ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية **العلوم**

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

مكتبة A to Z للخدمات الجامعية

## اسئلة دورات محلولة

# نظرية المعادلات

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Zمكتبة



ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < نظرية المعادلات >
لطلاب السنة الرابعة رياضيات
الدورة الفصلية الاولى 2025 -2024

الاسم:
المدة: ساعتان
الدرجة: 90

---

**السؤال الأول:** (45 درجة)

**أولاً:** وضح المفاهيم التالية:

1. النقطة الثابتة.
2. الحل الشامل لجملة تفاضلية .
3. المصفوفة **الحالة** لجملة تفاضلية خطية متجانسة.
4. النقطة الحرجة نجمية مستقرة.

**ثانياً:**

باستخدام طريقة بيكارد أوجد الحل التقريبي لمسألة القيم الابتدائية التالية

$$x'(t) = 3x(t)$$

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 3$$

**السؤال الثاني:** (45 درجة)

**أولاً**

بفرض لدينا الجملة التفاضلية التالية $x' = Ax + b(t)$،

حيث $A = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ ، بحساب المصفوفة **الأسية** الأساسية أوجد حل مسألة القيم الابتدائية حيث $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**ثانيا**

بفرض لدينا الجملة التفاضلية التالية

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1$$

عين حامل المسار (**مع الرسم**)، وعين نوع النقطة الشاذة وادرس استقرارها.

------------------------- انتهت الأسئلة -------------------------

**مع تمنياتي بالنجاح للجميع**

**مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين**

سلم تصحيح مقرر نظرية المعادلات م ١ 2024 - 2025

## السؤال الأول:

**أولاً:** 1- النقطة الثابتة هي نقطة توازن المعادلة $x' = f(t,x)$ حيث $x' = 0$

2- الحل الشامل لجملة تفاضلية: نقول عن حل $(\phi, I_1)$ أنه شامل على $I_2$ ($I_2 \subset I_1$) اذا كان $\phi$ يقبل تمديد $\phi^*$ على كامل المجال $I_2$.

3- المصفوفة الحالة هي مصفوفة أساسية رئيسية تعرف بالشكل $K(t,t_0) = \phi(t)\,\phi(t_0)^{-1}$ حيث $\phi(t)$ مصفوفة أساسية على المجال $I$ و $t_0 \in I$.

4- النقطة الحرجة نجمية مستقرة اذا كانت المسارات على شكل مستقيمات تمر بالنقطة الحرجة و اتجاه الحركة نحو هذه النقطة. ✱

**ثانياً:** $f, f'$ توابع مستمرة $\Leftarrow$ الحل وحيد

$$x_n = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\,ds$$

$$x_1 = 3 + \int_0^t 3\cdot 3\,ds = 3 + 9t$$

$$x_2 = 3 + 9t + \frac{27}{2}t^2 \quad , \quad x_3 = 3 + 9t + \frac{27t^2}{2!} + \frac{3(3t)^3}{3!}$$

$$x_4 = 3 + 9t + \frac{3(3t)^2}{2!} + \frac{3(3t)^3}{3!} + \frac{3(3t)^4}{4!} \quad \dots \quad x_n = 3\left(1 + 3t + \frac{(3t)^2}{2!} + \frac{(3t)^3}{3!} + \dots + \frac{(3t)^n}{n!}\right)$$

$$\Rightarrow x(t) = 3e^{3t}$$

## السؤال الثاني:

**أولاً:**

$$x' = Ax + b(t)$$

$$|A - \lambda I| = (3+\lambda)^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -6 , \ \lambda_2 = 0$$

$$e^{At} = \alpha_1 A t + \alpha_0 I$$

$$e^{\lambda t} = \alpha_1 \lambda t + \alpha_0$$

$$1 = e^{0} = \alpha_0$$

$$\alpha_1 = \frac{1 - e^{-6t}}{6t}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6t} & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-6t} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-6t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)\,ds \ ; \ x_0 = (1$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{13}{7}e^{t} - \frac{5}{6}e^{-6t} \\ \frac{16}{42}e^{t} + \frac{12}{42}e^{-6t} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{-x_1} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = c^2$$

5

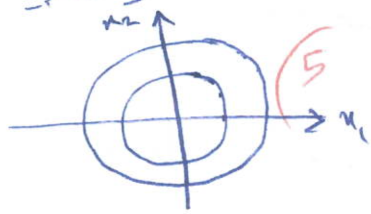
وهي معادلة خاص المسار

أو

$$\left.\begin{aligned}x_1 &= c_1\cos t + c_2\sin t \\ x_2 &= -c_1\sin t + c_2\cos t\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = c^2$$

5 5

النقطة الشاذة مركز وهي مستقرة وليست مستقرة تقاربيا




5

انتهى السلم

$x' = f(t,x)$

1 - النقطة الثابتة هي نقطة توازن المعادلة وتحقق $x' = 0$

2 - مسألة القيم الابتدائية صحيحة إذا كان الحل موجود ووحيد ويتعلق بشكل مستمر بالقيم الابتدائية

3 - المصفوفة الأساسية: نفرض $\phi(t)$ مصفوفة أساسية للجملة التفاضلية المرتبطة على مجال $I$ ما $\det\phi(t) \neq 0$ ⟸ $\det\phi(t_0) \neq 0 : t_0 \in I$ ⟸ موجود $\phi^{-1}(t)$

فتعطى المصفوفة الحالة $x(t,t_0) = \phi(t)\,\phi^{-1}(t_0)$ ومصفوفة أساسية ... مع الموقت

4 - الحل المستقر: نفرض $x' = f(t,x)$ حيث نقول عن الحل $\phi(t)$ ... الابتدائي ... وكذلك شرط ... $x \in \mathbb{R}^n$ مع $\phi(t_0) = \phi_0$ ... من أجل كل من ... ليابونوف ... الحل $x(t)$ المحقق شرط ابتدائي

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ ... $x(t_0) = x_0$ ... $\|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon$

$\|x_0 - \phi_0\| < \delta \Rightarrow$

$y'' + y = \cos x \quad ; \quad y(0) = 0 \ , \ y(1) = 0$

$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \mp i \qquad y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$y_h(0) = c_1 = 0 \quad , \quad y_h(1) = 0 + c_2 \sin 1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

نفرض المسألة التي ... حلول ... من الحل الصفري ⟸ نستخدم التابع ...

$\Leftarrow \begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \sin(1-x) \end{cases}$

$w(\xi) = \begin{vmatrix} \sin\xi & \sin(1-\xi) \\ \cos\xi & -\cos(1-\xi) \end{vmatrix}$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{\sin\xi \sin(1-x)}{\sin 1} & 0 < \xi < x \\ -\dfrac{\sin x \sin(1-\xi)}{\sin 1} & x < \xi < 1 \end{cases}$$

$$y(x) = \int_0^x \frac{-\sin\xi \sin(1-x)}{\sin 1}\cos\xi \, d\xi + \int_x^1 \frac{-\sin x \sin(1-\xi)}{\sin 1}\cos\xi \, d\xi$$

$= -\sin(1-x)\dfrac{\sin^2 x}{2\sin 1} - \dfrac{\sin x}{2}\left(x + \ldots\right) + \sin x \ \mathrm{ctg}\,1\,(\sin^2 x - \sin^2 1)$

$|A - \lambda I| = (3+\lambda)^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -6 \ , \ \lambda_2 = 0$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6t} & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-6t} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-6t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6t} \end{pmatrix}$$

$e^{At} = \alpha_1 A t + \alpha_0 I$

$e^{\lambda t} = \alpha_1 \lambda t + \alpha_0$

$1 = e^{0} = \alpha_0 \qquad \alpha_1 = \dfrac{1 - e^{-6t}}{6t}$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B(s)\, ds \quad ; \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{13}{7} e^{t} - \frac{5}{6} e^{-6t} \\ \frac{16}{42} e^{t} + \frac{12}{42} e^{-6t} \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 3 , \ \beta_1 = 1$

$\lambda_2 = -6 \Rightarrow \alpha_2 = -3 , \ \beta_2 = 1$

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-6t} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1(t) = 3c_1 - 3c_2 e^{-6t} \\ x_2(t) = c_1 + c_2 e^{-6t} \end{array}$$

$t \to \infty \Rightarrow x_1 \to 3c_1 , \ x_2 \to c_1$ الحل المتزن الذي [illegible]

$x_2 = \frac{1}{3} x_1$

ولايجاد معادلة المسار نقسم $\frac{dx_1}{dx_2} = 3 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} x_1 + c$

مستقيمات [illegible]

$x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} x_1$ [illegible]

[illegible] مستقيم [illegible]

$c_1 = \frac{1}{3}$

بسم الله الرحمن الرحيم

| | | |
|---|---|---|
| جامعة طرطوس<br>كلية العلوم<br>قسم الرياضيات | امتحان مقرر < نظرية المعادلات ><br>لطلاب السنة الرابعة رياضيات<br>الدورة الفصلية الأولى 2023-2024 | الاسم:<br>المدة: ساعتان<br>الدرجة: 90 |

**السؤال الأول:** (45 درجة)

**أولاً:** وضح المفاهيم التالية:

1. النقطة الحرجة.
2. الحل الأعظمي لجملة تفاضلية.
3. المصفوفة **الحالة** لجملة تفاضلية خطية متجانسة
4. الاستقرار حسب ليابونوف.
5. مسألة شتورم ليوفيل الحدية المتجانسة.

**ثانياً:**

باستخدام طريقة بيكارد أوجد الحل التقريبي لمسألة القيم الابتدائية التالية

$$x'(t) = 3x(t)$$
$$t_0 = 0, \quad x_0 = 3$$



**السؤال الثاني:** (45 درجة)

**أولاً**

بفرض لدينا المسألة التالية

$$x'' + 2x' - 8x = e^t; \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -4.$$

1. حول المعادلة التفاضلية المفروضة إلى جملة معادلات تفاضلية كل منها من المرتبة الأولى
2. ادرس وجود ووحدانية حل الجملة التفاضلية **الناتجة** في جوار $t_0 = 0$.
3. أوجد حل مسألة القيم الابتدائية **الناتجة** باستخدام المصفوفة الأسية الأساسية.

**ثانياً**

بفرض لدينا الجملة التفاضلية التالية

$$x_1'(t) = 2x_1 - x_2$$
$$x_2'(t) = x_1 + 2x_2$$

ادرس استقرار النقطة الحرجة.

---------------------------انتهت الأسئلة ---------------------------------

مع تمنياتي بالنجاح للجميع

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

السؤال الأول

**أولاً** ١- النقطة الحرجة هي نقطة توازن المعادلة $x'=f(t,x)$ وتحقق $x=0$ (5)

٢- القول عن حل انه اعظمي اذا انطبق أي تمديد له عليه (5)

٣- الصفوفة الحالة هي مصفوفة أساسية رئيسية تعرف بالشكل (5)

$$K(t,t_0) = \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1}$$

حيث $\Phi(t)$ مصفوفة أساسية على مجال ما $I$ ؛ $t_0 \in I$

٤- نفرض $x'=f(t,x)$ حيث $f$ مستمر ويحقق شرط ليبشتز في $x \in \mathbb{R}^n$ ، نقول عن $\varphi(t)$ نسبة الحل الابتدائي $\varphi(t_0)=\varphi_0$ أنه مستقر حسب ليابونوف اذا كان (5)

من أجل كل حل $x(t)$ للمعادلة بشرط ابتدائي $x(t_0)=x_0$ يحقق $\forall \varepsilon>0 : \exists \delta_\varepsilon > 0$

$\|x_0-\varphi_0\| < \delta_\varepsilon$ يحقق $\|x(t)-\varphi(t)\| < \varepsilon$

٥- مسألة شتورم ليوفيل الحدية هي معادلة تفاضلية مزودة بشرطين حديين (5)

من أجل $p, q$ توابع معرفة ومستمرة على $[a,b]$ ، $p>0$ قابل للاشتقاق على $[a,b]$

$$(p(x)\,y')' + q(x)\,y = 0$$

مزودة بشرطين حديين متجانسين

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2$ لا ينعدمان معاً ، $\beta_1, \beta_2$ لا ينعدمان معاً

**ثانياً**

$f, g$ توابع مستمرة $\Leftarrow$ يوجد حل وحيد

$$x_n = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\,ds \quad (5)$$

$$x_1 = 3 + \int_0^t 3\cdot 3\,ds = 3+9t, \quad x_2 = 3+9t+\frac{27}{2}t^2, \quad x_3 = 3+9t+\frac{27t^2}{2!}+\frac{3(3t)^3}{3!} \quad (5)$$

$$x_4 = 3+9t+\frac{3(3t)^2}{2!}+\frac{3(3t)^3}{3!}+\frac{3(3t)^4}{4!} \quad \dots \quad x_n = 3\left(1+3t+\frac{(3t)^2}{2!}+\frac{(3t)^3}{3!}+\dots+\frac{(3t)^n}{n!}\right) \quad (5)$$

$$\Rightarrow x(t) = 3e^{3t} \quad (5)$$

السؤال الثاني

1) $x_1 = x$, $x_2 = x'$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2x_2 + 8x_1 + e^t \end{cases}$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (5)

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

2) $x' = f(t,x)$ ; $f(t,x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_2+8x_1+e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ (5) ، $f_1, f_2$ توابع مستمرة

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 8, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2$$ توابع مستمرة

[illegible]

3) $e^{At} = \alpha_1 A t + \alpha_0 I \quad ; r(\lambda) = \alpha_1 \lambda + \alpha_0 \quad , \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -4$

$$\alpha_1 = \frac{1}{6}\left(e^{2t} - e^{-4t}\right) \quad , \quad \alpha_0 = \frac{1}{3}\left(e^{2t} + e^{-4t}\right)$$

$$e^{At} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 2e^{2t} + 4e^{-4t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B(s)\, ds = \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ -4e^{-4t} \end{pmatrix} + \frac{1}{36}\begin{pmatrix} -6e^{t} + 5e^{2t} + e^{-4t} \\ -6e^{t} + 10e^{2t} - 4e^{-4t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{31}{30} e^{-4t} + \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{5} e^{t} \\ -\frac{62}{15} e^{-4t} + \frac{1}{3} e^{2t} - \frac{1}{5} e^{t} \end{pmatrix}$$

ثانياً:

$$x_1'(t) = 2x_1 - x_2$$
$$x_2'(t) = x_1 + 2x_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A - mI| = \begin{vmatrix} 2-m & -1 \\ 1 & 2-m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 5 = 0$$

$$m_{1,2} = 2 \mp i \qquad \lambda_r = 2 > 0$$

المبدأ بؤرة حلزونية غير مستقرة

انتهى السلم

سلم تصحيح

| | | |
|---|---|---|
| جامعة طرطوس<br>كلية العلوم<br>قسم الرياضيات | امتحان مقرر < نظرية المعادلات ><br>لطلاب السنة الرابعة رياضيات<br>الدورة التكميلية 2022-2023 | الاسم:<br>المدة: ساعتان<br>الدرجة: 90 |

---

**السؤال الأول:** (50 درجة)

**أولاً:** وضح المفاهيم التالية:

1. التقريب من المرتبة n لحل مسألة كوشي $x(t_0) = x_0 \in R \qquad x' = f(t,x);$ . 5
2. الحل الشامل لجملة تفاضلية . 5
3. المصفوفة **الحالة** لجملة تفاضلية خطية متجانسة. 5

**ثانياً:** لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية التالية

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$
$$x(t_0) = x_0$$

حيث $A(t),\ \ b(t)$ مصفوفتان تابعيتان مستمرتان على مجال $R \supset I$

١٠

1. بين أنه للمسألة السابقة حل وحيد في جوار $(t_0, x_0)$ ، ومن ثم برهن أن هذا الحل يمكن تمديده على كامل المجال $I$. 5

١٠

2. بفرض $b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ، بحساب المصفوفة **الأسية** الأساسية أوجد

5 قانون

حل مسألة القيم الابتدائية حيث $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . 5

**السؤال الثاني:** (40 درجة)

**أولاً:** ادرس استقرار النقاط الحرجة للجملة التفاضلية التالية

$$x_1'(t) = -2x_1 + x_2 + x_1^3, \quad x_2'(t) = -x_1 - 2x_2 + 3x_1^5$$

**ثانياً:** باستخدام تابع غرين أوجد حل مسألة القيم الحدية التالية:

$$y'' = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(2) = 0$$

------------------------ انتهت الأسئلة ------------------------

مع تمنياتي بالنجاح للجميع

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

سلم تصحيح مقرر نظرية المعادلات

لطلاب سنة 4 رياضيات

الدورة التكميلية 2022 - 2023

السؤال الأول :

أولاً : 1-

$$x_n = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds$$

2- نقول عن حل $(\phi, I_1)$ أنه يستمر على $I_2$ $(I_1 \subset I_2)$
اذا كان $\phi$ يقبل التمديد $\phi^*$ على كامل المجال $I_2$.

