}_{xx} - s \hat{u} = 0 \quad m^2 - s = 0 \Rightarrow m = \pm \sqrt{s}$$

$$\hat{u}(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x}$$

مباين $u(x, t)$ تنقر الى صفر عند $x \rightarrow \infty$

$\hat{u}(x, s)$ تنقر الى صفر عند $x \rightarrow \infty$

$$\hat{u}(x, s) = c_2 e^{-\sqrt{s}x} \quad c_1 = 0$$

$$\hat{u}(0, s) = c_2 = \frac{1}{s}$$

$$\hat{u}(x, s) = \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}x} \Rightarrow u(x, t) = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

السؤال التالي:

انتها

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى
للعام الدراسي 2021-2022

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. المعادلة التفاضلية الجزئية
2. شروط روبن الحدية
3. معادلة الموجة المتخامدة
4. التوابع التوافقية

ثانياً: بفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة منتظمة C عبر أنبوب رفيع G ذو مقطع منتظم A .

1. استنتج المعادلة التفاضلية التي تعبر عن تركيز المادة الكيميائية في كل نقطة من نقاط الأنبوب.
2. بفرض أن $c = 2$ ، وأن هذه المادة مضمنة بثابت $\lambda = 3$ ، والتركيز الابتدائي لهذه المادة يعطى بدلالة التابع e^x ، احسب تركيز المادة في كل نقطة من نقاط الأنبوب في كل لحظة t ، ماذا تلاحظ بعد مرور فترة زمنية طويلة جداً.

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً:

بفرض لدينا خيط مرن و مشدود ومثبت في نهايته، طوله l ، يزاح عن وضع التوازن مسافة قدرها h في نقطة تبعد مسافة C عن إحدى نهايتيه ثم يترك. اكتب النموذج الرياضي الذي يعبر عن موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t . حل النموذج غير مطلوب

ثانياً:

بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس طويل جداً، معزول الجوانب، موضوع في درجة حرارة صفر. نرفع حرارة إحدى نهايتيه درجة واحدة ونحافظ عليها في هذه الدرجة. أوجد حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t وذلك إذا علمت أن ثابت الانتشار هو 1.

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

مع تمنياتي لكم بالنجاح

السؤال الأول (أولاً):

- 1- المعادلة التفاضلية الجزئية $\Delta u = 0$ كوي على $\mathbb{R}^n$ وصيغولات مستقلة (اثان على الأ) المشتقات الجزئية للتابع بالنسبة للمتغيرات المستقلة
- 2- شرط رويبن الكمية هو $\Delta u = 0$ شرط تعطين بدلالة قوة التابع ومشتقاته عند الحدود
- 3- معادلة الموجة التي هي $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ ، $c > 0$ ، $u_t = 0$ على $\mathbb{R}^n$ يمثل هذا التوافق
- 4- التتابع التوافقي هو حلول معادلة لابلاس $\Delta u = 0$

ثانياً:

1- نعتبر Ω المجال المفتوح (a, b) ، $c > 0$ ، $u(x, t)$ الدالة المكونة على المحور x

ويفرض ان تركيز المادة الكيميائية ثابت عبر المقطع A في كل نقطة x وفي كل وقت t

ولكن $u(x, t)$ قابلة للاشتقاق زمناً وتبين ان تركيز المادة الكيميائية في x والمكان x وبالذات كمية المادة المرصودة بين $x, x+h$ تعطى

$$\int_a^x A u(s, t) ds$$

وبما ان A ليس دالة متغيرة c نهاية في النهاية $h+t$ يكون ان h متغيراً في النهاية الكيميائية

$$\int_a^x A u(s, t) ds = \int_{a+ch}^{x+ch} A u(s, t+h) ds$$

نشتق الطرفين بالنسبة لـ x نمر

$$A u(x, t) = A u(x+ch, t+h)$$

$$u(x, t) = u(x+ch, t+h)$$

$$0 = u_t(x+ch, t+h) + c u_x(x+ch, t+h)$$

نحل h متقارب كـ 0 فنحصل على

$$u_t(x, t) + c u_x(x, t) = 0$$

$$u(x, t)$$

لنسم هذه المعادلة معادلة النقل

2-

$$u_t + 2u_x + 3u = 0 \quad (5)$$

$$u(x, 0) = e^x$$

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{2} = \frac{du}{-3u}$$

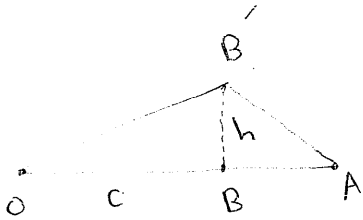
$$\Rightarrow x - 2t = c_1, \quad u e^{3t} = c_2 \Rightarrow$$

$$u = e^{-3t} f(x - 2t)$$

$$u(x, 0) = f(x) = e^x \Rightarrow u(x, t) = e^{-3t} e^{x-2t}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = e^{x-5t}$$

نلاحظ ان $u \rightarrow 0$ عندما $t \rightarrow \infty$ اي ان تركيز المادة يقل مع الزمن



$$(5) \quad u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

مثال الثاني

تفصيل الشروط الابتدائية والحدية

$$(5) \quad u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad \leftarrow \text{الشروط الحدية}$$

تفصيل الشروط الابتدائية

$$(5) \quad u(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{c} x & 0 \leq x \leq c \\ -\frac{h}{l-c} (x-l) & c \leq x \leq l \end{cases}$$

← صاعدة في OB
← صاعدة في BA

في جميع الحدود الشروط هي 0

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} h/c x & 0 \leq x \leq c \\ -\frac{h}{l-c} (x-l) & c \leq x \leq l \end{cases}$$

$$u_t = u_{xx} \quad (5) \quad x > 0, t > 0$$

$$u(0,t) = 1 \quad (5)$$

$$u(x,0) = 0 \quad (5)$$

$$\hat{u}(m,s) - u(x,0) = \hat{u}_{xx}(m,s) \Rightarrow$$

$$\hat{u}_{xx} - s \hat{u} = 0 \quad m^2 - s = 0 \Rightarrow m = \pm \sqrt{s}$$

$$\hat{u}(m,s) = C_1 e^{\sqrt{s} x} + C_2 e^{-\sqrt{s} x}$$

بما أن $u(x,t)$ يبقى محدوداً $x \rightarrow \infty$ $\Rightarrow C_1 = 0$ $\Rightarrow \hat{u}(m,s) = C_2 e^{-\sqrt{s} x}$

$$\hat{u}(m,s) = C_2 e^{-\sqrt{s} x} \quad (5)$$

نطبق الشرط الثاني

$$\hat{u}(0,s) = C_2 = \frac{1}{s}$$

$$\hat{u}(m,s) = \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s} x}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \text{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right)$$

النتيجة

السؤال الأول: (40 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. المعادلة التفاضلية الجزئية نصف الخطية
2. شروط ديريكليه الحدية
3. معادلة بواسون
4. الحل الضعيف لمعادلة تفاضلية جزئية

ثانياً: بفرض لدينا سلك متجانس معزول الجوانب، طوله l ، موضوع في درجة حرارة u_0 . نضع إحدى النهايتين بدرجة حرارة u_1 ، أما النهاية الثانية للسلك فهي معزولة. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t . (ايجاد حل النموذج غير مطلوب)

السؤال الثاني: (50 درجة)

أولاً: بفرض لدينا خيط مرن و مشدود ومثبت في نهايته، طوله l ، يزاح عن وضع التوازن ليأخذ الشكل $f(x) = \cos x$ ثم يترك

1. أوجد موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t .
2. اكتب العلاقة التي تعطي الطاقة الكلية للخيط. (استنتاج هذه العلاقة غير مطلوب).
3. بين فيما اذا كانت حركة الخيط متخامدة أم لا (مع التفسير).

ثانياً:

باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المسألة التالية (حيث $u(x,t)$ تبقى محدودة عندما $x \rightarrow \infty$)

$$u_t = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 1$$

- 1- المادة التقاطعية الجزئية نعت الخلية (5)
واحد أمثاله نأخذ فقط للمحولات المستقلة في المادة.
- شروط ديرنيليه الكمية هي شروط هيبة تظهر بدلالة قيمة المتابع عند الحدود (5)
- معادلات بواسون: هي معادلات لابلاس مع طرف ثاب (5) $\Delta u = f$
- الكلا الصفيق للمادة تقاطعية جزئية: هو حل للمادة التقاطعية ليس بالضرورة أن يكون زطامي (5)
ثابت الانتشار α^2 و $0 < u < l$
 $0 < t$

(10) $u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t)$

(5) $u(x,0) = u_0$

(5) $u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = u_l$

السؤال الثاني
أولاً : 1-

(5) $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

$u(x,0) = \cos x, u_t(x,0) = 0$

$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$

$u_t(x,t) = cf' - cg'$

$u(x,0) = f(x) + g(x) = \cos x$

$u_t(x,0) = cf'(x) - g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = g'(x)$

$f'(x) + g'(x) = -\sin x$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} \cos x$

(5) $\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2} (\cos(x+ct) + \cos(x-ct))$

(5) $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx$

(5) $\frac{dE}{dt} = c^2 (u_t(l,t) u_x(l,t) - u_t(0,t) u_x(0,t))$

(5) $\frac{dE}{dt} = 0 \Leftarrow u_t(0,t) = u_t(l,t) = 0 \Leftarrow E(t) = \text{constant}$
حركة الكتل غير متغيرة.

$$u_t = u_{xx} \quad ; \quad x > 0 \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 1 \quad t > 0$$

1.1

$$sU - u(x,0) = U_{xx} \quad (5)$$

$$U(0,s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow U_{xx} - sU = 0 \Rightarrow m^2 - s = 0 \Rightarrow U(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} \quad (5)$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow c_1 = 0 \quad ; \quad \sqrt{s} > 0 \Rightarrow U(x,s) = c_2 e^{-\sqrt{s}x} \quad (5)$$

$$U(0,s) = c_2 = \frac{1}{s}$$

$$U(x,s) = \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}x} \Rightarrow u(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2} dv$$

مكتبة
الشيخ
الاسلام

A to Z

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى
للعام الدراسي 2020-2021

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (40 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. المعادلة التفاضلية الجزئية
2. شروط ديريكليه الحدية
3. معادلة بواسون
4. التوابع التوافقية

ثانياً: بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس نصف لانهائي معزول الجوانب و درجة حرارته الابتدائية U_0 . نضع احدي نهايتيه في وسط درجة حرارته $0^\circ C$. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t . (إيجاد حل النموذج غير مطلوب)

السؤال الثاني: (50 درجة)

أولاً: بفرض لدينا خيط مرن و مشدود ومثبت في نهايتيه، طوله l ، يزاح عن التوازن ليأخذ الشكل $f(x) = \cos x$ ثم يترك

1. أوجد موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t .
2. اكتب العلاقة التي تعطي الطاقة الكلية للخيط. (استنتاج هذه العلاقة غير مطلوب).
3. بين فيما اذا كانت حركة الخيط متخامدة أم لا (مع التفسير).

