ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية **العلوم**

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الرابعة**

أسئلة دورات محلولة

التبولوجيا ٢

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Zمكتبة

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

الجمهورية العربية السورية — امتحان التبولوجيا العامة — اسم الطالب:

جامعة طرطوس — لطلاب السنة الرابعة_ رياضيات — الدرجة العظمى: 90 درجة

كلية العلوم — الدورة الفصلية الثانية 2024 — المدة: ساعتان

****

السؤال الأول: عرف ثلاثة فقط من المفاهيم الآتية: (15 درجة)

التبولوجيا النسبية، التابع المستمر عند نقطة، التابع المغلق، مرشحة فريشت، فضاء T_0.

السؤال الثاني: أثبت صحة المبرهنة الآتية: (20 درجة)

إذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ تابعاً كيفياً عندئذٍ:

التابع f مستمر على X إذا و فقط إذا كانت الصورة العكسية وفق التابع f لأي مجموعة مفتوحة في المستقر (Y,τ^*) هي مجموعة مفتوحة في (X,τ).

السؤال الثالث: تحقق من صحة أو خطأ ثلاثة فقط من القضايا الآتية: (15 درجة)

1. ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً و (Y,τ_Y) فضاءً تبولوجياً جزئياً منه، عندئذٍ يكون الاحتواء الآتي محققاً $\tau_Y\subseteq\tau$.
2. لتكن $X\neq\emptyset$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau=\mathrm{P}(X)$، تحقق أن الفضاء (X,τ) يمكن التعبير عنه مترياً.
3. إذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ تابعاً مستمراً، حيث (X,τ) فضاء تبولوجي كيفي و (Y,τ^*) فضاء T_1، عندئذٍ تكون $f^{-1}(\{y\})$ مجموعة مغلقة في (X,τ) مهما كانت $y\in Y$.
4. لنأخذ $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ فضاء المتممات المنتهية على $\mathbb{R}$، عندئذٍ إن الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ هو فضاء T_2.

السؤال الرابع: أجب عن السؤالين الآتيين: (40 درجة)

1. لتكن $X=\{a,b,c\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau=\mathrm{P}(X)$، تحقق أن الأسرة $S=\{\{a,c\},\{b,c\},\{a,b\}\}$ تشكل قاعدة جزئية للتبولوجيا τ.
2. لتكن $\tau=\{T\in P(\mathbb{N});12\in T\}\cup\{\emptyset\}$ تبولوجيا معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ و لنأخذ المجموعة $X=\{2,4,6,\dots\dots\}$ ولنعرف التابع $f:(\mathbb{N},\tau)\to(X,\tau_X)$ وفق: $f(x)=2x\,,\forall x\in\mathbb{N}$، المطلوب:
   1. ادرس استمرار التابع f على $\mathbb{N}$.
   2. ادرس تقارب مرشحة فريشت على $\mathbb{N}$ في الفضاء $(\mathbb{N},\tau)$.
   3. هل الفضاء $(\mathbb{N},\tau)$ فضاء T_0 ، T_1 ، T_2 ؟ علل إجابتك.

انتهت الأسئلة

طرطوس في 2 /7/2024 — مدرس المقرر: د. بشرى دراج أ.نوره العسلي

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم تصحيح التبولوجيا العامة
لطلاب السنة الرابعة_ رياضيات
الدورة الفصلية الثانية 2024

****

<u>السؤال الأول:</u> عرف <u>ثلاثة فقط</u> من المفاهيم الآتية: لكل تعريف (5°)   (15 درجة)

التبولوجيا النسبية، التابع المستمر عند نقطة، التابع المغلق، مرشحة فريشت، فضاء T_0.

1. ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً و $Y \subseteq X$ مجموعة جزئية من نقاطه الأسرة $\tau_Y = \{T^*: T^* = T \cap Y; T \in \tau\}$ تعرف تبولوجيا على Y ندعوها التبولوجيا النسبية على Y

2. يقال عن التابع f إنه مستمر عند النقطة $x \in X$ إذا و فقط إذا كانت الصورة العكسية وفق f لأي مجاورة للنقطة $f(x)$ في الفضاء (Y,τ^*) عبارة عن مجاورة للنقطة x في (X,τ).

3. يقال عن التابع f إنه تابع مغلق إذا و فقط إذا كانت الصورة المباشرة لأي مجموعة مغلقة في (X,τ) هي مجموعة مغلقة في (Y,τ^*).

4. لتكن X مجموعة غير منتهية كيفية و لنعرف عليها الأسرة $\mathcal{M}$ بالشكل الآتي : $\mathcal{M} = \left\{M \in P(X);\ \text{مجموعة منتهية}\ X\setminus M\right\}$ ، تشكل مرشحة على X ندعوها مرشحة فريشت.

5. إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً بحيث أنه من أجل كل نقطتين مختلفتين x,y من نقاطه توجد مجموعة مفتوحة مثل G في (X,τ) بحيث أن إحدى النقطتين x أو y تنتمي إليها دون الأخرى، عندئذٍ يسمى الفضاء (X,τ) فضاء T_0 .

<u>السؤال الثاني:</u> أثبت صحة المبرهنة الآتية: (20 درجة)

إذا كان $f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ تابعاً كيفياً عندئذٍ:

التابع f مستمر على X إذا و فقط إذا كانت الصورة العكسية وفق التابع f لأي مجموعة مفتوحة في المستقر (Y,τ^*) هي مجموعة مفتوحة في (X,τ).

إثبات:

$\Longleftarrow$: لدينا بالفرض أن f تابع مستمر على X و لتكن T^* مجموعة مفتوحة كيفية في (Y,τ^*) لنبرهن أن $f^{-1}(T^*)$ مجموعة مفتوحة في (X,τ).