3- هي مصفوفة اساسية رئيسة تعرف بالشكل

$$K(t, t_0) = \phi(t)\, \phi^{-1}(t_0)$$

$\phi(t)$ مصفوفة اساسية على المجال $I$ ، $t_0 \in I$.

ثانياً : 1- برهان وجود حل ووحدانيته 5

برهان الشمولية 10

2-

5 $$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-6t} & \frac{3}{2} - \frac{3}{2} e^{-6t} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6} e^{-6t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-6t} \end{pmatrix}$$

قانون 5      قانون 5

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} e^{t} - \frac{5}{6} e^{-6t} \\ \frac{16}{42} e^{t} + \frac{12}{42} e^{-6t} \end{pmatrix}$$ 5

السؤال الثاني

أولاً

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 3x_1^2 & 1 \\ -1 + 15x_1^4 & -2 \end{pmatrix}$$ 5

النقاط الحرجة

$(0,0), (1,1), (-1,-1)$

دراسة استقرار $(0,0)$ بجملة التقريب الاول

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftarrow \lambda_{1,2} = -2 \mp i$$

5 $(0,0)$ مستقرة تقاربياً

استقرار $(1,1)$ $$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ $\lambda_{1,2} = \frac{-1}{2} \mp \frac{\sqrt{65}}{2} \Leftarrow$ $(1,1)$ غير مستقرة 5

استقرار $(-1,-1)$ نفس جملة التقريب الاول لـ $(1,1)$ فهي غير مستقرة 5

ثانياً : نحل الجبر المصاحب

$y'' = 0 \in$

$y = c_1 x + c_2$

$y(0) = 0 \,,\; y'(2) = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

للمسألة المصاحبة الحل الصفري فقط $\in$ للمسألة غير المتجانسة حل وحيد

$y_1(x) = x \,,\quad y_2(x) = 1$

$$y(x) = \int_0^2 G(x,\xi)\, e^{\xi}\, d\xi$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\xi & 0 \le \xi \le x \\ -x & x \le \xi \le 2 \end{cases}$$

$$y(x) = \int_0^x -\xi\, e^{\xi}\, d\xi + \int_x^2 (-x)\, e^{\xi}\, d\xi$$

$$= e^{\xi} - \xi e^{\xi} \Big|_0^x + (-x) e^{\xi} \Big|_x^2 = e^{x} - x e^{2} - 1$$

$u(x) = -1$

انتهى الحل

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < نظرية المعادلات >
لطلاب السنة الرابعة رياضيات
الدورة الفصلية الثانية 2022-2023

الاسم:
المدة: ساعتان
الدرجة: 90

---

**السؤال الأول:** (50 درجة)

**أولاً:** وضح المفاهيم التالية:

1. النقطة الثابتة.
2. الحل الشامل لجملة تفاضلية .
3. المصفوفة **الأساسية** لجملة تفاضلية خطية متجانسة.

**ثانياً:** لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية التالية $x'(t)=A(t)x(t)+b(t)$

$$x(t_0)=x_0$$

حيث $A(t),\quad b(t)$ مصفوفتان تابعيتان مستمرتان على مجال $R\supset I$

1. بين أنه للمسألة السابقة حل وحيد في جوار $(t_0,x_0)$ ، ومن ثم برهن أن هذا الحل يمكن تمديده على كامل المجال $I$ .
2. بفرض $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ ، برهن أن $\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^t&0&e^{-2t}\\e^t&e^{-2t}&0\\e^t&-e^{-2t}&-e^{-2t}\end{pmatrix}$ هي مصفوفة أساسية للجملة المتجانسة الموافقة للجملة المفروضة.
3. أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية حيث $b(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad x(0)=x_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ .

**السؤال الثاني:** (40 درجة)

**أولاً**

بفرض لدينا الجملة التفاضلية التالية $x_1'(t)=-2x_1+4x_2$

$$x_2'(t)=x_1-2x_2$$

ادرس استقرار النقطة الحرجة (مع التفسير)، عين شكل المسارات (مع الرسم).

**ثانياً**

باستخدام تابع غرين أوجد حل مسألة القيم الحدية التالية

$$y''+4y=1\quad ;\quad y(0)=y(1)=0$$

------------------------ انتهت الأسئلة ------------------------

مع تمنياتي بالنجاح للجميع

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

سلم تصحيح مقرر نظرية المعادلات
لطلاب السنة الثالثة رياضيات
2023 - 2022

السؤال الأول

أولاً:

1. النقطة الثابتة هي نقطة توازن المعادلة $x' = f(t,x)$ وتحقق $x' = 0$ (نقطة ثابتة) (نقطة حرجة)

2. الحل الشامل لجملة تفاضلية: نقول عن حل $(\phi, I_1)$ أنه شامل على $I_2$ إذا $(I_1 \subset I_2)$ كان $\phi$ يقبل تمديد $\phi^*$ على كامل المجال $I_2$.

3. المصفوفة الأساسية لجملة تفاضلية خطية ... هي مصفوفة حلول $\phi(t)$ أعمدتها تشكل مجموعة الحلول الأساسية (حلول للجملة المتجانسة) $\phi'(t) = A\phi(t)$ & $\det\phi(t) \neq 0$

ثانياً:

$\boxed{1-}$ $f(t,x) = A(t)x(t) + B(t)$ مستمر التعريف

$\frac{\partial f}{\partial x} = A(t)$ مستمر

$\Rightarrow$ يوجد حل وحيد لـ $(t_0, x_0)$

نبرهن الشمولية: نفرض $I = (t_1, t_2)$ وليكن $\phi$ هو الحل على المجال $I_{t_0} = (t_0 - S, t_0 + S)$

$$\|\phi(t)\| \le \|\phi(t_0)\| + \left\|\int_{t_0}^{t} A(s)\phi(s) + B(s)) ds\right\|$$

$$\le \|\phi(t_0)\| + \max_{t\in I_{t_0}}\|A(t)\| \int_{t_0}^{t} \phi(s) ds + \max_{t\in I_{t_0}} \|B(t)\| (t_0 - S, t_0 + S)$$

وليكن

$$k = \|\phi(t_0)\| + \max_{t\in I_{t_0}} \|B(t)\| (2S)$$

$$L = \max_{t\in I_{t_0}} \|A(t)\|$$

$$\|\phi(t)\| \le k + L\int_{t_0}^{t} \|\phi(s)\| ds$$

وبالتالي حسب نظرية غرونوال نجد $\Leftarrow \|\phi(t)\| \le k e^{L|t-t_0|}$ أي يبقى محدود على كامل المجال المحدود وبالتالي حسب نظرية الشمولية فإن الحل يمكن تمديده على كامل المجال I

$\boxed{2-}$ يجب أن تحقق $\phi'(t) = A\phi(t)$ & $\det\phi(t) \neq 0$

$$\phi'(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & -2e^{-2t} \\ e^{t} & -2e^{-2t} & 0 \\ e^{t} & 2e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad A\phi(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} & 0 & e^{-2t} \\ e^{t} & e^{-2t} & 0 \\ e^{t} & -e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix} = \phi'(t)$$

$$\det\phi(t) = e^{t}(-e^{-4t}) + e^{-2t}(-e^{-t} - e^{-t}) = -3e^{-3t} \neq 0$$

$\boxed{-3}$

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0, \quad \phi^{-1}(t_0) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{t} + 2e^{-2t} \\ e^{t} - e^{-2t} \\ e^{t} - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

ال الثاني :

$\begin{vmatrix} -2-m & 4 \\ 1 & -2-m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2-m)^2 - 4 = 0 \Rightarrow m_1 = -4 , m_2 = 0$

منزاص $\quad m_1 = -4 \Rightarrow \quad x_1^1 = 2e^{-4t}$, $\quad x_1^2 = e^{-4t}$

$m_2 = 0 \Rightarrow \quad x_2^1 = 2$, $\quad x_2^2 = 1$

$\Rightarrow x_1(t) = -2c_1 e^{-4t} + 2c_2 \quad , \quad x_2 = c_1 e^{-4t} + c_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} x_1 + c$

مستقيمات متوازية

عندما $t \to \infty \Rightarrow \quad x_1(t) \to 2c_2 \qquad x_2(t) \to c_2$

⇐ النقطة الحرجة مستقرة لكن غير مستقرة تقاربيا

ثالثا

$y'' + 4y = 1 \quad , \quad y(0) = y(1) = 0$

$m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \mp 2i$

$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

$c_1 = 0 , c_2 = 0 \Rightarrow$ المعادلة المتجانسة لها فقط الحل الصفري ⇐ للمعادلة الغير المتجانسة حل وحيد

نوجد $y_1$ حل للمعادلة المتجانسة يحقق الشرط الابتدائي الأول ولا يحقق الشرط الثاني

$y_1(x) = \sin 2x$

$y_2$ " الثاني ولا يحقق الشرط الأول

$y_2(x) = \sin(2-2x)$

$w(\xi) = -2\sin 2$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2\xi \ \sin(2-2x)}{-2\sin 2} & 0 \le \xi \le x \\[2ex] \dfrac{\sin 2x \ \sin(2-2\xi)}{-2\sin 2} & x \le \xi \le 1 \end{cases}$$

$$y(x) = \int_0^x \frac{\sin 2\xi \ \sin(2-2x)}{-2\sin 2} d\xi + \int_x^1 \frac{\sin 2x \ \sin(2-2\xi)}{-2\sin 2} d\xi$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sin 2} \sin(2-2x) - \frac{1}{4\sin 2} \sin 2x$$

انتهى السلم

سلم تصحيح

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < نظرية المعادلات >
لطلاب السنة الرابعة رياضيات
الدورة الفصلية الأولى 2023-2022

الاسم:
المدة: ساعتان
الدرجة: 90

---

**السؤال الأول: (45 درجة)**

**أولاً:** وضح المفاهيم التالية:

1. النقطة الحرجة.
2. الحل الأعظمي لجملة تفاضلية .
3. المصفوفة **الحالة** لجملة تفاضلية خطية متجانسة

**ثانياً:**

باستخدام تقريب بيكارد **أوجد** الحل التقريبي لمسألة القيم الابتدائية التالية ومن ثم **قارن** بين الحل التقريبي والحل الحقيقي.

$$x'(t) = 2t\big(x(t)+1\big)$$
$$x(0) = 0$$

**السؤال الثاني: (45 درجة)**

**أولاً:** لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية التالية $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$

$$x(t_0) = x_0$$

حيث $A(t),\quad b(t)$ مصفوفتان تابعيتان مستمرتان على مجال $R \supset I$

1. بين أنه للمسألة السابقة حل وحيد في جوار $(t_0, x_0)$ ، ومن ثم برهن أن هذا الحل يمكن تمديده على كامل المجال $I$ .
2. بفرض $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ، بحساب المصفوفة الأسية الأساسية أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية حيث $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**ثانياً**

بفرض لدينا الجملة التفاضلية التالية

$$x_1'(t) = 3x_1 + x_2$$
$$x_2'(t) = -x_1 + 3x_2$$

ادرس استقرار النقطة الحرجة (مع التفسير) وعين نوعها.

-------------- انتهت الأسئلة --------------

مع تمنياتي بالنجاح للجميع

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

**السؤال الأول:** أولاً: * النقطة الحرجة: نقول عن النقطة $x_0$ أنها نقطة حرجة للمعادلة $x' = f(t,x)$ إذا حققت $x' = 0$ أي $f(t, x_0) = 0$

* الحل الأعظمي لجملة تفاضلية: نقول عن حل لجملة تفاضلية أنه أعظمي إذا لم يكن أي تمديد له

* المصفوفة الحالة لجملة تفاضلية خطية متجانسة هي مصفوفة أساسية رئيسية تعرف بالشكل $K(t,t_0) = \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1}$ حيث $\Phi(t)$ مصفوفة أساسية على مجال $I$ ، $t_0 \in I$.

**ثانياً:**

$$x'(t) = 2t(x(t)+1)$$
$$x(0) = 0$$

$$x_{n+1} = \int_0^t 2s(1+x_n(s))\,ds \Rightarrow x_1(t) = \int_0^t 2s(1+x_0(s))\,ds = \int_0^t 2s\,ds = t^2$$

$$x_2(t) = t^2 + \frac{t^4}{2} \quad , \quad x_3(t) = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{2\cdot 3} \quad \dots \quad x_n(t) = t^2 + \frac{t^4}{2!} + \dots + \frac{t^{2n}}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = e^{t^2} - 1$$

الحل الحقيقي: $\frac{dx}{x+1} = 2t\,dt \Rightarrow x = ce^{t^2} - 1$

$0 = x(0) = c - 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow$

$$x(t) = e^{t^2} - 1 \Rightarrow \underset{n\to\infty}{x_n(t) \longrightarrow x(t)}$$

**السؤال الثاني:** أولاً: $f(t,x) = A(t)x(t) + B(t)$ مستمر بالتعريف

$\frac{\partial f}{\partial x} = A(t)$ مستمر أي $f$ يحقق شرط ليبشتز

$\Leftarrow$ يوجد حل وحيد يمر بـ $(t_0, x_0)$

برهان الشمولية: نفرض $I = (t_1, t_2)$ وليكن $\phi$ هو الحل على المجال $I_{t_0} = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

$$\|\phi(t)\| \leq \|\phi(t_0)\| + \left\|\int_{t_0}^t A(s)\phi(s) + B(s))\,ds\right\| \leq \|\phi(t_0)\| + \max_{t\in I_{t_0}} \|A(t)\| \int_{t_0}^t \phi(s)\,ds + 2\delta \max_{t\in I_{t_0}} \|B(t)\|$$

$$\leq k + L\int_{t_0}^t \|\phi(s)\| \leq k + L\int_{t_0}^t \|\phi(s)\|\,ds \quad ; \quad k = \|\phi(t_0)\| + \max_{t\in I_{t_0}} \|B(t)\|\,(2\delta)$$

$L = \max \|A(t)\|$

وبالتالي حسب نظرية غرونوال $\Leftarrow$ $\|\phi(t)\| \leq k e^{L|t-t_0|} \Leftarrow$ أي يكون

وبالتالي حسب نظرية الشمولية ...