ثانياً: بفرض لدينا المسألة التالية

$$u_t = u_{xx}, \quad 1 > x > 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 3 \sin 2\pi x, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0$$

باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المسألة المفروضة

مدرسة المقرر : د. منال حسين

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مسلم تطبيع صا د ل ا ت ت ق ا ط ل ي ة ح ر ي ت ة

ل ط ل ا ب ح س و ر ي ا ح س ي ا ت ع م 2020 - 2021

السؤال الأول

أولاً: 1- معادلة تفاضلية كوي على تابع x وتكون مستقيمين أو أكثر وصفتها بالشام الجزئية بالنسبة للمتغيرات المستقلة

2- شرط ديرنجليه الكيه هي شروط طهيية تظن د ل ا ل ة م ي ة الشام عن الكور

3- معادلة بوايون هي معادلة لابلاس مع طرف ثان $\Delta u = f$

4- التوابع التوافقية هي حلول معادلة لابلاس

ثانياً:

$$u_t = k u_{xx} \quad u > 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = U_0$$

$$u(x, t) = \alpha(u(x, t)) \quad |u(x, t)| < M$$

هذا تبارك عماري مع الدرس الخامس

السؤال الثاني

أولاً: 1-

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$u(x, 0) = \cos x, \quad u_t(x, 0) = 0$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

$$u(x, t) = f(x+ct) + g(x-ct) \quad \text{د ل ا ل ا ح س ي ة } f, g \text{ نوضه بار شرط}$$

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = \cos x$$

$$u_t(x, 0) = c f'(x) - c g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = g'(x)$$

$$f'(x) + g'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} \sin x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cos x$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} \cos x$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2} (\cos(x+ct) + \cos(x-ct))$$

عن أي على التمرين بأي طريقة أخرى من ذكره من المفروض يأخذ الطالب العلامة كاملة على

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx$$

$$\frac{dE}{dt} = c^2 (u_t(L, t) u_x(L, t) - u_t(0, t) u_x(0, t))$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Leftrightarrow u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0 \Leftrightarrow E(t) = \text{constant}$$

هذه تبارك عماري مع الدرس الخامس

ثانياً

$$u_t = u_{xx}$$

$$1 > x > 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = 3 \sin 2\pi x$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$s\hat{u} - u(x, 0) = \hat{u}_{xx} \Rightarrow \hat{u}_{xx} - s\hat{u} = -3 \sin 2\pi x$$

$$m^2 - s = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{s} \Rightarrow \hat{u}_h = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x}$$

$$\hat{u}_p = \frac{3}{s+4\pi^2} \sin 2\pi x$$

نم ايجاد الكالانك بالي طريقة معرفة

$$\hat{u}(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{3}{s+4\pi^2} \sin 2\pi x$$

$$\hat{u}(0, s) = 0, \hat{u}(1, s) = 0$$

بتطبيق الشروط الحدية لايجاد c_1, c_2

$$\hat{u}(0, s) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$$

$$\hat{u}(1, s) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$$\hat{u}(x, s) = \frac{3}{s+4\pi^2} \sin 2\pi x$$

لقد تحول لايجاد الكالانك

$$u(x, t) = 3 e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x$$

انتهى العمل

جامعة طرطوس	امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >	الدرجة: 90
كلية العلوم	لطلاب السنة الثالثة	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الثانية	
	للعام الدراسي 2019-2020	

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. الحل القوي لمعادلة تفاضلية جزئية
2. المعادلة التفاضلية الجزئية شبه الخطية
3. معادلة بواسون

ثانياً: بفرض لدينا سلك متجانس معزول الجوانب، طوله l ، موضوع في درجة حرارة ابتدائية $g(x)$. نبرد النهايتين لدرجة الصفر

1. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t .
2. أوجد التوزيع الحراري في كل نقطة من نقاط السلك.

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً:

بفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة منتظمة C عبر أنبوب رفيع G ذو مقطع منتظم A . استنتج (مع الشرح) المعادلة التفاضلية التي تعبر عن تركيز المادة الكيميائية في كل نقطة من نقاط الأنبوب.

ثانياً:

بفرض لدينا خيط لانهائي الطول، كان في البدء في وضع الراحة على المحور Ox . نجعل بدايته $x = 0$ تتحرك بشكل دوري بعلاقة $A_0 \sin wt$. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t . (حل النموذج غير مطلوب)

سؤال الأول [45]

أولاً

- ١- اكل التوي لمادة تقاضية جزئية هو حل مستر ومقابل للاشتقاق ومشتقاته
مستمرة
- ٢- المادة التقاضية الجزئية شبه القطعية: فكلية بالنسبة للأعلى مشتقا تحويه المادة
- ٣- مادل بوايون هي مادل لا بلا س مع طرف ثاني (غير متجانسة) (5)

$$\Delta u = f(x, y)$$

$$u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t) \quad 0 < x \leq l \quad 0 < t$$

$$(5) \quad u(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0$$

$$2- \text{نفرض } u(x, t) = X(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda$$

$$(5) \quad X'' - \lambda X = 0, \quad T' - k\lambda T = 0$$

$$u(0, t) = 0 = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow T(t) \neq 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(l, t) = 0 = X(l)T(t) = 0 \Rightarrow T(t) \neq 0 \Rightarrow X(l) = 0$$

$$X'' - \lambda X = 0 \Rightarrow m^2 - \lambda = 0$$

تناقش اكاله
a > 0

$$\Leftrightarrow m = \pm \sqrt{\lambda} \Leftrightarrow m^2 - \lambda = 0$$

$$X = A e^{\sqrt{\lambda} x} + B e^{-\sqrt{\lambda} x}$$

$$X(0) = 0 = A + B$$

$$X(l) = 0 = A e^{\sqrt{\lambda} l} + B e^{-\sqrt{\lambda} l} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} A = -B \Rightarrow B(e^{\sqrt{\lambda} l} - e^{-\sqrt{\lambda} l}) &= 0 \Rightarrow \\ A = B = 0 \end{aligned} \right\} \text{اكد الصفرى مرفوض}$$

$$X(x) = ax + b \Leftrightarrow X'' = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad -b$$

$$X(0) = b = 0$$

$$X(l) = al = 0 \Rightarrow a = 0$$

اكد الصفرى مرفوض

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x \Leftrightarrow m = \pm i \sqrt{\lambda} \Leftrightarrow \lambda < 0 \quad -c$$

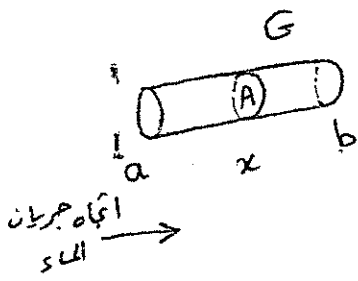
$$X(0) = A = 0, \quad B \neq 0 \quad X(l) = B \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} l = n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \Rightarrow X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$T' - \lambda k T = 0 \Rightarrow \frac{T'}{T} = \lambda k \Rightarrow T = e^{\lambda k t} = e^{\frac{-n^2 \pi^2}{l^2} k t} \quad (5)$$

$$u_n(x, t) = X_n(x) T(t) = C_n \sin \frac{n\pi}{l} x e^{\frac{-n^2 \pi^2}{l^2} k t} \Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x e^{\frac{-n^2 \pi^2}{l^2} k t}$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad u(x, 0) = g(x) \quad \text{للمة الثابت نظرية اويل}$$



45

السؤال الثاني

(5)

نعتبر G بالجال المقترح (a, b)

لنكن السرعة $c > 0$ بالاتجاه الموجب للحركة على المحور x

سنفرض تركيز المادة الكيميائية ثابت عند المقطع A في كل نقطة x وبنفسه يكون تركيز المادة

نيز بتغير x فقط. ولنكن $u(x, t)$ قابلة للاشتقاق مرتبة ونفرض تركيز المادة الكيميائية
النقطة x والوقت t ، وبالتالي كمية المادة الكيميائية المرصودة في مقطع الأنبوب بين الموضعين
 a و x تعطى بالعلاقة

$$(5) \int_a^x A u(s, t) ds$$

بأن المادي يجري بسرعة c فزمنة بالمقطة $h + t$ يكون لدينا نفس كمية المادة الكيميائية

$$(5) \int_a^x A u(s, t) ds = \int_{a+ch}^{x+ch} A u(s, t+h) ds$$

نشتق الطرفين بالنسبة لـ x نجد

$$A u(x, t) = A u(x+ch, t+h) \quad (5)$$

$$\Rightarrow u(x, t) = u(x+ch, t+h)$$

$$0 = u_t(x+ch, t+h) + c u_x(x+ch, t+h)$$

$$u_t(x, t) + c u_x(x, t) = 0 \quad \forall (x, t)$$

نشتق بالنسبة لـ h في
(5) نجد $0 = h$ في

$$(10) u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad 0 < x < \infty, 0 < t < \infty$$

$$u(x, 0) = 0$$

$$(10) u_t(x, 0) = 0 \quad \& \quad u(x, t) < M$$

$$u(0, t) = A_0 \sin \omega t$$

انتهى

سلم نصيب

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الفصلية الأولى
للعام الدراسي 2019-2020

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (40 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. النمذجة الرياضية

2. المعادلة التفاضلية الجزئية نصف الخطية

3. معادلة بواسون

ثانياً: بفرض لدينا سلك نحاسي متجانس بطول 200cm معزول الجوانب و درجة حرارته الابتدائية 0°C . بفرض أن احدى نهايتيه معزولة والنهائية الأخرى غمرت في ماء درجة حرارته مثبتة على 20°C .

اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t .

(ايجاد حل النموذج غير مطلوب)

السؤال الثاني: (50 درجة)

أولاً: استنتج الصيغة التي تعطي طاقة الذبذبات المستعرضة لوتر كتلته m وكثافته ρ .

