كلية **العلوم**

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

أسئلة دورات محلولة

تحليل تابعي ٢

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تحليل تابعي 2	اسم الطالب:
كلية العلوم	سنة رابعة رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2024–2025 م	الدرجة: 90

السؤال الأول: (50 درجة)

1) لتكن $M = \{(3,x,0) \quad ; x \in \mathbb{R}\}$ مجموعة جزئية من الفضاء $\mathbb{R}^3$ والمطلوب أثبت أنّ

$$M^{\perp} = \{(0,0,c) \quad ; c \in \mathbb{R}\}$$

وهل $Span\ M$ مجموعة كثيفة في $\mathbb{R}^3$؟

2) ليكن X و Y فضاءان منظمان وليكن $T: D(T) \longrightarrow Y$ مؤثراً خطياً محدوداً ساحته $D(T) \subseteq X$، والمطلوب أثبت أنه إذا كانت $D(T)$ مغلقة في X فإن T مؤثراً مغلقاً.

3) ليكن X فضاء منظم مؤلف من كل الدوال المستمرة على المجال $[0,2\pi]$ والمزود بالجداء الداخلي:

$$\langle x,y \rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\,dt \quad \forall\, x,y \in X$$

والمطلوب: أثبت أن المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة $e_n(t) = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}$ هي متتالية متعامدة منظمة في X.

4) ليكن X فضاء منظم و $dim\ X = \infty$ وليكن $I: X \to X$ المؤثر المطابق، والمطلوب أثبت أنّ I مؤثر غير متراص.

السؤال الثاني: (40 درجة)

1) ليكن لدينا المؤثر الخطي

$$T: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$
$$T(x,y) = (2x + iy, ix + 2y)$$

والمطلوب: 1. أثبت أنّ T محدود. 2. أوجد مؤثر هلبرت المرافق T^* و هل T مؤثر ناظمي أم لا ؟

2) ليكن $X = [0,\infty[$ وليكن $T: X \longrightarrow X$ تطبيق معرف بالشكل:

$$T(x) = \frac{2x+3}{x+4}$$

1. هل T تقليص على X أم لا، ولماذا؟

2. أوجد النقطة الثابتة للتطبيق T.

3) ليكن لدينا التابع $f(x) = \ln(x)$ و $\Omega = [1,e]$، أثبت أن $f \in L_2(\Omega)$.

انتهت الأسئلة

تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس　　　كلية العلوم　　　قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل تابعي 2 لطلاب السنة الرابعة رياضيات

الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2024-2025م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (50 درجة)

1) لتكن $M = \{(3, x, 0) \ \ ; x \in \mathbb{R}\}$ مجموعة جزئية من الفضاء $\mathbb{R}^3$ والمطلوب أثبت أنَ

$$M^{\perp} = \{(0,0,c) \ \ ; c \in \mathbb{R}\}$$

وهل $Span\ M$ مجموعة كثيفة في $\mathbb{R}^3$؟

2) ليكن X و Y فضاءان منظمان وليكن $T: D(T) \longrightarrow Y$ مؤثراً خطياً محدوداً ساحته $D(T) \subseteq X$، والمطلوب أثبت أنه إذا كانت $D(T)$ مغلقة في X فإن T مؤثراً مغلقاً.

3) ليكن X فضاء منظم مؤلف من كل الدوال المستمرة على المجال $[0,2\pi]$ والمزود بالجداء الداخلي:

$$\langle x, y \rangle = \int_0^{2\pi} x(t) y(t)\, dt \quad \forall\, x, y \in X$$

والمطلوب: أثبت أن المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة $e_n(t) = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}$ هي متتالية متعامدة منظمة في X.

4) ليكن X فضاء منظم و $dim\ X = \infty$ وليكن $I: X \to X$ المؤثر المطابق، والمطلوب أثبت أنَ I مؤثر غير متراص.

الحل:

1) (10 درجات)

بفرض $S = \{(0,0,a)\ ;\ \ a \in \mathbb{R}\}$ ولنبرهن أن $S = M^{\perp}$

$$\forall\, y \in S\ ;\ \ y = (0,0,c); c \in \mathbb{R}$$
$$\forall\, z \in M\ ;\ \ z = (3, x, 0)$$
$$\langle y, z \rangle = \langle (0,0,c), (3, x, 0) \rangle = 0$$
$$\Longrightarrow y \in M^{\perp} \Longrightarrow S \subseteq M^{\perp}$$

$\forall\, n \in M^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^3$

ولنفرض جدلاً بأن $n \notin S$ عندئذ يوجد $a_1 \neq 0$ بحيث $n = (a_1, a_2, a_3)$

وليكن $z = (3,0,0) \in M$

$$\langle n, z\rangle = \langle (a_1, a_2, a_3), (3,0,0)\rangle = a_1 \times 3 + a_2 \times 0 + a_3 \times 0 = 3a_1 \neq 0$$

بالتالي $n \notin M^{\perp}$ وهذا تناقض مع الفرض إذاً $n \in S$ بالتالي $M^{\perp} \subseteq S$

من علاقتي الاحتواء نجد $M^{\perp} = S = \{(0,0,c);\ c \in \mathbb{R}\}$

- $span\ M$ ليست مجموعة كثيفة في $\mathbb{R}^3$ لأنها لا تحقق $M^{\perp} = \{0\}$ (4 درجات)

2) (10 درجات) مبرهنة

3) (16 درجة)

$$n \neq m$$

$$\langle e_n, e_m\rangle = \langle \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(mt)}{\sqrt{\pi}}\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\cos(n-m)t + \cos(n+m)t]\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)t + \frac{1}{n+m}\sin(n+m)t\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times 0 = 0$$

$$\langle e_n, e_n\rangle = \langle \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2nt}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4n} sin2nt\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \times \pi = 1$$

نستنتج بأن المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ متعامدة منظمة.

4) (10 درجات) مبرهنة.

<u>السؤال الثاني: (40 درجة)</u>

1) ليكن لدينا المؤثر الخطي

$$T: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$
$$T(x, y) = (2x + iy, ix + 2y)$$

والمطلوب: 1. أثبت أنّ T محدود. 2. أوجد مؤثر هلبرت المرافق T^* و هل T مؤثر ناظمي أم لا ؟

2) ليكن $X = [0, \infty[$ وليكن $T: X \longrightarrow X$ تطبيق معرف بالشكل:

$$T(x) = \frac{2x+3}{x+4}$$

1. هل T تقليص على X أم لا، ولماذا؟
2. أوجد النقطة الثابتة للتطبيق T.

3) ليكن لدينا التابع $f(x) = \ln(x)$ و $\Omega = [1, e]$، أثبت أن $f \in L_2(\Omega)$.

الحل:

1)

1. (7 درجات)

$$\|Tv\|^2 = \|T(x,y)\|^2 = \|2x + iy, ix + 2y\|^2 = |2x + iy|^2 + |ix + 2y|^2$$
$$= 4x^2 + y^2 + x^2 + 4y^2 = 5(x^2 + y^2) = 5\|(x,y)\|^2$$
$$\Longrightarrow \|Tv\| = \sqrt{5}\|v\|$$

بالتالي T محدود

2. (7 درجات)

$$\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$$

$$\langle Tv, w\rangle = \langle T(x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = \langle (2x_1 + iy_1, ix_1 + 2y_1), (x_2, y_2)\rangle$$
$$= (2x_1 + iy_1)\overline{x_2} + (ix_1 + 2y_1)\overline{y_2} = x_1(2\overline{x_2} + \overline{iy_2}) + y_1(\overline{ix_2} + 2\overline{y_2})$$

لنضع $T^*w = (z_1, z_2)$

$$\langle v, T^*w\rangle = \langle (x_1, y_1), (z_1, z_2)\rangle = x_1\overline{z_1} + y_1\overline{z_2}$$

عندئذ بالمقارنة نجد

$$\overline{z_1} = 2\overline{x_2} + \overline{iy_2} \Longrightarrow z_1 = 2x_2 - iy_2$$
$$\overline{z_2} = \overline{ix_2} + 2\overline{y_2} \Longrightarrow z_2 = -ix_2 + 2y_2$$

بالتالي $T^*w = T^*(x_2, y_2) = (z_1, z_2) = (2x_2 - iy_2, -ix_2 + 2y_2)$

عندئذ

$$T: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$
$$T^*(x,y) = (2x - iy, -ix + 2y)$$

3. (7 درجات)

$$TT^*v = T\big(T^*(x,y)\big) = T(2x - iy, -ix + 2y) = (5x, 5y)$$

وبأسلوب مماثل نثبت أن

$$T^*Tv = T^*T(x,y) = (5x, 5y)$$

بالتالي

$$T^*T = TT^*$$

بالتالي T ناظمي

2)

1. (7 درجات). يكون T تقليص إذا كان $d(Tx, Ty) \leq \alpha\, d(x, y)$ حيث $0 < \alpha < 1$

$$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = \left|\frac{2x+3}{x+4} - \frac{2y+3}{y+4}\right| = \frac{5|x-y|}{|(x+4)(y+4)|} \leq \frac{5}{16}|x-y| = \frac{5}{16}d(x, y)$$

بالتالي T تقليص على X.