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad |A - \lambda I| = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$$r(At) = \alpha_1 (\lambda t) + \alpha_0 \quad e^{At} = \alpha_1 At + \alpha_0 I$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{At} x_0 = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} - e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} - e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

ثانياً :

$$|A - \lambda I| = (3 - \lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \mp i$$

~~$x_1 = \alpha_1 e^{3t} (\cos t + i \sin t) \quad \beta e^{3t} (\cos t + i \sin t)$~~

من أجل $\lambda_1 = 3 + i \Leftarrow$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -i\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha - i\beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow i\alpha = \beta$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \beta = i$$

الطريقة تنجز كما ورد في المقرر

~~$x_1 = \mathrm{Re}\, x_1 = e^{3t} \cos t \quad x_2 = \mathrm{Im}\, x_1 = e^{3t} \sin t$~~

$$x_1(t) = c_1 e^{3t} \cos t + c_2 e^{3t} \sin t$$

~~$x_2 = \mathrm{Re}\, x_2 = e^{3t} \sin t \quad x_2 = \mathrm{Im}\, x_2 = e^{3t} \cos t$~~

$$x_2(t) = -c_1 e^{3t} \sin t + c_2 e^{3t} \cos t$$

عندما $t \to \infty \Leftarrow x_1(t) \to \infty$

$x_2(t) \to \infty$ } المسارات تتباعد عن النقطة الحرجة

$\Leftarrow$ النقطة الحرجة حلزونية غير مستقرة

صح

انتهى الحل

| | | |
|---|---|---|
| جامعة طرطوس<br>كلية العلوم<br>قسم الرياضيات | امتحان مقرر < نظرية المعادلات ><br>لطلاب السنة الرابعة رياضيات<br>الدورة الفصلية الثانية 2021-2022 | الاسم:<br>المدة: ساعتان<br>الدرجة: 90 |

**السؤال الأول: (40 درجة)**

**أولاً:** وضح المفاهيم التالية:

1. مسألة شتورم ليوفيل الحدية المتجانسة .
2. الجمل التفاضلية الذاتية .
3. مصفوفة كوشي لجملة تفاضلية خطية متجانسة.
4. الاستقرار حسب ليابونوف.

**ثانياً:** بفرض لدينا مسألة القيم الابتدائية التالية

$$x'' - 2x' + x = 0$$
$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

أوجد الحل للمسألة المعطاة باستخدام **طريقة التقريبات المتتالية** و **بالطريقة المباشرة** ومن ثم **قارن** الحل الناتج من الطريقتين.

**السؤال الثاني: (50 درجة)**

**أولاً:** أوجد حل مسألة القيم الابتدائية التالية $x'(t) = A(t)x(t), \quad x(0) = x_0$

حيث $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ ، وذلك بحساب المصفوفة الأسية الأساسية .

**ثانياً:** ادرس استقرار النقاط الحرجة للجملة التفاضلية التالية

$$x_1'(t) = -2x_1 + x_2 + x_1^3, \quad x_2'(t) = -x_1 - 2x_2 + 3x_1^5$$

**ثالثاً:** باستخدام تابع غرين أوجد حل مسألة القيم الحدية التالية:

$$y'' = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(2) = 0$$

------------------------ انتهت الأسئلة ------------------------

مع تمنياتي بالنجاح للجميع

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

سلم تصحيح مقرر نظرية المعادلات الطلاب س3 رياضيات

ف2 2021 - 2022

$\boxed{40}$

## السؤال الأول

أولاً: مسألة شتورم ليوفيل الكيبة المتباينة: معادلة تفاضلية مزودة بشرطين حديين حيث أنه من أجل $p, q$ توابع معرفة ومستمرة على $[a,b]$ و $p>0$ قابل للاشتقاق على $[a,b]$ 3

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0$$

مزودة بشرطين حديين متباينين $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$ و $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$

$\alpha_1, \alpha_2$ لا ينعدمان معاً ، $\beta_1, \beta_2$ لا ينعدمان معاً

- الجملة التفاضلية الذاتية: هي جملة من الشكل $x' = f(x(t))$ حيث $f$ لا يحوي $t$ بشكل صريح 3
- مصفوفة كوشي هي مصفوفة من الشكل $K(t,t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ حيث $\Phi(t)$ مصفوفة أساسية للجملة 3
$x' = A(t)x(t)$
$x(t_0) = x_0$
- الاستقرار حسب ليابونوف نفرض $x' = f(t,x)$ حيث $f$ مستمر وتحقق شرط ليبشيتز في $x$ 3

نقول عن $\phi(t)$ بشرط ابتدائي $\phi(t_0) = \phi_0$ انه مستقر حسب ليابونوف إذا كان $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ و $\mathbb{R}^n \ni x(t)$

من أجل كل حل $x(t)$ للمعادلة بشرط ابتدائي $x(t_0) = x_0$ بحيث $\|x_0 - \phi_0\| < \delta_\varepsilon$ فإن $\|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon$

---

ثانياً:

$$x'' - 2x' + x = 0 \ ; \quad x(0) = 0 \ , \ x'(0) = 1$$

$x_1(t) = x(t)$ , $x_2(t) = x'(t) \Rightarrow x_2' = 2x_2 - x_1$ , $x_1' = x_2$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} , \quad \begin{aligned} x_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

5 القانون 5

$$x_1^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t \\ 1+2t \end{pmatrix}$$ 5

$$x_1^2(t) = \begin{pmatrix} t + t^2 \\ 1 + 2t + \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix} \ldots \quad x(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ (1+t)e^t \end{pmatrix}$$ 5 1

الحل بالطريقة المباشرة:

$m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1$ مكرر

$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^t$ , $x'(t) = (c_1 + c_2 t)e^t + c_2 e^t$ , $x'(0) = c_2 e^0 = c_2 = 1$

$x(0) = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ 5

$\Rightarrow x(t) = te^t$ , $x'(t) = te^t + e^t$ $\Rightarrow x_1(t) = te^t$ , $x_2(t) = (1+t)e^t$ 1

ومنه نلاحظ ~~الحل~~ الحل الناتج عن طريقة التقريبات المتتالية هو نفس الحل الناتج عن الطريقة المباشرة. 1

السؤال الثاني أولاً:

$\boxed{50}$

$$A(t)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ & -1 & 4\end{pmatrix}$$

حساب الصفوفة الأسية الأساسية $e^{A(t)}$ علماً استخدام أي طريقة وارد في الموز

6

القانون 5

$$e^{At}= 2 \begin{pmatrix}(3+t)e^{2t}-2e^{3t} & te^{2t} & e^{2t}(2+t)-2e^{3t}\\ e^{2t}-e^{3t} & e^{2t} & e^{2t}-e^{3t}\\ -(3+t)e^{2t}+3e^{3t} & -te^{2t} & -e^{2t}(2+t)+3e^{3t}\end{pmatrix}$$

5

$$x(t)=e^{At}x_0=\begin{pmatrix}te^{2t}\\ e^{2t}\\ -te^{2t}\end{pmatrix} \ 2$$

ثانياً:

$x_1'(t)=-2x_1+x_2+x_1^3=f_1(x_1,x_2)$ ، $x_2'(t)=-x_1-2x_2+3x_1^5=f_2(x_1,x_2)$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+3x_1^2 & 1\\ -1+15x_1^4 & -2\end{pmatrix} \ 5$$

النقاط الحرجة نجدها $f_1=f_2=0$ وهي $(0,0)$ ، $(1,1)$ ، $(-1,-1)$ 5

استقرار $(0,0)$ ندرس جملة التقريب الأول 5

$$\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

نوجد القيم الذاتية لصفوفة الأمثال نجد

الجزء الحقيقي سالب دوماً $\Leftarrow \lambda_{1,2}=-2\mp i$ 2

$(0,0)$ مستقرة تقاربياً 1

استقرار $(1,1)$ جملة التقريب الأول

$$\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 14 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

، القيم الذاتية $\lambda_{1,2}=\frac{-1\mp\sqrt{65}}{2}$

جذر موجب وجذر سالب $\Leftarrow$ $(1,1)$ غير مستقرة 1

استقرار $(-1,-1)$ نفس جملة التقريب الأول لـ $(1,1)$ وبالتالي $(-1,-1)$ غير مستقرة 1

ثالثاً:

$y''=e^x$ ، $y(0)=0$ ، $y'(2)=0$

نحل المتجانسة $y''=0 \Leftarrow$

$y=c_1x+c_2$

$y(0)=c_1 0+c_2=0$ ، $y'(2)=c_1=0 \Rightarrow c_1=c_2=0 \Rightarrow$ لمسألة الحدية الصفرية فقط الحل الصفري للمسألة تشترط وحيد

$y_1(x)=x$ ، $y_2(x)=1$ 2 ، $w(x)=\begin{vmatrix}x & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$

ويكون تابع غرين وحيد 2
$$G(x,\xi)=\begin{cases}-\xi & 0<\xi\le x\\ -x & x<\xi\le 2\end{cases}$$

ويكون الحل 2 $y(x)=\int_0^2 G(x,\xi)e^{\xi}d\xi$ 3

$$y(x)=\int_0^x -\xi e^{\xi}d\xi+\int_x^2(-x)e^{\xi}d\xi=e^x-xe^2-1 \ 1$$

$$=e^{\xi}-\xi e^{\xi}\Big|_0^x+(-x)e^{\xi}\Big|_x^2$$

سلم تصحيح مقرر نظرية المعادلات
لطلاب السنة الرابعة رياضيات

السؤال الأول $\boxed{40}$ أولاً

1- نقول عن الجملتين (8) $x' = Ax$ ، $u' = Bu$ حيث $A, B$ مصفوفتين ثوابت أنهما متكافئتان إذا وجدت $k$ مصفوفة غير شاذة تحقق $x(t) = K u(t)$

2- نقول عن حل لجملة تفاضلية أنه أعظمي إذا انطبق أي تمديد له عليه (8)

3- المصفوفة الحالة هي مصفوفة أساسية رئيسية تعرف بالشكل (8)

$$k(t,t_0) = \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1}$$

حيث $\Phi(t)$ مصفوفة أساسية على مجال $I$ و $t_0 \in I$.

ثانياً:

$$x' = 4t x^2$$
$$x(0) = 1$$

$f(t,x) = 4tx^2$ معرف ومستمر (5) داخل المنطقة $\{|x|<\infty,\ |t|\le 1\}$

شرط ليبشيتز

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |4t x_1^2 - 4t x_2^2| = 4|t|\,|x_1^2 - x_2^2| = 4|t|\,|x_1+x_2|\,|x_1-x_2| \quad (5)$$

عندما $x_1 \to \infty$ نجد أن

أي $|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \to \infty \Leftarrow$ $f$ لا يحقق شرط ليبشيتز

$\frac{\partial f}{\partial x} = 8tx$ غير محدود على المنطقة المذكورة

$\Leftarrow$ شروط نظرية الوجود والوحدانية غير محققة (1) شروط نظرية بيانو محققة،
وبالتالي الحل موجود ولكن ليس بالضرورة وحيد. (5)

السؤال الثاني $\boxed{50}$ أولاً

$f(t,x) = A(t)x(t) + B(t)$ مستمر بالتعريف، $\frac{\partial f}{\partial x} = A(t)$ مستمر أو

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = \frac{\|A(t)(x_1-x_2)\|}{\|x_1-x_2\|}\|x_1-x_2\| \le \sup_{\substack{x_1,x_2\in\mathbb{R}^n\\ x_1\ne x_2}} \frac{\|A(t)(x_1-x_2)\|}{\|x_1-x_2\|}\,.\,\|x_1-x_2\| \le L\|x_1-x_2\| \quad (5)$$

$\Leftarrow$ يوجد حل وحيد في جوار $(t_0, x_0)$

لنبرهن الشمولية نفرض $I = (t_1, t_2)$ ولكن $\Phi$ هو الحل على المجال $I_{t_0} = (t_0-\delta, t_0+\delta)$

$$\|\Phi(t)\| \le \|\Phi(t_0)\| + \left\|\int_{t_0}^{t} (A(s)\Phi(s) + B(s))\,ds\right\| \le \|\Phi(t_0)\| + \max_{t\in I_{t_0}}\|A(t)\| \int_{t_0}^{t} \Phi(s)\,ds + \max_{t\in I_{t_0}}\|B(t)\|\,(t_0+\delta-t_0+\delta) \quad (5)$$

$$\le k = \|\Phi(t_0)\| + \max_{t\in I_{t_0}}\|B(t)\|\,(2\delta) \ ,\quad L = \max_{t\in I_{t_0}}\|A(t)\|$$

$$\|\Phi(t)\| \leqslant k + L\left\|\int_{t_0} \Phi(s)\,ds\right\| \leqslant k + L\int_{t_0} \|\Phi(s)\|\,ds$$ 5

وبالتالي حسب نظرية غرونوال نجد

$\Leftarrow$ حسب نظرية الستمولية فإن الحل يمكن تمديده على كامل المجال I. $\Leftarrow \|\Phi(t)\| \leqslant k\, e^{L|t-t_0|}$ الحل يبقى محدوداً على المجال المحدود

\- 2

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 ,\ \lambda_2 = 2$$

$$r(\lambda t) = \alpha_1(\lambda t) + \alpha_0 \quad , \quad e^{At} = \alpha_1 A t + \alpha_0 I$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix}$$ 5

5

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int e^{-At}B(t)\,dt = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (e^t - 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} - e^t + e^{2t} + e^t - 1 \\ 2e^t - 2e^{2t} - e^t + 2e^{2t} + e^t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t - 1 \\ 2e^t - 1 \end{pmatrix}$$ 5

ثانياً

$$x_1' = 1 - x_1 x_2$$
$$x_2' = x_1 - x_2^3$$

نحسب النقاط الحرجة

$$x_1 = x_2^3$$
$$1 - x_2^4 = 0 \Rightarrow (1 - x_2^2)(1 + x_2^2) = 0 \Rightarrow$$
$$(1 - x_2)(1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 1 ,\ -1$$
$$x_1 = 1 ,\ -1$$

لدينا نقطتان: $(1,1)$ ، $(-1,-1)$ 5

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 & -x_1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$$ 5

من أجل $(1,1)$ نجد $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ القيم الذاتية $-2 \Leftarrow$ النقطة $(1,1)$ مستقرة تقاربياً 5

من أجل $(-1,-1)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \lambda_1 = -1 + \sqrt{5} > 0 \\ \lambda_2 = -1 - \sqrt{5} < 0 \end{cases}$ 5 $\Leftarrow$ النقطة $(-1,-1)$ نقطة حرجة غير مستقرة.

انتهى السلم

سلم تصحيح

| | | |
|---|---|---|
| جامعة طرطوس | امتحان مقرر < نظرية المعادلات > | الاسم: |
| كلية العلوم | لطلاب السنة الرابعة رياضيات | المدة: ساعتان |
| قسم الرياضيات | الدورة الفصلية الأولى 2020-2021 | الدرجة:90 |

**السؤال الأول:** (35 درجة)

**أولاً:** وضح المفاهيم التالية:

1. التقريب من المرتبة n لحل مسالة كوشي $x(t_0)=x_0 \in R \quad x'=f(t,x);$ .
2. الحل الأعظمي لجملة تفاضلية .
3. المصفوفة **الأساسية الرئيسية** لجملة تفاضلية خطية متجانسة.

**ثانياً:** بفرض لدينا الجملة التفاضلية الذاتية المتجانسة التالية

$$x'=Ax; \qquad A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

1-برهن أنه إذا كانت $A$ تملك شعاعين ذاتيين حقيقيين مستقلين بقيمتين ذاتيتين مختلفتين $0<\lambda_1,\lambda_2$ عندئذ فإن الجملة السابقة تكافئ الجملة $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ .

2-عين نوع نقطة المبدأ وادرس استقرارها.

