ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

اسئلة دورات محلولة

تحليل تابعي ١

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة)

بمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

A to Z

الاسم:

العدد:

سلم التنقيط لفرض التقليل الثاني (1) للعدد سبع
لدفتاب الفصل الأول العام الدراسي ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥ م

السلم: (30 درجة)

١- الفضاء $B[a,b]$ هو فضاء الدوال المعرفة والمحدودة على المجال الحقيقي $[a,b]$ أي: $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (3)

$B[a,b] = \{x ; x = x(t) \text{ و } \exists k > 0 ; |x(t)| < k \ ; \forall t \in [a,b]\}$

و المعرف عليه المسافة d وفقا للعلاقة التالية:

$$d(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| \ ; \forall x = x(t), y = y(t) \in B[a,b]$$

٢- المتباينة الثلاثية: ليكن p عددا ما $p \geq 1$ و لنعرف العدد q بالعلاقة: (3)

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (*) عندئذ ندعو العددين p و q المتباينين وفق العلاقة (*) بالمتباينة الثلاثية

٣- فضاء باناخ: هو فضاء منظم وتام بالنسبة للمسافة المولدة بالنظيم المعرف (3)

٤- الفضاء التام: هو فضاء متري كل متتالية كوشي فيه متقاربة إلى نقطة منه. (3)

٥- شرط المتتالية المتقاربة: ليكن X فضاء منظم و $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية من X (2)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} ; \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|x_n - a\| < \varepsilon$$

٦- يكون المؤثر العكسي للمؤثر T موجود إذا كانت T متباينا في الفضاء المنظم X (3)

٧- الشرط اللازم والكافي حتى يكون الفضاء المنظم منته البعد X متراصا هو: (3)

أن تكون X مجموعة مغلقة ومحدودة

٨- المسافة الأولى: $d(x+z, y+z) = d(x,y) \ ; \forall x,y,z \in X$ (4)

المسافة الثانية: $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y) \ ; \forall \alpha \in K \ \text{و} \ \forall x,y \in X$

٩- $\|T\|$ هو: نظيم المؤثر الخطي المحدود $T : D(T) \subset X \longrightarrow R(T) \subset Y$ حيث X و Y فضاءان فيثاغوريان معرفان فوق نفس الحقل ويعطى بالعلاقة: (3)

$$\|T\| = \sup_{x\in D(T)} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

١٠- يكون الفضاء الجزئي المنظم Y من فضاء باناخ X هو فضاء باناخ إذا كان Y مجموعة مغلقة في X (2)

(30 د. ص)

بعض المبرهنات المهمة في فضاء المنظم: نعرف المجموعة الجزئية A من المنظم X ($A \subseteq X$) مجموعة محدبة إذا كان القطع الواصل بين أي نقطتين من A محتوى بكامله في A.

- إثبات أن الكرة المغلقة في الفضاء المنظم X هي مجموعة محدبة.

لتكن: $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X ; \|x - x_0\| \leq r\}$

(أ) كرة مغلقة في الفضاء المنظم X ولنثبت أنها مجموعة محدبة في الفضاء X.

(ب) ولنأخذ القطعة المستقيمة الآتية والتي لا تخرج عن الكرة:

$x_1, x_2 \in \bar{B}(x_0, r) \Rightarrow \|x_1 - x_0\| \leq r + \|x_2 - x_0\| \leq r$

ولنبرهن أن $z \in \bar{B}(x_0, r)$; $0 \leq \alpha \leq 1$: $(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$

$$\begin{aligned}
\|z - x_0\| &= \|(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 - x_0\| \\
&= \|(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 - (1-\alpha)x_0 - \alpha x_0\| \\
&= \|(1-\alpha)(x_1 - x_0) + \alpha(x_2 - x_0)\| \\
&\leq \|(1-\alpha)(x_1 - x_0)\| + \|\alpha(x_2 - x_0)\| \\
&\leq \|1-\alpha\| \|x_1 - x_0\| + |\alpha| \|x_2 - x_0\| \\
&\leq (1-\alpha) r + \alpha r = r
\end{aligned}$$

وبالتالي $\|z - x_0\| \leq r \Rightarrow z \in \bar{B}(x_0, r)$

إذاً $\bar{B}(x_0, r)$ مجموعة محدبة في الفضاء المنظم X

السؤال الثالث: (30 درجة)

أ) التكافؤ بين النظيمات: نعرف النظيمات $\|\ \|_1$ و $\|\ \|_2$ المعرفات على الخطي X نظيمات متكافئات إذا وجد عددان موجبان a, b يحققان الشرط التالي:

$$\forall x \in X : a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$$

ثانياً: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i \cdot 1| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \cdot \|x\|_2$

حسب متباينة هولدر للحالة المنتهية البعد

$\|x\|_1 \leq 2 \cdot \|x\|_2$ (1)

(2) أ) أثبت أن $\|x\|_2 \le \|x\|_1$ حيث $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ يكتب على الشكل $x = \sum_{i=1}^{4} x_i e_i$ في القاعدة العادية :

$e_1 = (1,0,0,0)$ ، $e_2 = (0,1,0,0)$ ، $e_3 = (0,0,1,0)$ ، $e_4 = (0,0,0,1)$

$$\|x\|_2 = \left\|\sum_{i=1}^{4} x_i e_i\right\|_2 \le \sum_{i=1}^{4} \|x_i e_i\|_2 = \sum_{i=1}^{4} |x_i| \|e_i\|_2 \le \sum_{i=1}^{4} |x_i| = \|x\|_1 \Rightarrow$$

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \quad (II)$$

ب) من (I) و (II) نجد أن : $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le 2\|x\|_2$

(2) بالتالي $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ نظيمان متكافئان على $\mathbb{R}^4$

ملاحظة : جميع التمارين والأسئلة الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل ، وجميع تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

طرطوس في 14/12/2015

مدرسة الطور . أم د . عائشة علي

A to Z

سلم التصحيح لطارة المثيل التابعي (1) لطلاب سنة ثالثة
لدقائق المدة التكميلية للسداسي الرابع ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤

التمرين 1: (30 درجة)

1- فضاء المتتاليات S هو فضاء جميع المتتاليات المحدودة وغير المحدودة والتي حدودها أعداد عقدية أي:

$$S=\{x; x=(\xi_1,\dots,\xi_n,\dots)=(\xi_n)_{n\geq 1} \text{ حيث } \xi_n\in\mathbb{C}; n=1,2,\dots\}$$

والمعرف عليه المسافة d وفق العلاقة التالية:

$$d: S\times S \longrightarrow \mathbb{R}^+\cup\{0\}$$

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|};\ \forall x=(\xi_n)_{n\geq 1}, y=(\eta_n)_{n\geq 1}\in S$$

2- الأسس المترافقين: ليكن p عددا ما $p\geq 1$ ولنرمز للعدد q بالعلاقة (*)

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad (*)$$

نسمي العددين p و q المرتبطين وفق العلاقة (*) بالأسسين المترافقين. ليكن ℓ^p فضاء المتتاليات المتقاربة مع فضاء المتتاليات ℓ^q مترافق مع ℓ^p

3- متراجحة هولدر للمجاميع لما:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n\eta_n|\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^q\right)^{\frac{1}{q}};\ \forall x=(\xi_n)_{n\geq 1}, y=(\eta_n)_{n\geq 1}\in\ell^p$$

4- في الفضاء ℓ^p بأن $p\geq 1$ يسمى الفضاء المرافق له ℓ^q و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

5- الفضاء غير التام: ندعو الفضاء المتري $X=(X,d)$ فضاء غير تام إذا وجدت على الأقل كوشي غير متقاربة في هذا الفضاء.

6- المؤثر العكسي: إذا كان: $T: D(T)\subseteq X\longrightarrow R(T)\subseteq Y$ مؤثرا تقابليا حيث X و Y فضاءان متجهان وفي هذه الحالة نقول أنه يوجد المؤثر العكسي:

$$T^{-1}: R(T)\subseteq Y\longrightarrow D(T)\subseteq X$$

للمؤثر T والذي ينقل كل عنصر y_0 من $R(T)$ إلى العنصر $x_0\in D(T)$ بحيث يكون $y_0=Tx_0$ أي $x_0=T^{-1}y$

7- يكون التابع الخطي f محدودا إذا تحقق الشرط التالي:

$$\exists C\in\mathbb{R}^+ \text{ و } C\geq 0 \text{ و } |f(x)|\leq C\|x\|;\ \forall x\in D(f)$$

8- الشرط اللازم والكافي حتى يكون الفضاء المتظم منتهي البعد X متراص هو أن يكون X مجموعة مغلقة ومحدودة.

9- الشرط اللازم والكافي حتى يكون المؤثر الخطي T متراصا هو أن يكون:

10- ندعو كل تطبيق $T: X\longrightarrow Y$ حيث X و Y فضاءان متجهان معرفان فوق نفس الحقل K مؤثرا بينما ندعو كل مؤثر:

A to Z

$f: X \longrightarrow$ حيث X فضاء خطي معرف فوق الحقل K و f دالي هو مؤثر ولكن ليس كل مؤثر هو دالي.

يكون الفضاء الجزئي المنظم Y من فضاء باناخ X هو فضاء باناخ إذا كانت Y مجموعة مغلقة في X.

س1: (30 درجة)

البرهان إن الفرض X فضاء منظم منته البعد ولنفرض أن $n = \dim X < \infty$

وأن $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ قاعدة لـ X عندئذ أي عنصر $x \in X$

يكتب بالشكل: $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

وليكن T مؤثر خطي معرف من X ولنبرهن أن T محدود بما أن T خطي وبالتالي فإن:

$$\|Tx\| = \|T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i)\| = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Te_i\| \le \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|Te_i\|$$

(15)

$$\le \max_{1 \le k \le n} \|Te_k\| \cdot \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

$$\le \max_{1 \le k \le n} \|Te_k\| \frac{1}{c} \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| = \max_{1 \le k \le n} \|Te_k\| \frac{1}{c} \|x\|$$

حسب توطئة الصيغة

$$\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| \ge c(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|) \Rightarrow \frac{1}{c} \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| \ge \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

$\|x\|$

أي أن: $\|Tx\| \le \gamma \|x\|$ و $\gamma > 0$ (15)

حيث $\gamma = \frac{1}{c} \max_{1 \le k \le n} \|Te_k\|$

$\Leftarrow T$ محدود

س2: (30 درجة)

نقول عن النظيمين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ أنهما متكافئان إذا وجد عددان حقيقيان a, b بحيث تتحقق المتراجحة التالية:

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; a\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le b\|x\|_2$$ (15)

لدينا $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |x_i| = \sum_{i=1}^{3} |x_i| \cdot 1 \leq \left(\sum_{i=1}^{3} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} 1^2\right)^{\frac{1}{2}}$

حسب متباينة كوشي للمجاميع المنتهية

$$\Rightarrow \boxed{\|x\|_1 \leq \sqrt{3} \cdot \|x\|_2} \quad (I)$$

وكذلك لدينا $\|x\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{3} x_i e_i \right\|_2 \leq \sum_{i=1}^{3} |x_i| \|e_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^{3} |x_i| = \|x\|_1$

$$\Rightarrow \boxed{\|x\|_2 \leq \|x\|_1} \quad (II)$$; $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$

$e_3 = (0,0,1)$

(15)

من المتباينتين (I) و (II) نجد أن:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{3} \cdot \|x\|_2$$

حيث أن $a = 1$ و $b = \sqrt{3}$ وبالتالي التكافؤ $\|\|_1$, $\|\|_2$ متكافئتان

ملاحظة: جميع التمارين والمسائل الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس النقطة المخصصة لها في سلم التصحيح

أطروحة في 2024/9/12

مدرسة الجزائر: وعائدة صائمة

A to Z

الجمهورية العربية السورية امتحان التحليل التابعي (1) المدة: ساعتان
جامعة طرطوس لطلاب السنة الرابعة_رياضيات الدرجة العظمى: 90درجة
كلية العلوم الفصل الثاني اسم الطالب:

****

السؤال الأول: (30 درجة)

أكمل العبارات التالية

1- فضاءالمتتاليات S هو..... 2- الأسين المتراففين هما .....
3- متراجحة هولدر للمجاميع هي..... 4-الفضاء غير التام.....
5- المؤثر العكسي هو ..... 6- يكون الدالي الخطي محدود إذا .....
7- الشرط اللازم والكافي حتى يكون الفضاء المنظم منته البعد X متراص هو.....
8- الشرط اللازم والكافي حتى يكون المؤثر الخطي T مستمراً هو.....
9- الفرق بين الدالي والمؤثر هو.....
10- يكون الفضاء الجزئي المنظم Y من فضاء باناخ X هو فضاء باناخ إذا كان.....

السؤال الثاني: (30 درجة):

برهن النظرية التالية.

إذا كان X فضاء منظم منته البعد فإن كل مؤثر خطي معرف على X يكون محدوداً.

السؤال الثالث: (30درجة)

في الفضاء R^4 لنعرف النظيمين التاليين : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{4}|x_i| = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$ ،

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{4}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ والمطلوب برهن أن: $\|x\|_1$ و $\|x\|_2$ نظيمان متكافئان.

**********انتهت الأسئلة**********

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق
د. عائدة صائمة

طرطوس في 2024/8/3م

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة التحليل التابعي (1) لطلاب سنة رابعة
لدورتي الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤م

حل: (30 درجة)

1- فضاء المتتاليات S هو فضاء جميع المتتاليات المحدودة وغير المحدودة التي حدودها أعداد عقدية أي:
$$S=\{x;\ x=(\xi_1,\dots,\xi_n,\dots)=(\xi_n)_{n\geq 1}\ /\ \xi_n\in\mathbb{C};\ n=1,2,\dots\}$$
المعرف عليه المسافة d وفق العلاقة التالية:
$$d:S\times S\longrightarrow \mathbb{R}^+\cup\{0\}$$
$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|};\ \forall x=(\xi_n)_{n\geq 1}, y=(\eta_n)_{n\geq 1}\in S$$

2- الأسس المترافقين: ليكن p عددًا حقيقيًا بحيث $1\leq p$ نسمي العدد q بالعلاقة $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (*) نسمي العددين p و q المرتبطين وفق العلاقة (*) بالأسس المترافقين (أسس فضاء المتتاليات ℓ^p مترافق مع فضاء المتتاليات ℓ^q).