2. (5 درجات). $T(x) = x$ بالتالي $\frac{2x+3}{x+4} = x$ عندئذ $x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x_1 = 1 \in X \ (\text{مقبول})$$

$$x_2 = -3 \notin X \ (\text{مرفوض})$$

3) (7 درجات)

$$I = \int_1^e \left(f(x)\right)^2 dx = \int_1^e (\ln(x))^2 dx$$

تكامل بالتجزئة

$$u(x) = (\ln(x))^2 \quad \Longrightarrow \quad u'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$$

$$v'(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad v(x) = x$$

$$I = [x.\ln^2(x)]_1^e - \int_1^e 2\ln(x)\,dx$$

$$= [x.\ln^2(x)]_1^e - 2[x.\ln(x) - x]_1^e = e - 2 < \infty$$

بالتالي

$$f \in L_2(\Omega)$$

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل تابعي 2 لطلاب السنة الرابعة رياضيات

الدورة التكميلية– العام الدراسي 2023–2024م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (34 درجة)

1) لتكن M مجموعة جزئية غير خالية في فضاء هلبرت H، وليكن $span\, M$ مجموعة كثيفة في H والمطلوب أثبت أن $M^{\perp} = \{0\}$.

2) لتكن $(e_n)_{n\geq 1}$ متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H، والمطلوب أثبت أن المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ متقاربة بضعف من الصفر وليست متقاربة بقوة من الصفر.

3) ليكن X و Y فضاءان منظمان وليكن $T: D(T) \longrightarrow Y$ مؤثراً خطياً محدوداً ساحته $D(T) \subseteq X$، والمطلوب أثبت إذا كان T مؤثراً مغلقاً و Y فضاء تام فإن $D(T)$ مجموعة مغلقة في X.

4) ليكن X فضاء منظم و $dim\, X = \infty$ وليكن $I: X \to X$ المؤثر المطابق، والمطلوب أثبت أنّ I مؤثر غير متراص.

الحل:

1) مبرهنة. **(8 درجات).**

2) **(10 درجات)**

لدينا $(e_n)_{n\geq 1}$ متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H بالتالي يوجد لكلّ $f \in \acute{H}$ تمثيل ريس

$$f(x) = \langle x, z\rangle$$

فإنّ

$$f(e_n) = \langle e_n, z\rangle$$

وطبق متراجحة بيسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, z\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\overline{\langle z, e_n\rangle}\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, e_n\rangle|^2 \leq \|z\|^2$$

المتسلسلة في الطرف الأيسر متقاربة عندئذ حدها العام يسعى إلى الصفر بالتالي

$$\lim_{n\to\infty}\langle e_n, z\rangle = 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(e_n) = 0 = \langle 0, z\rangle = f(0)$$

بالتالي

$$f(e_n) \longrightarrow f(0)\,;n \longrightarrow \infty$$

بالتالي المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ متقاربة بضعف من الصفر.

<u>$(e_n)_{n\geq 1}$ لا تتقارب بقوه:</u>

من أجل $k \neq i$:

$$\|e_k - e_i\|^2 = \langle e_k - e_i, e_k - e_i\rangle = \langle e_k, e_k\rangle - \langle e_k, e_i\rangle - \langle e_i, e_k\rangle + \langle e_i, e_i\rangle = \langle e_k, e_k\rangle + \langle e_i, e_i\rangle = 2$$

بالتالي $\|e_k - e_i\| \nrightarrow 0$ من أجل $i, k \longrightarrow \infty$

نلاحظ بأنّ $(e_n)_{n\geq 1}$ ليست لكوشي بالتالي لاتتقارب من الصفر ولا من غير الصفر.

3) مبرهنة. **(8 درجات)**.

4) مبرهنة. **(8 درجات)**.

<u>السؤال الثاني: (56 درجة)</u>

1) ليكن لدينا المؤثر الخطي والمحدود

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$
$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (3x_1, 0{,}3x_2, 0{,}3x_3, 0, \dots)$$

والمطلوب:

1. أوجد مؤثر هلبرت المرافق T^* و هل T مؤثر مترافق ذاتياً أم لا، ولماذا؟
2. هل T مؤثر مراوح أم لا، ولماذا؟
3. هل T مؤثر متراص أم لا، ولماذا؟

2) ليكن $X = [0, \infty[$ وليكن $T: X \longrightarrow X$ تطبيق معرف بالشكل:

$$T(x) = \frac{2x+1}{x+3}$$

1. هل T تقليص على X أم لا، ولماذا؟
2. أوجد النقطة الثابتة للتطبيق T.

3) ليكن لدينا التابع $f(x) = sin\, x$ و $\Omega = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$، أثبت أن $f \in L_4(\Omega)$.

الحل:

1)

1. (10 درجات)

بما أن T خطي ومحدود بالتالي T^* موجود ويحقق العلاقة:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \langle (3x_1, 0, 3x_2, 0, 3x_3, 0, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots)\rangle \\ &= 3x_1\overline{y_1} + 0 + 3x_2\overline{y_3} + 0 + 3x_3\overline{y_5} + \cdots\end{aligned}$$

لنضع $T^*y = (z_1, z_2, \ldots \ldots)$

$$\langle x, T^*y\rangle = \langle (x_1, x_2, x_3, \ldots), (z_1, z_2, z_3, \ldots)\rangle = x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + x_3\overline{z_3} + \cdots$$

عندئذ بالمقارنة نجد

$$\begin{aligned}\overline{z_1} &= 3\overline{y_1} \Longrightarrow z_1 = 3y_1 \\ \overline{z_2} &= 3\overline{y_3} \Longrightarrow z_2 = 3y_3 \\ \overline{z_3} &= 3\overline{y_5} \Longrightarrow z_3 = 3y_5 \\ &\vdots\end{aligned}$$

وبالتالي $T^*y = (3y_1, 3y_3, 3y_5, \ldots \ldots)$

عندئذ

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$
$$T^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (3x_1, 3x_3, 3x_5, \ldots \ldots)$$

- بما أن $T \neq T^*$ فإن T مترافق ذاتياً. (6 درجات)

2. (8 درجات)

T مؤثر مراوح إذا تحقق الشرط $T^2 = T$

$$\begin{aligned}T^2(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= T\big(T(x_1, x_2, x_3, \ldots)\big) = T(3x_1, 0, 3x_2, 0, 3x_3, 0, \ldots) \\ &= (9x_1, 0, 0, ,0, 9x_2, 0,0,0, 9x_3, \ldots) \neq T(x_1, x_2, x_3, \ldots)\end{aligned}$$

بالتالي T ليس مؤثر مراوح.

3. (8 درجات)

نفرض جدلاً أن T متراص ولنأخذ المؤثر الخطي والمحدود

$$S: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$
$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(\frac{x_1}{3}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_5}{3}, \ldots \ldots\right)$$

$$\begin{gathered}(ST)x = S(Tx) = S(3x_1, 0, 3x_2, 0, 3x_3, 0, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots) = x = I(x_1, x_2, x_3, \ldots) \\ \Longrightarrow ST = I\end{gathered}$$

بما أن T متراص و S محدود عندئذ I متراص وهذا مرفوض.

بالتالي الفرض الجدلي خاطئ أي T غير متراص.

(2

1. ((8 درجات). يكون T تقليص إذا كان $d(Tx,Ty) \le \alpha\, d(x,y)$ حيث $0<\alpha<1$

$$d(Tx,Ty)=|Tx-Ty|=\left|\frac{2x+1}{x+3}-\frac{2y+1}{y+3}\right|=\frac{5|x-y|}{|(x+3)(y+3)|}\le\frac{5}{9}|x-y|=\frac{5}{9}d(x,y)$$

بالتالي T تقليص على X.