**السؤال الثاني:** (55 درجة)

**أولاً:** بفرض لدينا الجملة التفاضلية التالية $x'=Ax+b(t)$؛

حيث $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ $b(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$ ، بحساب المصفوفة **الأسية** الأساسية أوجد حل مسألة القيم الابتدائية حيث $x(0)=x_0=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

**ثانياً:** بفرض لدينا الجملة التفاضلية التالية

$$x_1'(t)=x_1+2x_2^{\,2}$$
$$x_2'(t)=x_2-4x_1^{\,3}$$

ادرس استقرار النقطة الحرجة .

**انتهت الأسئلة**

مع تمنياتي بالنجاح للجميع

مدرسة المقرر : د. منال ناصر حسين

سلم تصحيح نظرية المعادلات

ف2 2020 - 2021

35

## السؤال الأول:

**أولاً:** 1- $x_n = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\,ds$ أو $x_i^n(t) = x_i^0 + \int_{t_0}^{t} f_i(s, x_1^{n-1}, \dots, x_n^{n-1})\,ds$

2- نقول عن الحل أنه أعظمي إذا انطبق أي تمديد له عليه (غير قابل للتمديد)

3- المصفوفة الأساسية الرئيسية لجملة تفاضلية خطية متجانسة هي مصفوفة حلول $\Phi(t)$ أعمدتها تتشكل من مجموعة الحلول الأساسية (حلول الجملة مستقلة خطياً) وتحقق $\Phi(t_0) = I$ مصفوفة الواحدة.

**ثانياً:** 1- نفرض $\phi_1, \phi_2$ الشعاعين الذاتيين المقابلين لـ $\lambda_1, \lambda_2$ ولنأخذ $K = (\phi_1, \phi_2)$

$(A - \lambda_1 I)\phi_1 = 0$ ، $(A - \lambda_2 I)\phi_2 = 0$

$$AK = (A\phi_1, A\phi_2) = (\lambda_1\phi_1, \lambda_2\phi_2) = (\phi_1, \phi_2)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} = K\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A = K\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}K^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ مشابهة لـ $A$

بالتالي $x' = Ax$ تكافئ

$$\begin{pmatrix}u'\\ v'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

2- ندرس استقرار المبدأ في الجملة المكافئة

$u' = \lambda_1 u \Rightarrow u(t) = a e^{\lambda_1 t}$ ، $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$v' = \lambda_2 v \Rightarrow v(t) = b e^{\lambda_2 t}$ $\Rightarrow (u(t), v(t)) = (a e^{\lambda_1 t}, b e^{\lambda_2 t}) \Rightarrow u(t) = c v^m$ ؛ $m = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$

وبالتالي نحصل على أسرة شبه قطوع مكافئة والمبدأ هو عقدة غير

55

## السؤال الثاني

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 8 & -2-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -4$$

$\alpha_0 = \frac{1}{3}(2e^{2t} + e^{-4t})$ ، $\alpha_1 = \frac{1}{6t}(e^{2t} - e^{-4t})$

$e^{At} = \alpha_1 At + \alpha_0 I$

$e^{\lambda t} = \alpha_1 \lambda t + \alpha_0$

$$e^{At} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t}\\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 2e^{2t} + 4e^{-4t}\end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)\,ds \ ;\ x_0 = \begin{pmatrix}1\\ -4\end{pmatrix}$$

بالتعويض والمكاملة نجد

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{31}{30}e^{-4t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{t}\\ -\frac{62}{15}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{t}\end{pmatrix}$$

ثانياً

. ندرس استقرار النقطة الحرجة $(0,0)$

$$x_1'(t) = x_1 + 2x_2^2$$

$$x_2'(t) = x_2 - 4x_1^3$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 4x_2 \\ -12x_1^2 & 1 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1-\lambda)^2 = 0 \Leftarrow \lambda = 1 > 0 \Leftarrow$$

$(0,0)$ غير مستقرة

انتهى الحل

سلم تصحيح

| | | |
|---|---|---|
| جامعة طرطوس | امتحان مقرر < نظرية المعادلات > | الاسم: [redacted] |
| كلية العلوم | لطلاب السنة الرابعة رياضيات | المدة: ساعتان |
| قسم الرياضيات | الدورة الفصلية الثانية 2017-2018 | الدرجة: 90 |

---

**السؤال الأول:** (35 درجة)

**أولاً:** باستخدام تقريب بيكارد **أوجد** الحل التقريبي لمسألة القيم الابتدائية التالية ومن ثم **قارن** بين الحل التقريبي والحل الحقيقي.

$$x'(t) = 2t\big(x(t)+1\big)$$

$$x(0) = 0$$

**ثانياً:** وضح المفاهيم التالية: الحل الأعظمي، الحل الشامل، المصفوفة الحالة، مسألة القيم الابتدائية معرفة جيداً.

**السؤال الثاني:** (55 درجة)

**أولاً: حول** الجملة التفاضلية التالية إلى جملة معادلات تفاضلية كل منها من المرتبة الأولى

$$x'' = 2x' + 5y + 3$$

$$y' = -x' - 2y$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 1$$

ثم أوجد حل مسألة القيم الابتدائية الناتجة باستخدام **المصفوفة الأسية الأساسية**

**ثانياً:** بفرض لدينا الجملة التفاضلية التالية $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ؛ $x' = Ax$

ادرس استقرار النقطة الشاذة للجملة التفاضلية **المكافئة** للجملة السابقة (مع التفسير) وعين نوعها.

**ثالثاً:** باستخدام تابع غرين أوجد حل مسألة القيم الحدية التالية:

$$y'' + y = \cos x \quad ; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

انتهت الأسئلة

---

**مع تمنياتي بالنجاح للجميع** **مدرسة المقرر : د. منال حسين**

سلم تصحيح مقرر نظرية المعادلات

س4 رياضيات 2017 - 2018 ف2

السؤال الأول $\boxed{35}$

أولاً:

$x' = 2t(x+1)$ ; $x(0)=0$

$$x(t) = \int_0^t 2s(1+x(s))\,ds$$

(15)

$$x_1(t) = \int_0^t 2s(1+x_0(s))\,ds = \int_0^t 2s\,ds = t^2$$

$$x_2(t) = \int_0^t 2s(1+x_1(s))\,ds = \int_0^t 2s(1+s^2)\,ds = t^2+\frac{t^4}{2}$$

$$x_3(t) = \int_0^t 2s(1+x_2(s))\,ds = \int_0^t 2s\left(1+s^2+\frac{s^4}{2}\right)ds = t^2+\frac{t^4}{2}+\frac{t^6}{2\cdot 3}$$

$\vdots$

$$x_n(t) = t^2+\frac{t^4}{2!}+\frac{t^6}{3!}+\dots+\frac{t^{2n}}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = e^{t^2}-1$$

ايجاد الحل الحقيقي:

$$\frac{dx}{x+1} = 2t\,dt \Rightarrow \ln|x+1| = t^2+\ln c \Rightarrow x = c\,e^{t^2}-1 \Rightarrow 0 = x(0) = c-1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow x(t) = e^{t^2}-1$$

$$x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$$

ثانياً: * الحل الأعظمي: نقول عن الحل أنه أعظمي اذا انطبق أي تمديد له عليه (لا يقبل التمديد)

* الحل الشامل: نقول عن حل $(\phi, I_1)$ أنه حل شامل على $I_2$ اذا $(I_1 \subset I_2)$ كان $\phi$ يقبل تمديد $\phi^*$ على كامل المجال $I_2$

(20)

* المصفوفة الحالة: نفرض $\phi(t)$ مصفوفة أساسية للجملة المتجانسة على $I$ $\Leftarrow \det\phi(t) \neq 0 \Leftarrow \det\phi(t_0) \neq 0 \Leftarrow \phi^{-1}(t_0)$ موجود فتكون المصفوفة الحالة

$$K(t,t_0) = \phi(t)\,\phi(t_0)^{-1}$$

* مسألة القيم الابتدائية معرفة جيداً: اذا كان الحل موجود ووحيد ومتعلق بشكل مستمر بالقيم الابتدائية.

السؤال الثاني: أولاً: نفرض $x = x_1$ ، $x_2 = x_1'$ نجد

(19)

$x_1' = x_2$

$x_2' = 2x_2 + 5y + 3$

$y' = -x_2 - 2y$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&5\\0&-1&-2\end{pmatrix},\quad B(t) = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$$

$x_1(0)=0$

$x_2(0)=0$ , $y(0)=1$

$$X' = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\y\end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\y\end{pmatrix} + B(t)$$

$$e^{At} = \alpha_2 A^2 t^2 + \alpha_1 A t + \alpha_0 I = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 2\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t & 5\alpha_2 t^2 \\ 0 & -\alpha_2 t^2 + 2\alpha_1 t + \alpha_0 & 5\alpha_1 t \\ 0 & -\alpha_1 t & -\alpha_2 t^2 - 2\alpha_1 t + \alpha_0 \end{pmatrix}$$

كالسابق

$$\alpha_0 = 1 ,\ \alpha_1 = \frac{\sin t}{t} ,\ \alpha_2 = \frac{1-\cos t}{t^2} \quad , \lambda_1 = 0 ,\ \lambda_2 = -i ,\ \lambda_3 = +i$$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 2 - 2\cos t + \sin t & 5 - 5\cos t \\ 0 & \cos t + 2\sin t & 5\sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix} ;\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B(s)\, ds \quad (3)$$

بالتعويض والمكاملة نجد

$$X(t) = \begin{pmatrix} -8\cos t - 6\sin t + 8 + 6t \\ 8\sin t - 6\cos t + 6 \\ 4\cos t - 2\sin t - 3 \end{pmatrix}$$

ويكون حل المسألة

$$x(t) = -8\cos t - 6\sin t + 8 + 6t$$
$$y(t) = 4\cos t - 2\sin t - 3$$

ثانياً : (19)

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 + 2 = 0 \Rightarrow -1 - \lambda_{1,2} = \mp i\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \mp i\sqrt{2}$$

(2) وبالتالي الجملة المكافئة $\lambda_r = -1 < 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \lambda_r u - \lambda_j v \\ \frac{dv}{dt} &= \lambda_j u + \lambda_r v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} u' &= -u - \sqrt{2} v \\ v' &= \sqrt{2} u - v \end{aligned}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt} + \frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} \Leftarrow \begin{cases} u = \rho\cos\theta \\ v = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$= \cos\theta \frac{d\rho}{dt} - \rho\sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt} + \frac{dv}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \sin\theta \frac{d\rho}{dt} + \rho\cos\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \lambda_r \rho \Rightarrow \rho = c_1 e^{\lambda_r t} \quad , \rho\frac{d\theta}{dt} = \lambda_j \rho \Rightarrow \theta = \lambda_j t + c_2$$

⇐ المسارات حلزونات لوغاريتمية

$$\rho = c_1 e^{-t}$$

$0 \leftarrow \rho$ , $\infty \leftarrow t$

$$\theta = \sqrt{2}\, t + c_2$$

⇐ النقطة $(0,0)$ مستقرة . (البؤرة حلزونية)

ثالثاً :

17

$$y'' + y = \cos x$$
$$y(0) = 0 \,,\; y(1) = 0$$

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \mp i$$

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y_h(0) = c_1 = 0$$

$$y_h(1) = 0 + c_2 \sin 1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

للمسألة المتجانسة حل وحيد هو الحل الصفري $\Rightarrow$ للمسألة غير المتجانسة حل وحيد

نضع

$$\begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \sin(1-x) \end{cases} \Rightarrow \quad w(z) = \begin{vmatrix} \sin z & \sin(1-z) \\ \cos z & -\cos(1-z) \end{vmatrix}$$

$$G(x,z) = \begin{cases} \dfrac{-\sin z \sin(1-x)}{\sin 1} & 0 \le z \le x \\[2ex] \dfrac{-\sin x \sin(1-z)}{\sin 1} & x \le z \le 1 \end{cases}$$

$$y(x) = \int_0^x \frac{-\sin z \sin(1-x)}{\sin 1} \cos z \, dz + \int_x^1 \frac{-\sin x \sin(1-z)}{\sin 1} \cos z \, dz$$

$$= \frac{-\sin(1-x)\sin^2 x}{2\sin 1} - \frac{\sin x}{2}\left(x + \sin 2x - 1 - \sin 2\right) + \sin x \,\mathrm{ctg}\, 1 \left(\sin^2 x - \sin^2 1\right)$$

انتهى السلم.

سلم تصحيح

| جامعة طرطوس | امتحان مقرر < نظرية المعادلات > | الاسم: |
|---|---|---|
| كلية العلوم | لطلاب السنة الرابعة رياضيات | المدة: ساعتان |
| قسم الرياضيات | الدورة الفصلية الأولى 2017-2018 | الدرجة: 75 |

**السؤال الأول:** (20 درجة)

بفرض لدينا الجملة التفاضلية الذاتية المتجانسة التالية

$$x' = Ax; \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

1-برهن أنه إذا كانت $A$ تملك شعاعين ذاتيين حقيقيين مستقلين بقيمتين ذاتيتين مختلفتين $0 > \lambda_1, \lambda_2$ عندئذ فإن الجملة السابقة تكافئ الجملة $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ .

2-عين نوع نقطة المبدأ وادرس استقرارها.

**السؤال الثاني:** (35 درجة)

**أولاً:**

بفرض لدينا الجملة التفاضلية التالية $x' = Ax + b(t)$؛ $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$، $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$

بحساب المصفوفة **الأسية** الأساسية أوجد حل مسألة القيم الابتدائية حيث $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**ثانياً:** ادرس استقرار الجملة التفاضلية التالية في جوار النقطة (0،0)

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = x_2 + x_1^2$$

**السؤال الثالث:** (20 درجة)

أوجد القيم الذاتية و التوابع الذاتية لمسألة شتورم ليوفيل التالية:

$$y'' + \lambda y = 0 \quad ; \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 0$$

انتهت الأسئلة

---

مع تمنياتي بالنجاح للجميع

مدرسة المقرر: د. منال حسين

سلم تصحيح مقرر نظرية المعادلات

ف1 2017 - 2018

السؤال الأول

1- نفرض $\phi_1, \phi_2$ الشعاعين الذاتيين المقابلين لـ $\lambda_1, \lambda_2$ ولنأخذ $k=(\phi_1, \phi_2)$

$$(A-\lambda_1 I)\phi_1=0 \quad , (A-\lambda_2 I)\phi_2=0$$

$$Ak=(A\phi_1, A\phi_2)=(\lambda_1\phi_1, \lambda_2\phi_2)=(\phi_1, \phi_2)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=k\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}k^{-1} \Rightarrow$$ $A$ مشابهة لـ $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

وبالتالي تكافئ $x'=Ax$

$$\begin{pmatrix}u'\\ v'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

2- ندرس استقرار المبدأ في الجملة السابقة

$0 > \lambda_1, \lambda_2$

$$u'=\lambda_1 u \Rightarrow u(t)=ae^{\lambda_1 t}$$

$$v'=\lambda_2 v \Rightarrow v(t)=b\,e^{\lambda_2 t}$$

$$\Rightarrow (u(t), v(t))=(ae^{\lambda_1 t}, be^{\lambda_2 t}) \Rightarrow u(t)=c\,v^m \quad ; m=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}>0$$

معادلة المسارات

وبالتالي نحصل على أسرة قطوع مكافئة والمبدأ هو عقدة مستقرة

السؤال الثاني :

أولاً:

$$e^{At}=\begin{pmatrix}(1-3t)e^{3t} & te^{3t}\\ -9te^{3t} & (1+3t)e^{3t}\end{pmatrix}$$

$$e^{-At}=\begin{pmatrix}(1+3t)e^{-3t} & -te^{-3t}\\ 9te^{-3t} & (1-3t)e^{-3t}\end{pmatrix}$$

$$x(t)=e^{At}x_0+e^{At}\int e^{-At}B(t)\,dt=\begin{pmatrix}(-2t+1)e^{3t}+\frac{1}{9}t+\frac{2}{27}\\ (-6t+1)e^{3t}+\frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

ثانياً:

$$x_1'=x_1$$
$$x_2'=x_2+x_1^2$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\left.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2x_1 & 1\end{pmatrix}\right|_{(0,0)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(1-\lambda)^2=0 \Rightarrow \lambda=1>0$$

$\Leftarrow$ $(0,0)$ غير مستقرة.