إذا كانت $f^{-1}(T^*) = \emptyset$ فإن $\emptyset \in \tau$ أما إذ كانت $f^{-1}(T^*) \neq \emptyset$ عندئذٍ يوجد $x \in f^{-1}(T^*)$ و هذا يعني أن $f(x) \in T^*$ و بما أن $T^* \in \tau^*$ بالتالي $T^* \in V(f(x))$ و لكن التابع f تابع مستمر على X فرضاً فهو مستمر عند النقطة $x \in X$ بالتالي من أجل أي مجاورة V للنقطة $f(x)$ في (Y,τ^*) توجد مجاورة U للنقطة x في (X,τ) بحيث يكون $f(U) \subseteq V$ بوضع $V = T^*$ نجد: $f(U) \subseteq T^*$ ، بأخذ الصور العكسية للطرفين وفق f

نجد: $f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(T^*)$ لكن $U \subseteq f^{-1}(f(U))$ ، مما سبق أصبح لدينا: $x \in U \subseteq f^{-1}(T^*)$ و كون U مجاورة للنقطة x في (X,τ) فإن $f^{-1}(T^*)$ مجاورة للنقطة x في (X,τ) و حيث أن النقطة x كيفية من $f^{-1}(T^*)$، فإن المجموعة $f^{-1}(T^*)$ مجاورة لكل نقطة من نقاطها فهي مجموعة مفتوحة في (X,τ).

$\Longrightarrow$: لدينا بالفرض أن الصورة العكسية وفق f لأي مجموعة مفتوحة في (Y,τ^*) عبارة عن مجموعة مفتوحة في (X,τ)، لنبرهن أن f تابع مستمر على X .

لتكن $x \in X$ نقطة كيفية، و لتكن V^* مجاورة كيفية للنقطة $f(x)$ في (Y,τ^*)، حسب تعريف المجاورة توجد $G^* \in \tau^*$ بحيث $f(x) \in G^* \subseteq V^*$ بالتالي $x \in f^{-1}(G^*) \subseteq f^{-1}(V^*)$ و لكن $f^{-1}(G^*) \in \tau$ حسب الفرض، فتكون $f^{-1}(V^*) \in V(x)$ بمراعاة الاختيار الكيفي للمجاورة V^* نجد أن f تابع مستمر عند النقطة $x \in X$ (الصورة العكسية العكسية وفق f لأي مجاورة للنقطة $f(x)$ في الفضاء (Y,τ^*) عبارة عن مجاورة للنقطة x في (X,τ))، و كون $x \in X$ نقطة كيفية فإن f تابع مستمر على X .

<u>السؤال الثالث:</u> تحقق من صحة أو خطأ <u>ثلاثة فقط</u> من القضايا الآتية: (15 درجة)

1. ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً و (Y,τ_Y) فضاءً تبولوجياً جزئياً منه، عندئذٍ يكون الاحتواء الآتي محققاً $\tau_Y \subseteq \tau$.

(5)

$\tau_Y \subseteq \tau$ غير محقق بصورة عامة كما تبين الأمثلة الآتية:

a. لنأخذ الفضاء $(\mathbb{R},\tau)$ حيث $\tau = \{\mathbb{R},\emptyset\}$ و لتكن $Y = \mathbb{N}$ عندئذٍ تكون $\tau_{\mathbb{N}} = \{\mathbb{N},\emptyset\}$ كما نلاحظ إن $\mathbb{N} \notin \tau$.

b. لنأخذ الفضاء $(\mathbb{R},|.|)$ و لتكن $Y = [0,1]$ نجد $]-1,1[\cap [0,1] = [0,1[$ من الواضح أن $[0,1[\in \tau_Y$ بينما لا تكون هذه المجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R},|.|)$.

و لو أخذنا $Y = \mathbb{N}$ عندئذٍ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$]n-1,n+1[\cap \mathbb{N} = \{n\} \in \tau_{\mathbb{N}}$ و هذا يعني أن $\tau_{\mathbb{N}} = |.|_{\mathbb{N}} = P(\mathbb{N})$ لكن بوضوح نجد ان: $\{n\} \notin \tau_{|.|}$. يكتفى بمثال واحد فقط.

2. لتكن $X \neq \emptyset$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau = \mathrm{P}(X)$، تحقق أن الفضاء (X,τ) يمكن التعبير عنه مترياً.

(5)

من أجل أي مجوعة $X \neq \emptyset$ و $\tau = P(X)$ التبولوجيا القوية على X

إذا عرفنا التابع d بالشكل: $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0\,; x = y \\ 1\,; x \neq y \end{cases}$$

فإننا نحصل على الفضاء المتري المنقطع (X,d) و نعلم أن كل المجموعات الجزئية من X في هذا الفضاء هي مجموعات مفتوحة و مغلقة بآن واحد لذلك فإن أسرة المجموعات المفتوحة τ_d

في (X,d) هي ذاتها $\tau = P(X)$ أي أن $\tau_d = \tau$

و بما أن أسرة المجموعات المفتوحة في كلا الفضاءين (X,d) و $(X, P(X))$ متطابقة فإن الفضاء التبولوجي القوي يمكن التعبير عنه مترياً، و بما أن X مجموعة كيفية فإن أي فضاء تبولوجي قوي يمكن تحويله إلى فضاء متري.

3. إذا كان $f: (X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ تابعاً مستمراً، حيث (X,τ) فضاء تبولوجي كيفي و (Y,τ^*) فضاء T_1، عندئذٍ تكون $f^{-1}(\{y\})$ مجموعة مغلقة في (X,τ) مهما كانت $y \in Y$.

(5)

بما أن الفضاء (Y,τ^*) هو فضاء T_1 فإن كل مجموعة وحيدة العنصر هي مجموعة مغلقة فالمجموعة $\{y\}$ مجموعة مغلقة في (Y,τ^*) و كون التابع مستمر فرضاً فإن الصورة العكسية وفقه لكل مجموعة مغلقة في المستقر هي مجموعة مغلقة في المنطلق و بالتالي تكون $f^{-1}(\{y\})$ مجموعة مغلقة في (X,τ) مهما كانت $y \in Y$ فالقضية صحيحة.

4. لنأخذ $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ فضاء المتممات المنتهية على $\mathbb{R}$، عندئذٍ إن الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ هو فضاء T_2.

لنفرض جدلاً أن الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ هو فضاء T_2 هذا يعني أنه من أجل كل نقطتين مختلفتين x, y من نقاطه توجد مجموعتان مفتوحتان G_x , G_y في $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ بحيث يكون:

(5)

$$x \in G_x , y \in G_y \ \& \ G_x \cap G_y = \emptyset$$

بالتالي فإن $G_x \subseteq \mathbb{R}\backslash G_y$ و $G_y \subseteq \mathbb{R}\backslash G_x$ و هذا تناقض لأن:

كل من G_x , G_y مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ فكل منهما مجموعة غير منتهية من جهة ، و من جهة ثانية كل من $\mathbb{R}\backslash G_y$ و $\mathbb{R}\backslash G_x$ مجموعة منتهية ، سبب التناقض هو الفرض الجدلي الخاطئ بأن $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ فضاء T_2، بالتالي $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ ليس فضاء T_2.