2. (8 درجات). $T(x)=x$ بالتالي $\frac{2x+1}{x+3}=x$ عندئذ $x^2+x-1=0$

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\in X \quad (\text{مقبول})$$

$$x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\notin X \quad (\text{مرفوض})$$

3) (8 درجات)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x))^4dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^4dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\left[\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{16}<\infty$$

بالتالي

$$f\in L_4(\Omega)$$

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تحليل تابعي 2	اسم الطالب:
كلية العلوم	الدورة الفصلية الثانية – سنة رابعة رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	العام الدراسي 2023-2024 م	الدرجة: 90

السؤال الأول: (34 درجة)

1) لتكن M مجموعة جزئية غير خالية في فضاء هلبرت H، وليكن $M^{\perp} = \{0\}$ والمطلوب أثبت أن $span\, M$ مجموعة كثيفة في H.

2) لتكن $(e_n)_{n\geq 1}$ متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H، والمطلوب أثبت أن المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ متقاربة بضعف من الصفر وليست متقاربة بقوة من الصفر.

3) ليكن X و Y فضاءان منظمان وليكن $T: D(T) \longrightarrow Y$ مؤثراً خطياً محدوداً ساحته $D(T) \subseteq X$، والمطلوب أثبت إذا كانت $D(T)$ مغلقة في X فإن T مؤثراً مغلقاً.

4) ليكن X فضاء منظم و $dim\, X = \infty$ وليكن $I: X \to X$ المؤثر المطابق، والمطلوب أثبت أنّ I مؤثر غير متراص.

السؤال الثاني: (56 درجة)

1) ليكن لدينا المؤثر الخطي المحدود

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$
$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

والمطلوب:

1. أوجد مؤثر هلبرت المرافق T^* و هل T مؤثر ناظمي أم لا، ولماذا؟
2. هل T مؤثر وحدي أم لا، ولماذا؟
3. هل T مؤثر مراوح أم لا، ولماذا؟

2) ليكن $X = [0, \infty[$ وليكن $T: X \longrightarrow X$ تطبيق معرف بالشكل:

$$T(x) = \frac{2x+3}{x+4}$$

1. هل T تقليص على X أم لا، ولماذا؟
2. أوجد النقطة الثابتة للتطبيق T.

3) ليكن لدينا التابع $f(x) = \cos 2x$ و $\Omega = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$، أثبت أن $f \in L_3(\Omega)$.

---------------------------انتهت الأسئلة---------------------------

تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس　　　　كلية العلوم　　　　قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل تابعي 2 لطلاب السنة الرابعة رياضيات

الدورة الفصلية الثانية – العام الدراسي 2023-2024م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (34 درجة)

1) لتكن M مجموعة جزئية غير خالية في فضاء هلبرت H، وليكن $M^{\perp}=\{0\}$ والمطلوب أثبت أن $span\, M$ مجموعة كثيفة في H.

2) لتكن $(e_n)_{n\geq 1}$ متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H، والمطلوب أثبت أن المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ متقاربة بضعف من الصفر وليست متقاربة بقوة من الصفر.

3) ليكن X و Y فضاءان منظمان وليكن $T: D(T) \longrightarrow Y$ مؤثراً خطياً محدوداً ساحته $D(T)\subseteq X$، والمطلوب أثبت إذا كانت $D(T)$ مغلقة في X فإن T مؤثراً مغلقاً.

4) ليكن X فضاء منظم و $dim\, X=\infty$ وليكن $I: X\to X$ المؤثر المطابق، والمطلوب أثبت أنّ I مؤثر غير متراص.

الحل:

1) مبرهنة. (8 درجات).

2) (10 درجات)

لدينا $(e_n)_{n\geq 1}$ متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H بالتالي يوجد لكلّ $f\in \acute{H}$ تمثيل ريس

$$f(x)=\langle x,z\rangle$$

فإنّ

$$f(e_n)=\langle e_n,z\rangle$$

نطبق متراجحة بيسل

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle e_n,z\rangle|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{\langle z,e_n\rangle}\right|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle z,e_n\rangle|^2\leq \|z\|^2$$

المتسلسلة في الطرف الأيسر متقاربة عندئذ حدها العام يسعى إلى الصفر بالتالي

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\langle e_n,z\rangle=0$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(e_n) = 0 = \langle 0, z\rangle = f(0)$$

بالتالي

$$f(e_n) \longrightarrow f(0)\; ; n \longrightarrow \infty$$

بالتالي المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ متقاربة بضعف من الصفر.

<u>$(e_n)_{n\geq 1}$ لا تتقارب بقوه:</u>

من أجل $k \neq i$:

$$\|e_k - e_i\|^2 = \langle e_k - e_i, e_k - e_i\rangle = \langle e_k, e_k\rangle - \langle e_k, e_i\rangle - \langle e_i, e_k\rangle + \langle e_i, e_i\rangle = \langle e_k, e_k\rangle + \langle e_i, e_i\rangle = 2$$

بالتالي $\|e_k - e_i\| \nrightarrow 0$ من أجل $i, k \longrightarrow \infty$

نلاحظ بأنّ $(e_n)_{n\geq 1}$ ليست لكوشي بالتالي لاتتقارب من الصفر ولا من غير الصفر.

3) مبرهنة. **(8 درجات)**.

4) مبرهنة. **(8 درجات)**.

<u>**السؤال الثاني: (56 درجة)**</u>

1) ليكن لدينا المؤثر الخطي المحدود

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$
$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

والمطلوب:

1. أوجد مؤثر هلبرت المرافق T^* و هل T مؤثر ناظمي أم لا، ولماذا؟
2. هل T مؤثر وحدي أم لا، ولماذا؟
3. هل T مؤثر مراوح أم لا، ولماذا؟

2) ليكن $X = [0, \infty[$ وليكن $T: X \longrightarrow X$ تطبيق معرف بالشكل:

$$T(x) = \frac{2x+3}{x+4}$$

1. هل T تقليص على X أم لا، ولماذا؟
2. أوجد النقطة الثابتة للتطبيق T.

3) ليكن لدينا التابع $f(x) = \cos 2x$ و $\Omega = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$، أثبت أن $f \in L_3(\Omega)$.

الحل:

1)

1. **(8 درجات)**. بما أنّ T خطي ومحدود بالتالي T^* موجود ويحقق العلاقة:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

$$\langle Tx, y\rangle = \langle (0, x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)\rangle$$
$$= x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + x_3\overline{y_4} + \cdots$$

لنضع $T^*y = (z_1, z_2, \dots \dots)$

$$\langle x, T^*y\rangle = \langle (x_1, x_2, x_3, \dots), (z_1, z_2, z_3, \dots)\rangle = x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + x_3\overline{z_3} + \cdots$$

عندئذ بالمقارنة نجد

$$\overline{z_1} = \overline{y_2} \Longrightarrow z_1 = y_2$$
$$\overline{z_2} = \overline{y_3} \Longrightarrow z_2 = y_3$$
$$\overline{z_3} = \overline{y_4} \Longrightarrow z_3 = y_4$$
$$\vdots$$

وبالتالي $T^*y = (y_2, y_3, y_4, \dots \dots)$

عندئذ

$$T^*: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$
$$T^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots \dots)$$

▪ (**8** درجات).

$$TT^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = T(x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, x_2, x_3, x_4, \dots)$$
$$T^*T(x_1, x_2, x_3, \dots) = T^*(0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

نلاحظ بأنّ $TT^* \neq T^*T$ بالتالي T ليس ناظمي.

.2 (**8** درجات).

T ليس غامر لأنّه يوجد العنصر $(1,2,0,0, \dots \dots)$ من ℓ_2 بحيث لا يوجد عنصر

$x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ من المنطلق ℓ_2 بحيث $T(x) = (1,2,0,0, \dots \dots)$

بالتالي

T ليس وحدي.

.3 (**8** درجات).

T مؤثر مراوح إذا تحقق الشرط $T^2 = T$

$$T^2(x_1, x_2, x_3, \dots) = T\big(T(x_1, x_2, x_3, \dots)\big) = T(0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, 0, x_1, x_2, x_3, \dots) \neq T(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

بالتالي T ليس مؤثر مراوح.

(2

.1 ((**8** درجات). يكون T تقليص إذا كان $d(Tx, Ty) \le \alpha\, d(x, y)$ حيث $0 < \alpha < 1$

$$d(Tx,Ty)=|Tx-Ty|=\left|\frac{2x+3}{x+4}-\frac{2y+3}{y+4}\right|=\frac{5|x-y|}{|(x+4)(y+4)|}\leq\frac{5}{16}|x-y|=\frac{5}{16}d(x,y)$$

بالتالي T تقليص على X.