السؤال الثالث:

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0 \ , \ y(3) = 0$$

$$m^2 + \lambda = 0 \Rightarrow$$ 5

نناقش حسب قيم $\lambda$

$\lambda > 0$ $\quad m^2 = -\lambda < 0 \Leftarrow \quad m = \mp i\sqrt{\lambda} \Leftarrow$

$$y = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x$$

$$0 = y(0) = c_1 + 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$0 = y(3) = c_1 \cos 3\sqrt{\lambda} + c_2 \sin 3\sqrt{\lambda}$$

$$c_2 \sin 3\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow 3\sqrt{\lambda} = n\pi \ , n \in \mathbb{Z}$$ 5

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{3} \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{9}$$ القيم الذاتية

الدوال الذاتية $\quad y_n = c_n \sin \frac{n\pi x}{3}$ 5

$m^2 = -\lambda > 0 \Leftarrow \lambda < 0$

$m = \mp\sqrt{-\lambda}$

$$y = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = y(0) = c_1 + c_2 \\ 0 = y(3) = c_1 e^{3\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-3\sqrt{-\lambda}} \end{array}$$ 5

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{3\sqrt{-\lambda}} & e^{-3\sqrt{-\lambda}} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$ للمسألة الحل الصفري فقط

$m^2 = 0 \Leftarrow \lambda = 0$

$m = 0$ مضاعف

$$y = c_1 + c_2 x$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = y(0) = c_1 \\ 0 = y(3) = c_1 + 3c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$$ للمسألة الحل الصفري فقط

ـ انتهى الحل ـ

سلم تصحيح


جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الرياضيات


امتحان مقرر < نظرية المعادلات >
لطلاب السنة الرابعة رياضيات
الدورة الإضافية 2016-2017

الاسم:
المدة: ساعتان
الدرجة: ٧٥

---

**السؤال الأول:** (٤٠ درجة)

لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية التالية $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$

$$x(t_0) = x_0$$

حيث $A(t), \quad b(t)$ مصفوفتان تابعيتان مستمرتان على مجال $R \supset I$

١. بين أنه للمسألة السابقة حل وحيد في جوار $(t_0, x_0)$، ومن ثم برهن أن هذا الحل يمكن تمديده على كامل المجال $I$.

٢. بفرض $A = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ، $b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ ، بحساب المصفوفة **الأسية** الأساسية أوجد حل مسألة القيم الابتدائية حيث $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

٣. بفرض $A = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ، $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، ادرس استقرار جميع النقاط الشاذة للمسألة الموافقة، ارسم المسارات وعين اتجاهات الحركة على هذه المسارات.

**السؤال الثالث:** (٣٥ درجة)

أوجد القيم الذاتية والتوابع الذاتية للمسألة التالية

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = y'(1) = 0$$

**انتهت الأسئلة**

---

مع تمنياتي بالنجاح للجميع

مدرسة المقرر : د. منال حسين.

سلم تصحيح مقرر (نظرية المعادلات)

الدورة الإضافية 2016 - 2017

## السؤال الأول:

1- $f(t,x)=A(t)x(t)+B(t)$ مستمر بالتعريف

$\frac{\partial f}{\partial x}=A(t)$ مستمر

$\Leftarrow$ يوجد حل وحيد في جوار $(t_0,x_0)$ (5)

برهان الشمولية: نفرض $I=(t_1,t_2)$ وليكن $\phi$ هو الحل على المجال

$I_{t_0}=(t_0-\delta,t_0+\delta)$ (جوار لـ $t_0$)

$$\|\phi(t)\|\leq\|\phi(t_0)\|+\left\|\int_{t_0}^{t}A(s)\phi(s)+B(s))\,ds\right\| \quad (2)$$

$$\leq\|\phi(t_0)\|+\max_{t\in I(t_0)}\|A(t)\|\int_{t_0}^{t}\phi(s)\,ds+\max_{t\in I(t_0)}\|B(t)\|\,(t_0-\delta-t_0+\delta) \quad 2\delta$$

ليكن

$$\Leftarrow\begin{cases}k=\|\phi(t_0)\|+\max\limits_{t\in I(t_0)}\|B(t)\|\,(2\delta)\\[2mm] L=\max\limits_{t\in I(t_0)}\|A(t)\|\end{cases}$$

$$\|\phi(t)\|\leq k+L\left\|\int_{t_0}^{t}\phi(s)\,ds\right\|\leq k+L\int_{t_0}^{t}\|\phi(s)\|\,ds \quad (1)\ (2)$$

وبالتالي حسب نظرية غرونوال نجد

$$\Leftarrow\|\phi(t)\|\leq k\,e^{L|t-t_0|}$$

الحل يبقى محدوداً على المجال المحدود وبالتالي حسب نظرية الشمولية فإن الحل يمكن تمديده على كامل المجال $I$.

2 -

$$A=\begin{pmatrix}-3&9\\1&-3\end{pmatrix},\quad B(t)=\begin{pmatrix}e^{t}\\e^{t}\end{pmatrix} \quad (2)$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-3-\lambda&9\\1&-3-\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)^2-9=0\Rightarrow\lambda_1=-6,\ \lambda_2=0$$

$$\left.\begin{aligned}&e^{At}=\alpha_1At+\alpha_0I \quad (2)\\&e^{\lambda t}=\alpha_1\lambda t+\alpha_0\\&1=e^{0}=\alpha_0,\quad \alpha_1=\frac{1-e^{-6t}}{6t}\end{aligned}\right\}\quad e^{At}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-6t}&\frac{3}{2}-\frac{3}{2}e^{-6t}\\[1mm]\frac{1}{6}-\frac{1}{6}e^{-6t}&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-6t}\end{pmatrix} \quad (1)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B(s)\,ds \; ; \; x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 5

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6t} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-6t} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-6t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6t} \end{pmatrix} + e^{At} \begin{pmatrix} 2e^{t} - \frac{1}{7}e^{7t} - 2 + \frac{1}{7} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{21}e^{7t} - \frac{2}{3} - \frac{1}{21} \end{pmatrix}$$ 3

$$\Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{7}e^{t} - \frac{5}{6}e^{-6t} \\ \frac{16}{42}e^{t} + \frac{12}{42}e^{-6t} \end{pmatrix}$$ 2

-3

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3\alpha_1 + 9\beta_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 3\beta_1$$

$\beta_1 = 1 \Leftarrow \alpha_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 2

$$\lambda_2 = -6 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3+6 & 9 \\ 1 & -3+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_2 = -3, \; \beta_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 2

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-6t}$$ 1 1

$t \to \infty \Rightarrow x_1 \to 3c_1 \,,\; x_2 \to c_1 \Rightarrow$ الحل الهندسي للحركات هو

$x_2 = \frac{1}{3} x_1$

ولإيجاد معادلة المسارات نجد

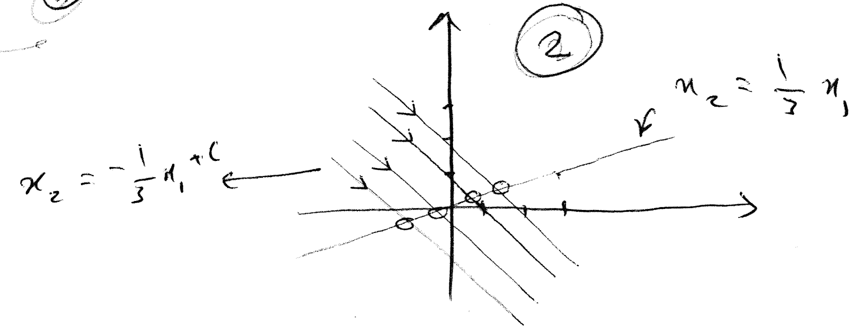
$\frac{dx_1}{dx_2} = -3 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3} x_1 + c$ 2

مستقيمات متوازية ميلها $-\frac{1}{3}$

$x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} x_1$ 5 الحل الهندسي للنقاط الحرجة

مستقرة وليست مستقرة تقاربيا

2



## السؤال الثاني

$$y'' + \lambda y = 0$$
$$y(0) = y'(1) = 0$$

$m^2 + \lambda = 0 \Rightarrow m^2 = -\lambda$ 5

$\lambda = 0$

$y = c_1 + c_2 x$ 5

$y' = c_2$

الحل الصفري فقط ⇐ $\left.\begin{array}{l} y(0) = c_1 = 0 \\ y'(1) = c_2 = 0 \end{array}\right\}$ 5

$\lambda = 0$ ليست قيم ذاتية

$\lambda < 0$

$y = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} \Leftarrow m^2 = -\lambda > 0$

5 $y' = c_1 \sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda} x} - c_2 \sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda} x}$

$\lambda < 0$ ليست قيم ذاتية ⇐ الحل الصفري فقط ⇐ $c_1 = c_2 = 0$ 5 ⇐ $\left\{\begin{array}{l} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y'(1) = \sqrt{-\lambda}\, c_1 - \sqrt{-\lambda}\, c_2 = 0 \end{array}\right.$

$\lambda > 0$

$-\lambda < 0$

$m^2 = -\lambda < 0$

$y = c_1 \cos\sqrt{\lambda} x + c_2 \sin\sqrt{\lambda} x$

5 $y' = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin\sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda}\, c_2 \cos\sqrt{\lambda} x$

3 $\left\{\begin{array}{l} y(0) = c_1 = 0 \\ y'(1) = c_2 \sqrt{\lambda} \cos\sqrt{\lambda} = 0 \end{array}\right.$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + n\pi = \pi\left(\frac{1}{2} + n\right)$$

$\lambda = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + n\right)^2$ 2

دوال ذاتية $y_n = c_n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x$

انتهت الأسئلة

سلم تصحيح

| | | |
|---|---|---|
| جامعة طرطوس | امتحان مقرر < نظرية المعادلات > | الاسم: |
| كلية العلوم | لطلاب السنة الرابعة رياضيات | المدة: ساعتان |
| قسم الرياضيات | الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٦-٢٠١٧ | الدرجة: ٧٥ |

**السؤال الأول:** (١٥ درجة)

باستخدام طريقة بيكارد أوجد الحل التقريبي لمسألة القيم الابتدائية التالية

$$x'(t) = 3x(t)$$

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 3$$

**السؤال الثاني:** (٣٥ درجة)

بفرض لدينا الجملة التفاضلية التالية $A = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ; $x' = Ax + b(t)$

**أولاً:** بفرض $b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ ، بحساب المصفوفة **الأسية** الأساسية أوجد حل مسألة القيم الابتدائية

حيث $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**ثانياً:** بفرض $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، ادرس استقرار جميع النقاط الشاذة للمسألة الموافقة، ارسم المسارات وعين اتجاهات الحركة على هذه المسارات.

**السؤال الثالث:** (٢٥ درجة)

أوجد القيم الذاتية و التوابع الذاتية لمسألة شتورم ليوفيل التالية:

$$y'' + \lambda y = 0 \quad ; \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 0$$

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح للجميع — مدرسة المقرر : د. منال حسين

سلم تصحيح مقرر نظرية المعادلات

الدورة الفصلية الثانية 2016 - 2017

السؤال الأول: 15

$x' = 3x \quad , \quad t_0 = 0 \ , \ x_0 = 3$

$$x_n = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds \quad 8$$

لأن التراكيب مستمرة ⇐ يوجد حل وحيد

$$x_1 = 3 + \int_0^t 3(3)\, ds = 3 + 9t \quad 3 \quad , \quad x_2 = 3 + \int_0^t (9 + 3(9)s)\, ds = 3 + 9t + 27\frac{t^2}{2} \quad 3$$

$$x_3 = 3 + \int_0^t \left(9 + 27s + 3\left(\frac{27}{2}\right)s^2\right) ds = 3 + 9t + \frac{27t^2}{2!} + \frac{3(3t)^3}{3!}$$

$$x_4 = 3 + \int_0^t \left(9 + 27s + \frac{3(27)s^2}{2!} + \frac{3(3s)^3}{3!}\right) ds = 3 + 9t + 3\frac{(3t)^2}{2!} + \frac{3(3t)^3}{3!} + \frac{3(3t)^4}{4!}$$

$\vdots$

$$x_n = 3\left(1 + 3t + \frac{(3t)^2}{2!} + \frac{(3t)^3}{3!} + \cdots + \frac{(3t)^n}{n!}\right) \Rightarrow x(t) = 3e^{3t} \quad 1$$

السؤال الثاني: 35

أولاً

$$x' = Ax + b(t) \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 9 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -6 \ , \ \lambda_2 = 0 \quad 5$$

$$e^{At} = \alpha_1 A t + \alpha_0 I$$

$$e^{\lambda t} = \alpha_1 \lambda t + \alpha_0$$

$$1 = e^0 = \alpha_0$$

$$\alpha_1 = \frac{1 - e^{-6t}}{6t}$$

$$5 \quad e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6t} & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-6t} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-6t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6t} \end{pmatrix} \quad 3$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B(s)\, ds \quad ; \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 5$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6t} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-6t} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-6t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6t} \end{pmatrix} + e^{At} \begin{pmatrix} 2e^t - \frac{1}{7}e^{7t} - 2 + \frac{1}{7} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{21}e^{7t} - \frac{2}{3} - \frac{1}{21} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} e^{t} - \frac{5}{6} e^{-6t} \\ \frac{16}{42} e^{t} + \frac{12}{42} e^{-6t} \end{pmatrix} \quad 3$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3\alpha_1 + 9\beta_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 3\beta_1$$

$$\beta_1 = 1 \quad \alpha_1 = 3$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -6 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3+6 & 9 \\ 1 & -3+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_2 + 3\beta_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -3\beta_2$$

$$\beta_2 = 1 \ , \alpha_2 = -3$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-6t} \Rightarrow \begin{aligned} x_1(t) &= 3c_1 - 3c_2 e^{-6t} \\ x_2(t) &= c_1 + c_2 e^{-6t} \end{aligned} \quad 5$$

$t \rightarrow \infty \Leftarrow x_1 \rightarrow 3c_1$

$x_2 \rightarrow c_1$

$x_2 = \frac{1}{3} x_1$ الحل النهائي للنهايات هو $\Leftarrow$ 2

ولإيجاد معادلة المسار نأخذ

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -3 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3} x_1 + c$$

مستقيمات متوازية ميلها $-\frac{1}{3}$ 2

$$x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} x_1$$

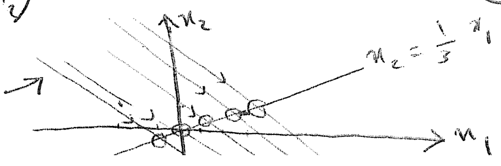
الحل النهائي للنشاط الشاذة

ملاحظة يمكن استخدام طريقة المصفوفة الأسية لإيجاد معادلة المسارات

$$x(t) = e^{At} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c_1 + 3c_2) + \frac{1}{2}(c_1 - 3c_2) e^{-6t} \\ \frac{1}{6}(c_1 + 3c_2) + \frac{1}{6}(3c_2 - c_1) e^{-6t} \end{pmatrix}$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c_1 + 3c_2) \\ \frac{1}{6}(c_1 + 3c_2) \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} x_1 \quad 5$$