3- متراجحة هولدر للمجاميع لـ: $\forall x=(\xi_n)_{n\geq 1}, y=(\eta_n)_{n\geq 1}\in \ell^p$
$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n\eta_n|\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

4- الفضاء غير التام: نسمي الفضاء المتري $X=(X,d)$ فضاء غير تام إذا وجدت متتالية واحدة على الأقل كوشي غير متقاربة في هذا الفضاء.

5- المؤثر العكسي: إذا كان $T:D(T)\subseteq X\longrightarrow R(T)\subseteq Y$ مؤثرًا خطيًا متباينًا حيث X و Y فضاءان نظيمان وفي هذه الحالة نقول أنه يوجد المؤثر العكسي:
$$T^{-1}:R(T)\subseteq Y\longrightarrow D(T)\subseteq X$$
للمؤثر T والذي ينقل كل عنصر y_0 من $R(T)$ إلى العنصر $x_0\in D(T)$ بحيث يكون $x_0=T^{-1}y$ أي $y_0=Tx_0$

6- يكون التابع الخطي f محدودًا إذا وجد $c>0$ بحيث $c\in\mathbb{R}$ و $|f(x)|\leq c\|x\|$ $\forall x\in D(f)$

7- الشرط اللازم والكافي حتى يكون الفضاء النظيم منتهي البعد X هو أن يكون X مجموعة مغلقة ومحدودة.

8- الشرط اللازم والكافي حتى يكون المؤثر الخطي T مستمرًا هو أن يكون

9- نسمي كل تطبيق

$T:X\longrightarrow Y$ حيث X و Y فضاءان نظيميان معرفان

$f: X \longrightarrow K$ حيث X فضاء خطي سرمث فوق الحقل K و دالي
إذا كل دالي هو مؤثر و لكن ليس كل مؤثر هو دالي .

1- يكون الفضاء الجزئي المنظم Y من فضاء بانا خ X هو فضاء بانا خ
إذا كانت Y مجموعة مغلقة في X .

س: (30 درجة)

البرهان: نفرض X فضاء منظم منته البعد ولنفرض أن $\dim X = n < \infty$
و أن $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ قاعدة لـ X عندئذ أي عنصر $x \in X$
يكتب بالشكل: $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$
وليكن T مؤثر خطي كيفي معرف على X ولنبرهن أن T محدود
بما أن T خطي وبالتالي فإن:

$$\|Tx\| = \|T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i)\| = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Te_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|Te_i\|$$

$$\leq \max_{1 \leq k \leq n} \|Te_k\| \cdot \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

$$\leq \max_{1 \leq k \leq n} \|Te_k\| \frac{1}{c} \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| = \max_{1 \leq k \leq n} \|Te_k\| \frac{1}{c} \|x\|$$

حسب توطئة الزاكيباد

حيث c

$$\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| \geq c(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|) \Rightarrow \frac{1}{c} \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| \geq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

$\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| = \|x\|$

أي أن: $\|Tx\| \leq \gamma \|x\|$ و $\gamma > 0$

حيث $\gamma = \frac{1}{c} \max_{1 \leq k \leq n} \|Te_k\|$

$\Leftarrow T$ محدود

س2: (30 درجة)

نقول عن النظمين $\|\ \|_1$ و $\|\ \|_2$ أنهما متكافئان إذا وجد عددان حقيقيان موجبان a و b بحيث تتحقق المتراجحة التالية:

$$a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2 \quad ; \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$$

مكتبة A to Z

$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$\Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \Rightarrow X'' - \lambda X = 0 \quad \& \quad Y'' + \lambda Y = 0$

$u(0,y) = f(y) = X(0)\,Y(y)$

$u(a,y) = X(a)\,Y(y) = 0 \Rightarrow X(a) = 0$ (≠0)

$u(x,0) = X(x)\,Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$ (≠0)

$u(x,b) = X(x)\,Y(b) = 0 \Rightarrow Y(b) = 0$ (≠0)

نحو حلول

(1) $Y'' + \lambda Y = 0$

(2) $\lambda = 0 \Leftarrow Y = Ay + B$

اكبر الصفر بعرفها $\begin{cases} Y(0) = B = 0 \\ Y(b) = Ab = 0 \Rightarrow A = 0 \end{cases} \Leftarrow$ غير $A = B = 0 \Leftarrow Y(0) = Y(b) = 0$

(3) $\lambda < 0 \quad Y(y) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\,y} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\,y}$

$\lambda > 0$

$m^2 + \lambda = 0 \Leftarrow m^2 = -\lambda \Leftarrow m = \pm\sqrt{\lambda}$

$Y(y) = A\cos\sqrt{\lambda}\,y + B\sin\sqrt{\lambda}\,y$

$Y(0) = A = 0$

$Y(b) = B\sin\sqrt{\lambda}\,b = 0 \quad (B \neq 0) \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\,b = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{b} \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$

(5) $n \in \mathbb{N}$

$Y_n(y) = B\sin\frac{n\pi y}{b}$

$X'' - \lambda X = 0 \quad m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{\lambda}$

(6) $X_n(x) = A_n\cosh\frac{n\pi x}{b} + B_n\frac{n\pi x}{b}$

$X_n(x) = A_n\cosh\frac{n\pi}{b}(x-a) + B_n\sinh\frac{n\pi}{b}(x-a)$ $\quad n \in \mathbb{N}$

نعوض بالشرط

(5) $X(a) = 0 \quad \begin{cases} X_n(a) = A_n\underbrace{\cosh 0}_{1} + B\underbrace{\sinh 0}_{0} \\ \Rightarrow A_n = 0 \end{cases}$

$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sinh\frac{n\pi}{b}(x-a)\sin\frac{n\pi y}{b}$ (4), $u(0,y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sinh\frac{-n\pi}{b}a\,\sin\frac{n\pi y}{b}$ (5)

$C_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy \Rightarrow B_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy\,\left(\sinh\frac{-n\pi a}{b}\right)^{-1}$

A to Z مكتبة

لدينا $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |x_i| = \sum_{i=1}^{4} |x_i| \cdot 1 \leq \left(\sum_{i=1}^{4} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{4} 1^2\right)^{\frac{1}{2}}$

حسب متراجحة كوشي للمجاميع المنتهية

$$\Rightarrow \boxed{\|x\|_1 \leq \sqrt{4} \cdot \|x\|_2} \quad (I)$$

وكذلك لدينا $\|x\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \right\|_2 \leq \sum_{i=1}^{4} |x_i| \|e_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^{4} |x_i| = \|x\|_1$

$$\Rightarrow \boxed{\|x\|_2 \leq \|x\|_1} \quad (II)$$

(15)

$e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$

$e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$

من المتراجحتين (I) و (II) نجد أن:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{4} \cdot \|x\|_2$$

حيث أن $a = 1$ و $b = \sqrt{4}$ وبالتالي لتظهير $\|\|_1$ و $\|\|_2$ متكافئتان

ملاحظة: جميع التمارين والمسائل الواردة في سلم التصحيح هذا، كذلك طريقة رياضية الحل وجميع تأفف نفس الدقة المعتمدة في سلم التصحيح

A to Z مكتبة

تم الحل في 2024/8/3

مدرسة الغد: وعائدة صالحة

الجمهورية العربية السورية امتحان التحليل التابعي (1) المدة: ساعتان
جامعة طرطوس لطلاب السنة الرابعة ـ رياضيات الدرجة العظمى:90
كلية العلوم الفصل الأول اسم الطالب:

****

السؤال الأول: (50 درجة)

أولاً: وضح بمثال كل مما يلي

1- إذا كانت $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية متقاربة في فضاء متري ما (X,d) فليس من الضروري أن تكون متقاربة في فضاء متري آخر.
2- ليس من الضروري أن تكون كل مسافة معرفة على فضاء متري مولدة من نظيم .
3- ليست كل متتالية محدودة في فضاء متري لكوشي في هذا الفضاء.
4- الفضاء الجزئي المنظم من فضاء باناخ ليس من الضروري أن يكون لباناخ.

ثانياً: اكتب دلالة وتعريف كل من الرموز والمصطلحات التالية:

$C[2,3]$ ، L^{∞} ، $\|f\|$ ، $R(T)$ ، العددان المترافقان ، متراجحة منكوفسكي للمجاميع ، الفضاء المتراص ، النظيمان غير المتكافئان.

السؤال الثاني: (20درجة)

ليكن المؤثر $T:\ell^1\to\ell^1$ معرفاً بالشكل التالي:
$T(x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots)=(5x_1,x_2,x_3+x_4,x_4,\ldots)$ والمطلوب أثبت أن المؤثر T خطي ومحدود ثم أوجد نظيمه.

السؤال الثالث: (20 درجة)

أثبت صحة النظرية التالية:

إذا كان: $f:D(f)\to K$ دالي خطي ، حيث $D(f)\subset X$ و X فضاء منظم و K الحقل العددي للفضاء X ، عندئذ فإن الشرط اللازم والكافي حتى يكون f مستمراً هو أن يكون محدوداً

**********انتهت الأسئلة**********

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق.
د. عائدة صائمة

طرطوس في 2024/2/5م

A to Z مكتبة

عرطوس

لعلوم سلم تصحيح مقرر تحليل تابعي (1) لطلاب سنة ـ
لدمتان الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠٢٣ ـ ٢٠٢٤م

سؤال الأول: (50 درجة)

الحل: الطلب الأول:

١- إذا أخذنا المتتالية التي حدها العام $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ من نمط الفضاء الخطي $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ فإن حد المتتالية متقارب في هذا الفضاء لأن $n = 1, 2, \ldots$

$$x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \in \mathbb{R}$$

بينما نفس المتتالية من نمط الفضاء الخطي $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ليست متقاربة في هذا الفضاء لأن:

$$x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \notin \mathbb{Q}$$

٢- إذا أخذنا المسافة d المعرفة على الفضاء المتري (X, d) حيث d معرفة بـ $d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases}$ ، $x, y \in X$

حيث أن d تحقق فاضي توطئة لتتغير في الاتجاهين وهما:

$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \quad ; \forall \alpha \in K \text{ و } \forall x, y \in X$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x,y)$$

ولكن ذلك من أجل $\alpha = 3$ وعندما $x \neq y$ فإن الخاصة الثانية

$$d(x, \alpha y) = d(3x, 3y) = 1 \neq |\alpha|\, d(x,y) = 3\, d(x,y) = 3$$

غير محققة وبالتالي d مسافة غير مولدة على X.

٣- إذا أخذنا في الفضاء الخطي الحقيقي $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ المتتالية التي حدها العام $x_n = (-1)^n$ هذه المتتالية محدودة في هذا الفضاء لأن مجموعة حدودها $\{-1, +1\}$ مجموعة محدودة في الفضاء $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ولكنها ليست متقاربة في هذا الفضاء لأن

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} d(x_n, x_m) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} |(-1)^n - (-1)^m| = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} |1-(-1)| = 2 \neq 0$$

حيث m عدد زوجي و n عدد فردي

٤- إذا أخذنا الفضاء المنظم الحقيقي $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ وهو لناظم فإن الفضاء الخطي المنظم منه $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ و $]0,1[$ ليست لناظم لأن $]0,1[$ محدبة غير مغلقة في هذا الفضاء $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

الطلب الثاني:

١- $[2,3] \in \mathbb{RP}$ نعتبر الدوال الحقيقية الحدية المستمرة على المجال $[2,3]$ والتابعة لمتحول حقيقي واحد مستقل هو t أي $x = x(t)$

والمعرف عليه المسافة d بالشكل التالي:

مكتبة A to Z

$d : C[2,3] \times C[2,3] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$d(x,y) = \max_{2\le t\le 3} |x(t)-y(t)| \; ; \forall x = x(t) \wedge y = y(t) \in C[2,3]$

L^∞ : وهو فضاء جميع المتتاليات العددية المحدودة أي :

$L^\infty = \{x ; x = (\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_n)_{n\ge 1} \wedge \xi_n \in \mathbb{C} ; n = 1,2,\dots \wedge \exists c_x \in \mathbb{R}^+ ; |\xi_n| \le c_x\}$

والمعرف عليه الدالة d بالشكل التالي :

$d : L^\infty \times L^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n - \eta_n| \; ; \forall x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in L^\infty$

$y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in L^\infty$

٣- $(L^\infty, \|\cdot\|)$ فضاء ناظمي الدالة الناظم المحدود : $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{K}$ والمعطى بالعلاقة

$\|f\| = \sup_{\substack{x\in D(f)\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$

٤- $R(T)$: وهي مدى المؤثر : $T : X \longrightarrow R(T) \subseteq Y$ الخطية تقبل

٥- الأعداد المرافقة : ليكن p عددًا ما و $p > 1$ ، ولنعرف العدد q بالعلاقة

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (*)

ندعو العددين p و q المرتبطة وفق العلاقة * بالأسس المرافقين

(فضاء المتتاليات ℓ^p سنرمز به لفضاء المتتاليات ℓ^q).