2. **(8 درجات).** $T(x)=x$ بالتالي $\frac{2x+3}{x+4}=x$ عندئذ $x^2+2x-3=0$

$x_1=1\in X$ (مقبول)

$x_2=-3\notin X$ (مرفوض)

3) (8 درجات)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(f(x))^3dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2x)^3dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos^3 2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos2x(1-sin^2 2x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos2x-cos2xsin^2 2xdx=\left[\frac{1}{2}sin2x-\frac{1}{6}sin^3 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3}<\infty$$

بالتالي

$$f\in L_3(\Omega)$$

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تحليل تابعي 2	أسم الطالب:
كلية العلوم	الدورة الفصلية الأولى – سنة رابعة رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	العام الدراسي 2023-2024 م	الدرجة: 90

السؤال الأول: (45 درجة)

1) ليكن $T: H \longrightarrow H$ مؤثراً خطياً محدوداً على فضاء هلبرت H، والمطلوب:

1. أثبت إذا كان $\|Tx\| = \|x\|$ كان T مؤثر واحدي.
2. أثبت إذا كان H عقدياً و$\langle Tx, x\rangle$ حقيقي أياً كان x من H فإن T مترافقاً ذاتياً.

2) لتكن (T_n) متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة المعرفة على الفضاء المنظم X وتأخذ قيمها في الفضاء المنظم Y والمتقاربة بانتظام نحو المؤثر T عندئذٍ أثبت أنّ (T_n) متقاربة بقوة نحو المؤثر T.

3) ليكن X فضاء متذلم مؤلف من كل الدوال المستمرة على المجال $[0,2\pi]$ والمزود بالجداء الداخلي:

$$\langle x, y\rangle = \int_{0}^{2\pi} x(t)y(t)\,dt \quad \forall\, x, y \in X$$

أثبت أن المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة $e_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}$ هي متتالية متعامدة منظمة في X.

السؤال الثاني: (45 درجة)

1) ليكن لدينا المؤثر الخطي والمحدود

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$
$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (2x_1, 0, 2x_2, 0, 2x_3, 0, \dots)$$

والمطلوب:

1. أوجد مؤثر هلبرت المرافق T^* و هل T مؤثر مترافق ذاتياً أم لا، ولماذا؟
2. هل T مؤثر وحدي أم لا، ولماذا؟
3. هل T مؤثر متراص أم لا، ولماذا؟

2) ليكن $X = [0, \infty[$ وليكن $T: X \longrightarrow X$ تطبيق معرف بالشكل:

$$T(x) = \frac{x+2}{x+4}$$

1. هل X تام في $\mathbb{R}$ أم لا، ولماذا ؟
2. أثبت أنّ T تقلص على X؟
3. أوجد النقطة الثابتة للتطبيق T.

-----------------------------------انتهت الأسئلة-----------------------------------

طرطوس: 2024/2/8 تمنياتي بالتوفيق والنجاح مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس كلية العلوم قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل تابعي 2 لطلاب السنة الرابعة رياضيات

الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2023-2024م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (45 درجة)

1) ليكن $T: H \longrightarrow H$ مؤثراً خطياً محدوداً على فضاء هلبرت H، والمطلوب:

1. أثبت إذا كان $\|Tx\| = \|x\|$ كان T مؤثر واحدي.
2. أثبت إذا كان H عقدياً و$\langle Tx, x\rangle$ حقيقي أياً كان x من H فإنّ T مترافقاً ذاتياً.

2) لتكن (T_n) متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة المعرفة على الفضاء المنظم X وتأخذ قيمها في الفضاء المنظم Y والمتقاربة بانتظام نحو المؤثر T عندئذٍ أثبت أنّ (T_n) متقاربة بقوة نحو المؤثر T.

3) ليكن X فضاء منظم مؤلف من كل الدوال المستمرة على المجال $[0,2\pi]$ والمزود بالجداء الداخلي:

$$\langle x, y\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\,dt \quad \forall\, x, y \in X$$

أثبت أن المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة $e_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}$ هي متتالية متعامدة منظمة في X.

الحلّ:

(1

1. مبرهنة (11 درجة)
2. مبرهنة (11 درجة)

(2 مبرهنة (11 درجة)

(3 (12 درجة)

- $n \neq m$

$$\langle e_n, e_m\rangle = \langle \frac{\sin(2nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2mt)}{\sqrt{\pi}}\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2nt)\sin(2mt)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\cos(2n-2m)t - \cos(2n+2m)t]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2n-2m}\sin(2n-2m)t - \frac{1}{2n+2m}\sin(2n+2m)t\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times 0 = 0$$

- $n = m$

$$\langle e_n, e_n\rangle = \langle\frac{\sin(2nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2nt)}{\sqrt{\pi}}\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(2nt)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4nt}{2} dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{8n} sin4nt\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \times \pi = 1$$

نستنتج بأن المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ متعامدة منظمة.

السؤال الثاني: (45 درجة)

1) ليكن لدينا المؤثر الخطي والمحدود

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$
$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (2x_1, 0, 2x_2, 0, 2x_3, 0, \dots)$$

والمطلوب:

1. أوجد مؤثر هلبرت المرافق T^* و هل T مؤثر مترافق ذاتياً أم لا، ولماذا؟
2. هل T مؤثر وحدي أم لا، ولماذا؟
3. هل T مؤثر متراص أم لا، ولماذا؟

2) ليكن $X = [0, \infty[$ وليكن $T: X \longrightarrow X$ تطبيق معرف بالشكل:

$$T(x) = \frac{x+2}{x+4}$$

1. هل X تام في $\mathbb{R}$ أم لا، ولماذا ؟
2. أثبت أنّ T تقليص على X؟
3. أوجد النقطة الثابتة للتطبيق T.

الحل:

(1

1. (8 درجات)

بما أنّ T خطي ومحدود بالتالي T^* موجود ويحقق العلاقة:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

$$\langle Tx, y\rangle = \langle(2x_1, 0, 2x_2, 0, 2x_3, 0, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)\rangle$$

$$= 2x_1\overline{y_1} + 0 + 2x_2\overline{y_3} + 0 + 2x_3\overline{y_5} + \cdots$$

لنضع $T^*y = (z_1, z_2, \dots\dots)$

$$\langle x, T^*y\rangle = \langle (x_1, x_2, x_3, \dots), (z_1, z_2, z_3, \dots)\rangle = x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + x_3\overline{z_3} + \cdots$$

عندئذ بالمقارنة نجد

$$\overline{z_1} = 2\overline{y_1} \Rightarrow z_1 = 2y_1$$
$$\overline{z_2} = 2\overline{y_3} \Rightarrow z_2 = 2y_3$$
$$\overline{z_3} = 2\overline{y_5} \Rightarrow z_3 = 2y_5$$
$$\vdots$$

وبالتالي $T^*y = (2y_1, 2y_3, 2y_5, \dots\dots)$

عندئذ

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$
$$T^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = (2x_1, 2x_3, 2x_5, \dots\dots)$$

❖ بما أن $T \neq T^*$ فإن T مترافق ذاتياً. (5 درجات)

.2 (7 درجات)

$$\|Tx\|_{\ell_2}^2 = \|(2x_1, 0, 2x_2, 0, 2x_3, 0, \dots)\|_{\ell_2}^2 = |2x_1|^2 + |0|^2 + |2x_2|^2 + \cdots$$
$$= 4(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots) = 4\|x\|_{\ell_2}^2$$
$$\Rightarrow \|Tx\| = 2\|x\|$$

بالتالي T ليس مؤثر واحدي وذلك حسب المبرهنة (T مؤثر واحدي إذا وفقط إذا كان $\|Tx\| = \|x\|$)

.3 (8 درجات)

نفرض جدلاً أن T متراص ولنأخذ المؤثر الخطي والمحدود

$$S: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$
$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_3}{2}, \frac{x_5}{2}, \dots\dots\right)$$

$$(ST)x = S(Tx) = S(2x_1, 0, 2x_2, 0, 2x_3, 0, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots) = x = I(x_1, x_2, x_3, \dots)$$
$$\Rightarrow ST = I$$

بما أن T متراص و S محدود عندئذ I متراص وهذا مرفوض.

بالتالي الفرض الجدلي خاطئ أي T غير متراص.

2) .1 (5 درجات)

$$\bar{X} = [0, \infty[= X$$

بالتالي X مغلقة في الفضاء التام $\mathbb{R}$ فإن X تام.