$x_2 = -\frac{1}{3} x_1 + c$



السؤال الثالث :

25

$y'' + \lambda y = 0 \qquad y(0) = 0 \ , \quad y(3) = 0$

$m^2 + \lambda = 0 \Rightarrow m^2 = -\lambda$ 5

نناقش حسب قيم $\lambda$

1) $\lambda > 0$

$m = \mp i\sqrt{\lambda} \Rightarrow$ 5 $y = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x$

$0 = y(0) = c_1$

$0 = y(3) = c_2 \sin 3\sqrt{\lambda}$

نفرض $c_2 \neq 0 \Rightarrow$

$\sin 3\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow 3\sqrt{\lambda} = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{9} > 0$

القيم الذاتية

5

$y_n = c_n \sin n\pi x$ الدوال الذاتية

2) $\lambda < 0$

$m_{1,2} = \mp\sqrt{-\lambda} \Rightarrow y = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}\,n}$

$0 = y(0) = c_1 + c_2$

$0 = y(3) = c_1 e^{3\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-3\sqrt{-\lambda}}$

$\Rightarrow$ للمعادلة حل وحيد هو الحل الصفري لأن 5

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{3\sqrt{-\lambda}} & e^{-3\sqrt{-\lambda}} \end{vmatrix} = e^{-3\sqrt{-\lambda}} - e^{3\sqrt{-\lambda}} \neq 0 \Rightarrow \lambda < 0$ ليست قيم ذاتية

3) $\lambda = 0$

$m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$ مكرر

5

$y(x) = c_1 + c_2 x$

$0 = y(0) = c_1$

$0 = y(3) = c_1 + 3c_2$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

للمعادلة حل وحيد هو الحل الصفري $\Rightarrow \lambda = 0$ ليست قيم ذاتية

انتهت الأسئلة

سلم تصحيح مقرر نظرية المعادلات

15

السؤال الأول

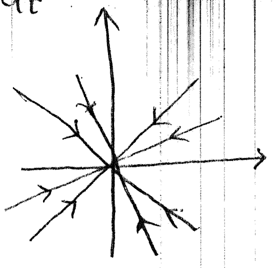
1- نفرض $\phi_1$ ، $\phi_2$ الشعاعين الذاتيين المقابلين للقيمة الذاتية $\lambda$ ، نفرض $k=(\phi_1,\phi_2)$ ⇐

$$Ak = (A\phi_1, A\phi_2) = (\lambda\phi_1, \lambda\phi_2) = k\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \Rightarrow A = k\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}k^{-1}$$ 10

⇐ A تشابه المصفوفة $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ وبالتالي الجملة $x' = Ax$ تكافئ الجملة $\begin{pmatrix}u'\\ v'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$

-2 2

$$\frac{du}{dt} = \lambda u \Rightarrow u = c_1 e^{\lambda t} \ ، \ \frac{dv}{dt} = \lambda v \Rightarrow v = c_2 e^{\lambda t} \Rightarrow u = cv, \ c = \frac{c_1}{c_2}$$



وهي معادلات مستقيمات تمر من المبدأ 3

⇐ $\lambda < 0$

⇐ $u \to 0$ ، $v \to 0$ عندما $t \to \infty$

⇐ المبدأ نقطة حرجة مستقرة.



السؤال الثاني 35

$$x' = Ax + b(t) \ ; \ A = \begin{pmatrix}-3 & 9\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

أولاً

$$b(t) = \begin{pmatrix}e^{t}\\ e^{t}\end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix}-3-\lambda & 9\\ 1 & -3-\lambda\end{vmatrix} = (3+\lambda)^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -6 \ ، \ \lambda_2 = 0$$ 5

3

$$\left.\begin{aligned} e^{At} &= \alpha_1 At + \alpha_0 I\\ e^{\lambda t} &= \alpha_1 \lambda t + \alpha_0\\ 1 = e^{0} &= \alpha_0\\ \alpha_1 &= \frac{1 - e^{-6t}}{6t}\end{aligned}\right\} \Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6t} & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-6t}\\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-6t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6t}\end{pmatrix}$$ 2

5

$$x(t) = \begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)\,ds \ ; \ x_0 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

1

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6t} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-6t}\\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-6t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-6t}\end{pmatrix} + e^{At}\begin{pmatrix}2e^{t} - \frac{1}{7}e^{7t} - 2 + \frac{1}{7}\\ \frac{2}{3} + \frac{1}{21}e^{7t} - \frac{2}{3} - \frac{1}{21}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} e^{t} - \frac{5}{6} e^{-6t} \\ \frac{16}{42} e^{t} + \frac{12}{42} e^{-6t} \end{pmatrix}$$ (1)

ثانياً

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3\alpha_1 + 9\beta_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 3\beta_1$$

$\beta_1 = 1 \Leftarrow \alpha_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -6 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3+6 & 9 \\ 1 & -3+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_2 + 3\beta_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -3\beta_2$$

(5)

$\beta_2 = 1 \quad \alpha_2 = -3$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(5)

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-6t} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1(t) = 3c_1 - 3c_2 e^{-6t} \\ x_2(t) = c_1 + c_2 e^{-6t} \end{array}$$

$t \to \infty \Rightarrow x_1 \to 3c_1 \,,\; x_2 \to c_1 \Rightarrow$ المحل الهندسي للنهايات هو

(1)

$$x_2 = \frac{1}{3} x_1$$

ولإيجاد معادلة المسار نأخذ

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -3 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3} x_1 + c$$

(3)

مستقيمات متوازية ميلها $-\frac{1}{3}$

(1)

$x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} x_1$ نقاط شاذة

المحل الهندسي

جميع النقاط الشاذة مستقرة $\Leftarrow$

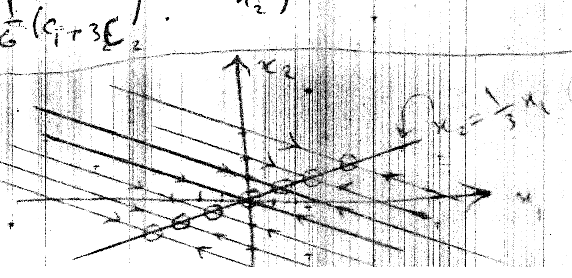
ملاحظة يمكن استخدام طريقة المصفوفة الأسية لإيجاد معادلة المسارات

$$x(t) = e^{At} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-6t}\right) + c_2\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} e^{-6t}\right) \\ c_1\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} e^{-6t}\right) + c_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-6t}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c_1 + 3c_2) + \frac{1}{2}(c_1 - 3c_2) e^{-6t} \\ \frac{1}{6}(c_1 + 3c_2) + \frac{1}{6}(3c_2 - c_1) e^{-6t} \end{pmatrix}$$

$$t \to \infty \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c_1 + 3c_2) \\ \frac{1}{6}(c_1 + 3c_2) \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} x_1$$

(3)

$$x_2 = -\frac{1}{3} x_1 + c$$



السؤال الثالث

25

$$y'' + 4y = 1 \quad , \quad y(0) = y(1) = 0$$

$$m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \mp 2i$$

5

$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \qquad \left.\begin{array}{l} 0 = c_1 \\ 0 = c_2 \sin 2 \Rightarrow c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

2

المسألة الحدية المتجانسة لها حل وحيد هو الحل الصفري ⟸ المسألة الحدية غير المتجانسة لها حل وحيد.

نوجد $y_1$ حل للمسألة المتجانسة يحقق الشرط الحدي الأول ولا يحقق الشرط الحدي الثاني

3

$$y_1(x) = \sin 2x$$

$y_2$ 〃 〃 〃 〃 〃 الثاني 〃 〃 〃 الأول

3

$$y_2(x) = \sin(2 - 2x)$$

$$W(z) = \begin{vmatrix} \sin 2z & \sin(2-2z) \\ 2\cos 2z & -2\cos(2-2z) \end{vmatrix} = -2\sin 2z \cos(2-2z) - 2\sin(2-2z)\cos 2z$$

$$= -2\sin 2$$

1

$$G(x,z) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2z \sin(2-2x)}{-2\sin 2} & 0 \le z \le x \\[2ex] \dfrac{\sin 2x \sin(2-2z)}{-2\sin 2} & x \le z \le 1 \end{cases}$$

5

$$y(x) = \int_0^x \frac{\sin 2z \sin(2-2x)}{-2\sin 2}\, dz + \int_x^1 \frac{\sin 2x \sin(2-2z)}{-2\sin 2}\, dz$$

5

$$= -\frac{1}{2}\, \frac{\cos 2z \sin(2-2x)}{-2\sin 2} \Bigg|_0^x + \frac{1}{2}\, \frac{\sin 2x \cos(2-2z)}{-2\sin 2} \Bigg|_x^1$$

$$= +\frac{1}{4\sin 2} \sin 2 - \frac{1}{4\sin 2} \sin(2-2x) - \frac{1}{4\sin 2} \sin 2x$$

1

$$= +\frac{1}{4} - \frac{1}{4\sin 2} \sin(2-2x) - \frac{1}{4\sin 2} \sin 2x$$

انتهى الحل

سلم تصحيح

| | | |
|---|---|---|
| جامعة طرطوس | امتحان مقرر < نظرية المعادلات > | الاسم: |
| كلية العلوم | لطلاب السنة الرابعة رياضيات | المدة: ساعتان |
| قسم الرياضيات | الدورة الاضافية ٢٠١٦-٢٠١٥ | الدرجة: ٧٥ |

**السؤال الأول:** (٤٠ درجة)

بفرض لدينا المسألة التالية

$$x'' + 2x' - 8x = e^{t}$$

$$x(0) = 1 , \quad x'(0) = -4.$$

١. حول المعادلة التفاضلية المفروضة إلى جملة معادلات تفاضلية كل منها من المرتبة الأولى

٢. أوجد حل مسألة القيم الابتدائية **الناتجة** باستخدام المصفوفة الأسية الأساسية.

**السؤال الثاني:** (٣٥ درجة)

**أولاً:** ادرس استقرار الجملة التفاضلية التالية في جوار النقطة (٠،٠)

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = x_2 + x_1^2$$

**ثانياً:** أوجد القيم الذاتية والدوال الذاتية للمسألة الحدية

$$y'' = \lambda y \quad ; \quad y(0) = y(4) = 0$$

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح للجميع

مدرسة المقرر : د. منال حسين

سلم تصحيح مقرر نظرية المعادلات

الدورة الإضافية 2015 - 2016

السؤال الأول: $\boxed{40}$

$$x'' + 2x' - 8x = e^t$$

$$x(0) = 1 \;,\; x'(0) = -4$$

5

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = x' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2x_2 + 8x_1 + e^t \end{array}$$

10

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;,\; B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \alpha_1 At + \alpha_0 I \;,\; r(\lambda) = \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

5

$$\lambda_1 = 2 \;,\; \lambda_2 = -4$$

5 $$\alpha_1 = \frac{1}{6t}\left(e^{2t} - e^{-4t}\right) \;,\; \alpha_0 = \frac{1}{3}\left(e^{2t} + e^{-4t}\right)$$

5 $$e^{At} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 2e^{2t} + 4e^{-4t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B(s)\, ds$$ 5

$$= \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ -4e^{-4t} \end{pmatrix} + \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -6e^t + 5e^{2t} + e^{-4t} \\ -6e^t + 10e^{2t} - 4e^{-4t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{31}{30} e^{-4t} + \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{5} e^t \\ \frac{-62}{15} e^{-4t} + \frac{1}{3} e^{2t} - \frac{1}{5} e^t \end{pmatrix}.$$ 5

السؤال الثاني $\boxed{35}$

أولاً

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = x_2 + x_1^2$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x_1 & 1 \end{pmatrix}\right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;,\; (1-\lambda)^2 = 0$$

5 5 3

$$\lambda = 1 \;\text{ن}$$

$m^2-\lambda=0$

ثانياً :

$y''=\lambda y$

$y(0)=y(4)=0$

* $\lambda=0 \Leftarrow y=c_1x+c_2$

$\left\{\begin{array}{l} 0=y(0)=c_1(0)+c_2 \\ 0=y(4)=4c_1+0 \end{array}\right. \Leftarrow c_1=c_2=0 \Leftarrow$ λ ليست قيمة ذاتية

5

* $\lambda>0 \Leftarrow m^2=\lambda \Leftarrow m=\mp\sqrt{\lambda}$

$y=c_1e^{\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$

5

$0=y(0)=c_1+c_2 \Leftarrow c_1=-c_2$

$0=y(4)=c_1e^{4\sqrt{\lambda}}+c_2e^{-4\sqrt{\lambda}} \Leftarrow \left\{ 0=c_1\left(e^{4\sqrt{\lambda}}-e^{-4\sqrt{\lambda}}\right)\right. \Leftarrow$

$c_1=0 \Leftarrow c_1=c_2=0 \Leftarrow \lambda>0$ ليست قيمة ذاتية

* $\lambda<0 \Leftarrow m^2=\lambda$

$y(x)=c_1\cos\sqrt{-\lambda}\,x+c_2\sin\sqrt{-\lambda}\,x$

5

$\left\{\begin{array}{l} 0=y(0)=c_1 \\ 0=y(4)=0+c_2\sin\sqrt{-\lambda}(4) \end{array}\right.$

3

$c_1=0$ ولكي تكون $\lambda<0$ قيم ذاتية يجب أن تكون $\Leftarrow c_2\neq0$

$\Leftarrow \sin 4\sqrt{-\lambda}=0$

$\Leftarrow 4\sqrt{-\lambda}=n\pi ; n\in \mathbb{Z}$

$\Leftarrow -\lambda_n=\left(\frac{n}{4}\pi\right)^2$

2

$\Leftarrow -\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2$

$y_n=\sin\frac{n\pi x}{4}$ هي الدوال الذاتية

انتهت الأسئلة

| | | |
|---|---|---|
| جامعة طرطوس | امتحان مقرر < نظرية المعادلات > | الاسم: |
| كلية العلوم | لطلاب السنة الرابعة رياضيات | المدة: ساعتان |
| قسم الرياضيات | الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٦-٢٠١٥ | الدرجة: ٧٥ |

---

**السؤال الأول:** (٤٠ درجة)

بفرض لدينا المسألة التالية

$$x'' + 2x' - 8x = e^t$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = -4.$$

١. حول المعادلة التفاضلية المفروضة إلى جملة معادلات تفاضلية كل منها من المرتبة الأولى

٢. ادرس وجود ووحدانية حل الجملة التفاضلية **الناتجة** في جوار $t_0 = 0$.

٣. أوجد حل مسألة القيم الابتدائية **الناتجة** باستخدام المصفوفة الأسية الأساسية.