<u>**السؤال الرابع:**</u> أجب عن السؤالين الآتيين: (40 درجة)

1. لتكن $X = \{a,b,c\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau = P(X)$، تحقق أن الأسرة $S = \{\{a,c\},\{b,c\},\{a,b\}\}$ تشكل قاعدة جزئية للتبولوجيا τ.

الحل:

(10) $$\varphi(S) = \{\emptyset, \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},X\} = \tau$$

بما أن كل تبولوجيا هي قاعدة لنفسها نلاحظ أن $\varphi(S)$ تشكل قاعدة للتبولوجيا τ لذلك فإن S قاعدة جزئية لها. (5)

2. لتكن $\tau = \{T \in P(\mathbb{N}); 12 \in T\} \cup \{\emptyset\}$ تبولوجيا معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ و لنأخذ المجموعة $X = \{2,4,6, \dots \dots\}$ ولنعرف التابع $f: (\mathbb{N},\tau) \to (X,\tau_X)$ وفق: $f(x) = 2x , \forall x \in \mathbb{N}$، المطلوب:

1. ادرس استمرار التابع f على $\mathbb{N}$.

. لتكن $T_X \in \tau_X$ مجوعة كيفية عندئذٍ حسب تعريف الفضاء التبولوجي الجزئي: توجد مجموعة مفتوحة $T \in \tau$ بحيث $T_X = T \cap X$ و بما أن $T \in \tau$ فإن $12 \in T$ و $12 \in X$ منه: $12 \in T \cap X$ أي أن $12 \in T_X$ و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة T_X من τ_X نجد: $\tau_X = \{T_X \in P(X): 12 \in T_X\} \cup \{\emptyset\}$ و بالتالي المجموعة $\{12\} \in \tau_X$

(5)

$f^{-1}(\{12\}) = \{6\} \notin \tau$ أي أنه وجدت مجموعة مفتوحة في المستقر بحيث أن الصورة العكسية لها وفق التابع f ليست مفتوحة في المنطلق فالتابع ليس مستمراً.

2. ادرس تقارب مرشحة فريشت على $\mathbb{N}$ في الفضاء $(\mathbb{N}, \tau)$.

أياً كانت النقطة $x \in \mathbb{N}$ نلاحظ أن $V = \{x, 12\} \in V(x)$ لأن $V \in \tau$ و بوضوح نجد أن $\mathbb{N} \backslash \{x, 12\}$ مجموعة غير منتهية أي لا تحقق تعريف مرشحة فريشت و منه $V \notin \mathcal{M}$:

(5)

$V(x) \not\subseteq \mathcal{M}, \forall x \in \mathbb{N}$ حيث $\mathcal{M}$ مرشحة فريشت و هي:

$\mathcal{M} = \left\{M \in P(X);\ X \backslash M \text{ مجموعة منتهية}\right\}$ فالمرشحة غير متقاربة في هذا الفضاء.

3. هل الفضاء $(\mathbb{N}, \tau)$ فضاء T_0 ، T_1 ، T_2 ؟ علل إجابتك.

لتكن $x, y \in \mathbb{N}$ نقطتين كيفيتين بحيث أن $x \neq y$ ، عندئذٍ نناقش الحالتين الآتيتين:

$x = 12\,, y \neq x$ عندئذٍ توجد المجموعة $T = \{12\} \in \tau$ بحيث:

$x \in T\,, y \notin T$

ثانياً: $x \neq 12\,, y \neq 12$ عندئذٍ توجد $G = \{12, x\} \in \tau$ بحيث:

(5)

$x \in G\,, y \notin G$

في كلتا الحالتين وجدت مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{N}, \tau)$ بحيث تنتمي إليها إحدى النقطتين دون الأخرى فهو فضاء T_0.

من أجل $x = 12\,, y \neq x$ نلاحظ أن أي مجموعة مفتوحة غير خالية ستضم 12 و منه أياً كانت $T \in \tau$ بحيث أن $y \in T$ فإن $12 \in T$ أيضاً أي أنه لا توجد مجموعة مفتوحة تضم y بدون 12 فالفضاء $(\mathbb{N}, \tau)$ ليس فضاء T_1 فهو ليس فضاء T_2 لأن كل فضاء T_2 هو فضاء T_1.

(5)

(5)

انتهى السلم

مدرس المقرر: د. بشرى دراج أ.نوره العسلي

1

كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم تصحيح التبولوجيا العامة
الدورة الفصلية الأولى
لعام 2023 - 2024

السنة الرابعة

السؤال الأول : عرف كلاً من المفاهيم الآتية

$\boxed{15^\circ}$

مرشحة مزرشيت : لنأخذ X مجموعة غير منتهية كيفية عندئذ نسمي الأسرة المعرفة بالشكل : $\mathcal{M} = \{ M \in P(X) : X \setminus M$ مجموعة منتهية $\}$ مرشحة مزرشيت على X

5°

الهوموميرفيزم التبولوجي : ندعو $f: (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ هوموميرفيزم تبولوجي اذا كان كمحقق الشروط : f تقابل ، f مستمر على X ، f^{-1} مستمر على Y

5°

فضاء T_1 : يدعى الفضاء التبولوجي (X, τ) فضاء T_1 اذا حقق الشرط

$\forall x, y \in X : x \neq y \ , \ \exists G_x, G_y \in \tau :$ $x \in G_x$ و $y \notin G_x$ ، $y \in G_y$ و $x \notin G_y$

5°

السؤال الثاني : أثبت صحة المبرهنة الآتية

$\boxed{20^\circ}$

يكون التابع $f: (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ مستمراً عند النقطة $x \in X$ إذا وفقط إذا كان من أجل أي مجاورة V للنقطة $f(x)$ في (Y, τ^*) توجد مجاورة U لـ x في (X, τ) بحيث يكون :

$$f(U) \subseteq V$$

الإثبات : $\boxed{\Leftarrow}$

لتكن V مجاورة كيفية لـ $f(x)$ في (Y, τ^*) بما أن f تابع مستمر حسب تعريف الاستمرار تكون $f^{-1}(V)$ مجاورة لـ x في (X, τ)