.2 (6 درجات)

يكون T تقليص إذا كان $d(Tx,Ty) \leq k\,d(x,y)$ حيث $0 < k < 1$

$$d(Tx,Ty) = |Tx - Ty| = \left|\frac{x+2}{x+4} - \frac{y+2}{y+4}\right| = \frac{2|x-y|}{|(x+4)(y+4)|} \leq \frac{1}{8}|x-y| = \frac{1}{8}d(x,y)$$

3. (6 درجات)

$$T(x) = x$$

بالتالي $\frac{x+2}{x+4} = x$ عندئذ $x^2 + 3x - 2 = 0$

$$(\text{مقبول})\; x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \in X$$

$$(\text{مرفوض})\; x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \notin X$$

طرطوس: 2024/2/8م

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تحليل تابعي 2	اسم الطالب:
كلية العلوم	الدورة التكميلية – سنة رابعة رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	العام الدراسي 2022–2023 م	الدرجة: 90

السؤال الأول: (45 درجة)

1) ليكن $T: H \longrightarrow H$ مؤثراً خطياً محدوداً على فضاء هلبرت H، والمطلوب:

1. أثبت إذا كان T مترافقاً ذاتياً فإن $\langle Tx, x\rangle$ حقيقي أياً كان x من H.

2. أثبت إذا كان H عقدياً و $\langle Tx, x\rangle$ حقيقي أياً كان x من H فإن T مترافقاً ذاتياً.

2) لتكن (T_n) متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة المعرفة على الفضاء المنظم X وتأخذ قيمها في الفضاء المنظم Y والمتقاربة بالنقاط من المؤثر T. أثبت أن (T_n) متقاربة بقوة نحو المؤثر T.

3) ليكن لدينا المؤثر

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(v) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \sqrt{2}y, \sqrt{2}\,x + y) \quad ; v = (x, y)$$

والمطلوب: أثبت أن المجموعة $A = \left\{a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), a_2 = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ مجموعة متعامدة منظمة في $\mathbb{R}^2$.

السؤال الثاني: (45 درجة)

1) ليكن لدينا المؤثر الخطي المحدود

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$$

والمطلوب: 1. أوجد مؤثر هلبرت المرافق T^* وهل T مؤثر وحدي أم لا ؟ 2. أثبت أن T مؤثر موجب

3. أثبت أن T مؤثر متراص.

2) ليكن $X = [1, \infty[$ وليكن $T: X \longrightarrow X$ تطبيق معرف بالشكل:

$$T(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

1. هل X تام في $\mathbb{R}$ أم لا ؟
2. أثبت أنّ T ليبتشز على X.
3. هل T تقليص على X؟
4. أوجد النقطة الثابتة للتطبيق T.

---انتهت الأسئلة---

تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

سلم تصحيح مقرر تحليل تابعي /2/

السؤال الأول (45 درجة):

[1] ① مبرهنة (12 درجة).

② مبرهنة (12 درجة).

[2] مبرهنة (10 درجات)

[3] نثبت أن

$$\langle a_n, a_m\rangle = \begin{cases} 0 & \text{؛ } n \neq m \\ 1 & \text{؛ } n = m \end{cases}$$

(11 درجة)

$$\langle a_1, a_1\rangle = \langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\rangle$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\langle a_2, a_2\rangle = \frac{-\sqrt{2}}{2} \times \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\langle a_1, a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

ومنه A مجموعة متعامدة منتظمة.

السؤال الثاني (45 درجة):

[1] ① نجد T^* من العلاقة $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$

بحيث $T^*y = (z_1, z_2, \dots)$

$$\langle Tx, y\rangle = \frac{x_1}{1}\overline{y_1} + \frac{x_2}{2}\overline{y_2} + \dots$$

$$\langle x, T^*y\rangle = x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + \dots$$

بالمقارنة نجد

$$\overline{z_1} = \frac{\overline{y_1}}{1} \Rightarrow z_1 = y_1$$
$$\overline{z_2} = \frac{\overline{y_2}}{2} \Rightarrow z_2 = \frac{y_2}{2}$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow T^*y = \left(\frac{y_1}{1}, \frac{y_2}{2}, \dots\right)$$

* يكون T مؤثر وحدي إذا تحقق $\|Tx\| = \|x\|$

$$\|Tx\| = \left\|\left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots\right)\right\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{x_i}{i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$$

$\Leftarrow$ $\|Tx\| \leq \|x\|$ ومنه T ليس وحدي.

② T موجب إذا تحقق $\langle Tx, x\rangle \ge 0$

$$\langle Tx, x\rangle = \frac{x_1}{1}\overline{x_1} + \frac{x_2}{2}\overline{x_2} + \cdots = \frac{|x_1|^2}{1} + \frac{|x_2|^2}{2} + \cdots \ge 0$$

ومنه T موجب .

③ اثبات أن T متراص (6 درجات).

---

2 ① (6 درجات) $\overline{X} = X \Leftarrow X$ مغلقة في الفضاء التام $R \Leftarrow X$ تام حسب مبرهنة.

②
$$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = \left|\frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{y}{2} - \frac{1}{y}\right|$$
$$= \left|\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\right|$$
$$\le \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{xy}\right)|x - y|$$
$$\le \frac{3}{2}\, d(x, y)$$

(6 درجات)

$\Leftarrow$ T ليبشتز على X

③ (6 درجات)
$$d(Tx, Ty) \le \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{xy}\right) d(x, y)$$
نلاحظ أن
$$0 < k = \frac{1}{2} + \frac{1}{xy}$$
وهي ليست بالضرورة أن تكون أصغر من 1 عندئذ T ليست تقلص

④ إيجاد النقطة الثابتة لـ $Tx = x$

(6 درجات)

$$\frac{x^2 + 2}{2x} = x$$
$$x^2 + 2 = 2x^2$$
$$x^2 = 2$$

إما $x = +\sqrt{2} \in X \Rightarrow$ مقبول

أو $x = -\sqrt{2} \notin X$ مرفوض

ومنه النقطة الثابتة هي $x = \sqrt{2}$

د. بشرى دوراع.

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر تحليل تابعي 2
الدورة الفصلية الثانية – سنة رابعة رياضيات
العام الدراسي 2022-2023 م

اسم الطالب:
المدة: ساعتان
الدرجة: 90

السؤال الأول: (45 درجة)

1) لتكن M مجموعة جزئية غير خالية في فضاء هلبرت H، والمطلوب:

1. أثبت أن $M^{\perp} = \{0\}$ إذا كانت $span\ M$ مجموعة كثيفة في H.
2. لتكن $M = \{(x,2,0) \quad ; x \in \mathbb{R}\}$ مجموعة جزئية من الفضاء $H = \mathbb{R}^3$ والمطلوب أثبت أن
$$M^{\perp} = \{(0,0,a) \quad ; a \in \mathbb{R}\}$$
وهل $span\ M$ مجموعة كثيفة في $\mathbb{R}^3$؟

2) لتكن (T_n) متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة المعرفة على الفضاء المنظم X وتأخذ قيمها في الفضاء المنظم Y والمتقاربة بانتظام نحو المؤثر T، أثبت أنّ (T_n) متقاربة بقوة نحو المؤثر T.

3) ليكن X فضاء منظم مؤلف من كل الدوال المستمرة على المجال $[0,2\pi]$ والمزود بالجداء الداخلي:
$$\langle x,y \rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\,dt \quad \forall\, x,y \in X$$

1. أثبت أن المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2nt)$ هي متتالية متعامدة منظمة في X.
2. أوجد $\|x\|$ حيث $x = \cos t$.

السؤال الثاني: (45 درجة)

1) ليكن لدينا المؤثر الخطي المحدود
$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$
$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$$

والمطلوب: 1. أوجد مؤثر هلبرت المرافق T^* وهل T مؤثر وحدي أم لا ؟ 2. أثبت أن T مؤثر موجب
3. أثبت أن T مؤثر متراص.

2) ليكن $X = [1,\infty[$ وليكن $T: X \longrightarrow \mathbb{R}$ تطبيق معرف بالشكل:
$$T(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x}$$

1. أثبت أن X تام .
2. هل T تقليص على X؟
3. أوجد النقطة الثابتة للتطبيق T.

انتهت الأسئلة

تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. بشرى دراج

سلم تصحيح مقرر تحليل تابعي /2/

السؤال الأول: (45 درجة)

[1] ① برهنة (8 درجات).