٦- متراجحة منكوفسكي للجوامع :

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

حيث $x = (\xi_j)_{j\ge 1}$ ، $y = (\eta_j)_{j\ge 1}$ عنصران من الفضاء ℓ^p و ℓ^q

٧- الفضاء المتراص : ندعو الفضاء المتري (المنظم) X فضاءً متراصًا إذا احتوت كل متتالية في X متتالية جزئية متقاربة إلى نقطة في X

٨- النظيمان غير المتكافئان : ندعو النظيمان $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ المعرفان على الفضاء الخطي X نظيمان غير متكافئان إذا وجدت نقطة واحدة على الأقل x في X بحيث تكون العلاقة التالية غير محققة :

$$a\|x\|_0 \le \|x\| \le b\|x\|_0 \; ; \forall a,b > 0$$

مكتبة A to Z

الثاني: (20 درجة)

1) T خطي لأن:

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \in \ell^1$ و $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots) \in \ell^1$

$$T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) + \beta(y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots))$$
$$= T(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_4 + \beta y_4, \ldots)$$
$$= (5(\alpha x_1 + \beta y_1), \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3 + \alpha x_4 + \beta y_4, \alpha x_4 + \beta y_4, \ldots)$$
$$= \alpha(5x_1, x_2, x_3 + x_4, x_4, \ldots) + \beta(5y_1, y_2, y_3 + y_4, y_4, \ldots)$$
$$= \alpha T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) + \beta T(y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots)$$
$$= \alpha Tx + \beta Ty$$

(1)

T محدود: T محدود إذا تحقق الشرط: $\exists c \in \mathbb{R}, c > 0; \|Tx\| \leq c\|x\|; \forall x \in \ell^1$

$$\|Tx\| = \|T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)\| = \|(5x_1, x_2, x_3 + x_4, x_4, \ldots)\|$$
$$= |5x_1| + |x_2| + |x_3 + x_4| + |x_4| + \ldots$$
$$\leq 5|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_4| + \ldots$$
$$\leq 4|x_1| + |x_4| + |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + \ldots$$
$$\leq 4|x_1| + |x_4| + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$$
$$\leq 5 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$$
$$\leq 5 \|x\|, \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \in \ell^1$$

(4)

والشرط يحقق أي الشرط:

$$\exists c = 5 > 0; \|Tx\| \leq c\|x\|; \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \in \ell^1$$

(2)

وبالتالي T محدود.

لحساب $\|T\|$: لدينا من الطلب السابق:

$$\|Tx\| \leq 5\|x\|$$

وبقسمة طرفي المتباينة على $\|x\| \neq 0$ نجد أن:

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq 5; \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \in \ell^1$$
$$\forall x \neq 0$$

وبما أن الطرف الأيسر يحقق المتباينة لكل عناصر x من ℓ^1

A to Z مكتبة

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\neq 0 \\ x\in \ell^1}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq 5 \Rightarrow \boxed{\|T\| \leq 5} \quad (I)$$ (4)

نأخذ $x = x_0 = (1,0,0,0,\dots) \in \ell^1$ والتعويض في المتراجحة :

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\| \quad \text{نجد أن :}$$

$$\frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|} = \frac{\|T(1,0,0,0,\dots)\|}{\|(1,0,0,0,\dots)\|} = \frac{\|(5,0,0,0,\dots)\|}{} = 5 \leq \|T\|$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\|T\| \geq 5} \quad (II)$$

$$\Rightarrow \|T\| = 5$$

إذن I) و II) نجد أن :

مكتبة A to Z

السؤال الثالث : (5 درجات)

البرهان : لدينا الشرط : الفرض : f دالي خطي غير

الطلب : f محدود

البرهان : نفرض جدلاً أن الدالي الخطي f غير محدود عندئذ توجد متتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ من فضاء $D(f)$ بحيث يكون :

$$|f(x_n)| > n\|x_n\| \quad ; n = 1,2,\dots$$

أي إذا وضعنا $u_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ حيث $n = 1,2,\dots$ عندئذ نجد أن :

$$\|u_n - 0_X\| = \|u_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|x_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

أي أن : $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0_X$ ، لكن :

$$|f(u_n)| = \left|f\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right)\right| = \frac{1}{n\|x_n\|}|f(x_n)| > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1$$

ومن هنا نستنتج أن : $n = 1,2,\dots$ (9)

$$f(u_n) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} f(0_X) = 0_Y$$

أي أن f غير مستمر، لكن هذا مخالف لما افترضناه في f دالي خطي و T محدود

كتابة الشرط : الفرض : f دالي خطي غير

الطلب : f مستمر

البرهان : لكي نثبت كيفية ما $D(f)$ و $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية كيفية من $D(f)$ بحيث أن $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ عندئذ يكون لدينا :

$$\leq |f(x_n)-f(x)| = |f(x_n-x)| \leq c\cdot\|x_n-x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

وبالتالي : $f(x_n) \xrightarrow[n\to a]{} f(x)$ أي f مستمرة عند النقطة

النقطة x وبالتالي f مستمرة .

ملاحظة : جميع الأسئلة الواردة في سلم التصحيح ليست الطريقة الوحيدة للحل وعليه نأخذ بعين الاعتبار الطريقة الخاصة في سلم التصحيح

لهرطوس في ع/ع/ ٢٠٢٢

مدرس المادة : عائشة صبانة

مكتبة A to Z

عائشة صبانة

مصححة الجزء الأول

جامعة طرطوس
كلية العلوم

حل إمتحان مادة التحليل الرياضي (1) لطلاب السنة الثانية رياضيات
لدورة الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠٢٢ - ٢٠٢٣

السؤال الأول: (30 درجة)

أ) لتكن f دالة على $C[3,7]$ حيث:

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \ \forall x,y \in C[3,7]:$$
$$f(\alpha x+\beta y)=(\alpha x+\beta y)(t_1)=(\alpha x)(t_1)+(\beta y)(t_1)$$
$$=\alpha x(t_1)+\beta y(t_1)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

f خطية. لإثبات أن f محدودة يجب أن نثبت تحقق الشرط التالي:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \text{ ث } \forall x \in C[3,7]: |f(x)| \le c\cdot\|x\|$$

لدينا $|f(x)|=|x(t_1)|\le \max_{3\le t\le 7}|x(t)|=\|x\|$

أي أن: $|f(x)|\le \|x\| \quad (*)$

وبوضع $c=1$ نجد أن الشرط التالي متحقق:

$$\exists c=1 \text{ ؛ } |f(x)|\le 1\cdot\|x\| \ ; \ \forall x\in C[3,7]$$

ومنه f محدودة.

ب) لحساب $\|f\|$ نعتمد المتراجحة $(*)$ نجد أن:

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|}\le 1$$

وبأخذ الحد الأعلى لكلا طرفي المتراجحة الأخيرة من أجل $x\in C[3,7]$ و $x\neq 0$ نجد أن:

$$\|f\|=\sup_{x\in C[3,7]}\frac{|f(x)|}{\|x\|}\le 1$$

أي أن: $\|f\|\le 1 \quad (I)$

من جهة أخرى من المتراجحة التالية:

$$|f(x)|\le \|f\|\cdot\|x\|$$

نحصل على المتراجحة التالية:

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|}\le \|f\|$$

وبوضع $x=x_0=1$ وتعويض في المتراجحة الأخيرة نجد أن:

$$\|f\|\ge \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}=\frac{1}{1}=1 \Rightarrow \|f\|\ge 1 \quad (II)$$

من (I) و (II) نجد أن: $\|f\|=1$

السؤال الثاني: (30 درجة)

إذا كان (X,d) فضاءً متريًا فإن:

أ) كل متتالية متقاربة في X محدودة وحيدة النهاية.

ب) إذا كانت $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتان في X بحيث أن:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \text{و} \quad y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$$

عندئذٍ فإن: $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=d(x,y)$

A to Z

البرهان: أولاً: لنبرهن أن المتتالية المتقاربة في X محدودة ومن أجل ذلك لنفرض أن $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية نقط الفضاء المتري X متقاربة نحو النقطة $x \in X$، لنبرهن أن $(x_n)_{n\geq 1}$ محدودة في X.

بما أن: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$، وبالتالي بالشرط التالي محقق

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

ونفرض $\varepsilon = 1$ $\Leftarrow$ إذن $d(x_n, x) < 1$ وبالتالي هذا يعني أن جميع حدود المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ تقع ضمن الكرة المفتوحة $B(x,1)$ ما عدا عدد منته فرط، لتكن:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}$$

الذي نفرض أن:

$$a = \max\{d(x_1, x), d(x_2, x), \ldots, d(x_{n_0-1}, x)\}$$

وبالتالي يكون

$$d(x_n, x) < 1 + a$$

وبالتالي جميع حدود المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ تقع ضمن كرة مفتوحة، بالتالي $(x_n)_{n\geq 1}$ محدودة.

لنبرهن الآن أن نهاية المتتالية المتقاربة $(x_n)_{n\geq 1}$ في X وحيدة، من أجل ذلك لنفرض أن

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \Leftarrow d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \Leftarrow d(x_n, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وبالتالي حسب متراجحة المثلث فإن:

$$0 \leq d(x,y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$$

وبأخذ النهاية في أطراف المتراجحة السابقة نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} d(x,y) = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

وبالتالي المتتالية المتقاربة $(x_n)_{n\geq 1}$ نهايتها وحيدة في X

ثانياً: لدينا: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$، $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$، بأن x_n, y_n, x, y نقاط الفضاء المتري X، وبالتالي فإن المتراجحة التالية محققة:

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

وبالتالي:

$$d(x_n, y_n) - d(x,y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \quad (1)$$

وبنفس الطريقة بأن: $x, x_n, y, y_n \in X$ فإن المتراجحة التالية محققة:

$$d(x,y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \Rightarrow$$

$$d(x,y) - d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

وبضرب طرفي المتراجحة السابقة بـ (-1) نجد أن:

$$d(x_n, y_n) - d(x,y) \geq -[d(x_n, x) + d(y_n, y)] \quad (2)$$

من (1) و(2) نجد أن:

$$-[d(x_n, x) + d(y_n, y)] \leq d(x_n, y_n) - d(x,y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

$$\Rightarrow 0 \leq |d(x_n, y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

A to Z

وبما أن النهاية في أطراف المتباينة الأخيرة هي أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(d(x_n,y_n)-d(x,y)\right)=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=d(x,y)$$

(3 درجات)

نبرهن على التكافؤ بين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ المعرفتين على الفضاء $\mathbb{R}^5$ بإيجاد ثابتين a و b حيث تحقق المتباينة التالية:

$$a\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le b\|x\|_2 \quad ; \quad \forall x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5$$

ليكن $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5$ عنصراً اختيارياً من $\mathbb{R}^5$

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{5}|x_i|=\sum_{i=1}^{5}|x_i|\cdot 1 \le \left(\sum_{i=1}^{5}(x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{5}1^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

حسب متباينة كوشي للمجاميع المنتهية

$$\Rightarrow \|x\|_1 \le \sqrt{5}\,\|x\|_2 \quad (I)$$

$$\|x\|_2=\Big\|\sum_{i=1}^{5}x_i e_i\Big\|_2 \le \sum_{i=1}^{5}|x_i|\,\|e_i\|_2 \le \sum_{i=1}^{5}|x_i| = \|x\|_1$$

حيث $e_1=(1,0,0,0,0)$ ، $e_2=(0,1,0,0,0)$

$e_3=(0,0,1,0,0)$ ، $e_4=(0,0,0,1,0)$

$e_5=(0,0,0,0,1)$

$$\Rightarrow \|x\|_2 \le \|x\|_1 \quad (II)$$

من (I) و (II) نجد أن:

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{5}\,\|x\|_2$$

حيث أن $a=1$ ، $b=\sqrt{5}$ عددان حقيقيان موجبان وبالتالي

$\|\cdot\|_1$ ، $\|\cdot\|_2$ نظيمان متكافئان

ملاحظة (1): جميع الأسئلة الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من إجابة صحيحة، والإجابة الصحيحة لكل سؤال في سلم التصحيح هي نفس الإجابة الموضحة في سلم التصحيح.

ملاحظة (2): السؤال الثاني، والذي فحوى المتباينات المتكافئة يحوي أكثر من إجابة صحيحة، ولم يكن مطلوباً هنا إيجاد جميع المتباينات المتكافئة بل تعتبر الإجابة صحيحة مع ذكر أي متباينتين متكافئتين (طبعاً الذي يذكر أكثر من متباينتين يأخذ علامة كاملة في سلم التصحيح).

طرطوس في 2010/8/10 م.

مدرسة المقرر: د. عائدة علي صالحة

A to Z

الجمهورية العربية السورية — امتحان التحليل التابعي (1) — المدة: ساعتان
جامعة طرطوس — لطلاب السنة الرابعة–رياضيات — الدرجة العظمى:90درجة
كلية العلوم — الفصل الثاني — اسم الطالب:

السؤال الأول: (35 درجة)

إذا كان $(X,\|.\|_1)$ و $(Y,\|.\|_2)$ فضاءين منظمين وكان $Z=X\times Y=\{(x,y);\ x\in X\wedge y\in Y\}$
وعرفنا على Z الدالة : $\|\ \|:Z\longrightarrow R$ بالشكل التالي:
$\forall z\in Z\ ;\ \|z\|=\|(x,y)\|=\|x\|_1+\|y\|_2$ ، والمطلوب:

1- تحقق أن $(Z,\|.\|)$ فضاء منظم.

2- برهن أن $z_n=(x_n,y_n)$ متقاربة من $z=(x,y)$ إذا وفقط إذا كان $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ و $y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}y$.

السؤال الثاني: (30 درجة)

ليكن $f:R^4\to R$ دالي معرف بالشكل :
$\forall\ x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4\ ;\ f(x)=x.\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$ و
$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in R^4$ عنصر ثابت من R^4 والمطلوب أثبت أن f دالي خطي ومحدود وأوجد نظيمه.

السؤال الثالث:(25 درجة)

برهن ما يلي : إذا كان T مؤثراً خطياً فإن المدى $R(T)$ فضاء خطي جزئي من الفضاء الخطي الذي يقع فيه.