ثانياً:

باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = 0$$

$$u(x, b) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

مدرسة المقرر : د. منال حسين

مع تمنياتي لكم بالنجاح

من

- مثلاً - المعادلة الرياضية هي عملية استنتاج المعادلة الرياضية التي تصف الحالة الفيزيائية
- المعادلة التفاضلية الجزئية تصف الخطية. هي معادلة يكون فيها درجة أو أكثر من متغيرين
- مثاله تابع فقط للمتغيرات المستقلة في المعادلة
- معادلة بواسون هي معادلة لابلاس مع طرف ثابت (غير صفر) $(\nabla^2 u = f(x, y))$

ثانياً

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \quad (4) \\ u_x(0, t) &= 0 \quad (5) \\ u_x(200, t) &= -\frac{h}{k} [u(200, t) - 20] \quad (5) \\ u(x, 0) &= 0^\circ \text{C} \quad (5) \end{aligned}$$

السؤال الثاني :

أولاً

$$\begin{aligned} E &= K + U \\ \text{طاقة حركية} & \quad \text{طاقة كامنة} \\ \text{طاقة حركة السفر } dx & \text{ من الخيط الذي يتحرك بسرعة } v = u_t \text{ هو } \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho dx (u_t)^2 \\ \text{وبالتالي الطاقة الحركية لكل الخيط} \end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho (u_t(x, t))^2 dx \quad (2)$$

الطاقة الكامنة هو تلك العمل الواجب بذله لكي يتقل الخيط من وضع متوازن إلى الوضع $u(x, t)$ والسفر dx في محصلة قوى الشد

$$T u_{xx} dx = T u_x \Big|_{x+\Delta x} - T u_x \Big|_x \quad (3)$$

يقطع خلال زمن dt المسافة $u_t(x, t) dt$ وبالتالي العمل المنجز للخيط كله هو

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^L T u_{xx} u_t dx \right\} dt &= \left\{ T u_x u_t \Big|_0^L - T \int_0^L u_x u_{xt} dx \right\} dt \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L T (u_x)^2 dx \right\} dt + T u_x u_t \Big|_0^L \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L T (u_x)^2 dx \Big|_0^t + \int_0^t T u_x u_t \Big|_0^L dt &\Rightarrow U = \frac{1}{2} \int_0^L T (u_x)^2(x, t) dx \quad (2) \end{aligned}$$

لأن الطرف الأيمن مع الحدود معدومة = 0

$$u(0, 0) = u(0, 1)$$

$$\Rightarrow E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho [u_t(m,t)]^2 dm + \frac{1}{2} \int_0^L T u_n^2(m,t) dm$$

ثانياً : بفرض أن الدليلين بالشكل $u(x,y) = X(x) Y(y)$

$$u_{xx} = X'' Y, \quad u_{yy} = X Y'' \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = 1 \quad (2)$$

$$u(0,y) = 0 \Rightarrow X(0) Y(y) = 0 \Rightarrow \boxed{X(0) = 0}$$

$$u(x,0) = 0 \Rightarrow X(x) Y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{Y(0) = 0}$$

$$u(a,y) = 0 \Rightarrow X(a) Y(y) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{X(a) = 0}$$

$$\boxed{u(x,b) = X(x) Y(b) = \sin \frac{n\pi x}{L}}$$

$$X' - \lambda X = 0$$

ناتجاً من

$$A = 0 \quad (\because X(b) = Ab = 0) \quad X(0) = B = 0 \quad X(x) = Ax + B \quad \Leftarrow \lambda = 0 \quad (3) \quad -1$$

مفروضاً

$$X(x) = A e^{\sqrt{\lambda} x} + B e^{-\sqrt{\lambda} x} \quad \Leftarrow m = \pm \sqrt{\lambda} \quad \Leftarrow m^2 - \lambda = 0 \quad \lambda > 0 \quad (3) \quad -2$$

$$X(0) = A + B \Rightarrow A = -B \quad X(b) = A(e^{\sqrt{\lambda} b} - e^{-\sqrt{\lambda} b}) = 0 \Rightarrow A = 0$$

مفروضاً

$$\Leftarrow m = \pm i\sqrt{-\lambda} \quad \Leftarrow m^2 = -(-\lambda) \quad \Leftarrow \lambda < 0 \quad -3$$

$$X(x) = A \cos \sqrt{-\lambda} x + B \sin \sqrt{-\lambda} x \quad (2)$$

$$X(0) = A = 0, \quad X(a) = B \sin \sqrt{-\lambda} a = 0, \quad B \neq 0$$

$$\sin \sqrt{-\lambda} a = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} a = n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

$$Y_n = B_n \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (2)$$

$$Y'' + \lambda_n Y = 0 \Rightarrow m^2 + \lambda_n = 0 \Rightarrow m^2 = -\lambda_n > 0$$

$$Y_n = a_n e^{\sqrt{-\lambda_n} y} + b_n e^{-\sqrt{-\lambda_n} y} \quad (2)$$

$$Y_n(y) = A_n \cosh \sqrt{-\lambda_n} y + B_n \sinh \sqrt{-\lambda_n} y$$

$$(2) \quad Y_n(y) = B_n \sinh \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \Leftarrow Y_n(0) = A_n = 0 \quad \Leftarrow Y(0) = 0 \quad \text{بافتراض}$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a} \quad (2)$$

نفس التوليد B_n بتطبيق الشروط الحدية

$$u(x,b) = \frac{\sin n\pi x}{L}$$

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\sinh \frac{n\pi b}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \left\{ \begin{aligned} B_n &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{a} dx \left(\sinh \frac{n\pi b}{a} \right)^{-1} \\ &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{a} dx \left(\sinh \frac{n\pi b}{a} \right)^{-1} \end{aligned} \right.$$

الدرجة: 90
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الثالثة للعام الدراسي 2018-2019

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (36 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. مسألة القيم الابتدائية معرفة جيداً
2. المعادلة التفاضلية الجزئية شبه الخطية
3. المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية من النوع الزائدي

ثانياً: بفرض لدينا سلك متجانس بطول L نهايتيه معزولتين، وليكن لدينا مصدر حراري

$$u(x,0) = x \quad q_0 \neq 0, \text{ ولتكن درجة الحرارة الابتدائية}$$

1. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t .
2. احسب الطاقة الحرارية الكلية لكامل السلك.

السؤال الثاني: (54 درجة)

أولاً: بفرض لدينا خيط لانهاشي الطول، كان في البدء في وضع الراحة على المحور OX . نجعل بدايته $x = 0$ تتحرك بشكل دوري بعلاقة $A_0 \sin wt$. أوجد موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t .

ثانياً: باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المسألة التالية (حيث $u(x,t)$ تبقى محدودة عندما $x \rightarrow \infty$)

$$u_t = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 1$$

مدرسة المقرر : د. منال حسين

مع تمنياتي لكم بالنجاح

س

السؤال الأول : [36]

أولى

1- نقول عن مسألة القيم الابتدائية أن معرفة جيداً إذا كانت تحل على صيغة مغلقة

بشكل مستمر بالقيم الابتدائية (7)

2- إذا كانت خطية بالنسبة للأعداد متفق نحو به المعادلة (7)

3- إذا كان $B^2 u_{AC} > 0 \Leftrightarrow A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G$ (7)

ثانياً

$$u_t = k u_{xx} + q_0 \quad (7) \quad -1$$

$$u_m(0, t) = u_x(L, t) = 0$$

$$u(x, 0) = x$$

$$E(t) = \int_0^L u(x, t) dx \quad (4) \quad -2$$

$$\int_0^L u_t(x, t) dx = \int_0^L k u_{xx} dx + \int_0^L q_0 dx = k u_x \Big|_0^L + q_0 L$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$$

$$\int_0^L u_t(x, t) dx = q_0 L \quad (2)$$

$$E(t) = \int_0^L u(x, t) dx = q_0 L t + C$$

$$E(0) = \int_0^L u(x, 0) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{L^2}{2} \Rightarrow E(t) = q_0 L t + \frac{L^2}{2} \quad (2)$$

المعادلة بالنسبة لـ t

السؤال الثاني : [54]

أولى

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} \quad (5) \quad 0 < x, 0 < t$$

$$u(x, 0) = 0$$

$$(5) \quad u_t(x, 0) = 0 \quad \& \quad u(x, t) < M$$

$$u(0, t) = A_0 \sin \omega t$$

بتطبيق تحويل لابلاس

$$s^2 \hat{u}(x, s) - s u(x, 0) - u_t(x, 0) = \alpha^2 \hat{u}_{xx}$$

$$(5) \quad \hat{u}_{xx} - \frac{s^2}{\alpha^2} \hat{u}(x, s) = 0 \Rightarrow m^2 - \frac{s^2}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{s}{\alpha}$$

$$\hat{u}(x, s) = c_1 e^{\frac{s}{\alpha} x} + c_2 e^{-\frac{s}{\alpha} x} \quad (5)$$

$$(2) \quad \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2} = c_1 + c_2 \quad (1) \quad \hat{u}(x, s) < M \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2} \quad (1)$$

لطبقت الشرط الكهني $\hat{u}(0, s) = \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2}$ في

$$\hat{u}(x,s) = \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2} e^{-s/\alpha x} \Rightarrow \overset{(1)}{u(x,t) = G(t) = \begin{cases} A_0 \sin \omega(t - \frac{x}{\alpha}) ; t > \frac{x}{\alpha} \\ 0 ; t < \frac{x}{\alpha} \end{cases}}$$

$$u_t = u_{xx} ; x > 0 , t > 0$$

نات:

$$\textcircled{7} s \hat{u}(x,s) - u(x,0) = \hat{u}_{xx} , \hat{u}(0,s) = \frac{1}{s} \textcircled{3}$$

$$\hat{u}_{xx} - s \hat{u}(x,s) = 0 \Rightarrow m^2 - s = 0 \Rightarrow \hat{u}(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} \textcircled{5}$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow c_1 = 0 \textcircled{1} ; \sqrt{s} > 0 \Rightarrow \hat{u}(x,s) = c_2 e^{-\sqrt{s}x} \textcircled{5}$$

$$\hat{u}(0,s) = c_2 = \frac{1}{s} \textcircled{1} \Rightarrow \hat{u}(x,s) = \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}x}$$

$$\textcircled{2} u(x,t) = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2} dv$$

انتهى

السؤال الأول: (40 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية:

1. رتبة معادلة تفاضلية جزئية
2. النمذجة الرياضية
3. المعادلة التفاضلية الجزئية شبه الخطية
4. المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية من النوع الزائدي

ثانياً:

1. اكتب بدون استنتاج الشكل العام لمعادلة الموجة في البعد الواحد
2. استنتج الصيغة التي تعطي طاقة الذبذبات المستعرضة لوتر كتلته m وكثافته ρ .
3. احسب قيمة تغير هذه الطاقة بالنسبة للزمن في حالة النهايات المثبتة.