② بفرض $S=\{(0,0,a)\,;\,a\in\mathbb{R}\}$ ولنبرهن أن $S=M^{\perp}$

$\forall\, y\in S\,;\, y=(0,0,a)\,;\, a\in\mathbb{R}$

$\forall\, z\in M\,;\, z=(x,2,0)$ (8 درجات)

$\Rightarrow \langle y,z\rangle = \langle (0,0,a),(x,2,0)\rangle = 0$

$\Rightarrow y\in M^{\perp} \Rightarrow S\subseteq M^{\perp}$

* أيا كان $n\in M^{\perp}\subseteq\mathbb{R}^3$ بحيث

ولنفرض جدلا أن $n\notin S$ عندئذ يوجد $a_1\neq 0$ وليكن $n=(a_1,a_2,a_3)$

$z=(x,2,0)$ بحيث $x\neq 0$

$\langle n,z\rangle = a_1x+2a_2+0\neq 0 \Rightarrow n\notin M^{\perp}$ وهذا تناقض مع الفرض إذاً $n\in S$ وبالتالي $M^{\perp}\subseteq S$

من علاقتي الاحتواء نجد

$M^{\perp}=S=\{(0,0,a)\,;\,a\in\mathbb{R}\}$

* (5 درجات): $\operatorname{span} M$ ليست كثيفة في $\mathbb{R}^3$ لأن لا تحقق ...

$M^{\perp}=\{0\}$

[2] برهنة (8 درجات)

[3] ① $n\neq m$ (10 درجات)

$$\langle e_n,e_m\rangle = \left\langle \frac{\sin(2nt)}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin(2mt)}{\sqrt{\pi}}\right\rangle$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2nt)\cdot\sin(2mt)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\frac{1}{2}\left[\cos(2n-2m)t-\cos(2n+2m)t\right]dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2n-2m}\sin(2n-2m)t-\frac{1}{2n+2m}\sin(2n+2m)t\right]_0^{2\pi}$$

$$=0$$

$\Leftarrow n = m$

$$\langle e_n, e_n\rangle = \left\langle \frac{\sin(2nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2nt)}{\sqrt{\pi}}\right\rangle$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(2nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4nt}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{8n}\sin 4nt\right]_0^{2\pi} = 1$$

نستنتج أن المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ متعامدة منظمة.

② (6 درجات).

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\Rightarrow \|x\| = \sqrt{\pi}$$

السؤال الثاني: (45 درجة):

$\boxed{1}$ ① (7 درجات):

نجد T^* من العلاقة $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$

حيث $T^*y = \langle z_1, z_2, \ldots\rangle$

$$\langle Tx, y\rangle = \left\langle \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \ldots\right), (y_1, y_2, \ldots)\right\rangle$$

$$= \frac{x_1}{1}\bar{y}_1 + \frac{x_2}{2}\bar{y}_2 + \ldots$$

$$\langle x, T^*y\rangle = x_1\bar{z}_1 + x_2\bar{z}_2 + x_3\bar{z}_3 + \ldots$$

بالمطابقة نجد:

$$\bar{z}_1 = \frac{\bar{y}_1}{1} \Rightarrow z_1 = y_1$$

$$\bar{z}_2 = \frac{\bar{y}_2}{2} \Rightarrow z_2 = \frac{y_2}{2}$$

$$T^*y = \left(\frac{y_1}{1}, \frac{y_2}{2}, \ldots\right)$$

* T واحدي (8 درجات):

T واحدي إذا كان $\|Tx\| = \|x\|$

$$\|Tx\| = \left\| \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots \right) \right\|$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{x_i}{i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$$

$\Leftarrow \|Tx\| \leq \|x\| \Leftarrow T$ السي واحدي.

② T موجب (6 درجات)

يكون T موجب إذا كان

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0$$

$$\langle Tx, x \rangle = \left\langle \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \cdots \right), (x_1, x_2, \cdots) \right\rangle$$

$$= \frac{x_1 \bar{x}_1}{1} + \frac{x_2 \bar{x}_2}{2} + \cdots$$

$$= \frac{|x_1|^2}{1} + \frac{|x_2|^2}{2} + \frac{|x_3|^2}{3} + \cdots \geq 0$$

$\Leftarrow T$ موجب.

③ T متراص (7 درجات):

T خطي ومحدود ولنبرهن أن T متراص.

نأخذ المتتالية $T_n(x_1, x_2, \cdots) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, 0, \cdots \right)$ متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة ومنتهية البعد فهي متراصة ولنبرهن أنها متقاربة من المؤثر T

$$\|(T-T_n)x\|^2 = \left\| \left(0, \cdots, 0, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \cdots \right) \right\|^2$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} \left| \frac{x_i}{i} \right|^2$$

$$\leq \left(\frac{1}{n+1} \right)^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2 \leq \left(\frac{1}{n+1} \right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} \right)^2 \cdot \|x\|^2$$

$\Leftarrow \|(T-T_n)x\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Leftarrow T_n$ متقاربة من T

ومنه T متراص.

2 ① 5 درجات

$X = [1, \infty[= \bar{X} \Leftarrow X$ فضاء جزئي مغلق من الفضاء التام $\mathbb{R}$

وبالتالي X تام.

تمرين 7

$$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty|$$

$$= \left|x^2 - 1 + \frac{1}{x} - y^2 + 1 - \frac{1}{y}\right|$$

$$= \left|x^2 - y^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

$$\leq |(x-y)(x+y)| + \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

$$= |x-y| \cdot |x+y| + |x-y| \cdot \left|\frac{1}{xy}\right|$$

$$= \left[x + y + \frac{1}{xy}\right] \cdot |x-y|$$

نلاحظ أن

$$k = |x+y| + \frac{1}{xy} > 1$$

$\Leftarrow$ f ليس تقليص.

3) إيجاد النقطة الثابتة في المعادلة

$$Tx = x$$

$$x^2 - 1 + \frac{1}{x} = x$$

$$x^3 - x + 1 - x^2 = 0$$

$$(x-1)(x^2-1) = 0$$

إما $x = 1 \in X$ مقبول

أو $x = -1 \notin X$ مرفوض

$\Leftarrow$ النقطة الثابتة هي $\boxed{x = 1}$

جامعة طرطوس	امتحان مقرر تحليل تابعي 2	اسم الطالب:
كلية العلوم	الدورة الفصلية الأولى – سنة رابعة رياضيات	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	العام الدراسي 2022-2023 م	الدرجة: 90

السؤال الأول: (40 درجة)

1) لتكن (x_n) متتالية في فضاء منظم X والمطلوب:

1. أثبت أنّ التقارب القوي للمتتالية يؤدي إلى التقارب الضعيف.
2. أثبت إذا كان X فضاء هلبرت والمتتالية (x_n) متقاربة بضعف من x و $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$ عندئذ المتتالية (x_n) متقاربة بقوة من x.

2) لتكن $M = \{(x_1, x_2, 0) \quad ; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ مجموعة جزئية من الفضاء $\mathbb{R}^3$ والمطلوب أثبت أنّ

$$M^\perp = \{(0,0,a_3) \quad ; a_3 \in \mathbb{R}\}$$

وهل $span\ M$ مجموعة كثيفة في $\mathbb{R}^3$؟

3) ليكن X فضاء منظم مؤلف من كل الدوال المستمرة على المجال $[0,2\pi]$ والمزود بالجداء الداخلي:

$$\langle x, y\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\, dt \quad \forall\, x, y \in X$$

أثبت أن المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة $e_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}$ هي متتالية متعامدة منظمة في X.

السؤال الثاني: (50 درجة)

1) ليكن لدينا المؤثر الخطي

$$T: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$
$$T(x, y) = (2x + iy, ix + 2y)$$

والمطلوب: 1. أثبت أنّ T محدود. 2. أوجد مؤثر هلبرت المرافق T^* و هل T مؤثر ناظمي أم لا ؟

2) ليكن $X = [1, \infty[$ وليكن $T: X \longrightarrow \mathbb{R}$ تطبيق معرف بالشكل:

$$T(x) = \frac{2x + 3}{x + 1}$$

1. هل X تام أم لا ؟
2. أثبت أنّ T تقليص على X.
3. أوجد النقطة الثابتة للتطبيق T.

------------------------------انتهت الأسئلة------------------------------

طرطوس في 2023/2/2	تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح	مدرس المقرر: د. بشرى دراج

جامعة طرطوس — كلية العلوم — قسم الرياضيات

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل تابعي 2 لطلاب السنة الرابعة رياضيات

الدورة الفصلية الأولى – العام الدراسي 2022–2023م

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (40 درجة)

1) لتكن (x_n) متتالية في فضاء منظم X والمطلوب:

1. أثبت أنّ التقارب القوي للمتتالية يؤدي إلى التقارب الضعيف.
2. أثبت إذا كان X فضاء هلبرت والمتتالية (x_n) متقاربة بضعف من x و $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$ عندئذ المتتالية (x_n) متقاربة بقوة من x.