---انتهت الأسئلة---

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2022/8/4م

جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم التصحيح طاوة كامل ثاني (1) لطلاب سنة ثالثة
لعام الفصل الثاني - العام الدراسي 2022 - 2023

س1: (35 درجة)

أولاً: نتحقق أن $\|\ \|$ يحقق شروط النظيم:

ليكن $z=(x,y)\in Z$ أي z فإن:

$\|z\| = \|(x,y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2 \geq 0+0=0$

$\|z\| = 0 \Leftrightarrow \|(x,y)\| = 0 \Leftrightarrow \|x\|_1 + \|y\|_2 = 0 \Leftrightarrow$

$\|x\|_1 = 0$ و $\|y\|_2 = 0 \Leftrightarrow x=0$ و $y=0 \Leftrightarrow z=(x,y)=(0,0)=0$

$\forall \alpha\in\mathbb{R}$ و $\forall z=(x,y)\in Z$:

$\|\alpha z\| = \|\alpha(x,y)\| = \|(\alpha x, \alpha y)\| = \|\alpha x\|_1 + \|\alpha y\|_2$

$= |\alpha|\|x\|_1 + |\alpha|\|y\|_2 = |\alpha|(\|x\|_1 + \|y\|_2) = |\alpha|\cdot\|z\|$

$\forall z_1=(x_1,y_1)$ و $z_2=(x_2,y_2)\in Z$

$\|z_1+z_2\| = \|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\| = \|(x_1+x_2, y_1+y_2)\|$

$= \|x_1+x_2\|_1 + \|y_1+y_2\|_2 \leq \|x_1\|_1 + \|x_2\|_1 + \|y_1\|_2 + \|y_2\|_2$

$\leq (\|x_1\|_1 + \|y_1\|_2) + (\|x_2\|_1 + \|y_2\|_2)$

$\leq \|z_1\| + \|z_2\|$

إذاً $\|\ \|$ نظيم على Z أي $(Z, \|\ \|)$ فضاء منظم

ثانياً: نبرهن أن $(Z,\|\ \|)$ تام: ليكن $(z_n=(x_n,y_n))$ متتالية كوشي في الفضاء $(Z,\|\ \|)$

المطلوب: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ في الفضاء $(X,\|\ \|_1)$ و $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ في الفضاء $(Y,\|\ \|_2)$

البرهان: لدينا لنوضح: $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$ في الفضاء المنظم $(Z,\|\ \|)$ وبالتالي

فإن شرط الكوشي محقق:

$\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N};\ \forall n>N(\varepsilon) \Rightarrow \|z_n - z\| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \|(x_n,y_n)-(x,y)\| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \|(x_n-x, y_n-y)\| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \|x_n-x\|_1 + \|y_n-y\|_2 < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \|x_n-x\|_1 < \varepsilon$ و $\|y_n-y\|_2 <$

وبالتالي $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ في الفضاء $(X, \|\cdot\|_1)$ و $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ في الفضاء $(Y, \|\cdot\|_2)$

كفاية الشرط: الوضع: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ في الفضاء $(X, \|\cdot\|_1)$، $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ في الفضاء $(Y, \|\cdot\|_2)$

المطلوب: $z_n = (x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} z = (x, y)$ في الفضاء $(Z, \|\cdot\|)$

البرهان: من الوضع لدينا $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ في الفضاء $(X, \|\cdot\|_1)$، $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ في الفضاء $(Y, \|\cdot\|_2)$ وبالتالي فإن التعريف التالي كتعان:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}; \forall n > N_1(\varepsilon) \Rightarrow \|x_n - x\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}; \forall n > N_2(\varepsilon) \Rightarrow \|y_n - y\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي، $N_0 = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ ينتج أن:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N}; \forall n > N_0 \Rightarrow \|x_n - x\|_1 + \|y_n - y\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|(x_n - x, y_n - y)\| < \varepsilon \Rightarrow \|z_n - z\| < \varepsilon$$

وبالتالي: $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$ في الفضاء $(Z, \|\cdot\|)$

تمرين: $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$

الطلب: f دالة خطية بـ:

$$\forall \beta, \gamma \in \mathbb{R} \; \forall x, y \in \mathbb{R}^4; \; x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$f(\beta x + \gamma y) = f(\beta x_1 + \gamma y_1, \beta x_2 + \gamma y_2, \beta x_3 + \gamma y_3, \beta x_4 + \gamma y_4)$$
$$= (\beta x_1 + \gamma y_1)\alpha_1 + (\beta x_2 + \gamma y_2)\alpha_2 + (\beta x_3 + \gamma y_3)\alpha_3 + (\beta x_4 + \gamma y_4)\alpha_4$$
$$= \beta(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4) + \gamma(y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + y_4\alpha_4)$$
$$= \beta f(x) + \beta f(y)$$

f محدود: صياغة وتدقيق لنتائج الدرس:

$$\exists C \in \mathbb{R}; C > 0 : |f(x)| \le C\|x\|; \forall x \in \mathbb{R}^4$$

لدينا: $|f(x)| = |x\alpha| = |x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4| = \left|\sum_{i=1}^{4} x_i\alpha_i\right|$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{4} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{4} |\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\| \cdot \|\alpha\| = \|\alpha\| \|x\| = C\|x\|$$

أي أن: $|f(x)| \le C\|x\|; C = \|\alpha\| > 0$ حسب التعريف السابق f محدود.

إيجاد $\|f\|$: لدينا:

$$|f(x)| \le \|\alpha\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \|\alpha\|; x \neq 0$$

نأخذ الحد الأعلى (sup) لطرفي العلاقة السابقة على جميع الأشعة x من $\mathbb{R}^n$

وبما أن $\|x\|=1$ عندئذ:

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \|a\| \Rightarrow \|f\| \le \|a\| \quad (I)$$

(4)

مقاربة أخرى بوضع $x=a$ في العلاقة: $\|f\| \ge \frac{|f(x)|}{\|x\|}$ عندما: $\|x\|=1$

$$\|f\| \ge \frac{|f(x)|}{\|x\|} = |f(a)| = \frac{|\sum_{i=1}^{n} a_i^2|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|$$

(4)

$$\Rightarrow \|f\| \ge \|a\| \quad (II)$$

(2)

من (I) و (II) نجد أن: $\|f\| = \|a\|$

التمرين: (25 درجة)

ليكن $T: D(T) \subseteq X \to R(T) \subseteq Y$ تطبيقاً خطياً، و X, Y فضاءان شعاعيان معرفان على الحقل K.

(6) المطلوب: $R(T)$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي Y.

البرهان:

(8) $\forall \alpha, \beta \in K$ و $\forall y_1, y_2 \in R(T) \Rightarrow$

$\exists x_1, x_2 \in D(T)$; $y_1 = Tx_1$ و $y_2 = Tx_2$

لدينا $\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T\alpha x_1 + T\beta x_2$

(7) بما أن T تطبيق خطي $\Leftarrow$

$= T(\alpha x_1 + \beta x_2) \in R(T)$

بما أن T خطي

(11) $\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T) \Rightarrow R(T)$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي الذي يقع فيه، أي Y.

ملاحظة: جميع التمارين والأسئلة الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة وبناء عليه نأخذ بجميع الحلول ونعتمد العلامة الخاصة لها في سلم التصحيح

أ.د. عائدة علي صالحة

مدرسة المقرر: د. عائدة علي صالحة

جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة التحليل لطلاب سنة ثالثة رياضيات للفصل الثاني للعام الدراسي 2020-2021

السؤال الأول: (30 درجة)

الطلب الأول: نتحقق أن $\|\cdot\|$ يحقق شروط النظيم:

أ: $\forall z=(x,y)\in Z$ فإن: $\|z\|=\|(x,y)\|=\|x\|_1+\|y\|_2\geq 0+0=0$ (2)

لكن متى: $\|z\|=0 \Leftrightarrow \|(x,y)\|=0 \Leftrightarrow \|x\|_1+\|y\|_2=0 \Leftrightarrow z=(x,y)=(0,0)=0$ (4)

$\|x\|_1=0 \wedge \|y\|_2=0 \Leftrightarrow x=0 \wedge y=0$

$\forall \alpha\in\mathbb{R} \wedge \forall z=(x,y)\in Z$:

$\|\alpha z\|=\|\alpha(x,y)\|=\|(\alpha x,\alpha y)\|=\|\alpha x\|_1+\|\alpha y\|_2$ (4)

$=|\alpha|\|x\|_1+|\alpha|\|y\|_2=|\alpha|(\|x\|_1+\|y\|_2)=|\alpha|\cdot\|z\|$

$\forall z_1=(x_1,y_1) \wedge z_2=(x_2,y_2)\in Z$:

$\|z_1+z_2\|=\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|=\|(x_1+x_2,y_1+y_2)\|$ (6)

$=\|x_1+x_2\|_1+\|y_1+y_2\|_2 \leq \|x_1\|_1+\|x_2\|_1+\|y_1\|_2+\|y_2\|_2$

$\leq (\|x_1\|_1+\|y_1\|_2)+(\|x_2\|_1+\|y_2\|_2)$

$\leq \|z_1\|+\|z_2\|$

وبالتالي من (1) و (2) و (3) نجد أن $\|\cdot\|$ نظيم على Z إذاً $(Z,\|\cdot\|)$ فضاء منظم. (2)

الطلب الثاني: نريد أن نبرهن بشرط الوقوف أن $(Z,\|\cdot\|)$ فضاء تام

الطلب: $z_n=(x_n,y_n)\to z=(x,y)$ في الفضاء $(Z,\|\cdot\|)$ (1)

البرهان: نفرض لدينا: $x_n\xrightarrow{n\to\infty}x$ في الفضاء $(X,\|\cdot\|_1)$ و $y_n\xrightarrow{n\to\infty}y$ في الفضاء $(Y,\|\cdot\|_2)$

$z_n\xrightarrow{n\to\infty}z$ في الفضاء $(Z,\|\cdot\|)$ وبالتالي الشرط التالي محقق

$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ و $\forall n>N(\varepsilon)\Rightarrow\|z_n-z\|<\varepsilon$ (4)

$\Leftrightarrow \|(x_n,y_n)-(x,y)\|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \|(x_n-x,y_n-y)\|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \|x_n-x\|_1+\|y_n-y\|<\varepsilon$

مكتبة A to Z

$\Leftrightarrow \|x_n - x\|_1 < \varepsilon$ و $\|y_n - y\|_2 < \varepsilon$

وبالتالي فإن: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ في الفضاء $(X, \|\ \|_1)$ و $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ في الفضاء $(Y, \|\ \|_2)$

كفاية الشرط: الفرض: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ في الفضاء $(X, \|\ \|_1)$ و $y_n \to y$ في الفضاء $(Y, \|\ \|_2)$

(1) المطلوب: $z_n = (x_n, y_n) \longrightarrow z = (x, y)$ في الفضاء $(Z, \|\ \|)$

البرهان: بالفرض لدينا: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ في الفضاء $(X, \|\ \|_1)$ و $y_n \to y$ في الفضاء $(Y, \|\ \|_2)$

وبالتالي يكون الشرطان التاليان محققان:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N};\ \forall n > N_1(\varepsilon) \Rightarrow \|x_n - x\|_1 < \varepsilon/2$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N};\ \forall n > N_2(\varepsilon) \Rightarrow \|y_n - y\|_2 < \varepsilon/2$

وبالتالي نستنتج أن: $N_0 = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N};\ \forall n > N_0 \Rightarrow \|x_n - x\|_1 + \|y_n - y\|_2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$\Rightarrow \|(x_n - x, y_n - y)\| < \varepsilon \Rightarrow \|z_n - z\| < \varepsilon$

(4) وبالتالي: $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$ في الفضاء $(Z, \|\ \|)$

(3) $<$ (30 دقيقة)

الحل: f خطي لأنه:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in C[0,1]$:

$$f(\alpha x + \beta y) = \int_0^1 (\alpha x + \beta y)(t)\,dt = \int_0^1 (\alpha x)(t)\,dt + \int_0^1 (\beta y)(t)\,dt$$

$$= \alpha \int_0^1 x(t)\,dt + \beta \int_0^1 y(t)\,dt = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

محدود: مقابل ذلك نبرهن الشرط:

$\exists c \in \mathbb{R}^+,\ c > 0:\ |f(x)| \le c\|x\|;\ \forall x \in C[0,1]$ (4)

لدينا $|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |x(t)|\,dt \le \max_{0\le t\le 1} |x(t)| \cdot (1-0) =$

$= 1 \cdot \|x\| = c \cdot \|x\|$; $c > 0$

وبالتالي:

$$|f(x)| \le c \cdot \|x\| ;\ c = 1 > 0;\ \forall x \in C[0,1]$$

(6) $\Leftarrow f$ محدود.

أيضاً $\|f\|$: لدينا العلاقة:

$$|f(x)| \le 1 \cdot \|x\|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|f(x)|}{\|x\|} \le 1$$

مكتبة A to Z

(3)

نأخذ الحد الأعلى (sup) الطرف المتراجحة السابقة من أجل جميع العناصر x من $[0,1]$ والتي يكون من أجلها $\|x\|=1$ نجد أن:

$$\|f\| = \sup_{x\in C[0,1]} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq 1 \Rightarrow \|f\| \leq 1 \quad (I)$$

من جهة أخرى نضع $x = x_0 = 1$ حيث $\|x_0\| = 1$ والتعويض في العلاقة $\|f(x)| \leq \|f\|.\|x\|$ نجد أن:

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_1)|}{\|x_1\|} = \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \int_0^1 dt = 1-0 = 1 \Rightarrow \|f\| \geq 1 \quad (II)$$

من المتراجحتين (I) و (II) نجد أن $\|f\| = 1$

س3: (30 درجة)

تعريف المجموعة المحدبة في الفضاء الشعاعي: نقول المجموعة الجزئية A في الفضاء الشعاعي X أنها محدبة إذا كان من أجل كل نقطتين من A القطعة المستقيمة محتواة بالكامل في A.

- إثبات أن الكرة المغلقة في الفضاء الشعاعي المنظم X هي مجموعة محدبة:

لتكن: $\overline{B}(x_0,r) = \{x \in X ; \|x - x_0\| \leq r\}$ كرة مغلقة في الفضاء المنظم X، ولنثبت أنها مجموعة محدبة.