**السؤال الثاني:** (٣٥ درجة)

**أولاً:** ادرس استقرار الجملة التفاضلية التالية في جوار النقطة (٠،٠)

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = -x_2 + x_1^2$$

**ثانياً:** أوجد القيم الذاتية والتوابع الذاتية للمسألة التالية

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = y'(1) = 0$$

انتهت الأسئلة

---

مع تمنياتي بالنجاح للجميع

مدرسة المقرر : د. منال حسين

سلم تصحيح مقرر نظرية المعادلات

لطلاب سنة 4 رياضيات   2015 - 2016   ف2

السؤال الأول   40

$$x'' + 2x' - 8x = e^{t}$$

$$x(0) = 1 ، x'(0) = -4$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} ، x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

1) $\left.\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -2x_2 + 8x_1 + e^{t} \end{aligned}$   15

2) $x' = f(t,x)$ ، $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ، $f(t,x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_2 + 8x_1 + e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$

5   توابع مستمرة $f_1 , f_2$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 ، \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 ، \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 8 ، \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2$$

5   توابع مستمرة

$\Leftarrow$ شروط نظرية الوجود والوحدانية محققة $\Leftarrow$ للمسألة حل موجود ووحيد

3) $e^{At} = \alpha_1 A t + \alpha_0 I$   5   ، $r(\lambda) = \alpha_1 \lambda + \alpha_0$ ، $\lambda_1 = 2$ ، $\lambda_2 = -4$

$$\alpha_1 = \frac{1}{6t}\left(e^{2t} - e^{-4t}\right) ، \alpha_0 = \frac{1}{3}\left(e^{2t} + e^{-4t}\right)$$

5   $$e^{At} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 2e^{2t} + 4e^{-4t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B(s)\, ds = \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ -4e^{-4t} \end{pmatrix} + \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -6e^{t} + 5e^{2t} + e^{-4t} \\ -6e^{t} + 10e^{2t} - 4e^{-4t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{31}{30} e^{-4t} + \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{5} e^{t} \\ \frac{-62}{15} e^{-4t} + \frac{1}{3} e^{2t} - \frac{1}{5} e^{t} \end{pmatrix}$$   5

35

## السؤال الثاني : أولاً

$x_1' = x_1$

$x_2' = x_2 + x_1^2$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x_1 & 1 \end{pmatrix}\right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow$$

5 5 3

$\lambda = 1 > 0$

$\Leftarrow$ (0,0) غير مستقرة 2

## ثانياً :

$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad y(0) = y'(1) = 0$

$\lambda = 0$

$m^2 + \lambda = 0 \Rightarrow m^2 = -\lambda$

$y = c_1 + c_2 x$

$y' = c_2$ 5

الحل الصفري فقط $\left\{ \begin{array}{l} y(0) = c_1 = 0 \\ y'(1) = c_2 = 0 \end{array} \right.$

$\Leftarrow$ $\lambda = 0$ ليست قيم ذاتية

$\lambda < 0$

$\Leftarrow m^2 = -\lambda > 0$

$y = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$ 5

$y' = c_1 \sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}\, x} - c_2 \sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$

$\Leftarrow$ الحل الصفري فقط $\Leftarrow c_1 = c_2 = 0 \Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y'(1) = \sqrt{-\lambda}\, c_1 - \sqrt{-\lambda}\, c_2 = 0 \end{array} \right.$

$\lambda < 0$ ليست قيم ذاتية

$\lambda > 0$

$-\lambda < 0$

$m^2 = -\lambda < 0$ 5

$y = c_1 \cos \sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}\, x$

$y' = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\, x + \sqrt{\lambda}\, c_2 \cos \sqrt{\lambda}\, x$

$y(0) = c_1 = 0$ 3

$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + n\pi = \pi(\frac{1}{2} + n) \quad \Big\{ \quad y'(1) = c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} = 0$

$\lambda = \pi^2 (\frac{1}{2} + n)^2$ 2

دوال ذاتية $y_n = c_n \sin (n + \frac{1}{2}) \pi x$

انتهى سلم التصحيح

سلم تصحيح

| جامعة طرطوس | امتحان مقرر < نظرية المعادلات > | الاسم: |
|---|---|---|
| كلية العلوم | لطلاب السنة الرابعة رياضيات | المدة: ساعتان |
| قسم الرياضيات | الدورة الفصلية الاولى ٢٠١٦-٢٠١٥ | الدرجة: ٧٥ |

**السؤال الأول:** (١٥ درجة)

بفرض لدينا مسألة القيم الابتدائية التالية

$$\frac{dx}{dt} = x$$
$$x(0) = 1$$

١. بين فيما إذا كانت المسألة المفروضة تحقق شروط نظرية الوجود والوحدانية.

٢. باستخدام تقريب بيكارد أوجد الحل التقريبي لمسألة القيم الابتدائية المفروضة ومن ثم قارن بين الحل التقريبي والحل الحقيقي.

**السؤال الثاني:** (٢٥ درجة)

حول الجملة التفاضلية التالية إلى جملة معادلات تفاضلية كل منها من المرتبة الأولى

$$\ddot{x} = -2\dot{x} - 5y + 3$$
$$\dot{y} = \dot{x} + 2y$$
$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad y(0) = 1$$

ثم أوجد حل مسألة القيم الابتدائية الناتجة باستخدام المصفوفة الأسية الأساسية.

**السؤال الثالث:** (٣٥ درجة)

**أولاً:** بفرض لدينا الجملة التفاضلية التالية

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1$$

عين حامل المسار (**مع الرسم**)، وعين نوع النقطة الشاذة وادرس استقرارها.

**ثانياً:** أوجد حل مسألة القيم الحدية التالية

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$
$$y(1) = 1, \quad y(2) = 2$$

انتهت الأسئلة

---

مع تمنياتي بالنجاح للجميع

مدرسة المقرر : د. منال حسين

سلم تصحيح مقرر نظرية المعادلات

$\boxed{15}$

السؤال الأول

1- $\dfrac{dx}{dt} = x$

$x(0) = 1$ (3)

2- $x_1 = 1 + \int_0^t x_0(s)\,ds = 1+t$ (5)

$x_2 = 1 + \int_0^t x_1(s)\,ds = 1 + \int_0^t (1+s)\,ds = 1 + t + \dfrac{t^2}{2}$

$x_3 = 1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^3}{3!}$ (5)

$\vdots$

$x_{n+1} = 1 + \int_0^t \left(1 + s + \dfrac{s^2}{2!} + \dots + \dfrac{s^n}{n!}\right) ds = 1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + \dots + \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$

تتقارب $x_n$ نحو (1) $x = e^t$

الحل الحقيقي

$\dfrac{dx}{x} = dt \Rightarrow \ln x = t + \ln c \Rightarrow x = ce^t$ (1)

$x(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow x = e^t$

الحل التقريبي يتقارب من الحل الحقيقي

$\boxed{25}$

السؤال الثاني

$\ddot{x} = -2\dot{x} - 5y + 3$

$\dot{y} = \dot{x} + 2y$

$x(0) = 0 \,,\quad \dot{x}(0) = 0 \,,\quad y(0) = 1$

$x_1 = x \,,\quad x_2 = \dot{x} \,,\quad y_1 = y$ (5)

$\dot{x}_1 = x_2 \,,$

$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -2\dot{x} - 5y + 3 = -2x_2 - 5y_1 + 3$ (5)

$\dot{y}_1 = \dot{y} = \dot{x} + 2y = x_2 + 2y_1$

$A^2 \longrightarrow \,,\; A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \,,\; B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$n = 3 \Rightarrow e^{At} = \alpha_2 A^2 t^2 + \alpha_1 A t + \alpha_0 I = \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t & -5\alpha_2 t^2 \\ 0 & -\alpha_2 t^2 - 2\alpha_1 t + \alpha_0 & -5\alpha_1 t \\ 0 & \alpha_1 t & -\alpha_2 t^2 + 2\alpha_1 t + \alpha_0 \end{pmatrix}$

(5)

القيم الذاتية للمصفوفة A

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & -5 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda\left((-2-\lambda)(2-\lambda)+5\right)=0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 0 \,,\ \lambda_2 = i \,,\ \lambda_3 = -i$$

$$r(\lambda t) = \alpha_2 \lambda^2 t^2 + \alpha_1 \lambda t + \alpha_0$$

$$\left.\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= \alpha_2 \lambda_1^2 t^2 + \alpha_1 \lambda_1 t + \alpha_0 \\ e^{\lambda_2 t} &= \alpha_2 \lambda_2^2 t^2 + \alpha_1 \lambda_2 t + \alpha_0 \\ e^{\lambda_3 t} &= \alpha_2 \lambda_3^2 t^2 + \alpha_1 \lambda_3 t + \alpha_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} e^{0t} &= \alpha_0 \Rightarrow \boxed{\alpha_0 = 1} \\ e^{it} &= -\alpha_2 t^2 + \alpha_1 i t + 1 \\ e^{-it} &= -\alpha_2 t^2 - \alpha_1 i t + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_2 = \frac{1-\cos t}{t^2}} \,,\ \boxed{\alpha_1 = \frac{\sin t}{t}}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & -2+2\cos t+\sin t & -5+5\cos t \\ 0 & \cos t - 2\sin t & -5\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$$ 2

حل مسألة القيم الابتدائية

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B(s)\, ds$$ 3

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2+2\cos t+\sin t & -5+5\cos t \\ 0 & \cos t - 2\sin t & -5\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t+2\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & -2+2\cos(t-s)+\sin(t-s) & -5+5\cos(t-s) \\ 0 & \cos(t-s)-2\sin(t-s) & -5\sin(t-s) \\ 0 & \sin(t-s) & \cos(t-s)+2\sin(t-s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} -5+5\cos t \\ -5\sin t \\ \cos t + 2\sin t \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -6+6\cos(t-s)+3\sin(t-s) \\ 3\cos(t-s) - 6\sin(t-s) \\ 3\sin(t-s) \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} -5+5\cos t \\ -5\sin t \\ \cos t+2\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6s - 6\sin(t-s) + 3\cos(t-s) \\ -3\sin(t-s) - 6\cos(t-s) \\ 3\cos(t-s) \end{pmatrix}_0^t$$ 2

$$= \begin{pmatrix} -5+5\cos t - 6t + 3 + 6\sin t - 3\cos t \\ -5\sin t - 6 + 3\sin t + 6\cos t \\ \cos t + 2\sin t + 3 - 3\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t + 6\sin t - 6t - 2 \\ 6\cos t - 2\sin t - 6 \\ -2\cos t + 2\sin t + 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_1(t) = 2\cos t + 6\sin t - 2 - 6t \,,\ y(t) = y_1(t) = -2\cos t + 2\sin t + 3$$

السؤال الثالث

أ

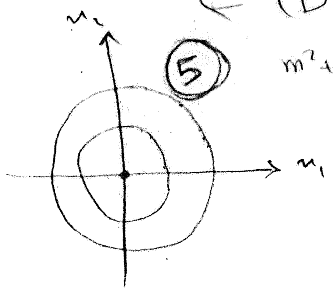
$$x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 = 0 \Leftarrow \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{-x_1} \Leftarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 = c^2 \quad 5$$

وهي معادلة دوائر مركزها المبدأ .

طريقة ثانية

$$\Leftarrow (D^2+1)x_1 = 0 \qquad \Leftarrow \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2x_1}{dt^2}$$



$$5 \quad m^2+1=0 \rightarrow m = \mp i \Rightarrow \quad x_1 = c_1\cos t + c_2\sin t \Rightarrow$$

$$x_2 = -c_1\sin t + c_2\cos t$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = c^2 \quad 5$$

النقطة الشاذة مركز 5 وهي مستقرة 5 وليست مستقرة تقاربيا .

ب

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad y(1) = 1 ، y(2) = 2$$

$$\left.\begin{aligned} xy' &= y'_t \\ x^2y'' &= y''_t - y'_t \end{aligned}\right\} \Rightarrow y''_t - y'_t - 2y'_t + 2y = 0 \Rightarrow y''_t - 3y'_t + 2y = 0 \quad 3$$

5

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$m_1 = 1 ، m_2 = 2$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1e^{t} + c_2e^{2t} \quad 2 \Rightarrow$$

$$y(x) = c_1x + c_2x^2 \quad 2$$

$$\left.\begin{aligned} y(1) &= c_1 + c_2 = 1 \quad 2 \\ y(2) &= 2c_1 + 4c_2 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad c_2 = 0 ، c_1 = 1 \quad 1 \Rightarrow$$

$$y = x$$

وهو حل مسألة القيم الحدية .

انتهى السلم

جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية
قسم الرياضيات

امتحان مقرر < نظرية المعادلات >
لطلاب السنة الرابعة رياضيات
الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٤-٢٠١٥

الاسم:
المدة: ساعتان
الدرجة: ٧٥

**السؤال الأول:** (١٠ درجة)

باستخدام طريقة بيكارد أوجد الحل التقريبي لمسألة القيم الابتدائية التالية

$$x'(t)=3x(t)$$

$$t_0=0,\quad x_0=3$$

**السؤال الثاني:** (٢٥ درجة)

لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية التالية $x'(t)=A(t)x(t)+b(t)$

$$x(t_0)=x_0،\quad t_0\in I\subset R،\quad x_0\in R^n$$

حيث $A(t),\quad b(t)$ مصفوفتان تابعيتان مستمرتان على مجال $R\supset I$

١. بين أنه للمسألة السابقة حل وحيد يعطى بالعلاقة

$$x(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}b(s)ds$$

حيث $\Phi(t)$ مصفوفة أساسية للجملة المتجانسة الموافقة.

٢. بفرض $b(t)=\begin{pmatrix}0\\ e^t\end{pmatrix}$، $A(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 8 & -2\end{pmatrix}$ ، بحساب المصفوفة الأسية الأساسية أوجد حل مسألة القيم الابتدائية حيث $x(0)=x_0=\begin{pmatrix}1\\ -4\end{pmatrix}$.

**السؤال الثالث:** (٢٠ درجة)

بفرض لدينا الجملة التفاضلية التالية

$$x_1'(t)=3x_1+x_2$$

$$x_2'(t)=-x_1+3x_2$$

١. ادرس استقرار النقطة الحرجة (مع التفسير) وعين نوعها.

٢. عين جملة تفاضلية مكافئة للجملة السابقة.