2) لتكن $M = \{(x_1, x_2, 0) \quad ; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ مجموعة جزئية من الفضاء $\mathbb{R}^3$ والمطلوب أثبت أنّ

$$M^\perp = \{(0,0,a_3) \quad ; a_3 \in \mathbb{R}\}$$

وهل $span\ M$ مجموعة كثيفة في $\mathbb{R}^3$؟

3) ليكن X فضاء منظم مؤلف من كل الدوال المستمرة على المجال $[0,2\pi]$ والمزود بالجداء الداخلي:

$$\langle x, y\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\,dt \quad \forall\, x, y \in X$$

أثبت أن المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة $e_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}$ هي متتالية متعامدة منظمة في X.

الحلّ:

1) 1. (10 درجات)

لتكن (x_n) متتالية متقاربة بقوة نحو x في الفضاء المنظم X

$$x_n \xrightarrow{s} x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$$

ولنبرهن أن $x_n \xrightarrow{w} x$ أي سنبرهن أن $f(x_n) \longrightarrow f(x) \quad \forall\, x \in \acute{X}$

$$0 \leq |f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\|.\|x_n - x\|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|f(x_n)-f(x)|=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x) \Rightarrow x_n \overset{w}{\to} x$$

.2 (10 درجات)

يجب أن نبرهن أن $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$

$$\|x_n-x\|^2=\langle x_n-x,x_n-x\rangle=\langle x_n,x_n\rangle-\langle x_n,x\rangle-\langle x,x_n\rangle+\langle x,x\rangle$$

وبما أن $x_n \overset{w}{\to} x$ عندئذ $\lim_{n\to\infty}\langle x_n,z\rangle=\langle x,z\rangle$

بالتالي

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\|x_n\|^2-\langle x_n,x\rangle-\langle x,x_n\rangle+\|x\|^2}$$
$$=\sqrt{\|x\|^2-\|x\|^2-\|x\|^2+\|x\|^2}=0$$

بالتالي $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$

بالتالي (x_n) متتالية متقاربة بقوة نحو x.

2) (10 درجات)

بفرض $S=\{(0,0,a_3);\ a_3\in\mathbb{R}\}$ ولنبرهن أن $S=M^\perp$

$$\forall\, y\in S\ ;\ \ y=(0,0,a_3); a_3\in\mathbb{R}$$
$$\forall\, x\in M\ ;\ \ x=(x_1,x_2,0)$$
$$\langle y,x\rangle=\langle(0,0,a_3),(x_1,x_2,0)\rangle=0$$
$$\Rightarrow y\in M^\perp \Rightarrow S\subseteq M^\perp$$

$\forall\, z\in M^\perp\subseteq\mathbb{R}^3$

ولنفرض جدلاً بأن $z\notin S$ عندئذ يوجد $a_1\neq 0$ بحيث $z=(a_1,a_2,a_3)$

وليكن $x=(x_1,0,0)\in M$ بحيث $x_1\neq 0$

$$\langle z,x\rangle=\langle(a_1,a_2,a_3),(x_1,0,0)\rangle=a_1\times x_1+a_2\times 0+a_3\times 0=a_1x_1\neq 0$$

بالتالي $z\notin M^\perp$ وهذا تناقض مع الفرض إذا $z\in S$ بالتالي $M^\perp\subseteq S$

من علاقتي الاحتواء نجد $M^\perp=S=\{(0,0,a_3);\ a_3\in\mathbb{R}\}$

- $span\ M$ ليست مجموعة كثيفة في $\mathbb{R}^3$ لأنها لا تحقق $M^\perp=\{0\}$

3) (10 درجات)

$$n\neq m$$

$$\langle e_n,e_m\rangle=\langle\frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin(mt)}{\sqrt{\pi}}\rangle=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt)\sin(mt)\,dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\cos(n-m)t-\cos(n+m)t]dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)t-\frac{1}{n+m}\sin(n+m)t\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{\pi}\times 0=0$$

$$\langle e_n, e_n \rangle = \langle \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} \rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(nt)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2nt}{2} dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4n} sin2nt\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \times \pi = 1$$

نستنتج بأن المتتالية $(e_n)_{n\geq1}$ متعامدة منظمة.

السؤال الثاني: (50 درجة)

1) ليكن لدينا المؤثر الخطي

$$T: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$
$$T(x,y) = (2x+iy, ix+2y)$$

والمطلوب: 1. أثبت أنّ T محدود. 2. أوجد مؤثر هلبرت المرافق T^* و هل T مؤثر ناظمي أم لا ؟

2) ليكن $X = [1, \infty[$ وليكن $T: X \longrightarrow \mathbb{R}$ تطبيق معرف بالشكل:

$$T(x) = \frac{2x+3}{x+1}$$

1. هل X تام أم لا ؟
2. أثبت أنّ T تقليص على X.
3. أوجد النقطة الثابتة للتطبيق T.

الحلّ:

1)

1. (9 درجات)

$$\|Tv\|^2 = \|T(x,y)\|^2 = \|2x+iy, ix+2y\|^2 = |2x+iy|^2 + |ix+2y|^2$$
$$= 4x^2 + y^2 + x^2 + 4y^2 = 5(x^2+y^2) = 5\|(x,y)\|^2$$
$$\Longrightarrow \|Tv\| = \sqrt{5}\|v\|$$

بالتالي T محدود

2. (9 درجات)

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle$$

$$\langle Tv, w \rangle = \langle T(x_1,y_1), (x_2,y_2) \rangle = \langle (2x_1+iy_1, ix_1+2y_1), (x_2,y_2) \rangle$$
$$= (2x_1+iy_1)\overline{x_2} + (ix_1+2y_1)\overline{y_2} = x_1(2\overline{x_2} + i\overline{y_2}) + y_1(i\overline{x_2} + 2\overline{y_2})$$

لنضع $T^*w = (z_1, z_2)$

$$\langle v, T^*w \rangle = \langle (x_1,y_1), (z_1,z_2) \rangle = x_1\overline{z_1} + y_1\overline{z_2}$$

عندئذ بالمقارنة نجد

$$\overline{z_1} = 2\overline{x_2} + i\overline{y_2} \Longrightarrow z_1 = 2x_2 - iy_2$$
$$\overline{z_2} = i\overline{x_2} + 2\overline{y_2} \Longrightarrow z_2 = -ix_2 + 2y_2$$

بالتالي $T^*w = T^*(x_2, y_2) = (z_1, z_2) = (2x_2 - iy_2, -ix_2 + 2y_2)$

عندئذ

$$T: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$
$$T(x, y) = (2x - iy, - ix + 2y)$$

3. (8 درجات)

$$TT^*v = T\big(T^*(x, y)\big) = T(2x - iy, -ix + 2y) = (5x, 5y)$$

وبأسلوب مماثل نثبت أن

$$T^*Tv = T^*T(x, y) = (5x, 5y)$$

بالتالي

$$T^*T = TT^*$$

بالتالي T ناظمي

2)

1. (8 درجات)

$$\bar{X} = [1, \infty[= X$$

بالتالي X مغلقة في الفضاء التام $\mathbb{R}$ فإن X تام.

2. (8 درجات)

يكون T تقليص إذا كان $d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y)$ حيث $0 < k < 1$

$$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = \left|\frac{2x + 3}{x + 1} - \frac{2y + 3}{y + 1}\right| = \frac{|x - y|}{|(x + 1)(y + 1)|} \leq \frac{1}{4}|x - y| = \frac{1}{4}d(x, y)$$

3. (8 درجات)

$$T(x) = x$$

بالتالي $\frac{2x+3}{x+1} = x$ عندئذ $x^2 - x - 3 = 0$

$$(\text{مقبول})\, x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \in X$$
$$(\text{مرفوض})\, x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \notin X$$

طرطوس: 2023/2/2م **مدرس المقرر: د. بشرى دراج**

جامعة طرطوس	**امتحان مقرر تحليل تابعي 2**	**اسم الطالب:**
كلية العلوم	**الدورة الفصلية الثانية – سنة رابعة رياضيات**	**المدة: ساعتان**
قسم الرياضيات	**العام الدراسي 2021–2022**	**الدرجة: 90**

السؤال الأول: (34 درجة)

1) لتكن (x_n) متتالية في فضاء منظم X والمطلوب:

1. أثبت أنّ التقارب القوي للمتتالية يؤدي إلى التقارب الضعيف.

2. أثبت إذا كان X فضاء هلبرت والمتتالية (x_n) متقاربة بضعف من x و $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$ عندئذ المتتالية (x_n) متقاربة بقوة من x.