$\forall x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0,r) \Rightarrow \|x_1 - x_0\| \leq r$ و $\|x_2 - x_0\| \leq r$

لتأخذ القطعة المستقيمة والتي لها الشكل:

$z = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$; $0 \leq \alpha \leq 1$

ولنبرهن أن: $z \in \overline{B}(x_0,r)$

لدينا $\|z - x_0\| = \|(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 - x_0\|$

نضيف ونطرح αx_0

$$= \|(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 - (1-\alpha)x_0 - \alpha x_0\| \rightarrow$$

$$= \|(1-\alpha)(x_1 - x_0) + \alpha(x_2 - x_0)\|$$

$$\leq \|(1-\alpha)(x_1 - x_0)\| + \|\alpha(x_2 - x_0)\|$$

$$\leq |1-\alpha|\,\|x_1 - x_0\| + |\alpha|\,\|x_2 - x_0\|$$

مكتبة A to Z

$$\leq (1-\alpha)r + \alpha r$$

$$\leq r$$

$$\|z - x_0\| \leq r$$

$$\Rightarrow z \in \bar{B}(x_0, r)$$

وبالتالي:

وبما أن z نقطة اعتباطية واصلة بين أي نقطتين x_1 و x_2 كيفيتين في $\bar{B}(x_0, r)$ فإن $\bar{B}(x_0, r)$ مجموعة محدبة في الفضاء الخطي X

ملاحظة: جميع المقاييس الواردة في مسلمة التصحيح لها أكثر من طريقة واحدة للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة للمسلمة التصحيح

لطوس في ٢٠١٠/٧/٢٩ م

مدرسة الطهر: د. طائرة على صاحبة

مكتبة A to Z

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان التحليل التابعي (1)
لطلاب السنة الرابعة-رياضيات
للدورة الأولى

المدة: ساعتان
الدرجة العظمى: 90درجة
اسم الطالب:

****

السؤال الأول: (45 درجة)

أولاً: أثبت أن الفضاء الإقليدي الحقيقي R^4 هو فضاء تام ، حيث المسافة المعرفة على هذا الفضاء تعطى بالعلاقة :

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(x_i-y_i)^2} \quad ;\forall\ x=(x_1,...,x_4),y=(y_1,...,y_4)\in R^4$$

ثانياً: ليكن الدالي : $f:R^2\to R$ والمعرف بالشكل التالي:

$$f(x)=x.\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\sum_{i=1}^{2}x_i\alpha_i \quad ;\ \forall x=(x_1,x_2)\in R^2$$

و $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ عنصر ثابت من R^2 والمطلوب أثبت أن f دالي خطي ومحدود ، ثم أوجد نظيمه .

السؤال الثاني: (45درجة)

أجب عن الأسئلة التالية:

1- وضح مفهوم التعابير والرموز الرياضية التالية : النظائم المتكافئة ، $\|T\|$ ، ℓ^∞ ، $D(f)$ ، $C[0,1]$.

2- كل مسافة مترية مولدة من نظيم على فضاء منظم تحقق شرطين والمطلوب اكتب العلاقة الرياضية التي تعطي هذه المسافة، ثم اذكر الشرطين اللذين تحققهما ، وبرهن على صحة كل منهما.

3- اكتب الشرط اللازم والكافي حتى يكون الفضاء الجزئي المنظم $(Y,\|\ \|)$ من فضاء باناخ $(X,\|\ \|)$ هو فضاء باناخ ، ثم استنتج فيما إذا كان الفضاء الجزئي المنظم $(|\ |,[0,1])$ من فضاء باناخ $(R,|\ |)$ لباناخ أو لا ؟.

4- عرف المجموعات الجزئية المتراصة في الفضاءات المنظمة المنتهية البعد .

5- اذكر المفهومان المتكافئان بالنسبة للمؤثرات الخطية.

6- عرف كلاً من المؤثر والدالي ماذا تستنتج ؟.

**********انتهت الأسئلة**********

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2021/1/31م

مكتبة A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم التصحيح طاولة القليل التابعي (1) لطلاب س4
لامتحان الفصل الأول للعام الدراسي 2020 - 2021

س1: (45 درجة)

أولاً: إثبات أن الفضاء الاقليدي الحقيقي $\mathbb{R}^4$ هو فضاء تام.

لتكن $(x^{(n)})_{n\geq 1}=(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, x_4^{(n)})_{n\geq 1}$ متتالية كيفية للوشي في الفضاء $\mathbb{R}^4$
ولنبرهن أن هذه المتتالية متقاربة إلى نقطة ما من هذا الفضاء.
بما أن $(x^{(n)})_{n\geq 1}$ متتالية كوشي في الفضاء $\mathbb{R}^4$ وبالتالي يحقق الشرط التالي

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N};\ \forall n,m>N(\varepsilon) \Rightarrow d(x^{(n)},x^{(m)})<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(x_i^{(n)}-x_i^{(m)})^2}<\varepsilon \quad (*) \quad \forall n,m>N(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4}(x_i^{(n)}-x_i^{(m)})^2<\varepsilon^2 \quad ; \forall n,m>N(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow |x_i^{(n)}-x_i^{(m)}|<\varepsilon \quad ; \forall n,m>N(\varepsilon) \quad \forall i=1,2,3,4$$

الذي يعني أن أي متتالية من الشكل $(x_i^{(n)})_{n\geq 1}=(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots)$ متتالية
محققة: $\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N};\ \forall n,m>N(\varepsilon) \Rightarrow |x_i^{(n)}-x_i^{(m)}|<\varepsilon$
وبالتالي المتتالية الحقيقية $(x_i^{(n)})_{n\geq 1}$ متقاربة إلى نقطة ما $x_i\in\mathbb{R}$ ولتكن x_i
أي أن: $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}=x_i \quad ; \forall i=1,2,3,4$
وبالتالي $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$

$$x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

يبقى علينا أن نثبت أن

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(x_i^{(n)}-x_i)^2}<\varepsilon$$

بجعل $m\longrightarrow\infty$ في المتراجحة $(*)$ نجد أن $d(x^{(n)},x)<\varepsilon$ وبالتالي $\forall n>N(\varepsilon)$
إذاً: $\lim_{n\to\infty} x^{(n)}=x$ و $x\in\mathbb{R}^4$ وبما أن $(x^{(n)})_{n\geq 1}$ متتالية كيفية لكوشي في الفضاء $\mathbb{R}^4$ متقاربة لنقطة منه وبالتالي
$\mathbb{R}^4$ فضاء تام.

(10)

مكتبة A to Z

تمرين 1: 1- f خطي لدينا:

$\forall \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ و $\forall x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(\beta x+\gamma y)=f(\beta x_1+\gamma y_1, \beta x_2+\gamma y_2)$$

$$=\sum_{i=1}^{2}(\beta x_i+\gamma y_i)a_i=\sum_{i=1}^{2}\beta(x_i a_i)+\gamma(y_i a_i)$$

$$=\beta\sum_{i=1}^{2}x_i a_i+\gamma\sum_{i=1}^{2}y_i a_i=\beta f(x)+\gamma f(y)$$

(10)

c- f محدود: من أجل إثبات ذلك نبرهن الشرط:

$$\exists C\in\mathbb{R};\ C>0 \text{ و } |f(x)|\le C\cdot\|x\|;\ \forall x\in\mathbb{R}^2$$ (2)

لدينا $|f(x)|=|x\cdot a|=\left|\sum_{i=1}^{2}x_i a_i\right|\le\sum_{i=1}^{2}|x_i a_i|\le$

حسب متباينة هولدر، للحالة التي من أجل $p=q=2$

$$\le\left(\sum_{i=1}^{2}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{2}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|x\|\cdot\|a\|=C\cdot\|x\|$$ (3)

أي أن:

$$|f(x)|\le C\cdot\|x\|;\ C=\|a\|>0$$

وبالتالي f محدود.

3- إيجاد تنظيم f أي $\|f\|$:

لدينا: $|f(x)|\le\|a\|\cdot\|x\| \Leftarrow \frac{|f(x)|}{\|x\|}\le\|a\|;\ x\neq 0$

ونأخذ الحد الأعلى (sup) لطرفي العلاقة السابقة من أجل جميع العناصر x من $\mathbb{R}^2$ وحيث أن $\|x\|=1$ نجد أن:

$$\|f\|=\sup|f(x)|\le\|a\|$$ (4)

$x\in\mathbb{R}^2$, $\|x\|=1$

من جهة أخرى نضع $x=\alpha$ في العلاقة:

$$\|f\|\ge\frac{|f(x)|}{\|x\|}$$ نجد أن:

$$\|f\|\ge\frac{|f(\alpha)|}{\|\alpha\|}=\frac{\left|\sum_{i=1}^{2}\alpha_i^2\right|}{\|\alpha\|}=\frac{\|\alpha\|^2}{\|\alpha\|}=\|\alpha\|$$ (4)

$$\Rightarrow \|f\|\ge\|\alpha\| \quad (II)$$

من (I) و (II) نجد أن: $\|f\|=\|\alpha\|$ (4)

مكتبة A to Z

التمرين: (5 نقاط)

1- النظائم المتكافئة: ليكن $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ نظيمان على الفضاء الخطي X.
نقول أن $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ نظيمان متكافئان إذا وجد عددان موجبان a و b بحيث يتحقق الشرط التالي: $\forall x \in X \; ; \; a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$

$\|T\|$: وهو نظيم المؤثر الخطي المحدود $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow R(T) \subseteq Y$
حيث X و Y فضاءان نظيمان معرفان فوق نفس الحقل ويعطى بالعلاقة:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\| \quad \text{أو بالعلاقة:} \quad \|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

(3)

ℓ^∞: فضاء مجمع المتتاليات العددية المحدودة أي:

$$\ell^\infty = \{ x \; ; \; x = (\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_n)_{n \geq 1} \; / \; \xi_n \in \mathbb{C} \; ; \; n = 1, 2, \dots \; \exists \, c_x \in \mathbb{R} \; ; \; |\xi_n| \leq c_x \}$$

و المعرف عليه المسافة d وفقاً للعلاقة التالية:

$$d : \ell^\infty \times \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \; ; \; \forall \, x = (\xi_n)_{n \geq 1} \in \ell^\infty \; , \; y = (\eta_n)_{n \geq 1} \in \ell^\infty$$

$$d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n - \eta_n|$$

(3)

إذا كان: $f : D(f) \subseteq X \longrightarrow K$: تابع مؤثر خطي حيث X فضاء خطي معرف فوق الحقل K فإن $D(f)$ هو مجموعة التوابع f حيث $D(f)$ فضاء خطي جزئي من الفضاء الخطي X.

(3)

$C[0,1]$: فضاء التوابع الحقيقية المعرفة والمستمرة على المجال $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$
و التابعة لمتغول حقيقي واحد مستقل هو t أي $x = x(t)$ ، $y = y(t)$
أي:

$$C[0,1] = \{ x \; ; \; x : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; / \; x = x(t) \; ; \; \forall t \in [0,1] \}$$

x دالة معرفة ومستمرة على المجال $[0,1]$

و المسافة المعرفة عليه d وفقاً للعلاقة:

$$d : C[0,1] \times C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \; ; \; d(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$$

(3)

٢- العلاقة التي تعطى المسافة d المولدة من نظيم لـ X

$$d(x,y) = \|x-y\| \quad ; \forall x,y \in X$$

(2) حيث X فضاء منظم معرف فوق الحقل K .

(1) أما الشرطان اللذان تحققهما المسافة d فهما :

(2) $1- d(x+z, y+z) = d(x,y) \quad ; \forall x,y,z \in X$

(2) $2- d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x,y) \quad ; \forall \alpha \in K \ \text{و} \ \forall x,y \in X$

(2) برهان صحة (1) :

$$d(x+z, y+z) = \|x+z-(y+z)\| = \|x-y\| = d(x,y)$$

(2) برهان صحة (2) :

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x-y)\| = |\alpha|\,\|x-y\| = |\alpha|\, d(x,y)$$

(2) ٣- الشرط اللازم والكافي هو أن تكون المجموعة Y مغلقة في الفضاء المنظم $(X, \|\cdot\|)$

(2) أما الفضاء الجزئي المنظم $(]0,1[, |\cdot|)$ من فضاء باناخ $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ فهو ليس باناخ لأن المجموعة $]0,1[$ ليست مجموعة مغلقة في الفضاء $\mathbb{R}$.

(4) ٤- كل المجموعات الجزئية المغلقة والمحدودة

(4) ٥- المفهومان هما الاستمرار والمحدودية

٦- بالاختصار : ليكن X و Y فضاءان خطيان (متجهان) معرفين فوق نفس الحقل K . نسمي تطبيق : $T : X \longrightarrow Y$ معرف بالشكل :

(2) $\forall x \in X \ ; \ Tx = y$ مؤثر من X إلى Y واختصاراً مؤثر .

الدالي : نسمي مؤثر : $f : X \longrightarrow K$ حيث X فضاء خطي (منظم) معرف فوق الحقل K دالي على X أو دالي .

(1) نستنتج من تعريف المؤثر والدالي أن كل دالي هو مؤثر .

ملاحظة : جميع التمارين والأسئلة الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح .

طرطوس في ٢١/١/٢٠٢١

مدرس المقرر : د. عائشة صالحة

A to Z مكتبة

الجمهورية العربية السورية امتحان التحليل التابعي (١) المدة: ساعتان
جامعة طرطوس لطلاب السنة الرابعة-رياضيات الدرجة العظمى: ٩٠درجة
كلية العلوم الفصل الثاني اسم الطالب:

****

السؤال الأول: (٣٠ درجة)

إذا كان $(X,\|\|_1)$ و $(Y,\|\|_2)$ فضاءين منظمين وكان $Z=X\times Y=\{(x,y);\ x\in X\wedge y\in Y\}$ وعرفنا على Z الدالة : $\|\|:Z\longrightarrow R$ بالشكل التالي:

$\forall z\in Z\ ;\ \|z\|=\|(x,y)\|=\|x\|_1+\|y\|_2$ ، والمطلوب:

١- تحقق أن $(Z,\|\|)$ فضاء منظم.

٢- برهن أن $z_n=(x_n,y_n)$ متقاربة من $z=(x,y)$ إذا وفقط إذا كان $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ و $y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}y$.

السؤال الثاني: (٣٠ درجة)

اكتب نص مبرهنة النظائم المتكافئة وبرهن عليها.