نعلم أن $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ وهذا يعني أننا وجدنا مجاوره لـ x في (X, τ) $U = f^{-1}(V)$ بحيث أن :

$$f(U) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V$$

$$f(U) \subseteq V$$

15°

نوره العيساوي + د. بشرى دراج

المدرس

⇐ لتكن V مجاورة كيفية للنقطة $f(x)$ في (Y, τ^*) حيث $x \in X$
عندئذ حسب الفرض توجد مجاورة U لـ x في (X, τ) تحقق:

$$f(U) \subseteq V \Leftarrow f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$$

لكن $U \subseteq f^{-1}(f(U))$ ومنه $U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$

⇐ $U \subseteq f^{-1}(V)$ وكون U مجاورة لـ x في (X, τ) هذا يعني وجود $G \in \tau$ بحيث

$$x \in G \subseteq U \Leftarrow x \in G \subseteq U \subseteq f^{-1}(V)$$

⇐ $f^{-1}(V)$ مجاورة لـ x في (X, τ) وبمراعاة الاختيار الكيفي للمجاورة V للنقطة $f(x)$ في (Y, τ^*) يكون التابع f مستمراً عند النقطة x

10°

السؤال الثالث: تحقق من صحة أو خطأ كل من القضايا الآتية: $\boxed{30°}$

1. ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً و (Y, τ_Y) فضاءً تبولوجياً جزئياً منه عندئذٍ يكون الاحتواء الآتي محققاً $\tau_Y \subseteq \tau$ 6°

القضية خاطئة: مثال لنأخذ التبولوجيا الضعيفة على IR $\tau = \{IR, \phi\}$
ولتكن $IN \subseteq IR$ عندئذ $\tau_{IN} = \{IN, \phi\}$ لاحظ $IN \notin \tau$، $IN \in \tau_{IN}$
أي أن $\tau_{IN} \nsubseteq \tau$

2. ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً، عندئذٍ كل قاعدة للتبولوجيا τ هي قاعدة جزئية لها

القضية صحيحة: نفرض β قاعدة كيفية للتبولوجيا τ هذا يعني أن: $\beta \subseteq \tau$
وبما أن $\beta \subseteq \varphi(\beta)$ (أسرة التقاطعات المنتهية لعناصر β) وكون التقاطعات المنتهية لمجموعات مفتوحة هي مجموعة مفتوحة في أي فضاء تبولوجي فإن $\varphi(\beta) \subseteq \tau$ وبالتالي $\underset{\text{قاعدة}}{\beta} \subseteq \varphi(\beta) \subseteq \tau$
هذا يعني أن $\varphi(\beta)$ قاعدة للتبولوجيا τ أيضاً وبذلك تكون β قاعدة جزئية للتبولوجيا τ

6°

3. ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ الفضاء الحقيقي العادي، ولنأخذ المجموعة $Y=[0,1]$ عندئذ تكون المجموعة $A=\{\frac{1}{3}\}$ مجموعة مغلقة في الفضاء الجزئي (Y,τ_Y)

القضية صحيحة: لدينا $Y=[0,1]$ مجموعة مغلقة في $(\mathbb{R},\tau_u)$ لأن $\mathbb{R}\setminus Y$ مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R},\tau_u)$ ونعلم أن:

« إذا كانت Y مجموعة مغلقة من فضاء تبولوجي (X,τ) كيفي وكانت A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) فإن: A مغلقة في (Y,τ_Y) $\Longleftrightarrow$ A مغلقة في (X,τ) »

وبما أن A مجموعة مغلقة في $(\mathbb{R},\tau_u)$ لأن $\mathbb{R}\setminus A=]-\infty,\frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3},+\infty[\in\tau_u$ فإن A مجموعة مغلقة في (Y,τ_Y)

6°

4. إذا كان $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\tau^*)$ تابعاً ما، عندئذ إذا كان f تابعاً مغلقاً فإنه يكون تابعاً مستمراً

القضية خاطئة: $X=\{a,b,c,d\}$ لنعرف عليها $\tau_1=P(X)$ و:

$$\tau_2=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\}\Rightarrow F_2=\{\phi,X,\{b,c,d\},\{c,d\}\}$$

$$f:(X,\tau_2)\longrightarrow(X,\tau_1)$$

$$f(x)=x\ ,\ \forall x\in X$$

$f(\phi)=\phi\in F_1$, $f(X)=X\in F_1$, $f(\{b,c,d\})=\{b,c,d\}\in F_1$

$f(\{c,d\})=\{c,d\}\in F_1$

الصورة المباشرة لكل مجموعة مغلقة في المنطلق هي مجموعة مغلقة في المستقر $\Leftarrow$ f تابع مغلق

لكن $\{c\}\in P(X)=\tau_1$ و $f^{-1}(\{c\})=\{c\}\notin\tau_2$ $\Leftarrow$ f ليس تابعاً مستمراً

f مغلق وليس مستمر

6°

4. لتكن $\tau=\{T\in P(\mathbb{N}): 2\notin T\}\cup\{\mathbb{N}\}$ تبولوجيا معرفة على $\mathbb{N}$ عندئذ $(\mathbb{N},\tau)$ فضاء T_2

القضية خاطئة: إذا كانت $x\in\mathbb{N}\setminus\{2\}$ أي $x\neq 2$ وبحسب تعريف τ فإن المجموعة المفتوحة الوحيدة التي تحوي العنصر 2 هي $\mathbb{N}$، وبالتالي من أجل أي مجاورة V_x للعنصر $x\neq 2$ يكون $\mathbb{N}\cap V_x=V_x\neq\phi$ لأن $V_x\subseteq\mathbb{N}$

أي أنه من أجل العنصر 2 وأي عنصر آخر مختلف عنه لا يمكن إيجاد مجاورتين لكل منهما بحيث أنهما غير متقاطعتين $\Leftarrow$ $(\mathbb{N},\tau)$ ليس فضاء T_2

6°

السؤال الرابع : $\boxed{25°}$

1 إذا كان (X, τ) فضاء T_1 و (X, τ_{cof}) فضاء تبولوجيا المتممات المنتهية على X عندئذ إن $\tau_{cof} \subseteq \tau$:

5°

$\forall T \in \tau_{cof} \Leftrightarrow$ $X \setminus T$ مجموعة منتهية

وبما أن $X \setminus T$ مجموعة منتهية في فضاء T_1 فهي مغلقة فيه $\Leftarrow$ $X \setminus T$ مغلقة في (X, τ)

ومنه متممتها $X \setminus (X \setminus T) = T$ مجموعة مفتوحة فيه $\Leftarrow$ $T \in \tau$

بملاحظة الاختيار الكيفي لـ T من τ_{cof} نجد أن $\tau_{cof} \subseteq \tau$

2 $\mathcal{M} = \{ M_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} : n = 1, 2, 3, \dots, n < \infty \}$

هل $\mathcal{M}$ قاعدة مرشحة على $\mathbb{N}$ ، مرشحة على $\mathbb{N}$ ؟

5°

$n < \infty \Rightarrow M_\infty = \phi \notin \mathcal{M}$

$n = 1 \Rightarrow M_1 = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M} \neq \{\}$

$\forall M_n, M_m \in \mathcal{M}$ $\quad n, m \in \mathbb{N}$

$M_n = \{n, n+1, \dots\}$ $\quad M_m = \{m, m+1, m+2, \dots\}$

نضع $r = \max\{n, m\}$ فيكون

$M_n \cap M_m = M_r = \{r, r+1, r+2, \dots\} \in \mathcal{M}$

5°

أي وجد عنصر $D = M_r \in \mathcal{M}$ يحقق أن $D \subseteq M_n \cap M_m = D$

وبالتالي $\mathcal{M}$ قاعدة لمرشحة ما معرفة على $\mathbb{N}$

5°

لكن $\mathcal{M}$ ليست مرشحة لأنه لو أخذنا $A = \{1, 7, 8, 9, \dots\}$

لوجدنا أن $A \in P(\mathbb{N})$ ، $M_7 \subseteq A$

لكن $A \notin \mathcal{M}$ لأن A ليست على شكل عناصر $\mathcal{M}$

3 إذا كان $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau^*)$ تابعاً ثابتاً $\Leftarrow$ f مستمر على X : $f(x) = b$ $\forall x \in X$

$\forall x \in X$ و $\forall v^* \in V_Y(f(x)) \Rightarrow b = f(x) \in v^* \Leftrightarrow \{b\} \subseteq v^*$

لكن $f^{-1}(\{b\}) = X$ $\Leftarrow$ $f^{-1}(\{b\}) \subseteq f^{-1}(v^*) = X$

$f^{-1}(v^*) = X \Leftarrow X \subseteq f^{-1}(v^*) = X$

5°

$X \in V(x)$ ، هذا يعني أن f مستمر عند x نقطة كيفية من X

وبالتالي f مستمر على كل X

سلم التصحيح

الجمهورية العربية السورية	امتحان التبولوجيا العامة2	اسم الطالب:
جامعة طرطوس	لطلاب السنة الرابعة_ رياضيات	الدرجة العظمى: 90 درجة
كلية العلوم	الدورة التكميلية 2023	المدة: ساعتان

****

السؤال الأول: ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً، عرف كلاً من المفاهيم الآتية: (15 درجة)

أثر التبولوجيا τ على المجموعة Y حيث $Y \subseteq X$ ، القاعدة الجزئية للتبولوجيا τ، فضاء T_0.

السؤال الثاني: أثبت صحة المبرهنة الآتية: (20 درجة)

إذا كان $f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ تقابلاً كيفياً، عندئذٍ يكون التابع f مغلقاً إذا و فقط إذا كان f مفتوحاً.

السؤال الثالث: تحقق من صحة أو خطأ كل من القضايا الآتية: (25 درجة)

1. لتكن $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ و لنعرف عليها التبولوجيا $\tau = P(X)$، تحقق أن الأسرة $\beta = \{\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$ تشكل قاعدة للتبولوجيا τ.
2. ليكن $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ الفضاء الحقيقي العادي و لنأخذ المجموعة $Y =]0,1[$ عندئذٍ تكون المجموعة $A = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي (Y,τ_Y).
3. إذا كان $f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ تابعاً ما بحيث إن $\tau = P(X)$ و τ^* تبولوجيا ما عندئذٍ يكون f تابعاً مستمراً على X.
4. لنعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ الأسرة:
$\mathcal{M} = \{M_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}, n = 1,2,3,\ldots : n < \infty\}$ إن الأسرة $\mathcal{M}$ تشكل مرشحة على $\mathbb{N}$.
5. ليكن $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ فضاء المتممات المنتهية على $\mathbb{R}$، عندئذٍ إن $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ فضاء T_1.

السؤال الرابع: أجب عن السؤالين الآتيين: (30 درجة)

1. إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً، و $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ الفضاء التبولوجي العادي و كان $f:(X,\tau) \to (\mathbb{R},\tau_{|.|})$ تابعاً معرفاً بالشكل: $;A \subset X$ ، $f(x) = \begin{cases} 1 \,; x \in A \\ 0 \,; x \notin A \end{cases}$

و المطلوب:

1. أثبت صحة العبارة: " يكون التابع f مستمراً على X إذا و فقط إذا كانت المجموعة A مفتوحة و مغلقة في (X,τ) بنفس الوقت ".
2. أثبت أن الفضاء الحقيقي العادي $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ هو فضاء T_2.

انتهت الأسئلة

طرطوس في 2023/ 9/ 17   مدرس المقرر : د. بشرى دراج   نوره العسلي

العسلي

سلم التصحيح لمقرر التبولوجيا 2 الدورة التكميلية 2023

السؤال الأول:

1. ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً و $Y \subseteq X$ مجموعة جزئية من نقاطه الأسرة $\tau_Y = \{T^*: T^* = T \cap Y; T \in \tau\}$ تعرف تبولوجيا على Y ندعوها التبولوجيا النسبية على Y أو أثر التبولوجيا τ على Y. (5 درجات)

2. إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً و كانت $S \subseteq P(X)$ أسرة كيفية، يقال إن الأسرة S تشكل (تحت أساس) قاعدة جزئية للتبولوجيا τ إذا وفقط إذا كانت الأسرة $\beta = \varphi(S)$ تشكل قاعدة للتبولوجيا τ، حيث $\varphi(S)$ أسرة جميع التقاطعات المنتهية لعناصر الأسرة S. (5 درجات)

3. إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً بحيث أنه من أجل كل نقطتين مختلفتين x, y من نقاطه توجد مجموعة مفتوحة مثل G في (X,τ) بحيث أن إحدى النقطتين x أو y تنتمي إليها دون الأخرى، عندئذٍ يسمى الفضاء (X,τ) فضاء T_0 . (5 درجات)

السؤال الثاني:

إذا كان $f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ تقابلاً كيفياً، عندئذٍ يكون التابع f مغلقاً إذا و فقط إذا كان f مفتوحاً.