السؤال الثاني: (50 درجة)

أولاً: بفرض لدينا سلك متجانس معزول الجوانب، طوله l ، موضوع في درجة حرارة ابتدائية $g(x)$. نبرد النهايتين لدرجة الصفر

1. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t .
2. أوجد التوزيع الحراري في كل نقطة من نقاط السلك.

ثانياً: باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المسألة التالية

$$u_t = 2u_{xx}$$

حيث

$$u(0,t) = u(5,t) = 0, \quad u(x,0) = 10 \sin 4\pi x$$

انتهت الأسئلة

مدرسة المقرر : د. منال حسين

مع تمنياتي لكم بالنجاح

حس

صالح حسن

أولاً الأول

1. صير رتبة أعلى من 5 متعة هزينة في الماداة

2. التذمة الرياضية هي عملية استنتاج المعادلة التقاضية التي تصف الحالة الفيزيائية

3. اذا كانت خطية بالنسبة لأعلى من 5 متعة هزينة الماداة

4. اذا كانت $B^2 - 4AC > 0 \Leftrightarrow Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$

ثانياً

1. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

2. نعين مربعة الذبذبات المستمرة بالعلاقة $E = K + U$
طاقة كامنة $\rightarrow$ طاقة حركية

طاقة حركة السفر dx من الخيط الذي يحركه سرعة $v = u_t$ هي $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho dx (u_t)^2$
وبالتالي الطاقة الحركية لكل الخيط هي $K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho [u_t(x,t)]^2 dx$

الطاقة الكامنة هي U عند الطرف ب نهاية الخيط من وضع التوازن إلى الوضع

$u(x,t)$ والسفر dx تحت قوة الشد Tu_{xx}
 $Tu_{xx} dx = Tu_{xx} \Big|_{x+dx} - Tu_{xx} \Big|_x$

يقطع خلال زمن dt المسافة $u(x,t) dt$ وبالتالي العمل المبذول الخيط كله هو

$$\left\{ \int_0^L Tu_{xx} u_t dx \right\} dt = \left\{ Tu_{xx} u_t \Big|_0^L - T \int_0^L u_{xx} u_{xt} dx \right\} dt$$

$$= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L T(u_x)^2 dx \right\} dt + Tu_{xx} u_t \Big|_0^L$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^L T(u_x)^2 dx \Big|_0^t + \int_0^t Tu_{xx} u_t \Big|_0^L dt$$

$$= 0 \text{ لأن الطرفين حقيقتين } \Rightarrow \text{الطرفية مسدودة}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \int_0^L T u_x^2(x,t) dx$$

$$\Rightarrow E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho [u_t(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L T u_x^2(x,t) dx$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^L [2\rho u_t u_{tt} + 2T u_{xx} u_{xt}] dx = \int_0^L \rho u_t u_{tt} + T(u_{xx} u_t \Big|_0^L - \int_0^L u_{xt} u_{xx} dx)$$

$$= T u_{xx}(L,t) u_t(L,t) - T u_{xx}(0,t) u_t(0,t) + \int_0^L u_t (\rho u_{tt} - T u_{xx}) dx$$

$$\Leftrightarrow 0 = u_t(0,t) = u_t(L,t) \text{ وكذلك } 0 = u(0,t) = u(L,t)$$

المعادلة الثانية 1. $u(x,t) = K u_{xx}(x,t)$ (5)
 $0 \leq x \leq l$
 $0 < t$
 $u(x,0) = g(x)$ (2)
 $u(0,t) = u(l,t) = 0$ (2)

2. نفرض $u(x,t) = X(x)T(t)$ (2)
 $1 = \frac{X''}{X} = \frac{T'}{KT}$
 (2) $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{KT}$

$X'' - \lambda X = 0$, $T' - k\lambda T = 0$

$u(0,t) = 0 = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$ (2)
 $u(l,t) = 0 = X(l)T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0$

$X'' - \lambda X = 0 \Rightarrow m^2 - \lambda = 0$

نأخذ الحالة 1- $\lambda = 0$
 $X(x) = ax + b$ $\Rightarrow X'' = 0$ (1)
 $0 = X(0) = b$
 $0 = X(l) = al$ $\Rightarrow a = b = 0$
 الحل الصفري مرفوض

2- $\lambda > 0$
 $X = A e^{\sqrt{\lambda}x} + B e^{-\sqrt{\lambda}x}$ $\Rightarrow m = \pm \sqrt{\lambda}$ $\Rightarrow m^2 - \lambda = 0$
 $X(0) = 0 = A + B$ $\Rightarrow A = -B$
 $X(l) = 0 = A e^{\sqrt{\lambda}l} + B e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0$ $\Rightarrow B(e^{-\sqrt{\lambda}l} - e^{\sqrt{\lambda}l}) = 0$ $\Rightarrow A = B = 0$
 الحل الصفري مرفوض

3- $\lambda < 0$
 $X = A \cos \sqrt{-\lambda}x + B \sin \sqrt{-\lambda}x$ $\Rightarrow m = \pm i\sqrt{-\lambda}$ $\Rightarrow m^2 - \lambda = 0$
 $X(0) = 0 \Rightarrow A \cos \sqrt{-\lambda}0 + B \sin \sqrt{-\lambda}0 = 0$ $\Rightarrow B \neq 0 \Rightarrow \sin \sqrt{-\lambda}l = 0$
 $\sqrt{-\lambda}l = n\pi$ $\Rightarrow \sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{l}$ $\Rightarrow \lambda = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ $n \in \mathbb{Z}$

$T' - \lambda k T = 0 \Rightarrow \frac{T'}{T} = \lambda k \Rightarrow T = e^{\lambda k t} = e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} k t}$

$u_n(x,t) = X(x)T(t) = C_n \sin \frac{n\pi}{l}x e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} k t}$ (2)

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l}x e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} k t}$ لتعيين الثوابت نطبق الشرط

$u(x,0) = g(x)$

$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l}x$ (1)
 $C_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx$ (2)

في المثال 2
 $SU(x,s) - u(x,0) - 2U_{xx}(x,s) = 0 \Rightarrow U_{xx} - \frac{1}{2}SU(x,s) = -5 \sin 4\pi x$; $U(0,s) = U(5,s) = 0$
 $U_h = C_1 e^{\sqrt{5/2}x} + C_2 e^{-\sqrt{5/2}x}$, $U_p = A \cos 4\pi x + B \sin 4\pi x$; $A=0$, $B = \frac{5}{16\pi^2 + \frac{1}{2}} \Rightarrow$
 $U(x,s) = C_1 e^{\sqrt{5/2}x} + C_2 e^{-\sqrt{5/2}x} + \frac{10}{32\pi^2 + 5} \sin 4\pi x$ $\Rightarrow u(x,t) = 10 e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x$

سليم نصير

الدرجة: ٧٥
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٧-٢٠١٨

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: وضح كل من المفاهيم التالية.



١. مسألة القيم الابتدائية معرفة جيداً

٢. الحل القوي لمعادلة تفاضلية جزئية

٣. المعادلة التفاضلية الجزئية نصف الخطية

٤. المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية من النوع المكافئ

ثانياً: اكتب بدوئ استنتاج الشكل العام لمعادلة الموجة في البعد الواحد ، ومن ثم استنتج الصيغة التي تعطي طاقة الذبذبات المستعرضة لوتر كتلته m وكثافته ρ .

ثالثاً: بفرض لدينا سلك متجانس معزول الجوانب، طوله l ، موضوع في درجة حرارة u_0 . نضع إحدى النهايتين بدرجة حرارة u_1 ، أما النهاية الثانية للسلك فهي معزولة. اكتب النموذج الرياضي الذي يصف حرارة كل نقطة من نقاط السلك عند الزمن t . (ايجاد حل النموذج غير مطلوب)

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً: بفرض لدينا خيط لانهائي الطول، كان في البدء في وضع الراحة على المحور OX . نجعل بدايته $x = 0$ تتحرك بشكل دوري بعلاقة $A_0 \sin wt$. أوجد موضع كل نقطة من نقاط الخيط في أي لحظة t .

ثانياً: باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المسألة التالية $u_x + u_t = x + t$

حيث $u(x,0) = u(0,t) = 1$

ثالثاً: بفرض أن تحويل لابلاس يرمز ب L

$$L\left(\frac{\sin at}{t}\right) = \arctan\left(\frac{a}{s}\right)$$

برهن أن

1 - نقول عن مسألة قيم ابتدائية أن معرفتها جيداً إذا كانت تملك حل وحيد متعلق بشكل مستمر بالقيم الابتدائية

2 - الحل القوي لمعادلة تفاضلية عريضة هو حل مستمر وقابل للاشتقاق ومتقانة مستمرة

3 - المعادلة التفاضلية الخطية نصف الخطية هي معادلة يكون فيها درجة أعلى من واحد وأصله تابع فقط للمتغيرات المستقلة في المعادلة

4 - المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية من النوع الثاني هي معادلة من الشكل

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

حيث $B^2 - 4AC \neq 0$

ثانياً: الشكل العام لمعادلة الموجة في البعد الواحد هو

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

نفس الصيغة التي تعطى طاقة الاهتزازات المستمرة السرعة u + طاقة كاسية u

طاقة حركة العنصر dx من الحيط الذي يكون بسرعة u $\rightarrow$ $v = u_t$ هي $\frac{1}{2} \rho dx (u_t)^2$

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho [u_t(x,t)]^2 dx$$

طاقة الكاسية للاهتزازات المستمرة للحيط :
نسب البعد الواحد له لكي ينقل الحيط من وضع التوازن إلى الوضع $u(x,t)$

$$u(x,0) = 0$$

$$T u_x \Big|_{x+\Delta x} - T u_x \Big|_x = T u_{xx} \Delta x$$

القوى المطبقة من
محاور الـ dx

تقطع خلال الزمن dt البعد

$$\int_0^L u_x dx \Big|_t = \left(T u_x u_t \Big|_0^L - T \int_0^L u_{xx} u_t dx \right) dt$$

بإيراد الحاصل في

$$\int_0^L T u_x^2 dx \Big|_t + T \int_0^L u_x u_{xt} dx \Big|_t - \frac{1}{2} \int_0^L \rho u_t^2 dx \Big|_t = 0$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L T u_n^2(x,t) dx$$