السؤال الثالث: (٣٠درجة)

عرف المجموعة المحدبة في الفضاء المنظم ، ثم أثبت أن الكرة المغلقة في الفضاء المنظم هي مجموعة محدبة .

**********انتهت الأسئلة**********

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق
د. عائدة صائمة

طرطوس في ٢٠٢٠/٩/٨م

جامعة قرطاج
كلية العلوم

سلم تصحيح مادة تحليل تابعي (11)
لطلاب سنة 3 للفصل الثاني للعام الدراسي 19..-20..

س1: (30 درجة)

الطلب الأول: نتحقق أن $\|\cdot\|$ يحقق شروط النظيم:

أ: $\forall z=(x,y)\in Z$ فإن:
$$\|z\| = \|(x,y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2 \geq 0+0 = 0$$

كذلك: (2)

(3)
$$\|z\| = 0 \iff \|(x,y)\| = 0 \iff \|x\|_1 + \|y\|_2 = 0 \iff$$
$$\|x\|_1 = 0 \ \& \ \|y\|_2 = 0 \iff x=0 \ \& \ y=0 \iff z=(x,y)=(0,0)=0$$

ج: (1)
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ و $\forall z=(x,y)\in Z$:
$$\|\alpha z\| = \|\alpha(x,y)\| = \|(\alpha x, \alpha y)\| = \|\alpha x\|_1 + \|\alpha y\|_2$$
$$= |\alpha|\|x\|_1 + |\alpha|\|y\|_2 = |\alpha|(\|x\|_1 + \|y\|_2) = |\alpha|\cdot\|z\|$$

د: (4)
$\forall z_1=(x_1,y_1)$ و $z_2=(x_2,y_2)\in Z$
$$\|z_1+z_2\| = \|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\| = \|(x_1+x_2, y_1+y_2)\|$$
$$= \|x_1+x_2\|_1 + \|y_1+y_2\|_2 \leq \|x\|_1 + \|x_2\|_1 + \|y_1\|_2 + \|y_2\|_2$$
$$\leq (\|x_1\|_1 + \|y_1\|_2) + (\|x_2\|_1 + \|y_2\|_2)$$
$$\leq (\|z_1\| + \|z_2\|)$$

(4) وبالتالي $\|\cdot\|$ نظيم على Z إذاً $(Z, \|\cdot\|)$ فضاء منظم.

الطلب الثاني لرسم الشرط: الفرض: $z_n=(x_n,y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} z=(x,y)$ في الفضاء $(Z,\|\cdot\|)$

الطلب: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ في الفضاء $(X,\|\cdot\|_1)$ و $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ في الفضاء $(Y,\|\cdot\|_2)$

الى هنا: وفق الفرض لدينا: $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$ في الفضاء $(Z,\|\cdot\|)$ وبالتالي حسب التعريف تحقق:
$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}, \ \forall n>N(\varepsilon) \Rightarrow \|z_n - z\| < \varepsilon$$

(5)
$$\iff \|(x_n,y_n)-(x,y)\| < \varepsilon$$
$$\iff \|(x_n-x, y_n-y)\| < \varepsilon$$
$$\iff \|x_n-x\|_1 + \|y_n-y\|_2 < \varepsilon$$
$$\iff \|x_n-x\|_1 < \varepsilon \ \& \ \|y_n-y\|_2 < \varepsilon$$

وبالتالي: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ في الفضاء $(X,\|\cdot\|_1)$ و $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ في الفضاء $(Y,\|\cdot\|_2)$.

بمقارنة 1) و 3) نجد أن :

$$\frac{\|x\|_0}{k} \le \sum_{i=1}^{n} |a_i| \le \frac{\|x\|}{c_1}$$

$$\Rightarrow a\|x\|_0 \le \|x\| \; ; \; a = \frac{c_1}{k} > 0$$

وبمقارنة 2) و 4) نجد أن :

$$\frac{\|x\|}{k'} \le \sum_{i=1}^{n} |a_i| \le \frac{\|x\|_0}{c_2}$$

$$\Rightarrow \|x\| \le b\|x\|_0 \; ; \; b = \frac{k'}{c_2} > 0$$

مما سبق نجد أن : $a.\|x\|_0 \le \|x\| \le b\|x\|_0$

وبالتالي $\|\;\|$ و $\|\;\|_0$ نظيمان متكافئان.

تمرين : (20 درجة)

- تعريف المجموعة المحدبة في الفضاء المنظم : نقول المجموعة الجزئية A من الفضاء المنظم X مجموعة محدبة إذا وفقط إذا الوصل بين أي نقطتين من A قطعة مستقيمة محتواة بالكامل في A.

- إثبات أن الكرة المغلقة في الفضاء المنظم X هي مجموعة محدبة :

لتكن : $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X ; \|x - x_0\| \le r\}$

كرة مغلقة في الفضاء المنظم X ولنثبت أن هذه مجموعة محدبة في هذا الفضاء

$\forall x_1, x_2 \in \bar{B}(x_0, r) \Rightarrow \|x_1 - x_0\| \le r + \|x_2 - x_0\| \le r$

ولنأخذ القطعة المستقيمة الكيفية والتي لها الشكل :

$z = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$ و $0 \le \alpha \le 1$

ولنبرهن أن $z \in \bar{B}(x_0, r)$

لدينا

$$\begin{aligned}
\|z - x_0\| &= \|(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 - x_0\| \\
&= \|(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 - (1-\alpha)x_0 - \alpha x_0\| \\
&= \|(1-\alpha)(x_1 - x_0) + \alpha(x_2 - x_0)\| \\
&\le \|(1-\alpha)(x_1 - x_0)\| + \|\alpha(x_2 - x_0)\| \\
&\le |1-\alpha|\,\|x_1 - x_0\| + |\alpha|\,\|x_2 - x_0\| \\
&\le (1-\alpha)r + \alpha r = r
\end{aligned}$$

وبالتالي $\|z - x_0\| \le r \Rightarrow z \in \bar{B}(x_0, r)$

وبما أن z قطعة مستقيمة واصلة بين نقطتين x_1 و x_2 كيفيتين من $\bar{B}(x_0, r)$ وبالتالي $\bar{B}(x_0, r)$ مجموعة محدبة في الفضاء المنظم X

ملاحظة : جميع القوانين الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة وبأي طريقة يأخذ نفس العلامة المخصصة لذلك سلم التصحيح

طرطوس في 2018/1/20

كفاية الشرط: الفرض: $x_n \to x$ في الفضاء $(X, \|\|_1)$ و $y_n \to y$ في الفضاء $(Y, \|\|_2)$

الطلب: $z_n = (x_n, y_n) \to z = (x, y)$ في الفضاء $(Z, \|\|)$.

البرهان: من الفرض لدينا $x_n \to x$ في الفضاء $(X, \|\|_1)$، $y_n \to y$ في الفضاء $(Y, \|\|_2)$ وبالتالي فإن الشرط التالي محققان:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}; \; \forall n > N_1(\varepsilon) \Rightarrow \|x_n - x\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}; \; \forall n > N_2(\varepsilon) \Rightarrow \|y_n - y\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

وبأخذنا $N_0 = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ فإن:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N}; \; \forall n > N_0 \Rightarrow \|x_n - x\|_1 + \|y_n - y\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
$$\Rightarrow \|(x_n - x, y_n - y)\| < \varepsilon \Rightarrow \|z_n - z\| < \varepsilon$$

(5) وبالتالي $z_n \to z$ في الفضاء $(Z, \|\|)$.

حل التمرين: (30 درجة)

نص النظرية: كل نظيم $\|\|$ على فضاء شعاعي X يكافئ أي نظيم آخر $\|\|_0$ على X.

(5)

برهان النظرية: لنفرض أن $\dim X = n$ ولتكن $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ قاعدة لـ X عندئذ أي عنصر x من X يكتب كتركيب خطي وحيد لعناصر هذه القاعدة أي:

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$$

(4) عندما نحسب توطئة التراكيب الخطية يمكننا أن نكتب:

$$\exists c_1 > 0; \; \|x\| = \|a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n\| \geq c_1 (|a_1| + \cdots + |a_n|) = c_1 \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

أي: $\|x\| \geq c_1 \sum_{i=1}^{n} |a_i| \Leftarrow \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \frac{\|x\|}{c_1}$ (1) (4)

$$\exists c_2 > 0; \; \|x\|_0 \geq c_2 \sum_{i=1}^{n} |a_i| \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \frac{\|x\|_0}{c_2}$$ (2) (4)

ومن متراجحة المثلث نجد أن: (4)

$$\|x\|_0 = \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|_0 \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \|e_i\|_0 \leq k \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

$$k = \max_{1 \leq i \leq n} \{\|e_i\|_0\}$$ (4)

$$\frac{\|x\|_0}{k} \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$ (3)

وبالتالي:

ولكن من متراجحة المثلث لدينا:

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot \|e_i\| \leq k' \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

$$k' = \max_{1 \leq i \leq n} \{\|e_i\|\}$$ (4)

$$\|x\| \leq \sum^{n} a_i$$ (1)

وبالتالي:

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان التحليل التابعي (1)
لطلاب الرابعة-رياضيات
امتحان الفصل الأول

المدة: ساعتان
الدرجة العظمى: 90درجة
اسم الطالب:

****

السؤال الأول: (20 درجة)

أثبت أن الفضاء L^5 هو فضاء تام ، حيث المترك المعرف على هذا الفضاء يعطى بالعلاقة :

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^5\right)^{\frac{1}{5}}.$$

السؤال الثاني: (20 درجة)

ليكن $f:R^3\to R$ دالي معرف بالشكل :

$$\forall\ x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3\ ;\quad f(x)=x.\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$$ و

$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in R^3$ عنصر ثابت من R^3 والمطلوب أثبت أن f دالي خطي محدود ثم أوجد نظيمه.

السؤال الثالث: (30 درجة)

1- عرف النظائم المتكافئة .
2- اكتب نص مبرهنة النظائم المتكافئة وبرهن عليها.

السؤال الرابع: (20 درجة):

عرف المجموعة المحدبة في الفضاء المنظم ، ثم أثبت أن الكرة المفتوحة في الفضاء المنظم هي مجموعة محدبة .

********** انتهت الأسئلة **********

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق.
د. عائدة صائمة

طرطوس في 2020/2/20م

حلول

حلول تمارين التصحيح طادة ، التحليل الدالي ، الطلاب سنة ، ل.م.د - ت.ع.ن - ت.ع.ا

لـ تمارين الفصل الأول العام الدراسي

(ع 2 درجة)

= الحل = لتكن $(x^{(m)})_{m\geq 1} = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots)$ متتالية كوشي في الفضاء ℓ^5.

ولبرهان أن هذه المتتالية متقاربة إلى نقطة من الفضاء ℓ^5.

يكفي أن نبرهن أن $(x^{(m)})_{m\geq 1}$ متتالية كوشي في ℓ^5 وبالتالي فإن الشرط التالي محقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \; \forall n,m > N(\varepsilon) \Rightarrow d(x^{(m)}, x^{(n)}) < \varepsilon$$

(5) أي أن:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^5\right)^{\frac{1}{5}} < \varepsilon, \quad \forall n,m > N(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^5 < \varepsilon^5, \quad \forall \varepsilon > 0 \; + \; \forall n,m > N(\varepsilon)$$

وبالتالي من أجل $k \in \mathbb{N}$ يكون لدينا

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^5 < \varepsilon^5, \; \forall n,m > N(\varepsilon) \; + \; \forall \varepsilon > 0$$

(4) وبالتالي من أجل كل $i \in \mathbb{N}$ ، تتحقق المتراجحة:

$$|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^5 < \varepsilon^5, \quad \forall n,m > N(\varepsilon) \; + \; \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon, \quad \forall n,m > N(\varepsilon) \; + \; \forall \varepsilon > 0$$

أي أنه من أجل كل $i \in \mathbb{N}$ فإن الشرط التالي محقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}; \; \forall n,m > N(\varepsilon) \Rightarrow |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon$$

ومنه نستنتج أن $(\xi_i^{(m)}) = (\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \dots)$ متتالية عددية كوشية في الفضاء $\mathbb{C}$ وبما أن $\mathbb{C}$ فضاء تام وبالتالي فإن المتتالية $(\xi_i^{(m)})$ تتقارب إلى نقطة من هذا الفضاء، ولتكن هذه النقطة $\xi_i \in \mathbb{C}$ أي أن $\lim_{m\to\infty} \xi_i^{(m)} = \xi_i$, $i \in \mathbb{N}$

وتجميع هذه النهايات من أجل كل $i \in \mathbb{N}$ يمكننا تشكيل العنصر $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$

(5) ولنبرهن الآن أن $x \in \ell^5$, $x^{(m)} \longrightarrow x$

بالاستفادة من المتراجحة $(*)$ ونجعل $m \to \infty$ نجد أن:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \not\exists \; \forall m > N(\varepsilon), \quad \sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(m)} - \xi_i|^5 < \varepsilon^5$$

ونجعل $k \to \infty$ نجد أن:

$$(**) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)} - \xi_i|^5 < \varepsilon^5, \quad \forall m > N(\varepsilon) \; + \; \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow d(x^{(m)}, x) < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon) \; + \; \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} x$$

ولدينا حسب تعريف الفضاء ℓ^5 وبالاعتماد على المتراجحة $(**)$ فإن $x - x^m \in \ell^5$

ومستنتجة مكونات للمجاميع فإن

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)} + \xi_i - \xi_i^{(m)}|^5\right)^{\frac{1}{5}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)}|^5\right)^{\frac{1}{5}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^{(m)}|^5\right)^{\frac{1}{5}} < \infty$$

(4) وبالتالي: $x = x^{(m)} + x - x^{(m)} \in \ell^5$

أي أن كل متتالية كوشي $(x^{(m)})$ من الفضاء ℓ^5 متقاربة لنقطة منه

وبالتالي ℓ^5 فضاء تام

Scanned by CamScanner

الحل: f خطي لأنه: (4 درجة)

$\forall \beta,\gamma \in \mathbb{R} \ \forall x,y \in \mathbb{R}^3 \ ; x=(x_1,x_2,x_3) \ y=(y_1,y_2,y_3)$

$f(\beta x+\gamma y)=f(\beta x_1+\gamma y_1, \beta x_2+\gamma y_2, \beta x_3+\gamma y_3)$

$=(\beta x_1+\gamma y_1)\alpha_1+(\beta x_2+\gamma y_2)\alpha_2+(\beta x_3+\gamma y_3)\alpha_3$ (4)

$=\beta(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3)+\gamma(y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+y_3\alpha_3)$ (4)

$=\beta f(x)+\gamma f(y)$

f محدود: من أجل ذلك لنبرهن الشرط:

$\exists c \in \mathbb{R} \ ; c>0 \ / \ |f(x)| \le c\|x\| \ ; \forall x \in \mathbb{R}^3$ (1)

لدينا $|f(x)|=|x\cdot\alpha|=|x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3|=\left|\sum_{i=1}^{3} x_i\alpha_i\right| \le$ (3)

حسب متباينة هولدر للجاميع الثنائية حيث $p=q=2$

$\left(\sum_{i=1}^{2}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}|\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|x\|\,\|\alpha\|=c\|x\|$ (2)

أي أن $|f(x)| \le c\|x\| \ ; c=\|\alpha\|>0$

وبالتالي f محدود.