إثبات:

لدينا بالفرض f تابع تقابل و مغلق و لنبين أنه تابع مفتوح: لتكن T مجموعة مفتوحة كيفية في (X,τ) عندئذٍ تكون $X \backslash T$ مجموعة مغلقة في (X,τ) و بحسب كون التابع f مغلقاً فإن $f(X \backslash T)$ مجموعة مغلقة في (Y,τ^*) لكن: $f(X\backslash T) = f(X)\backslash f(T) = Y\backslash f(T)$ أي أن $Y \backslash f(T)$ مجموعة مغلقة في (Y,τ^*) و بالتالي تكون المجموعة $f(T)$ مجموعة مفتوحة في (Y,τ^*) و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة المفتوحة T في (X,τ) نجد أن التابع f تابعاً مفتوحاً. (10 درجات)

و بالعكس، لدينا فرضاً أن التابع f تقابل و مفتوح: لتكن F مجموعة مفتوحة كيفية في (X,τ) عندئذٍ تكون $X \backslash F$ مجموعة مفتوحة في (X,τ) و بحسب كون التابع f مفتوحاً فإن $f(X \backslash F)$ مجموعة مفتوحة في (Y,τ^*) لكن: $f(X\backslash F) = f(X)\backslash f(F) = Y\backslash f(F)$ أي أن $Y \backslash f(F)$ مجموعة مفتوحة في (Y,τ^*) و بالتالي تكون المجموعة $f(F)$ مجموعة مغلقة في (Y,τ^*) و بمراعاة الاختيار الكيفي للمجموعة المغلقة F في (X,τ) نجد أن التابع f تابعاً مغلقاً. (10 درجات)

السؤال الثالث:

1. نلاحظ أن المجموعة X مجموعة مفتوحة في (X,τ) و لا تكتب على شكل اجتماع لعناصر الأسرة β لأن $1 \in X$ & $\forall B \in \beta$, $1 \notin B$ فالقضية خاطئة. أي المجموعة $\{1\}$ لا تكتب على شكل اجتماع لعناصر β (5 درجات)

2. بما أن المجموعة $Y =]0,1[$ مفتوحة في الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ فإن المجموعة A تكون مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) إذا و فقط إذا كانت مفتوحة في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$، لكن المجموعة $A = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ مجموعة مغلقة في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ لأنها منتهية و ليست مفتوحة فيه، فهي ليست مفتوحة في الفضاء الجزئي (Y,τ_Y). القضية خاطئة. (5 درجات)

3. أياً كانت $T \in \tau^*$ فإن $f^{-1}(T) \subseteq X$ و بالتالي $f^{-1}(T) \in P(X) = \tau$ أي أن الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في المستقر هي مجموعة مفتوحة في المنطلق و هذا يكافئ القول أن f تابعاً مستمراً على X. فالقضية صحيحة. (5 درجات)

4. القضية خاطئة لأن $\{4,5,6,\dots\dots\} \in \mathcal{M}$ و $\{4,5,6,..\} \subseteq \{1,4,5,6,..\} \in P(\mathbb{N})$ و لكن $\{1,4,5,6,..\} \notin \mathcal{M}$ لأنه لا يكتب على شكل عناصرها. (5 درجات)

5. من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ نجد أن $\overline{\{x\}} = \{x\}$ لأنها مجموعة منتهية في الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ فهي مغلقة فيه و هذا يكافئ القول أن $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ فضاء T_1. القضية صحيحة

أو (طريقة ثانية):

أياً كان $x,y \in \mathbb{R}$ حيث $x \neq y$ نجد أن كل من المجموعتين :

$T_x = \mathbb{R}\backslash\{y\}\,, T_y = \mathbb{R}\backslash\{x\}$ هي مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ لأن متممة كل منهما مجموعة منتهية و تحققان: $x \in T_x$ & $y \notin T_x$ و $y \in T_y$ & $x \notin T_y$ و هذا يعني أن $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ فضاء T_1. (5 درجات)

السؤال الرابع:

1. يكون التابع f مستمراً على X إذا و فقط إذا كانت المجموعة A مفتوحة و مغلقة في (X,τ) بنفس الوقت

حيث: $f:(X,\tau) \to (\mathbb{R},\tau_{|.|})$ تابع معرف بالشكل: $A \subset X$; $f(x) = \begin{cases} 1 \,;\, x \in A \\ 0 \,;\, x \notin A \end{cases}$

$\Leftarrow$: لدينا بالفرض f تابع مستمر على X و لتكن $A \subset X$، لنثبت أنها مفتوحة و مغلقة بآن معاً، لنأخذ المجموعة $T = \left]\frac{1}{2},5\right[$ و هي مفتوحة في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ و بما أن f تابع مستمر على X فإن الصورة العكسية وفقه لأي مجموعة مفتوحة في المستقر عبارة عن مجموعة مفتوحة في المنطلق أي: $f^{-1}(T) \in \tau$ لكن $f^{-1}(T) = A$ بالتالي $A \in \tau$ و منه A مجموعة مفتوحة في (X,τ). (3 درجة)

كما أن $F = \{1\}$ مجموعة مغلقة في $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ لأنها منتهية و كون f تابع مستمر على X

فإن الصورة العكسية وفقه لأي مجموعة مغلقة في المستقر عبارة عن مجموعة مغلقة في المنطلق أي أن $f^{-1}(F)$ مجموعة مغلقة في(X,τ) ، لكن $f^{-1}(F)=A$ و منه A مجموعة مغلقة في(X,τ). (3 درجة)

$\Longrightarrow$: لدينا بالفرض أن $A\subset X$ مجموعة مفتوحة و مغلقة بآن معاً في(X,τ) لنبرهن أن f تابع مستمر على X ، لتكن $T\in\tau_{|.|}$ مجموعة مفتوحة كيفية و لنبرهن أن $f^{-1}(T)\in\tau$