الاول

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L T u_n^2(x,t) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho u_t^2(x,t) dx$$

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$$

$$0 < x < l, t > 0$$

المعادلة

$$u(x,0) = u_0, u_x(0,t) = 0, u(l,t) = u_1$$

[45]

السؤال الثاني

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$$

$$0 < x, t < \infty$$

أولاً :

$$u(x,0) = 0$$

$$u_t(x,0) = 0 \quad \& \quad u(x,t) < M$$

$$u(0,t) = A_0 \sin \omega t$$

$$s^2 \hat{u}(x,s) - s u(x,0) - u_t(x,0) = \alpha^2 \hat{u}_{xx}$$

$$\hat{u}_{xx} - \frac{s^2}{\alpha^2} \hat{u}(x,s) = 0$$

$$m^2 - \frac{s^2}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{s}{\alpha} \Rightarrow \hat{u}(x,s) = C_1 e^{s/\alpha x} + C_2 e^{-s/\alpha x}$$

نطبق الشرط الكلي

$$\hat{u}(0,s) = \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2} = C_1 + C_2$$

$$C_2 = \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2} \in C_1 = 0 \in \hat{u}(x,s) < M$$

$$\hat{u}(x,s) = \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2} e^{-s/\alpha x} \Rightarrow u(x,t) = G(t) = \begin{cases} A_0 \sin \omega(t - \frac{x}{\alpha}) & ; t > \frac{x}{\alpha} \\ 0 & t < \frac{x}{\alpha} \end{cases}$$

المعادلة

$$u_x + u_t = x + t, u(x,0) = u(0,t) = 1$$

$$u_x + s \hat{u}(x,s) - u(x,0) = \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2} \Rightarrow \hat{u}_x + s \hat{u}(x,s) = \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2} + 1$$

$$m = e^{s/\alpha} \Rightarrow \hat{u}(x,s) = e^{-sx} (C + \int (\frac{x}{s} + \frac{1}{s^2} + 1) e^{sx} dx) = C e^{-sx} + \frac{1}{s} + \frac{x}{s^2}$$

$$\hat{u}(0,s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{s} = C + \frac{1}{s} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \hat{u}(x,s) = \frac{1}{s} + \frac{x}{s^2} \Rightarrow u(x,t) = 1 + xt$$

$$\text{rect} \left(g \frac{a}{s} \right) = \frac{-a}{s^2 + a^2} \quad \& \quad \mathcal{L}^{-1}(f'(s)) = -t f(t) \Rightarrow f(t) = \frac{\mathcal{L}^{-1}(f'(s))}{-t} = \frac{\mathcal{L}^{-1}(\frac{a}{s^2 + a^2})}{t}$$

$$t) = \frac{\sin at}{t} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\text{rect} g \frac{a}{s}) = \frac{\sin at}{t} \Rightarrow \mathcal{L} \left(\frac{\sin at}{t} \right) = \text{rect} \left(a \frac{x}{s} \right)$$

الدرجة: ٧٥
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الاضافية ٢٠١٦-٢٠١٧

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (٢٠ درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$xu_{xx} + 25x^2yu_{xy} + xu_{yy} + yu_x + u = 0$$

عين المنطقة D في R^2 التي تجعل المعادلة : ١- مكافئية ٢- ناقصية ٣- زائدية

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

بفرض لدينا سلك متجانس بطول ٢٠ ، درجة حرارة نهايتيه الابتدائية (على الترتيب ٢٠ ، ٦٠) ،
ودرجة حرارة نهايتيه بعد الاتزان (على الترتيب ٣٠ ، ٤٠) . أوجد التوزيع الحراري عند الزمن t
والموضع x .

السؤال الثالث: (٣٥ درجة)

باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = 0 ,$$

$$u(x, b) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

مدرسة المقرر : د. منال حسين

مع تمنياتي لكم بالنجاح

حس

سليم تصحيح مقرر / مصادر لاسي تقاطعية جزئية /

20

سؤال الأول: $xu_{xx} + 25x^2y u_{xy} + xu_{yy} + yu_x + u = 0$

$\Delta = B^2 - 4AC$
 $\Delta = 625x^4y^2 - 4x^2 \in$

1 - زائدية $\in B^2 - 4AC > 0$
 $\in 625x^4y^2 - 4x^2 > 0$

2 - كافية $\in B^2 - 4AC = 0$
 $\in 625x^4y^2 - 4x^2 = 0$

3 - ناقصة $\in B^2 - 4AC < 0$
 $\in 625x^4y^2 - 4x^2 < 0$

السؤال الثاني 20

$u(n,0) = 20 + \frac{60-20}{20} n = 20 + 2n$

التوزيع بعد الزمان $w(n) = 3 + \frac{40-30}{20} n = 30 + \frac{1}{2} n$

$u(n,t) = w(n,t) + \bar{u}(n,t)$

$\bar{u}_t = k \bar{u}_{nn}$

$\bar{u}(0,t) = \bar{u}(L,t) = 0$

$\bar{u}(n,t) = X(n)T(t)$

$X'' - \lambda X = 0, T' - k\lambda T = 0$

$\bar{u}(0,t) = 0 = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$

$\bar{u}(L,t) = 0 = X(L)T(t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0$

$m = \pm i\sqrt{\lambda} \in m^2 - \lambda = 0$

$X = A \cos \sqrt{\lambda} n + B \sin \sqrt{\lambda} n$

$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$B \sin \sqrt{\lambda} L = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Rightarrow X_n = A_n \sin \frac{n\pi n}{L}$

$T = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} kt}$

$\bar{u}_n(n,t) = X(n)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi n}{L} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} kt}$

$u(n,t) = 30 + \frac{1}{2} n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n$

$20 + 2n = u(n,0) = 30 + \frac{1}{2} n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi n}{L} \Rightarrow$

السؤال الثالث

(5)

$$u = X(m) Y(y)$$

نفرض أن الحدود هي

$$u_{mn} = X'' Y, u_{yy} = X Y'' \Rightarrow X'' + \frac{Y''}{Y} = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \quad (5)$$

$$u(0, y) = 0 \Rightarrow X(0) Y(y) = 0 \Rightarrow \boxed{X(0) = 0}, u(a, y) = 0 \Rightarrow X(a) Y(y) = 0 \Rightarrow \boxed{X(a) = 0} \quad (1)$$

$$u(m, 0) = 0 \Rightarrow X(m) Y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{Y(0) = 0} \quad (1)$$

$$u(m, b) = X(m) Y(b) = \frac{\sin \frac{n\pi x}{L}}{L} \quad (1)$$

$$X'' - \lambda X = 0 \quad (1)$$

نناقش الحالات

$$1- \lambda = 0 \Rightarrow X(m) = A\lambda + B \Leftarrow \begin{cases} X(0) = B = 0 \\ X(b) = Ab = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 0$$

$$2- \lambda > 0 \Rightarrow m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m = \pm \sqrt{\lambda} \Rightarrow X(m) = Ae^{\sqrt{\lambda} m} + Be^{-\sqrt{\lambda} m}$$

$$X(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B, X(b) = A(e^{\sqrt{\lambda} b} - e^{-\sqrt{\lambda} b}) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$3- \lambda < 0 \Rightarrow m^2 = -(-\lambda) \Rightarrow m = \pm i\sqrt{\lambda} \Rightarrow X(m) = A \cos \sqrt{\lambda} m + B \sin \sqrt{\lambda} m \quad (2)$$

$$X(0) = A = 0, X(a) = B \sin \sqrt{\lambda} a = 0, B \neq 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} a = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} a = n\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{a^2} \quad (2)$$

$$X_n = B_n \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (2)$$

$$(1) Y'' + \lambda_n Y = 0 \Rightarrow m^2 + \lambda_n = 0 \Rightarrow m^2 = -\lambda_n > 0$$

$$Y_n = a_n e^{\sqrt{\lambda_n} y} + b_n e^{-\sqrt{\lambda_n} y} \quad (1)$$

$$\Rightarrow Y_n(y) = A_n \cosh \sqrt{\lambda_n} y + B_n \sinh \sqrt{\lambda_n} y, Y_n(0) = A_n = 0 \Leftarrow Y(0) = 0$$

$$Y_n(y) = B_n \sinh \left(\frac{n\pi y}{a} \right)$$

$$u(m, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a} \quad (2)$$

$$u(m, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{L} \sinh \frac{n\pi b}{a}$$

$$\sinh \frac{n\pi b}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\sinh \frac{n\pi b}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

الدرجة: ٧٥
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (١٥ درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$y^2 u_{xx} + 5u_{xy} - 2x^3 u_{yy} - 3u_x + 2u = 0$$

عين المنطقة D في R^2 التي تجعل المعادلة: ١- مكافئة ٢- ناقصية ٣- زائدية

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

بفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة منتظمة C عبر أنبوب رفيع G ذو مقطع منتظم A . استنتج المعادلة التفاضلية التي تعبر عن تركيز المادة الكيميائية في كل نقطة من نقاط الأنبوب.

السؤال الثالث: (٤٠ درجة)

أولاً: بفرض لدينا خيط مرن مشدود وموضوع بشكل أفقي ومثبت في نهايته، نزيح الخيط عن وضع التوازن ونتركه فنلاحظ موجة تعبر هذا الخيط:

١. اكتب (دون استنتاج) النموذج الرياضي الذي يصف الانزياح العمودي للخيط عن وضع التوازن في الموضع x واللحظة t مع وجود التخميد.

٢. اذا علمت أن الطاقة الكلية للخيط تعطى بالعلاقة

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(u_t^2 + c^2 u_x^2 \right) dx$$

برهن أن الطاقة الكلية للخيط متخامدة.