إيجاد نظيم f أي $\|f\|$: لدينا $|f(x)| \le \|\alpha\|\cdot\|x\| \Rightarrow \frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \|\alpha\| \ ; x\neq 0$

نأخذ الحد الأعلى (sup) لكلا طرفي العلاقة السابقة من أجل جميع العناصر x من $\mathbb{R}^3$ حيث أن $\|x\|=1$ عندئذ:

$\|f\|=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^3 \\ \|x\|=1}}\frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \|\alpha\| \Rightarrow \|f\| \le \|\alpha\|$ (I) (3)

من جهة أخرى بوضع $x=\alpha$ في العلاقة $\|f\| \ge \frac{|f(x)|}{\|x\|}$ عندئذ:

$\|f\| \ge \frac{|f(x)|}{\|x\|}=\frac{|f(\alpha)|}{\|\alpha\|}=\frac{\left|\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2\right|}{\|\alpha\|}=\frac{\|\alpha\|^2}{\|\alpha\|}=\|\alpha\|$ (2)

$\Rightarrow \|f\| \ge \|\alpha\|$ (II)

من (I) و (II) عندئذ: $\|f\|=\|\alpha\|$ (1)

سؤال: (30 درجة)

الطلب (1): ليكن $\|\ \|$ و $\|\ \|_0$ نظيمان على الفضاء الخطي X. نقول عن $\|\ \|$ و $\|\ \|_0$ نظيمان متكافئان: إذا وجد عددان موجبان a و b حيث يتحقق الشرط التالي:

$a\|x\|_0 \le \|x\| \le b\|x\|_0 \ ; \forall x \in X$ (6)

Scanned by CamScanner

1) نص النظرية : كل تطبيع $\|\ \|$ على فضاء شعاعي الحقيقي X يكافئ أي تطبيع آخر $\|\ \|_0$ على X. (4)

برهان النظرية : لنفرض أن $\dim X = n$ ولتكن $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ قاعدة لـ X عندئذ يكتب كل عنصر x من X بشكل تركيب خطي وحيد لعناصر هذه القاعدة أي :

$$x = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n$$

لنبرهن بداية التراكيب الخطية تماثل أن نكتب :

$$\exists c_1 > 0 ;\ \|x\| = \|a_1e_1 + \dots + a_ne_n\| \geq c_1(|a_1| + \dots + |a_n|) = c_1 \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

أي : $\|x\| \geq c_1 \sum_{i=1}^{n} |a_i| \Leftarrow \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \frac{\|x\|}{c_1} \right\}$ (1)

$$+ \exists c_2 > 0 ;\ \|x\|_0 \geq c_2 \sum_{i=1}^{n} |a_i| \Rightarrow \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \frac{\|x\|_0}{c_2} \right\}$$ (2) (6)

ومن متراجحة المثلث نجد أن :

$$\|x\|_0 = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_ie_i \right\|_0 \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot \|e_i\|_0 \leq k \sum_{i=1}^{n} |a_i| ;$$

$$k = \max_{1 \leq i \leq n} \{\|e_i\|_0\}$$

وبالتالي :

$$\left\{ \frac{\|x\|_0}{k} \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \right\}$$ (3)

ولذلك نستنتج المتراجحة التالية :

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_ie_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot \|e_i\| \leq k' \sum_{i=1}^{n} |a_i| ;\ k' = \max_{1 \leq i \leq n} \{\|e_i\|\}$$

وبالتالي : $\left\{ \frac{\|x\|}{k'} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \right\}$ (4) (6)

بمقارنة (1) و (3) نجد أن : $\frac{\|x\|_0}{k} \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \frac{\|x\|}{c_1}$

$$\Rightarrow a\|x\|_0 \leq \|x\| ;\ a = \frac{c_1}{k} > 0$$

وبمقارنة (2) و (4) نجد أن : $\frac{\|x\|}{k'} \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \frac{\|x\|_0}{c_2}$ (8)

$$\Rightarrow \|x\| \leq b\|x\|_0 ;\ b = \frac{k'}{c_2} > 0$$

ومما سبق نجد أن :

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$$

وبالتالي $\|\ \|$ و $\|\ \|_0$ نظيمان متكافئان.

التمرين 2 : (20 درجة)

الحل :

(6) تعريف المجموعة المحدبة في الفضاء الشعاعي الطبيعي : نقول عن المجموعة الجزئية A من الفضاء الطبيعي X مجموعة محدبة إذا كان القطعة المستقيمة المحصورة بين أي نقطتين من A محتواة بأكملها في A

Scanned by CamScanner

- أي الكرة المفتوحة في الفضاء المنظم هي مجموعة محدبة:

لتكن $B(x_0,r)=\{x\in X : \|x-x_0\|<r\}$ (3)

كرة مفتوحة في الفضاء المنظم X ولنثبت أنها مجموعة محدبة:

$\forall x_1,x_2\in B(x_0,r) \Rightarrow \|x_1-x_0\|<r \ \wedge\ \|x_2-x_0\|<r$

ولنأخذ القطعة المستقيمة الآتية والتي لها الشكل:

$z=(1-\alpha)x_1+\alpha x_2 \quad ; \quad 0\le\alpha\le 1$

ولنبرهن أن $z\in B(x_0,r)$ (2)

لنبرهن $\|z-x_0\|=\|(1-\alpha)x_1+\alpha x_2-x_0\|$

أضفنا αx_0 وطرحنا هـ

$=\|(1-\alpha)x_1+\alpha x_2-(1-\alpha)x_2-\alpha x_0\|$

$=\|(1-\alpha)(x_1-x_0)+\alpha(x_2-x_0)\|$

$\le\|(1-\alpha)(x_1-x_0)\|+\|\alpha(x_2-x_0)\|$

$\le|1-\alpha|\,\|x_1-x_0\|+|\alpha|\,\|x_2-x_0\|$

$<(1-\alpha)r+(\alpha)r=r$ (6)

وبالتالي $z\in B(x_0,r)\Leftarrow\|z-x_0\|<r$ (1)

وبما أن z نقطة مستقيمة واصلة بين أي نقطتين x_1, x_2 كيفيتين من $B(x_0,r)$ وبالتالي $B(x_0,r)$ مجموعة محدبة في الفضاء المنظم X (2)

ملاحظة: جميع المتباينات الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية والله — وجميع تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

طرطوس في ك.ك./ك/ك.

صراص الطيب: وعائشة على صانعة

Scanned by CamScanner

الجمهورية العربية السورية امتحان التحليل التابعي (1) المدة: ساعتان
جامعة طرطوس لطلاب السنة الرابعة–رياضيات الدرجة العظمى: 90درجة
كلية العلوم الدورة الثالثة اسم الطالب:

****

السؤال الأول: (30 درجة)

ليكن $f:C[2,5]\to R$ دالي معرف بالشكل : $f(x)=x(t_1)$ حيث t_1 عنصر مثبت من المجال $[2,5]$ والمطلوب أثبت أن f خطي ومحدود وأوجد نظيمه.

السؤال الثاني: (30 درجة)

اذكر خواص المتتاليات المتقاربة في فضاء متري $X=(X,d)$ وبرهن عليها.

السؤال الثالث: (30درجة)

في الفضاء R^4 لنعرف النظيمين التاليين : $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{4}|x_i|=|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|$ ،

$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{4}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$ والمطلوب برهن أن: $\|x\|_1$ و $\|x\|_2$ نظيمان متكافئان.

**********انتهت الأسئلة**********

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق
د. عائدة صائمة

طرطوس في 2019/8/28

مكتبة A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم التصحيح لمادة التحليل التابعي (1) لطلاب سنة ثالثة
للدورة الثانية العام الدراسي 2018 - 2019

س1: (30 درجة) ليكن $f: C[2,5] \to \mathbb{R}$ التابعي المعرف بالشكل $f(x) = x(t_1)$ حيث t_1 عدد مثبت من المجال $[2,5]$ والمطلوب أثبت أن f تابعي محدود؟

الحل: f تابعي خطي لأنه:

(5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in C[2,5]$:

$$(\alpha x + \beta y)(t_1) = (\alpha x)(t_1) + (\beta y)(t_1)$$

$$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)(t_1) = \alpha x(t_1) + \beta y(t_1) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

f محدود: لكي نثبت أن f محدود يجب أن نثبت وفق التعريف التالي:

$\exists c \in \mathbb{R}, c > 0$; $|f(x)| \le c\|x\|$; $\forall x \in C[2,5]$

$$|f(x)| = |x(t_1)| \le \max_{2 \le t \le 5} |x(t)| = \|x\|$$

أي أن:

$$|f(x)| \le \|x\| \quad (*)$$

وبوضع $c = 1$ نجد أن الشرط التالي:

$c = 1$; $|f(x)| \le \|x\|$; $\forall x \in C[2,5]$

محقق وبالتالي f محدود.

(10) حساب $\|f\|$: من المتراجحة $(*)$ نجد أن:

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \le 1$$

بما أنه لا يوجد عدد أصغر من أو يساوي 1 يحقق المتراجحة السابقة فإن:

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in C[2,3] \\ \|x\| = 1}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \le 1$$

(5) أي أن:

$$\|f\| \le 1 \quad (I)$$

من جهة أخرى من المتراجحة التالية:

$$|f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\|$$

نحصل على المتراجحة التالية:

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \|f\|$$

وبوضع $x = x_0 = 1$ وتعويضه في المتراجحة السابقة نجد أن:

$$\|f\| \ge \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \|f\| \ge 1 \quad (II)$$

من (I) و (II) نجد أن:

$$\|f\| = 1$$

(15)

مكتبة A to Z

تمرين 1 (30 درجة): اذكر خواص المتتاليات المتقاربة في فضاء متري (X,d) = ... وبرهن عليها.

الحل: إذا كان (X,d) = X فضاءً متريًا ما يلي:

أ: كل متتالية متقاربة في X محدودة ونهايتها وحيدة (5)

ب: إذا كان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متتاليتان بحيث أن $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ و $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ (5)

فإن: $$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$$

البرهان: أولاً: لنبرهن أن المتتالية المتقاربة في X محدودة ومن أجل ذلك:

لنفترض أن $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية من نمط X متقاربة من النقطة $x \in X$ و

$(x_n)_{n\geq 1}$ محدودة.

بما أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ و $x \in X$ وبالتالي فإن الشرط التالي محقق

$\exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x) < \varepsilon$

لنفرض $\varepsilon = 1$ $\Leftarrow$ $d(x_n,x) < 1$ وبالتالي هذا يعني أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ تقع ضمن الكرة المفتوحة $B(x,1)$ ما عدا عدد منته من الحدود $x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}$

الآن نفرض أن: $\max\{d(x_1,x), d(x_2,x), \dots, d(x_{n_0-1},x)\}$

وبالتالي فإن: (5)

$d(x_n,x) < 1 + a$

$\Leftarrow$ جميع حدود المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ تقع ضمن كرة مفتوحة وبالتالي $(x_n)_{n\geq 1}$

لنبرهن الآن أن نهاية المتتالية المتقاربة $(x_n)_{n\geq 1}$ في X وحيدة

من أجل ذلك لنفرض أن $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

$d(x,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\Leftarrow$ $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ و

$d(x,y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\Leftarrow$ $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$

وبالتالي حسب متراجحة المثلث فإن:

$$0 \leq d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y)$$

وبالنهاية في أطراف المتراجحة السابقة نجد أن:

$$d(x,y) = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(5)

مكتبة A to Z

ثانياً: لدينا $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ، $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ وبما أن x_n, y_n, x, y تنتمي الفضاء X وبالتالي فإن المتراجحة التالية محققة:

$$d(x_n,y_n) \le d(x_n,x)+d(x,y)+d(y,y_n)$$

وبالتالي:

$$d(x_n,y_n)-d(x,y) \le d(x_n,x)+d(y_n,y) \quad (I)$$

ونثبت الطريقة بأن: $x, x_n, y, y_n \in X$ فإن المتراجحة التالية محققة:

$$d(x,y) \le d(x,x_n)+d(x_n,y_n)+d(y_n,y) \Rightarrow$$

$$d(x,y)-d(x_n,y_n) \le d(x_n,x)+d(y_n,y)$$

وبضرب طرفي المتراجحة السابقة بـ (-1) نجد أن:

$$d(x_n,y_n)-d(x,y) \ge -[d(x_n,x)+d(y_n,y)] \quad (II)$$

أي أن:

$$-[d(x_n,x)+d(y_n,y)] \le d(x_n,y_n)-d(x,y) \le d(x_n,x)+d(y_n,y)$$

$$\le |d(x_n,y_n)-d(x,y)| \le d(x_n,x)+d(y_n,y)$$

وبأخذ النهاية في أطراف المتراجحة السابقة نجد أن:

$$|d(x_n,y_n)-d(x,y)|=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=d(x,y)$$

(5)

تمرين: (30 درجة) في الفضاء $\mathbb{R}^4$ لنعرف التطبيقين التاليين:

$$\sum_{i=1}^{4}|x_i| = |x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{4}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$$

والمطلوب برهان أن $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ نظيمان متكافئان.