نناقش الحالات الآتية:

$T=\emptyset$ فإن $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\tau$ (2 درجة)

$T=\mathbb{R}$ فإن $f^{-1}(\mathbb{R})=X\in\tau$ (2 درجة)

$0\notin T\ \&\ 1\in T$ فإن $f^{-1}(T)=A\in\tau$ لأن A مجموعة مفتوحة فرضاً. (2 درجة)

$0\in T\ \&\ 1\notin T$ فإن $f^{-1}(T)=X\backslash A\in\tau$ لأن A مجموعة مغلقة فرضاً فمتممتها مجموعة مفتوحة. (2 درجة)

$0\in T\ \&\ 1\in T$ فإن $f^{-1}(T)=A\cup(X\backslash A)=X\in\tau$ (2 درجة)

$0\notin T\ \&\ 1\notin T$ فإن $f^{-1}(T)=\emptyset\in\tau$ (2 درجة)

مما سبق نجد أنه أياً كانت $T\in\tau_{|.|}$ فإن $f^{-1}(T)\in\tau$ و هذا يعني أن f تابع مستمر على X. (2 درجة)

2. الفضاء الحقيقي العادي $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ هو فضاء T_2:

لنأخذ $x\neq y$ نقطتين مختلفتين من $\mathbb{R}$ عندئذٍ إما $x<y$ أو $y>x$ لنقل مثلاً إن: $x<y$

و لتكن $a,b,c\in\mathbb{R}$ بحيث $a<x<c$ و $c<y<b$ عندئذٍ تكون المجموعتان $T_x=]a,c[\,,T_y=]c,b[$ مجموعتين مفتوحتين في الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ تحققان :

$x\in T_x\,,y\in T_y\ \&\ T_x\cap T_y=\emptyset$ ، و بالتالي إن $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ فضاء T_2. (10 درجات)

انتهى سلم التصحيح

أ. نوره العسلي
0991410556

الجمهورية العربية السورية	امتحان التبولوجيا العامة 2	اسم الطالب:
جامعة طرطوس	لطلاب السنة الرابعة _ رياضيات	الدرجة العظمى: 90 درجة
كلية العلوم	الفصل الثاني	المدة: ساعتان

****

السؤال الأول: عرف كلاً من المفاهيم الآتية: (15 درجة)

قاعدة الفضاء التبولوجي (X,τ) ، الهومومرفيزم التبولوجي ، فضاء T_0

السؤال الثاني: أثبت صحة المبرهنة الآتية: (20 درجة)

يكون الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاء T_1 إذا و فقط إذا كان $\overline{\{x\}}\cap\overline{\{y\}}=\emptyset\,,\forall x\neq y$ حيث $x,y\in X$.

السؤال الثالث: تحقق من صحة أو خطأ كل من القضايا الآتية: (25 درجة)

1. إذا كانت A مجموعة كثيفة في كل مكان في (X,τ) عندئذٍ إن المجموعة $X\setminus A$ لا تملك نقاطاً داخلية.
2. إذا كانت $X=\{a,b,c,d,e\}$ و الأسرة $S=\{\{a,c\},\{b,c\},X\}$ إن S تشكل قاعدة لتبولوجيا ما معرفة على X.
3. إذا كان $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ تابعاً ما بحيث $\tau^*=P(Y)$ و τ تبولوجيا ما معرفة على X، عندئذٍ يكون التابع f تابعاً مفتوحاً.
4. إذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً، فإن $V(a)$ أسرة مجاورات النقطة $a\in X$ في الفضاء (X,τ) تعرف مرشحة على X.
5. لتكن $\tau=\{T\in P(\mathbb{N});\,2\in T\}\cup\{\emptyset\}$ تبولوجيا معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ عندئذٍ يكون الفضاء التبولوجي $(\mathbb{N},\tau)$ فضاء T_1.

السؤال الرابع: (30 درجة)

لنأخذ $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ فضاء المتممات المنتهية على $\mathbb{R}$، و $(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ الفضاء الحقيقي العادي و لنعرف التابع $f:(\mathbb{R},\tau_{cof})\to(\mathbb{R},\tau_{|.|})$ وفق: $f(x)=x\,,\forall x\in\mathbb{R}$، المطلوب:

1. ادرس استمرار التابع f على $\mathbb{R}$.
2. عرف مرشحة فريشت على $\mathbb{R}$ و ادرس تقاربها في الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{cof})$.
3. هل الفضاء $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ فضاء T_2؟ علل إجابتك.

انتهت الأسئلة

طرطوس في 10 /7 /2023   مدرس المقرر: د. بشرى دراج نوره العسلي

سلم تصحيح مقرر
التبولوجيا العامة

السؤال الأول: عرف المفاهيم الآتية: $\boxed{15}$

* قاعدة الفضاء التبولوجي (X,τ): كل أسرة $\beta \subseteq P(X)$ تحقق الشرطين الآتيين: (5)

● $\beta \subseteq \tau$

● $\forall T \in \tau \Rightarrow T = \bigcup_{B \in \beta} B$

* الهوموموفيزم التبولوجي: كل تابع $f:(X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau^*)$ يحقق الشروط: (5)

● f تقابل ● f مستمر على X ● f^{-1} مستمر على Y

* الفضاء T_0: نقول إن الفضاء (X,τ) فضاء T_0 إذا وفقط إذا كان من أجل كل نقطتين مختلفتين x و y من نقاط توجد مجموعة مفتوحة تحوي إحدى النقطتين دون الأخرى

أو (X,τ) فضاء $T_0 \Leftrightarrow$ أياً كانت $x,y \in X$ بحيث $x \neq y$ توجد $G \in \tau$ تحقق
$x \in G$ و $y \notin G$ (5)

السؤال الثاني: أثبت صحة المبرهنة $\boxed{20}$

(X,τ) فضاء $T_1 \Longleftrightarrow \forall x,y \in X : x \neq y \Rightarrow \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \phi$

$\boxed{\Leftarrow}$ X فضاء T_1 بالفرض ولتكن $x \neq y$ أي نقطتين مختلفتين من نقاط

(5) نعلم أنه في الفضاء T_1 كل مجموعة وحيدة العنصر تكون مغلقة $\Leftarrow \overline{\{x\}} = \{x\}$ و $\overline{\{y\}} = \{y\}$