ثانياً: باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المعادلة

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0; \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = 2 \sin x$$

سليم تصحيح مقرر مساحات تفاضلية جزئية
لحساب السنة الثالثة من 2
0.17 - 0.16

15

سؤال الأول:

$$y^2 u_{xx} + 5u_{xy} - 2x^3 u_{yy} - 3u_x + 2u = 0$$

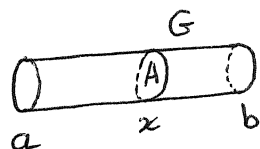
$$\Delta = 25 - 4(y^2)(-2x^3) \quad (3)$$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

- 1- زائدية $\Leftarrow B^2 - 4AC > 0$
 - 2- مكافئية $\Leftarrow B^2 - 4AC = 0$
 - 3- ناقصية $\Leftarrow B^2 - 4AC < 0$
- (4) $25 + 8x^3y^2 > 0$
- (4) $25 + 8x^3y^2 = 0$
- (4) $25 + 8x^3y^2 < 0$

سؤال الثاني

20



→ اتجاه جريان الماء

نغير عن G بالمجال المفتوح (a, b)

لـ السرعة $c > 0$ بالاتجاه الموجب للحركة

المحور x. ونفرض أن تركيز المادة الكيميائية

بت عبر المقطع A في كل نقطة x وبذلك تركيز المادة الكيميائية يتغير بتغير x فقط

الكمية u(x, t) قابلة للاشتقاق ومستمرة وتعتبر عن تركيز المادة الكيميائية في النقطة x

في اللحظة t، وبالتالي كمية المادة الكيميائية الموجودة في مقطع الأنبوب بين الموصفين x و x+h

$$\int_a^x Au(s, t) ds$$

بما أن الماء يجري بسرعة c فإنه بالكمية h+t ستكون لدينا نفس كمية المادة الكيميائية

$$\int_a^x Au(s, t) ds = \int_{a+ch}^{x+ch} Au(s, t+h) ds \quad (4)$$

نشتق الطرفين بالنسبة لـ x في

$$Au(x, t) = Au(x+ch, t+h) \Rightarrow u(x, t) = u(x+ch, t+h) \quad (4)$$

نشتق بالنسبة لـ h في

$$0 = u_t(x+ch, t+h) + cu_x(x+ch, t+h)$$

نحل h $\leftarrow 0$ في

$$u_t(x, t) + cu_x(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \quad (4)$$

السؤال الثالث

أولاً - النموذج الرياضي

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \gamma u_t = 0 \quad (5)$$

$$\gamma > 0, \quad 0 < x < L$$

$$u_t(l, t) = u_t(0, t) = 0 \quad (5)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx$$

-2

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^L (2 u_t u_{tt} + 2 c^2 u_x u_{xt}) dx$$

$$= \int_0^L u_t u_{tt} dx + c^2 (u_x u_t \Big|_0^L - \int_0^L u_t u_{xx} dx) \quad (5)$$

$$= c^2 u_t(l, t) u_x(l, t) - c^2 u_t(0, t) u_x(0, t) + \int_0^L u_t (u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx$$

$$= 0 + \int_0^L u_t (-\gamma u_t) dx = - \int_0^L \gamma u_t^2 dx < 0 \quad (5)$$

$$\frac{dE}{dt} < 0 \quad \Leftarrow \text{بالتالي الطاقة الكلية متناقصه}$$

LL

$$u_{tt} - g u_{xx} = 0; \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = 2 \sin x$$

$$s^2 U(x, s) - s u(x, 0) - u_t(x, 0) - g U_{xx} = 0 \quad (10)$$

$$s^2 U(x, s) - g U_{xx} - 2s \sin x = 0$$

$$U_{xx} - \frac{1}{g} s^2 U = -\frac{2}{g} s \sin x \quad (3)$$

$$m^2 - \frac{1}{g} s^2 = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{1}{\sqrt{g}} s$$

$$U_h(x, s) = C_1(s) e^{-\frac{1}{\sqrt{g}} s x} + C_2(s) e^{\frac{1}{\sqrt{g}} s x}$$

$$U(0, s) = 0, \quad U(\pi, s) = 0$$

$$U(0, s) = C_1(s) + C_2(s) = 0 \quad (2)$$

$$U(\pi, s) = C_1(s) e^{-\frac{1}{\sqrt{g}} s \pi} + C_2(s) e^{\frac{1}{\sqrt{g}} s \pi} = 0$$

$$\Rightarrow C_1(s) = C_2(s) = 0$$

$$U_p(x, s) = A(s) \sin x + B(s) \cos x$$

$$(U_p)_x = A(s) \cos x - B(s) \sin x$$

$$(U_p)_{xx} = -A(s) \sin x - B(s) \cos x$$

$$A(s) = \frac{2/g s}{1 + \frac{1}{g} s^2}, \quad B(s) = 0 \quad (2)$$

$$U(x, s) = \frac{2/g s}{1 + \frac{1}{g} s^2} \sin x \Rightarrow$$

$$u(x, t) = 2 \sin x \cos 3t \quad (3)$$

الدرجة: ٧٥
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧

جامعة طرابلس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (١٥ درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$xu_{xx} - 6xu_{xy} + x^4u_{yy} + yu_x + u = 0$$

عين المنطقة D في R^2 التي تجعل المعادلة: (١) مكافئية (٢) ناقصية (٣) زائدية

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

بفرض لدينا خيط مرن مشدود (كثافته ثابتة ρ) وموضوع بشكل أفقي ومثبت في نهايته اليسارية L و اليمينية R . نهز الخيط في نهايته L عندها نلاحظ موجة تعبر هذا الخيط. استنتج (مع الشرح) النموذج الرياضي الذي يصف الانزياح العمودي للخيط عن وضع التوازن في الموضع x واللحظة t .

السؤال الثالث: (٤٠ درجة)

أولاً:

$$xu_x + yu_y = xe^{-u}$$

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$u(x, x^2) = 0$$

المحقق للشرط

ثانياً:

بفرض لدينا سلك متجانس بطول ٢٠، درجة حرارته الابتدائية (على الترتيب ٦٠، ٢٠)، ودرجة حرارة نهايته بعد الاتزان (على الترتيب ٤٠، ٣٠). أوجد التوزيع الحراري عند الزمن t والموضع x .

مدرسة المقرر: د. منال حسين

مع تمنياتي لكم بالتفاح

المادة: الفيزياء
الرياضيات
الموضوع: الميكانيكا
الطراز: السنة الثالثة من 2016-2017

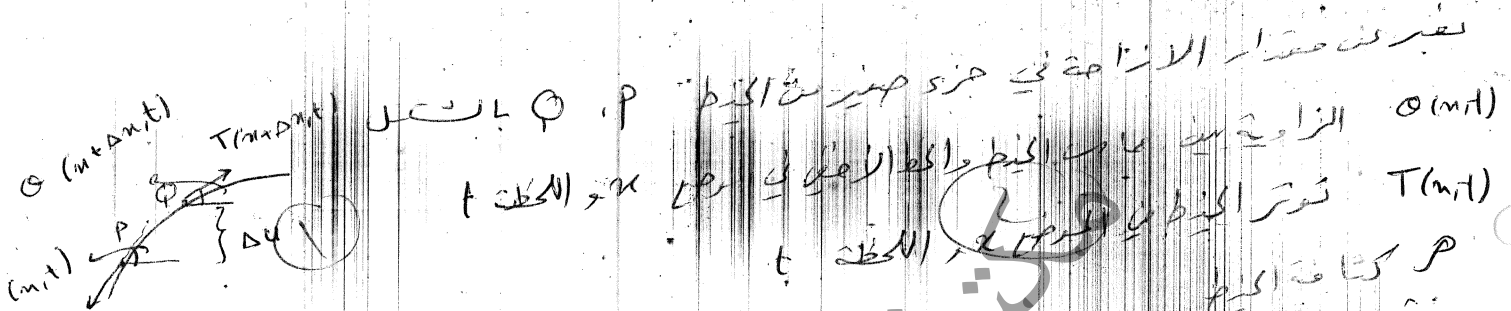
الرياضيات

السؤال الأول

$$\Delta = B^2 - 4AC \Rightarrow \Delta = 36x^2 - 4x^5$$

$$\begin{aligned} 36x^2 - 4x^5 > 0 & \Leftrightarrow B^2 - 4AC > 0 \\ 36x^2 - 4x^5 < 0 & \Leftrightarrow B^2 - 4AC < 0 \\ 36x^2 - 4x^5 = 0 & \Leftrightarrow B^2 - 4AC = 0 \end{aligned}$$

السؤال الثاني



نعتبر مقدار الانزياح في جزي صغير من الكون P, Q بالتالي

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

(2) مقدار الانزياح بين P, Q هو u ومشتقاته صغيرة بعدد كائن $\Delta s \approx \Delta u$

(3) القوة المطبقة على هذا الجزيء من الكون هي $T(t)$ على P و $T(t+\Delta t)$ على Q

(4) المتجه المذكور يكون فقط متجه الجاذبية $T(t)$ و $T(t+\Delta t)$ مع الزاوية $\theta(t)$ مع الأفق

القوة المطبقة على جزيء الكون

القوة الاخرى مع الأفق

$$-T(t) \cos \theta(t) + T(t+\Delta t) \cos \theta(t+\Delta t) = 0$$

$$T(t) \cos \theta(t) = T(t+\Delta t) \cos \theta(t+\Delta t)$$

3. المشتقات الصغيرة = الكمية x الساع 2

$$T(t+\Delta t) \sin \theta(t+\Delta t) - T(t) \sin \theta(t) = \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Delta t = \tan \theta(t+\Delta t) - \tan \theta(t)$$

$$\tan \theta(x+\Delta x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u_x(x, t)$$

$$\tan \theta(x+\Delta x, t) = u_x(x+\Delta x, t)$$

$$\frac{P}{T} \Delta x u_{xt}(x, t) = u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x, t)$$

نقسم على Δx ونأخذ النهاية

$$u_{xt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t)$$

$$c^2 = \frac{T}{P}$$

السؤال الثالث

أولاً

$$xu_x + yu_y = xe^u \quad ; \quad u(x, y) = 0$$

$$\frac{du}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{xe^u} \Rightarrow \frac{y}{x} = c_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{-u} - x = f(y/m) \\ e^{-u} - x = c_2 \end{array} \right.$$

$$u = \ln(x + f(y/m))$$

$$u(x, x^2) = \ln(x + f(x)) = 0 \Rightarrow x + f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1 - x$$

$$u = \ln(x + 1 - \frac{y}{x})$$

ثانياً

$$u(m, 0) = 20 + \frac{60-20}{20} x = 20 + 2x$$

$$w(m) = 30 + \frac{40-30}{20} x = 30 + \frac{1}{2} x$$

التوزيع الخطي بعد الأثر

$$c_n = \frac{2}{20} \int_0^{20} \left(\frac{3}{2}x - 10\right) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$u(x, t) = w(x, t) + \bar{u}(x, t)$$

$$\bar{u}_t = k \bar{u}_{xx}$$

$$\bar{u}(0, t) = \bar{u}(L, t) = 0$$

$$\bar{u}(x, t) = X(x) T(t)$$

$$X'' - \lambda X = 0, \quad T' - k\lambda T = 0$$

$$\bar{u}(0, t) = 0 = X(0) T(t) \Rightarrow X(0) = 0$$

$$\bar{u}(L, t) = 0 = X(L) T(t) \Rightarrow X(L) = 0$$

$$m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m = \pm i\sqrt{-\lambda}$$

$$X = A \cos \sqrt{-\lambda} x + B \sin \sqrt{-\lambda} x \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow B \sin \sqrt{-\lambda} L = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

$$\Rightarrow X_n = A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \& \quad T = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} kt} \Rightarrow \bar{u}_n(x, t) = X_n(x) T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} kt}$$

الدرجة: ٧٥
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الاضافية للعام الدراسي 2015-2016

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (٢٠ درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$u_{xx} - 5u_{xy} + x^3u_{yy} + u_x + 2u = 0$$

عين المنطقة D في R^2 التي تجعل المعادلة: ١- مكافئة ٢- ناقصية ٣- زائدية

السؤال الثاني: (٣٠ درجة)

بفرض لدينا خيط مرن مشدود (كثافته ثابتة ρ) وموضوع بشكل أفقي ومثبت في نهايته اليسارية L و اليمينية R . لهذا الخيط في نهايته L عندها نلاحظ موجة تعبر هذا الخيط. استنتج (مع الشرح) النموذج الرياضي الذي يصف الانزياح العمودي للخيط عن وضع التوازن في الموضع x واللحظة t .