**السؤال الرابع:** (٢٠ درجة)

أوجد القيم الذاتية و التوابع الذاتية لمسألة شتورم ليوفيل التالية:

$$y''+\lambda y=0\quad;\quad y(0)=0,\quad y(3)=0$$

------------------------------- انتهت الأسئلة -------------------------------

مع تمنياتي بالنجاح للجميع

مدرسة المقرر : د. منال حسين

رياضيات ٤ س 2015 - 2014 صح

$\boxed{10}$

السؤال الأول 2:

$f \cdot f'$ توابع مستمرة ⇐ يوجد حل وحيد

$$\left.\begin{array}{l} x' = 3x \\ x(0) = 3 \end{array}\right\} \quad x_n = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds \quad 2 \quad 2$$

$$x_1 = 3 + \int_0^t 3 \cdot 3\, ds = 3 + 9t \quad 2 \quad , \quad x_2 = 3 + \int_0^t (9 + 3 \cdot 9 s)\, ds = 3 + 9t + 3 \cdot 9 \frac{t^2}{2}$$

$$x_3 = 3 + \int_0^t \left(9 + 27 s + 3 \cdot \frac{27 s^2}{2}\right) ds = 3 + 9t + 27 \frac{t^2}{2!} + 3 \frac{(3t)^3}{3!} \quad 1$$

$$x_4 = 3 + \int_0^t 9 + 27 s + \frac{3 \cdot 27 s^2}{2!} + 3 \frac{(3s)^3}{3!}\Big)\, ds = 3 + 9t + 3\frac{(3t)^2}{2!} + \frac{3(3t)^3}{3!} + 3\frac{(3t)^4}{4!}$$

$\vdots$

$$x_n = 3 \left(1 + 3t + \frac{(3t)^2}{2!} + \frac{(3t)^3}{3!} + \cdots + \frac{(3t)^n}{n!}\right)$$

$$x(t) = 3 e^{3t} \quad 1$$

$\boxed{20}$

السؤال الثاني

ا- $\quad x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) B(s)\, ds \quad ; \quad t \in I$

بالاشتقاق نجد 3

$$x'(t) = \Phi'(t)\left(\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) B(s)\, ds\right) + \Phi^{-1}(t)\,\Phi(t) B(t) \quad 3$$

حيث $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$

$$A(t)\left[\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) B(s)\, ds\right) + B(t)$$

$$= A(t)\, x(t) + B(t) \quad 3 \Rightarrow$$

$x(t)$ هو حل الجملة السابقة وحسب نظرية الوجود والوحدانية ( $A$ ، $B$ مع تابعية مستمرة ) ⇐ الحل وحيد. 1

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 8 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \;,\; B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ e \end{pmatrix}^{-2}$$

2

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 \;,\; \lambda_2 = -4$$

صيغة مختلفة 1

1

$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} \;,\; P_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} \;,\; e^{At} = e^{\lambda_1 t} P_1 + e^{\lambda_2 t} P_2 \quad 1$$

$$P_1 = \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \quad 1$$

$$P_2 = \frac{1}{-6}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 8 & -2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right] = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 8 & -4\end{pmatrix} \quad 1$$

$$\Rightarrow e^{At} = \frac{1}{6}e^{2t}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 8 & 2\end{pmatrix} + \frac{e^{-4t}}{-6}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 8 & -4\end{pmatrix} \quad 1$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t}\\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & e^{2t} + 4e^{-4t}\end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}B(s)\,ds \quad 2$$

$$e^{A(t-t_0)}x_0 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}4e^{2t} + 2e^{-4t} - 4e^{2t} + 4e^{-4t}\\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} - 8e^{2t} - 16e^{-4t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-4t}\\ -4e^{-4t}\end{pmatrix} \quad 1$$

$$e^{-As}B(s) = \begin{pmatrix}\frac{1}{6}e^{-s} - \frac{1}{6}e^{5s}\\ \frac{1}{3}e^{-s} + \frac{2}{3}e^{5s}\end{pmatrix} \quad 1$$

$$\int_{t_0}^{t} e^{-As}B(s)\,ds = \begin{bmatrix}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{6}e^{-s} - \frac{1}{6}e^{5s}\right)ds\\ \int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{3}e^{-s} + \frac{2}{3}e^{5s}\right)ds\end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix}-5e^{-t} - e^{5t} + 6\\ -10e^{-t} + 4e^{5t} + 6\end{bmatrix} \quad 1$$

$$e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}B(s)\,ds = \frac{1}{30}\begin{bmatrix}-6e^{t} + 5e^{2t} + e^{-4t}\\ -6e^{t} + 10e^{2t} - 4e^{-4t}\end{bmatrix} \quad 1$$

وبالتالي

$$x(t) = \begin{bmatrix}\frac{31}{30}e^{-4t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{t}\\ \frac{-62}{15}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{t}\end{bmatrix} \quad 1$$

السؤال الثالث :

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$3-\lambda = \mp i \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \mp i \quad (3)$$

$\bar{x}_1 = \alpha e^{3t}(\cos t + i\sin t)$

$\bar{x}_2 = \beta e^{3t}(\cos t + i\sin t)$

نأخذ $\Leftarrow \lambda_1 = 3+i$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -i\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha - i\beta = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow i\alpha = \beta$$

$\alpha = 1 \Rightarrow \beta = i$

$x_1^1 = R_e\,\bar{x}_1 = e^{3t}\cos t$ ، $x_1^2(t) = I_m\,\bar{x}_1 = e^{3t}\sin t$ (4)

$$\boxed{x_1(t) = c_1 e^{3t}\cos t + c_2 e^{3t}\sin t}$$

$x_2^1 = R_e\,\bar{x}_2 = -e^{3t}\sin t$ ، $x_2^2(t) = I_m\,\bar{x}_2 = e^{3t}\cos t$ (4)

$$\boxed{x_2(t) = -c_1 e^{3t}\sin t + c_2 e^{3t}\cos t}$$ (1)

عندما $t \to \infty$ نجد

$\infty \leftarrow x_1(t)$ (1)

$\infty \leftarrow x_2(t)$

(1) المسارات تبتعد عن النقطة الحرجة وبالتالي النقطة الحرجة حلزونية غير مستقرة (2) (2)

20

السؤال الرابع :

الجملة المكافئة (2)

$\frac{du}{dt} = \lambda_r u - \lambda_j v = 3u - v$

$\frac{dv}{dt} = \lambda_j u + \lambda_r v = u + 3v$

$m^2 + \lambda = 0$ (2)

$m^2 = -\lambda$

نناقش حسب قيم $\lambda$

1) $\lambda > 0$

$m = \mp i\sqrt{\lambda} \Leftarrow$

$y = c_1\cos\sqrt{\lambda}\,x + c_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$ (2)

$0 = y(0) = c_1$ (2)

$0 = y(3) = c_2 \sin 3\sqrt{\lambda}$

نفرض $c_2 \neq 0 \Leftarrow$

$\Leftarrow \sin 3\sqrt{\lambda} = 0$ (2) (2)

$\Leftarrow 3\sqrt{\lambda} = n\pi$

$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{9} > 0$ القيم الذاتية (2) (2)

$y_n = c_n \sin n\pi x \Leftarrow$

$\lambda<0$

$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \Leftarrow m_{1,2} = \mp\sqrt{-\lambda}$

$0 = y(0) = c_1 + c_2$

$0 = y(3) = c_1 e^{3\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-3\sqrt{-\lambda}}$ (4)

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{3\sqrt{-\lambda}} & e^{-3\sqrt{-\lambda}} \end{vmatrix} = e^{-3\sqrt{-\lambda}} - e^{3\sqrt{-\lambda}} \neq 0 \Rightarrow$

للمسألة حل وحيد هو الحل الصفري $\Leftarrow$ $\lambda<0$ ليست قيم ذاتية

$\lambda=0 \Leftarrow$

$m^2=0 \Leftarrow m=0$ مكرر

$y(x) = c_1 + c_2 x$

$0 = y(0) = c_1$

$0 = y(3) = c_1 + 3c_2$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ (4)

للمسألة حل وحيد هو الحل الصفري $\Leftarrow$ $\lambda=0$ ليست قيم ذاتية.

انتهى السؤال



ملاحظة: س2

طريقة 2 لإيجاد $e^{At}$

نوجد الأشعة الذاتية المقابلة للقيم الذاتية المختلفة $\lambda_1, \lambda_2$

(2) $\Phi_1 = \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

(2) $\Phi_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

فتكون مصفوفة العبور: $T=(\Phi_1,\Phi_2) = \begin{pmatrix}1&1\\-4&2\end{pmatrix}$

$\Leftarrow T^{-1}AT = \Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ (1)

$e^{At} = T e^{\Lambda} T^{-1} = (\quad)$ (1)

سلم تصحيح


جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية
قسم الرياضيات


امتحان مقرر < نظرية المعادلات >
لطلاب السنة الرابعة رياضيات
الدورة التكميلية ٢٠١٤-٢٠١٥

الاسم:
المدة: ساعتان
الدرجة: ٧٥

**السؤال الأول:** (٣٥ درجة)

## أولاً:

بفرض لدينا المعادلة التفاضلية التالية: $x''' + x^2 - 1 = 0$

١) حول المعادلة التفاضلية السابقة إلى جملة تفاضلية، وحدد المنطقة التي يكون من أجلها شرط ليبشيتز محقق. عين ثابت ليبشيتز.

٢) باستخدام طريقة بيكارد أوجد التقريب الثاني لحل المعادلة التفاضلية السابقة مزودة بالشروط الابتدائية التالية $x(0)=1$ ، $x'(0)=1$ ، $x''(0)=1$ .

## ثانياً:

اذكر نص نظرية الوجود والوحدانية ومن ثم وضح هندسياً كيفية اختيار $\alpha$ (نصف قطر مجال وجود الحل)

**السؤال الثاني:** (٤٠ درجة)

## أولاً:

بفرض لدينا الجملة التفاضلية التالية

$$x_1' = x_2 + \sin x_1$$
$$x_2' = 2x_2$$

ادرس استقرار الجملة في جوار $(0,0)$.

## ثانياً:

أوجد القيم الذاتية و التوابع الذاتية لمسألة شتورم ليوفيل التالية:

$$y'' + \lambda y = 0 \quad ; \quad y(0)=0, \quad y(3)=0$$

---------------- انتهت الأسئلة ----------------

مع تمنياتي بالنجاح للجميع

مدرسة المقرر : د. منال حسين

سلم تصحيح نظرية المعادلات 2014 - 2015

الدورة الاضافية

35

السؤال الأول:

أ

1) $x''' + x^2 - 1 = 0$ (5)

$x_1 = x$ , $x_2 = x'$ , $x_3 = x''$

نفرض $\frac{dx_1}{dt} = x_2$ , $\frac{dx_2}{dt} = x_3$ , $\frac{dx_3}{dt} = 1 - x_1^2$

$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ , $x = (x_1, x_2, x_3)$

$f(t,x) = (x_2, x_3, 1 - x_1^2)$

$\|f(t,x) - f(t,x^*)\| = \sqrt{(x_2 - x_2^*)^2 + (x_3 - x_3^*)^2 + (x_1^{*2} - x_1^2)^2}$

$= \sqrt{(x_2 - x_2^*)^2 + (x_3 - x_3^*)^2 + (x_1 - x_1^*)^2 (x_1 + x_1^*)^2}$ (5)

نأخذ المنطقة

$D = \{(t, x_1, x_2, x_3) ; |x_1| < c\}$ (2)

$\|f(t,x) - f(t,x^*)\| \leq \sqrt{(x_2 - x_2^*)^2 + (x_3 - x_3^*)^2 + 4c^2 (x_1 - x_1^*)^2}$

نأخذ $k = \sqrt{Max\{4c^2, 1\}}$ (2)

$\Leftarrow$ $\|f(t,x) - f(t,x^*)\| \leq k \|x - x^*\|$

2) $x_i^m = x_i^0 + \int_{t_0}^{t} f_i(t, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1}) ds$

$x_1^0 = 1$ , $x_2^0 = 1$ , $x_3^0 = 1$

$x_1^1 = x_1^0 + \int_0^t x_2^0 ds = 1 + t$ (1) $x_1^2 = x_1^0 + \int_0^t (1+s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$

$x_2^1 = x_2^0 + \int_0^t x_3^0 ds = 1 + t$ (1) $x_2^2 = x_2^0 + \int_0^t x_3^1 ds = 1 + \int_0^t ds = 1 + t$

$x_3^1 = x_3^0 + \int_0^t (1 - x_1^0) ds = 1 + 0 = 1$ (1) $x_3^2 = x_3^0 + \int_0^t (1 - x_1^{1\,2}) ds = 1 + \int_0^t (1 - 1 - 2s \dots$

$= 1 - t^2 + \frac{t^3}{3}$ (1)

ثانياً: نص نظرية الوجود والوحدانية:

نفرض لدينا مسألة القيم الابتدائية $x' = f(t,x)$ ، $x(t_0)=x_0$ حيث $f$ تابع معرف ومستمر (2)

على منطقة $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ بحيث $(t_0,x_0) \in U$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ مستمر (2)

على منطقة $R \subset U$ بحيث $R=\{(t,x): \|x-x_0\|\le b, |t-t_0|<a\}$ (1) عندئذ يوجد

$\delta > 0$ ؛ (1) $0<\delta\le\alpha=\min\{a,\frac{b}{M}\}$ ؛ (1) $M=\max_{(t,x)\in R}\|f(t,x)\|$

بحيث يكون لمسألة القيم الابتدائية حل وحيد على المجال $|t-t_0|\le\delta$ .

أي: استبدال $\frac{\partial f}{\partial x}$ مستمر بـ $f$ يحقق شرط ليبشتز في $x$

$R \ni x_1, x_2$ : $\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\le L\|x_1-x_2\|$

تفسير: $x'=f(t,x)$ هندسياً هي علاقة تربط كل نقطة $(t,x)$ من المنحني التكاملي وميل المماس للمنحني التكاملي في هذه النقطة وهو $f$

نفرض $n=1$

بما أن $M = \max_{(t,x)\in R}|f(t,x)|$ ⟸ $|x'(t)|\le M$

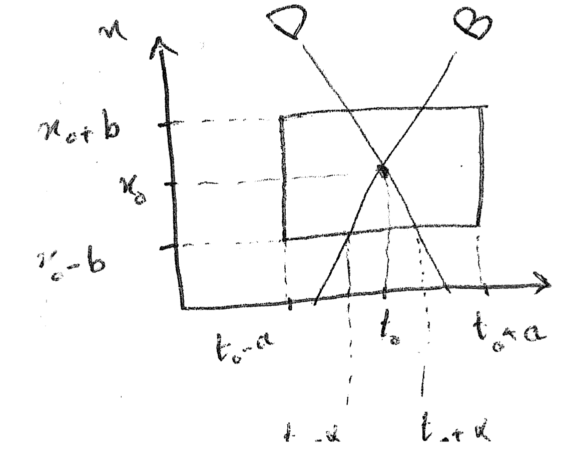
$-M\le x'(t)\le M$

⟸ كل المنحنيات التكاملية محصورة بين المستقيم ذو الميل $M$ والمستقيم ذو الميل $-M$ (8)

مستقيم ذو ميل $M$

مستقيم ذو ميل $-M$

بـ $(t_0,x_0)$




الميل (ميل الزاوية) $M = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

⟸ $M=\frac{b}{\alpha}$ ⟸

$\alpha=\frac{b}{M}$ وهي الترجمة لمصطلح

المجاور ... $b$

$\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\} \Leftarrow \frac{b}{M} \cdot a$ أصغر العددين $\alpha$ يجب اختيار $\Leftarrow$

سؤال الثاني :

أولاً

$$x_1' = x_2 + \sin x_1$$
$$x_2' = 2x_2$$

5

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}\right|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \end{pmatrix}$$

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0,0)$

3 2

$$\left|\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}\right|_{(0,0)} = \left|\begin{pmatrix} \cos x_1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3

$(1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 > 0$

$\Leftarrow$ المكافئة الخطي عملة غير مستقرة $\Leftarrow$ الجملة غير مستقرة.

2

ثانياً

~~سؤال الرابع~~

$m^2 + \lambda = 0$

$m^2 = -\lambda$

5

نناقش حسب قيم $\lambda$ 1

$\lambda > 0$ (

$y = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x \Leftarrow m = \mp i\sqrt{\lambda}$ 1

1

$0 = y(0) = c_1$

$0 = y(3) = c_2 \sin 3\sqrt{\lambda}$

$\sin 3\sqrt{\lambda} = 0 \Leftarrow c_2 \neq 0$ نفرض 1 1

$\Leftarrow 3\sqrt{\lambda} = n\pi \Leftarrow$ 1

القيم الذاتية $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{9} >$ 2

التوابع الذاتية $y_n = c_n \sin\frac{n\pi}{3} x$. 2

$\lambda$ ... $m_{1,2} = \mp\sqrt{-\lambda} \Leftarrow y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$

$$0 = y(0) = c_1 + c_2$$

5

$$y(3) = c_1 e^{3\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-3\sqrt{-\lambda}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{3\sqrt{-\lambda}} & e^{-3\sqrt{-\lambda}} \end{vmatrix} = e^{-3\sqrt{-\lambda}} - e^{3\sqrt{-\lambda}} \neq 0$$

للمسألة حل وحيد هو الحل الصفري $\Leftarrow$ $\lambda < 0$ ليست قيم ذاتية

$\lambda =$ $\Leftarrow$ $m^2 = 0$ $\Leftarrow$ $m = 0$ مكرر

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

5

$$0 = y(0) = c_1$$

$$0 = y(3) = c_1 + 3c_2 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

للمسألة حل وحيد هو الحل الصفري $\Leftarrow$ $\lambda = 0$ ليست قيم ذاتية



انتهى السلم