2) ليكن X فضاء منظم و Y فضاء تام وليكن $T: D(T) \longrightarrow Y$ مؤثراً خطياً محدوداً مغلقاً ساحته $D(T)$ جزء من X أثبت أنّ $D(T)$ مجموعة جزئية مغلقة في X.

3) ليكن X فضاء منظم مؤلف من كل الدوال المستمرة على المجال $[0,2\pi]$ والمزود بالجداء الداخلي:

$$\langle x, y\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\,dt \quad \forall\, x, y \in X$$

أثبت أن المتتالية $(e_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة $e_n(t) = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}$ هي متتالية متعامدة منظمة في X.

السؤال الثاني: (56 درجة)

1) ليكن لدينا المؤثر الخطي

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$
$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$$

والمطلوب: 1. أثبت أنّ T محدود و أوجد نظيمه. 2 . أوجد مؤثر هلبرت المرافق T^* و هل T مؤثر ناظمي أم لا ؟

3. أثبت أن T مؤثر متراص.

2) ليكن $X = \left[\frac{2}{3}, \infty\right[$ وليكن $T: X \longrightarrow \mathbb{R}$ تطبيق معرف بالشكل:

$$T(x) = \frac{2x + 6}{3x + 2}$$

1. هل X تام أم لا ؟

2. أثبت أنّ T تقليص على X.

3. أوجد النقطة الثابتة للتطبيق T.

انتهت الأسئلة

طرطوس في 2022/7/27	**تمنياتي بالتوفيق والنجاح**	**مدرس المقرر: د. بشرى دراج**

سلم تصحيح مقرر تحليل تابعي /2/

السؤال الأول: (34 د)

1 ① الاثبات: لتكن (x_n) متتالية متقاربة بقوة نحو x في الفضاء المنظم X

8 د $x_n \xrightarrow{s} x \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$

ولنبرهن أن $x_n \xrightarrow{w} x$ أي سنبرهن أن $\forall f \in X^*$ $f(x_n) \longrightarrow f(x)$

$$0 \le |f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \le \|f\| . \|x_n - x\|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x)| = 0 \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x) \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x$$

② يجب أن نبرهن

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x \rangle = \langle x_n, x_n \rangle - \langle x_n, x \rangle - \langle x, x_n \rangle - \langle x,$$

عما أن $x_n \xrightarrow{s} x \Leftarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, z \rangle = \langle x, z \rangle$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\|x_n\|^2 - \langle x_n, x \rangle - \langle x, x_n \rangle - \|x\|^2} \quad 8 د$$

$$= \sqrt{\|x\|^2 - \langle x, x \rangle - \langle x, x \rangle - \|x\|^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \Rightarrow$$ (x_n) متقاربة بقوة من x

2 $\forall x \in \overline{D(T)}$ توجد متتالية (x_n) في $D(T)$ بحيث $x_n \longrightarrow x$ وبما أن T محدود

بالتالي $\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \le \|T\| . \|x_n - x_m\|$

(Tx_n) متتالية لكوشي وبما أن Y تامة في Y فإن (Tx_n) متقاربة من $y \in X$ أي $Tx_n \longrightarrow y \in Y$

وبما أن T مغلق فإن 8 د

$x \in D(T)$ و $y = Tx \Leftarrow$

وبما أن $\overline{D(T)} \subseteq D(T) \Leftarrow D(T) \subseteq \overline{D(T)}$

$D(T)$ مغلقة $\Leftarrow D(T) = \overline{D(T)}$

3

$$\langle e_n, e_m \rangle = \left\langle \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nt . \cos mt \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n-m)t + \cos(n+m)t \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)t + \frac{1}{n+m}\sin(n+m)t\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\langle e_n, e_n\rangle = \left\langle \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nt \cdot \cos nt \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 nt \, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2nt}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4n}\sin 2nt\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}[\pi] = 1$$

نلاحظ أن

10 د

$$\langle e_n, e_m\rangle = \begin{cases} 0 & \text{و } n = m \\ 1 & \text{و } n \neq m \end{cases}$$

بالتالي (e_n) متتالية متعامدة منتظمة.

السؤال الثاني: 56 د

$\boxed{1}$ ①

$$\|Tx\| = \|T(x_1, x_2, \ldots)\| = \left\|\left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \ldots\right)\right\|$$

7 د

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{x_i}{i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$$

$$\Rightarrow^{(*)} \boxed{\|Tx\| \leq \|x\|} \quad \text{و} \quad C = 1 > 0 \Rightarrow$$ T محدود

إيجاد النظيم T:

من (*) نجد:

$$\|T\| = \sup \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq 1 \Leftarrow \forall x \in \ell_2 : \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq 1$$

$$\boxed{\|T\| \leq 1} \Leftarrow$$

لنأخذ

$$x_0 = (1, 0, 0, \ldots)$$

$$\|Tx_0\| = \left\|\left(1, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \ldots\right)\right\| = (1 + 0 + 0 + \ldots)^{\frac{1}{2}} = 1$$

7 د

$$\|x_0\| = \|(1, 0, 0, \ldots)\| = 1$$

$$\Rightarrow \|T\| = \sup \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|} = 1 \Rightarrow \boxed{\|T\| \geq 1}$$

إيجاد المؤثر المرافق T : من العلاقة $\langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle$

$$\langle Tx,y\rangle = \left\langle \left(\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\dots\right),(y_1,y_2,\dots)\right\rangle \quad (1)$$

$$= \frac{x_1}{1}y_1 + \frac{x_2}{2}y_2 + \dots$$

$$\langle x,T^*y\rangle = x_1\bar{z}_1 + x_2\bar{z}_2 + \dots \quad (2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد

$$\bar{z}_1 = \bar{y}_1 \Rightarrow z_1 = y_1$$

27

$$\bar{z}_2 = \frac{\bar{y}_2}{2} \Rightarrow z_2 = \frac{y_2}{2}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow T^*y = \left(\frac{y_1}{1},\frac{y_2}{2},\dots\right)$$

نلاحظ أن $T^*x = \left(\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\dots\right) \Rightarrow T = T^*$

أي T مترافق ذاتياً.

* بما أن T مؤثر مترافق ذاتياً فهو مؤثر ناظمي. 27

أو يتم اثبات أن T ناظمي إذا تحقق الشرط $T^*T = TT^*$

---

* T خطي ومحدود ولنبرهن أن T متراص ولنأخذ المتتالية

$T_n(x_1,x_2,\dots) = \left(\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\dots,\frac{x_n}{n},0,\dots\right)$ متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة منتهية البعد فهي متراصة ولنبرهن أنها متقاربة من المؤثر T

$$\forall x\in \ell_2 : \|(T-T_n)x\|^2 = \left\|\left(0,0,\dots,\frac{x_{n+1}}{n+1},\dots\right)\right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty}\left|\frac{x_i}{i}\right|^2$$

27

$$\le \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \sum_{i=n+1}^{\infty}|x_i|^2$$

$$\le \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 = \left(\frac{1}{n+1}\right)^n\|x\|^2$$

$$\Rightarrow \|(T-T_n)(x)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Leftarrow T_n$ متقاربة من T $\Leftarrow$ T متراص.

* إذا اختار الطالب المؤثر S بطريقة صحيحة ليكون $ST = I$ يحصل على 3 درجات ولكن هذه الطريقة خاطئة لأن S غير محدود.

2 (1) $X = [\frac{2}{3}, +\infty[= \overline{X}$ ⇐ X مغلقة في $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}$ تام ⇐ X تام >7

(2)

$$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty|$$

$$= \left|\frac{2x+6}{3x+2} - \frac{2y+6}{3y+2}\right|$$

>7

$$= \left|\frac{(2x+6)(3y+2) - (2y+6)(3x+2)}{(3x+2)(3y+2)}\right|$$

$$= \frac{14|x-y|}{|(3x+2)(3y+2)|} \leq \frac{14}{16}|x-y|$$

$$= \frac{7}{8}|x-y|$$

$d(Tx, Ty) \leq \frac{7}{8}|x-y|$ ⇐

$d(Tx, Ty) \leq \alpha|x-y| = \alpha\, d(x,y)$ ⇐ بحيث $0 < \alpha = \frac{7}{8} < 1$

T تقليص. ⇐

(3)

$$Tx = x$$

$$\frac{2x+6}{3x+2} = x \Rightarrow x^2 = 2$$

>7

إما $x = \sqrt{2} \in X$

أو $x = -\sqrt{2} \notin X$

⇐ النقطة الثابتة هي $\sqrt{2}$.