(5) وبما أن $x \neq y$ فإن
$\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \{x\} \cap \{y\} = \phi$

$\boxed{\Rightarrow}$ لدينا بالفرض $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \phi \Leftarrow \overline{\{x\}} \subseteq X \setminus \overline{\{y\}}$

(5) وبما أن $x \notin \overline{\{y\}}$ ، $y \in \overline{\{y\}}$ $\Leftarrow x \in T_x = X \setminus \overline{\{y\}}$ (مجموعة مفتوحة)
$x \in \overline{\{x\}}$
و $y \notin T_x$

(5) وبالشكل نجد أن
$y \in T_y = X \setminus \overline{\{x\}}$ ، $x \notin T_y$

وهذا يعني أن
(X,τ) فضاء T_1

السؤال الثالث : $\boxed{25}$ تحقق من صحة أو خطأ كل من القضايا الآتية

1. بما أن A كثيفة في كل مكان في X فإن $\bar{A} = X$ (2)

وبالتالي: $(X\setminus A)^\circ = X\setminus \bar{A} = X\setminus X = \phi$ (3)

فالقضية صحيحة

2. $\mathcal{S} = \{\{a,c\},\{b,c\},X\}$

نلاحظ أن $\{a,c\}\cap\{b,c\}=\{c\}$ والمجموعة $\{c\}$ لا تكتب على شكل اجتماع لعناصر $\mathcal{S}$ (3)

فالأسرة $\mathcal{S}$ لا تشكل قاعدة لتبولوجيا ما على X والقضية خاطئة (2)

3. لنأخذ $T\in\tau$ مجموعة مفتوحة كيفية (1)

إن $f(T)\subseteq Y \Leftrightarrow f(T)\in P(Y)=\tau^*$ (3)

أي أن الصورة أي مجموعة مفتوحة في (X,τ) وفق f هي مجموعة مفتوحة في (Y,τ^*) فالتابع مفتوح والقضية صحيحة (2)

4. $V(a)=\{v\in P(X): v \text{ مجاور لـ } a\}$

$X\in V(a),\ \forall a\in X \quad (a\in \underset{\tau}{X}\subseteq X)\Rightarrow V(a)\neq\{\}$ (1)

$a\notin\phi \Rightarrow \phi\notin V(a)$

$\forall v_1,v_2\in V(a) \Leftrightarrow \exists T_1,T_2\in\tau:$

$x\in T_1\subseteq v_1$ و $x\in T_2\subseteq v_2 \Rightarrow x\in T_1\cap T_2\subseteq v_1\cap v_2$ (2)

بما أن $T_1\cap T_2\in\tau \Rightarrow v_1\cap v_2\in V(a)$

$\forall A\in P(X): \exists v_0\in V(a): v_0\subseteq A:$ (2)

$v_0\in V(a) \Leftrightarrow \exists T\in\tau: a\in T\subseteq v_0\subseteq A \Rightarrow a\in T\subseteq A \Rightarrow A\in V(a)$

$V(a)$ تعرف ترسية على X

5. نلاحظ أنه من أجل 2 و كل $x \in \mathbb{N}$ بحيث $x \neq 2$

إن أي مجموعة مفتوحة تضم x تحتوي 2 حسب تعريف الأسرة τ

إذن لا توجد T_x تحقق $x \in T_x$ و $2 \notin T_x$ (5)

فالفضاء لا يمكن أن يكون T_1

السؤال الرابع $\boxed{30}$

$$f : (\mathbb{R}, \tau_{cof}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{|\cdot|})$$

$$f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(b_1) نلاحظ أن $T =]0,1[$ مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{R}, \tau_{|\cdot|})$ لأنها مجال مفتوح

وحسب تعريف f يكون $f^{-1}(T) = T$ (5)

نلاحظ أن $\mathbb{R}\setminus T \notin \tau_{cof}$ لأن $\mathbb{R}\setminus T =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ مجموعة غير منتهية

أي أنه وجدت مجموعة مفتوحة في المستقر صورتها العكسية وفق f ليست مفتوحة في المنطلق

فإذاً f ليس مستمراً على $\mathbb{R}$ (5)

(b_2) مرشحة فرشيت المرفقة على $\mathbb{R}$ هي الأسرة

(5) $\mathcal{M} = \{T \in P(\mathbb{R}) : \mathbb{R}\setminus T \text{ منتهية}\}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall v \in V(x) \Leftrightarrow \exists T \in \tau_{cof} : x \in T \subseteq v$ (1)

بما أن $T \subseteq v \Leftrightarrow \mathbb{R}\setminus v \subseteq \underbrace{\mathbb{R}\setminus T}_{\text{منتهية}} \Rightarrow \mathbb{R}\setminus v$ (2)

مجموعة منتهية كيف تعريف $\mathcal{M}$ — لأن $T \in \tau_{cof}$

نستنتج أن $v \in \mathcal{M}$ (1)

(1) بمراعاة الاختيار الكيفي لـ v من $V(x)$ نستنتج أن $V(x) \subseteq \mathcal{M}$

$\mathcal{M}$ متقاربة عند x وحيث x نقطة كيفية من $\mathbb{R}$ فإن $\mathcal{M}$ متقاربة

عند كل نقطة من الفضاء $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ (1)

(b_3) طريقة (أ) $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ ليس فضاء T_2 لأنه وجدت مرشحة معرفة

عليه هي مرشحة فرشيت متقاربة منه لأكثر من نقطة من نقاط (10)

طريقة ② لتكن $x \neq y$ حيث $x, y \in \mathbb{R}$ كيفية

نفرض جدلاً أن $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ فضاء T_2 ①

هذا يعني وجود مجموعتين مفتوحتين T_x , T_y تحققان ④

$T_x \cap T_y = \phi$ و $y \in T_y$ و $x \in T_x$

بالتالي $T_x \subseteq \underbrace{\mathbb{R} \setminus T_y}$ $\Leftarrow$ T_x منتهية ومنه

② منتهية لأن $\mathbb{R} \setminus T_x$ غير منتهية ②

$T_y \in \tau_{cof}$ تناقض مع كون T_x من τ_{cof}

بسبب التناقض الفرض الجدلي الخاطئ

الصحيح أن $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ ليس T_2 ①

انتهى السلم

نورة العيساوي

الحل