السؤال الثالث: (٣٥ درجة)

باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0$$

$$u(0, y) = f(y)$$

انتهت الأسئلة

مدرسة المقرر: د. منال عيسى

مع تمنياتي لكم بالنجاح

السؤال الأول: (١٥ درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$yu_{xx} - u_{xy} + 2x^2u_y - u_x + u = 0$$

عبر المنطقة D في R^2 التي تجعل المعادلة: ١- مكافئة ٢- ناقصية ٣- زائدية

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

أوجد حل المعادلة التفاضلية $xu_x + yu_y = xe$

المحقق للشرط $u(x, x^2) = 0$

السؤال الثالث: (١٥ درجة)

يفرض لدينا قضيب متجانس بطول L نهايتيه مغزولتين، وليكن لدينا مصدر حراري ثابت

$$u(x, 0) = x, \quad q_0 \neq 0$$

١- اكتب المعادلة التفاضلية والشروط الحدية لهذا النموذج.

٢- احسب الطاقة الحرارية الكلية لكامل القضيب.

السؤال الرابع: (٢٥ درجة)

باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0$$

$$u(0, y) = f(y)$$

المسألة تصبح معادلة تفاضلية عادية

$$y u_{xx} - u_{xy} + 2x^2 u_{yy} - u_x + u = 0 \quad \text{السؤال الأول}$$

$$\Delta = 1 - 8x^2y \quad (3) \quad \Leftarrow \Delta = B^2 - 4AC$$

$$1 - 8x^2y > 0 \quad (2) \quad \Leftarrow B^2 - 4AC > 0 \quad \Leftarrow \text{1- زائدية}$$

$$1 - 8x^2y = 0 \quad (2) \quad \Leftarrow B^2 - 4AC = 0 \quad \Leftarrow \text{2- محايدة}$$

$$1 - 8x^2y < 0 \quad (2) \quad \Leftarrow B^2 - 4AC < 0 \quad \Leftarrow \text{3- ناقصية}$$

السؤال الثاني

$$x u_x + y u_y = x e^{-u}$$

$$u(x, x^2) = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{x e^{-u}} \quad (5) \Rightarrow \frac{y}{x} = c_1 \quad (5) \quad e^{-u} - x = f(y/x)$$

$$u = \ln(x + f(y/x))$$

$$u(x, x^2) = \ln(x + f(x))$$

$$= 0 \Rightarrow x + f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1 - x$$

$$u = \ln\left(x + 1 - \frac{y}{x}\right)$$

السؤال الثالث

المعادلة التفاضلية التي تصف النموذج هي

$$u_t(x, t) = k u_{xx} + q_0 \quad (5) \quad (u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0) \quad (2)$$

$$E(t) = \int_0^L u(x, t) dx \quad (3)$$

$$\int_0^L u_t(x, t) dx = \int_0^L k u_{xx} dx + \int_0^L q_0 dx = k u_x \Big|_0^L + q_0 L$$

$$\int_0^L u_t(x, t) dx = q_0 L$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$$

$$E(t) = \int_0^L u(x,t) dx = qLt + c \quad (3)$$

$$E(0) = \int_0^L u(x,0) dx = \frac{u^2}{2} \Big|_0^L = \frac{L^2}{2} \Rightarrow E(t) = qLt + \frac{L^2}{2} \quad (2)$$

السؤال الرابع:

$$u = X(x)Y(y) \quad (2)$$

بفرض أن الحل على الشكل

$$u_{xx} = X''Y \quad \text{و} \quad u_{yy} = XY'' \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Rightarrow \quad (2)$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \Rightarrow X'' - \lambda X = 0 \quad \text{و} \quad Y'' + \lambda Y = 0$$

$$u(0,y) = f(y) = X(0)Y(y) \quad (1)$$

$$u(a,y) = 0 \Rightarrow X(a)Y(y) = 0 \Rightarrow X(a) = 0 \quad (1)$$

$$u(x,0) = 0 \Rightarrow X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \quad (2)$$

$$u(x,b) = 0 \Rightarrow X(x)Y(b) = 0 \Rightarrow Y(b) = 0 \quad (3)$$

نبدأ بالحدود المثلثة

$$Y'' + \lambda Y = 0$$

$$\text{الحل } \begin{cases} Y(0) = B = 0 \quad (1) \\ Y(b) = Ab = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases} \quad Y = Ay + B \quad \in \quad \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\text{الحل } \begin{cases} Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases} \quad Y(y) = A e^{\sqrt{\lambda} y} + B e^{-\sqrt{\lambda} y} \quad \in \quad \lambda < 0$$

$$\in m = \pm i\sqrt{\lambda} \quad \in m^2 = -1 \quad \in m^2 + \lambda = 0 \quad \in \lambda > 0$$

$$(2) Y(y) = A \cos \sqrt{\lambda} y + B \sin \sqrt{\lambda} y$$

$$Y(0) = A = 0$$

$$\in \sin \sqrt{\lambda} b = 0$$

$$\in Y(b) = B \sin \sqrt{\lambda} b = 0 \quad B \neq 0$$

$$\sqrt{\lambda} b = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \quad (2)$$

$$X_n(y) = B \sin \frac{n\pi y}{b} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$m = \pm \sqrt{\lambda} \quad \in m^2 = \lambda \quad \in m^2 - \lambda = 0 \quad \lambda > 0$$

$$X_n(x) = a_n e^{\sqrt{\lambda_n} x} + b_n e^{-\sqrt{\lambda_n} x} \quad (1)$$

$$= A_n \cosh \frac{n\pi x}{b} + B_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$X_n = A_n \cosh \frac{n\pi}{b} (x-a) + B_n \sinh \left(\frac{n\pi}{b} (x-a) \right) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$X(a) = 0$$

نصف اول

$$X_n(a) = A_n \cosh 0 + B_n \sinh 0$$

$$= A_n = 0$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi}{b} (x-a) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2)$$

$$u(x,y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(B_n \sinh \frac{n\pi}{b} a \right)}_{C_n} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$C_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \Rightarrow$$

$$B_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sinh \frac{n\pi y}{b} dy \left(\sinh \frac{n\pi a}{b} \right)^{-1}$$

الحد ليعطى الصيغة السابقة

النتيجة

علم تصحيح

الدرجة: ٧٥
المدة: ساعتان

امتحان مقرر < معادلات تفاضلية جزئية >
لطلاب السنة الثالثة
الدورة الإضافية للعام الدراسي ٢٠١٤-٢٠١٥

جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية
قسم الرياضيات

السؤال الأول: (١٥ درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$y^2 u_{xx} + u_{xy} - x u_{yy} - 3u_x - 2u = 0$$

عين المنطقة D في R^2 التي تجعل المعادلة: ١- مكافئة ٢- ناقصية ٣- زائدية

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

بفرض لدينا مادة كيميائية معلقة في الماء تتحرك بسرعة منتظمة C عبر أنبوب رفيع G ذو مقطع منتظم A . استنتج المعادلة التفاضلية التي تعبر عن تركيز المادة الكيميائية في كل نقطة من نقاط الأنبوب.

السؤال الثالث: (١٥ درجة)

$$u_{tt} = C^2 u_{xx}$$

ومن ثم أوجد حلها بوجود الشروط التالية:

$$u_t(x,0) = w(x) \quad , \quad u(x,0) = v(x)$$

السؤال الرابع: (٢٥ درجة)

باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(a,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0$$

$$u(0,y) = f(y)$$

مدرسة المقرر : د. منال حسين

مع تمنياتي لكم بالنجاح

$$y^2 u_{xx} + u_{xy} - x u_{yy} - 3u_x - 2u = 0$$

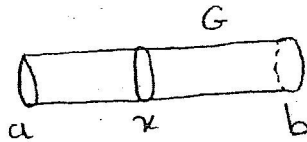
$$\Delta = 1 + 4xy^2 \quad (3) \quad \Leftarrow \Delta = B^2 - 4AC$$

$$1 + 4xy^2 > 0 \quad (2) \quad \Leftarrow B^2 - 4AC > 0 \quad \Leftarrow \text{1- زائدية}$$

$$1 + 4xy^2 = 0 \quad (2) \quad \Leftarrow B^2 - 4AC = 0 \quad \Leftarrow \text{2- مكافئة}$$

$$1 + 4xy^2 < 0 \quad (2) \quad \Leftarrow B^2 - 4AC < 0 \quad \Leftarrow \text{3- ناقصة}$$

السؤال الثاني



اتجاه جريان الماء

لتفرض G بالحدود المفتوحة (a, b)

ولكن السرعة $c > 0$ بالاتجاه الموجب (2)
الحركة على المحور x ونفرض ان تركيز

المادة الكيميائية ثابت عند المقطع A في النقطة x وبذلك تركيز المادة الكيميائية

يغير بتغير x فقط. ولتكن $u(x, t)$ كمية الاشتقاق وسرعة وتغير عن

تركيز المادة الكيميائية في النقطة x في اللحظة t ، وبالتالي كمية المادة الكيميائية

الموجودة في مقطع الأنبوب بين الوصلين a و x بتغير ds (2)

وبما ان الماء يجري بسرعة c خارجة بالنقطة $x+h$ يكون لدينا نفس كمية

المادة الكيميائية (4)

$$\int_a^x Au(s, t) ds = \int_{a+ch}^{x+ch} Au(s, t+h) ds$$

لنتق الطرفين بالنسبة ل x نجد (4)

$$Au(x, t) = Au(x+ch, t+h) \Rightarrow u(x, t) = u(x+ch, t+h) \quad (4)$$

لنتق بالنسبة ل h نجد

$$0 = u_t(x+ch, t+h) + cu_x(x+ch, t+h) \quad (4)$$

$$u_t(x, t) + cu_x(x, t) = 0 \quad \text{عند } h \rightarrow 0$$

السؤال الثالث:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

(3) معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الثانية من النوع الزائدي (معادلة الموجة)

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \quad (3)$$

$$u(x,0) = \boxed{f(x) + g(x) = v(x)} \quad (1)$$

$$u_t(x,0) = -c f'(x-ct) + c g'(x+ct) \Big|_{t=0}$$

$$= -c f'(x) + c g'(x) = w(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) - g(x) = -\frac{1}{c} \int_0^x w(s) ds}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(v(x) - \frac{1}{c} \int_0^x w(s) ds \right) \quad (3)$$

$$g(x) = v(x) - f(x) = \frac{1}{2} v(x) + \frac{1}{2} \frac{1}{c} \int_0^x w(s) ds \quad (3)$$

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \Rightarrow$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left[v(x-ct) + v(x+ct) + \frac{1}{c} \int_0^{x+ct} w(s) ds - \frac{1}{c} \int_0^{x-ct} w(s) ds \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[v(x-ct) + v(x+ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} w(s) ds \right] \quad (1)$$

$$\lambda = X(x) Y(y) \quad (2)$$

(25) السؤال الرابع: نؤمن أن الحد على الشكل

$$u_{xx} = X'' Y, \quad u_{yy} = X Y'' \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \& \quad Y'' + \lambda Y = 0$$

$$u(x,y) = f(y) = X(x) Y(y) \quad (1)$$

$$u(x,0) = 0 \Rightarrow X(x) Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \quad (1)$$

$$u(x,b) = 0 \Rightarrow X(x) Y(b) = 0 \Rightarrow Y(b) = 0 \quad (1)$$

$$Y'' + \lambda Y = 0$$

بما أن $Y(0) = Y(b) = 0$

$$(1) \quad Y(0) = B = 0 \quad Y = A e^{\sqrt{\lambda} y} + B e^{-\sqrt{\lambda} y} \in \lambda = 0$$

$$Y(b) = A b = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$A = B = 0 \in Y(0) = Y(b) = 0 \quad Y(y) = A e^{\sqrt{\lambda} y} + B e^{-\sqrt{\lambda} y} \in \lambda < 0$$

$$\in m = \pm i\sqrt{\lambda} \in m^2 = -1 \in m^2 + \lambda = 0 \in \lambda > 0$$

$$(2) \quad Y(y) = A \cos \sqrt{\lambda} y + B \sin \sqrt{\lambda} y$$

$$Y(0) = A = 0$$

$$Y(b) = B \sin \sqrt{\lambda} b = 0 \quad B \neq 0 \Rightarrow$$

$$\sin \sqrt{\lambda} b = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} b = n\pi \Rightarrow$$

$$(2) \quad Y_n(y) = B \sin \frac{n\pi y}{b} \quad n \in \mathbb{N} \quad \in \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \quad (2)$$

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$m = \pm \sqrt{\lambda} \in m^2 = \lambda \in m^2 - \lambda = 0 \quad \lambda > 0$$

$$X_n(x) = a_n e^{\sqrt{\lambda_n} x} + b_n e^{-\sqrt{\lambda_n} x} \quad (1)$$

$$= A_n \cosh \frac{n\pi x}{b} + B_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$X_n = A_n \cosh \frac{n\pi}{b} (x-a) + B_n \sinh \frac{n\pi}{b} (x-a) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$X(a) = 0$$

$$X_n(a) = A_n \underbrace{\cosh 0}_{=1} + B \underbrace{\sinh 0}_{=0}$$

$$= A_n = 0 \quad (2)$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi}{b} (x-a) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2)$$

$$u(0,y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \sinh \frac{n\pi}{b} a) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$C_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \Rightarrow$$

$$B_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \left(\sinh \frac{n\pi a}{b} \right)^{-1} \quad (1)$$

← اگر بیس‌المدات $(\frac{x}{a})$ ، $(\frac{y}{b})$

A to 1

السؤال الأول: (١٥ درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$yu_{xx} + u_{xy} - x^2 u_{yy} - u_x - u = 0$$

عين المنطقة D في R^2 التي تجعل المعادلة: ١- مكافئة ٢- ناقصية ٣- زائدية

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

بفرض لدينا مادة كيميائية منحلة في الماء تتحرك بسرعة منتظمة C عبر أنبوب رفيع G ذو مقطع منظم A . استنتج المعادلة التفاضلية التي تعبر عن تركيز المادة الكيميائية في كل نقطة من نقاط الأنبوب.

السؤال الثالث: (١٥ درجة)

بفرض لدينا قضيب متجانس بطول L بهائتيه معزولتين، وليكن لدينا مصدر حراري ثابت

$$u(x, 0) = x, \quad q_0 \neq 0$$

١. اكتب المعادلة التفاضلية والشروط الحدية لهذا النموذج.

٢. احسب الطاقة الحرارية الكلية لكامل القضيب.

السؤال الرابع: (٢٥ درجة)

باستخدام طريقة فصل المتغيرات حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = 0$$

$$u(x, b) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

سليم تجميع مقر معادلات تفاضلية جزئية نظرية السنة الثالثة رياضيات مسر الفصل الثاني ٢٠١٥

2015 - 2014

الامتحان :

$$u_{xx} + u_{xy} - x^2 u_{yy} - u_x - u = 0$$

$$\Delta = 1 + 4x^2y$$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

$$1 + 4x^2y > 0$$

$$B^2 - 4AC > 0 \Leftrightarrow \text{زائدية}$$

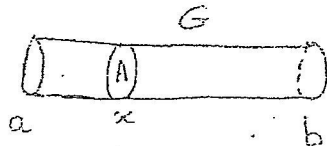
$$1 + 4x^2y = 0$$

$$B^2 - 4AC = 0 \Leftrightarrow \text{مكافئية}$$

$$1 + 4x^2y < 0$$

$$B^2 - 4AC < 0 \Leftrightarrow \text{ناقصية}$$

قال الثاني :



اتجاه جريان الماء

برسم G المجال المقترح (a, b)

لكن السرعة $c > 0$ بالاتجاه الموجب للمحور x ، وبمسافة أن تركيز المادة الكيميائية

أبداً عبر القطر A في كل نقطة x رتبة تركيز المادة الكيميائية يتغير بتغير x فقط

لكن $u(x, t)$ قابلة للاشتقاق وسرعة - يتغير تركيز المادة الكيميائية في النقطة x

في اللحظة t ، وبالتالي كمية المادة الكيميائية الموجودة في مقطع الأنبوب بين الموضعين

$$\int_a^x A u(s, t) ds$$

x معطاة بالعامل

بأن الماء يجري بسرعة c مانه في اللحظة $t+h$ تحت له نفس كمية المادة

$$\int_a^{x+ch} A u(s, t) ds = \int_{a+ch}^{x+ch} A u(s, t+h) ds$$

نشتق الطرفين بالنسبة لـ x في

$$A u(x, t) = A u(x+ch, t+h) \Rightarrow u(x, t) = u(x+ch, t+h)$$

$$0 = u(x+ch, t+h) - u(x, t) = c u_x(x+ch, t+h)$$

نريد التفاضلية التي تصف المورد من

$$u_t(x,t) = k u_{xx} + q \quad (3)$$

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \quad (3)$$

الشروط الحدية

$$E(t) = \int_0^L u(x,t) dx \quad (2)$$

$$\int_0^L u_t(x,t) dx = \int_0^L k u_{xx} dx + \int_0^L q dx \quad (1)$$

$$= k u_x \Big|_0^L + q L \quad (1)$$

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$$

$$E(t) = \int_0^L u(x,t) dx = q L t + C \quad (2)$$

$$E(0) = \int_0^L u(x,0) dx = \frac{L^2}{2} \Rightarrow E(t) = q L t + \frac{L^2}{2}$$

$$u = X(x) Y(y)$$

$$u_{xx} = X'' Y, \quad u_{yy} = X Y'' \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

$$u(0,y) = 0 \Rightarrow X(0) Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(x,0) = 0 \Rightarrow X(x) Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$$

$$u(x,b) = X(x) Y(b) = \sin \frac{n \pi x}{L}$$

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$A=0 \in X(b)=Ab=0 \Rightarrow X(0)=B=0$$

$$\lambda(x) = A e^{\sqrt{\lambda} x} + B e^{-\sqrt{\lambda} x} \in m = \pm \sqrt{\lambda}$$

$$X(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$\in m = \pm i \sqrt{-\lambda}$$

$$X(x) = A x + B$$

$$\in m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m = \pm \sqrt{\lambda} \quad (1) \quad \lambda > 0$$

$$\in m^2 = -(-\lambda) \Rightarrow m = \pm i \sqrt{-\lambda} \quad (2) \quad \lambda < 0$$

$$\frac{a^2}{a^2} \textcircled{2} \in \sqrt{-\lambda} a = n\pi, n \in \mathbb{Z} \in \sin \sqrt{-\lambda} a = 0$$

$$X_n = B_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$y'' + \lambda_n y = 0 \Rightarrow m^2 + \lambda_n = 0 \Rightarrow m^2 = -\lambda_n > 0$$

$$Y_n = a_n e^{\sqrt{-\lambda_n} y} + b_n e^{-\sqrt{-\lambda_n} y} \textcircled{V}$$

$$Y_n(y) = A_n \cosh \sqrt{-\lambda_n} y + B_n \sinh \sqrt{-\lambda_n} y \textcircled{1}$$

$$\Leftarrow Y_n(0) = A_n = 0 \Leftarrow Y'(0) = 0$$

$$Y_n(y) = B_n \sinh \left(\frac{n\pi y}{a} \right) ; n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a} \textcircled{2}$$

لتعيين الثوابت B_n نطبق الشرط $u(x, b) = \sin \frac{n\pi x}{L}$

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\sinh \frac{n\pi b}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi x}{a} dx \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi x}{a} dx \left(\sinh \frac{n\pi b}{a} \right)^{-1}$$

النتيجة