الحل: نقول عن النظيمين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ أنهما متكافئان إذا وجد عددان حقيقيان a و b بحيث تتحقق المتراجحة التالية:

$$a\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le b\|x\|_2 \quad \text{و} \quad x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{R}^4$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{4}|x_i| = \sum_{i=1}^{4}|x_i\cdot 1| \le \left(\sum_{i=1}^{4}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{4}|1|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

حسب متراجحة هولدر للمجاميع المنتهية

$$\Rightarrow \|x\|_1 \le \sqrt{4}\cdot\|x\|_2 \quad (I)$$

(15)

$$\|x\|_2 = \left\|\sum_{i=1}^{4}x_i e_i\right\|_2 \le \sum_{i=1}^{4}|x_i|\cdot\|e_i\|_2 \le \sum_{i=1}^{4}|x_i| = \|x\|_1$$

$$e_1=(1,0,0,0),\ e_2=(0,1,0,0)$$

$$e_3=(0,0,1,0),\ e_4=(0,0,0,1)$$

$$\Rightarrow \|x\|_2 \le \|x\|_1 \quad (II)$$

(15)

مكتبة A to Z

تابع تمرين 2

$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{4}\,\|x\|_2$

من (I) و (II) نجد أن :

بحيث أن $a=1$ و $b=\sqrt{4}$ وبالتالي النظيمان $\|\|_1$ و $\|\|_2$ ..

ملاحظة (1) الطالب الذي يكتب في السؤال الثاني الخاصة التالية : (5)

كل متتالية متقاربة في فضاء متري $X=(X,d)$ هي متتالية كوشي (يأخذ عليه 5 الإثبات : لنفرض أن $(x_n)_{n\ge1}$ متتالية من الفضاء المتري X وأن $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ بحيث $x \in X$ ولنبرهن أن $(x_n)_{n\ge1}$ هي متتالية كوشي.

بما أن $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ وبالتالي فإن الشرط التالي محقق :

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ ;\ \forall n \ge N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon/2$

حسب متراجحة المثلث إذا كان $n, m > N(\varepsilon)$ فإن :

$d(x_m, x_n) \le d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

إذا أصبح لدينا :

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n, m \ge N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$

وبالتالي المتتالية $(x_n)_{n\ge1}$ هي متتالية كوشي في الفضاء المتري ..

ملاحظة (2) : جميع الأسئلة الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التنقيط

الموافق لـ 18/1/2019

مدرس المادة : د. عائدة علي عيادة

مكتبة A to Z

الجمهورية العربية السورية　　امتحان التحليل التابعي (1)　　المدة: 120 دقيقة
جامعة طرطوس　　لطلاب السنة الرابعة_رياضيات　　الدرجة العظمى:90
كلية العلوم　　الفصل الأول　　اسم الطالب:

****

السؤال الأول: (20درجة)

وضح ماذا تعني الرموز والمصطلحات التالية: $B(A)$، $\bar{B}(O,1)$، $D(f)$، $\|T\|$، $N(T)$، X^{**}.

السؤال الثاني: (20درجة)

أكمل العبارات التالية:

1- متراجحة هولدر للمجاميع هي : ، 2-الأسان المترافقان هما:
3-الفضاء المنظم المنتهي البعد هو : ، 4- الدالي الحقيقي هو:
5- الاستمرارية والمحدودية مفهومان--------.
6- كل متتالية لكوشي في فضاء باناخ تكون---------.
7- توطئة التراكيب الخطية هي:
8- الشرط اللازم والكافي حتى يكون المؤثر العكسي $T^{-1}: R(T) \to D(T)$ موجوداً هو:

السؤال الثالث: (30درجة)

أولاً: عرف الفضاء المنظم المتراص ، ثم برهن على صحة ما يلي:
كل مجموعة جزئية متراصة M في أي فضاء منظم X تكون مغلقة ومحدودة.

ثانياً: إذا كان T مؤثراً خطياً، فبرهن أنه: إذا كان $dimD(T) = n < \infty$ فإن $dimR(T) \leq n$.

السؤال الرابع:(20 درجة)

ليكن $f: R^5 \to R$ ،دالي معرف بالشكل :
$f(x) = x.\alpha = \sum_{i=1}^{5} x_i\alpha_i \; ; \forall\, x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in R^5$ و
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in R^5$ عنصر ثابت من R^5 ،والمطلوب أثبت أن f دالي خطي ومحدود ،وأوجد نظيمه.

**********انتهت الأسئلة**********

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق.
د. عائدة صائمة

طرطوس في 2019/1/27

عائدة A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم تصحيح مادة التحليل التابعي (1) لطلاب سنة ثالثة
فصل الأول للعام الدراسي 2018 - 2019

س1: (20 درجة): وضح ما اتقني الرموز والمصطلحات التالية: $\overline{B}(0,1) \subset B(A)$ ، $X^{**} \subset N(T) \subset \|T\| \subset D(f)$

الحل: $B(A)$: فضاء الدوال المعرفة والمحدودة على مجموعة معرفة A والتابعة لمتحول مستمر واحد أي: $B(A) = \{x ; x = x(t) + \exists k > 0 ; |x(t)| < k ; \forall t \in A\}$ (2)
والمعرف عليه المترك d بالشكل التالي:
$$d(x,y) = \sup_{t \in A} |x(t) - y(t)| ; \forall x, y \in B(A)$$ (1)
$\overline{B}(0,1)$: كرة الواحدية المغلقة التي مركزها 0 ونصف قطرها 1 أي:
$$\overline{B}(0,1) = \{x \in X ; d(x,0) \leq 1\} \subset X$$ (2)
(X,d) فضاء متري و $\overline{B}(0,1)$ (2)
$f: D(f) \subset X \longrightarrow K$ (1) إذا كان: $D(f)$ حيث X فضاء خطي معرف فوق الحقل K
أن $D(f)$ هي مجموعة التعريف للتابع f حيث $D(f)$ فضاء خطي جزئي من X. (2)
$\|T\|$: ولمفهوم النظيم للمؤثر الخطي المحدود: $T: D(T) \subset X \longrightarrow R(T) \subset Y$ (2) حيث X, Y فضاءان خطيان معرفان فوق نفس الحقل ويعطى بالعلاقة:
$$\|T\| = \sup_{x \in D(T) \atop x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$ (1)
أو بالعلاقة:
$$\|T\| = \sup_{x \in D(T) \atop \|x\| = 1} \|Tx\|$$ (1)
$N(T)$: وهو الفضاء الصفري للمؤثر الخطي $T: D(T) \subset X \longrightarrow R(T) \subset Y$ (2) حيث X و Y فضاءان خطيان معرفان فوق نفس الحقل K
$$N(T) = \{x \in D(T) ; Tx = 0_{R(T)}\}$$ (2)
X^{**}: وهو فضاء جميع الدالیات الخطية المعرفة على X^* أي: (1)
$$X^{**} = \{g : g : X^* \longrightarrow K\}$$ (2)
و g دالي خطي
ويدعى الفضاء الثنوي الجبري لـ X^* والفضاء الثنوي الجبري الثاني للفضاء الخطي

س2: (20 درجة): أكمل العبارات التالية: 1- متراجحة الهولدر للمتتاليات هي: 2- الأسان الفضاء
3- الفضاء الخطي الطبيعي البعد هو 4- الدالي الحقيقي هو 5- الاستمرارية والمحدودية متكافئتان
6- كل متتالية للوشي في فضاء باناخ تكون 7- نظرية التراكيب الخطية هي:
8- الشرط اللازم والكافي ليكون المؤثر العكسي $T^{-1}: R(T) \longrightarrow D(T)$ حيث T هو كذا هو:

الحل: 1- $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ (2)
حيث $x = (\xi_i)_{i \geq 1}$ متتالية في الفضاء ℓ^p و $y = (\eta_i)_{i \geq 1}$ متتالية في الفضاء ℓ^q

مكتبة أطلس

(2)

- العددان الحقيقيان p و q حيث $1 < p, q < \infty$ والمرتبطان وفق العلاقة:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

- هو فضاء خطي X معرف فوق الحقل K حيث $\dim X = n < \infty$ وجود (1) (2)

ينظم: $X \longrightarrow \mathbb{R}^+ : \|\ \|$ والذي يحقق الشروط التالية: (2)

$\forall x \in X\ (\|x\| \geq 0 \quad \text{و} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0)$

$\forall \lambda \in K\ \forall x \in X\ (\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|)$

$\forall x, y \in X\ (\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|)$

- الدالي الحقيقي الموصل مؤثر $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ حيث X فضاء خطي حقيقي (2)

- متطابقتان بالنسبة للمؤثرات الخطية T متقاربة إلى نقطة منه (2) (2)

- لتكن $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطياً من الأشعة من فضاء منظم X (أياكان بعده) عندئذٍ يوجد عدد موجب c بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\|q_1 x_1 + \cdots + q_n x_n\| \geq c\,(|q_1| + \cdots + |q_n|) \quad ; \forall q_i \in K$$

أي

$$\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right\| \geq c\left(\sum_{i=1}^{n} |q_i|\right) \quad ; \forall q_i \in K\right)$$

- 1

$$Tx = 0 \Rightarrow x = 0$$ (2)

(3 علامات) أولاً: عرف الفضاء المنظم التام ثم برهن على صحة مايلي:

كل مجموعة جزئية متراصة M في أي فضاء منظم X تكون مغلقة ومحدودة.

ثانياً: إذا كان T مؤثر خطي، فبرهن أنه إذا كان $\dim D(T) = n < \infty$ فإن $\dim R(T) \leq n$

الحل

أولاً: (1) نقول عن الفضاء المنظم X أنه متراص إذا وجدت كل متتالية في X متتالية جزئية متقاربة إلى نقطة في X. (6)

(2) برهان كل مجموعة جزئية متراصة M في أي فضاء منظم X تكون مغلقة ومحدودة:

الفرض: X فضاء منظم و M مجموعة جزئية متراصة في X

الطلب: أ. M مغلقة ب: M محدودة.

برهان أ: تكون M مغلقة إذا وفقط إذا كانت $M = \bar{M}$

نعلم أن $M \subseteq \bar{M}$ دوماً ولبرهان أن $M \supseteq \bar{M}$ (2)

$\forall x \in \bar{M}$ وبالتالي حسب تعريف الالتصاق - المجموعة المغلقة - توجد متتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ من نقط المجموعة M بحيث يكون $x_n \longrightarrow x$ وبما أن M متراصة وبالتالي أي $(x_n)_{n\geq 1}$ تملك متتالية جزئية متقاربة إلى نقطة من M وبما أن نهاية المتتالية وحيدة وبالتالي $x \in M$ إذاً: $\bar{M} \subseteq M$

برهان ب: لنفرض جدلاً أن M مجموعة غير محدودة وبالتالي يوجد في M متتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ غير محدودة بحيث يكون: (2)

واحدة على الأقل

$\forall n \in \mathbb{N}$ و M ما أمثل ط عنصر مثبت ب $\|x_n - b\| > c$

وبالتالي لا يمكن استخراج أية متتالية جزئية متقاربة من هذه المتتالية لأن هذه المتتالية الجزئية لو تقاربت ستكون محدودة، وهذا يناقض الفرض بكون M مجموعة متراصة

وبالتالي الفرض خاطئ و M مجموعة محدودة (4)

ثانياً: الفرض: $T: D(T) \to R(T)$ مؤثر خطي و $\dim D(T) = n < \infty$

الطلب $\dim R(T) \leq n$

البرهان: لتكن $\{y_1, y_2, \dots, y_{n+1}\}$ مجموعة كيفية من المجال $R(T)$ عندئذ توجد مجموعة من العناصر $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ من $D(T)$ وبحيث أن:

$y_i = Tx_i$; $i = 1, 2, \dots, n+1$ (4)

ولكن الفرض لدينا $\dim D(T) = n$ وبالتالي المجموعة $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ مرتبطة خطياً إذاً:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0 \quad (*)$$

حيث أن الأعداد $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ ليست جميعها معدومة. (2)

بما أن T مؤثر خطي $T0 = 0$ وبالتالي بتطبيق T على طرفي العلاقة $(*)$ نجد أن:

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = T0 = 0$$

$$\alpha_1 Tx_1 + \alpha_2 Tx_2 + \dots + \alpha_{n+1} Tx_{n+1} = 0$$

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0 \quad (4)$$

من العلاقة الأخيرة وبما أنه ليست جميع الأعداد $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ معدومة وبالتالي فإن المجموعة $\{y_1, y_2, \dots, y_{n+1}\}$ مرتبطة خطياً في $R(T)$ وبما أن هذه المجموعة كيفية وبالتالي نجد أن $R(T)$ لا يحوي أي مجموعة جزئية مستقلة خطياً مؤلفة من $n+1$ أو أكثر من العناصر وهذا يعني أن $\dim R(T) \leq n$ (2)

مثال: (20 درجة): ليكن $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ دالي معرف بالشكل:

$f(x) = x \cdot a = \sum_{i=1}^{5} x_i a_i$; $\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$

و $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5$ عنصر ثابت من $\mathbb{R}^5$ والمطلوب إثبات أن f دالي خطي ومحدود ثم أوجد نظيمه.

الحل: f دالي خطي لأنه $\forall \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ و $\forall x = (x_1, \dots, x_5), y = (y_1, \dots, y_5) \in \mathbb{R}^5$:

$$f(\beta x + \gamma y) = f((\beta x_1 + \gamma y_1, \beta x_2 + \gamma y_2, \beta x_3 + \gamma y_3, \beta x_4 + \gamma y_4, \beta x_5 + \gamma y_5))$$

$$= \sum_{i=1}^{5} (\beta x_i + \gamma y_i) a_i = \sum_{i=1}^{5} (\beta (x_i a_i) + \gamma (y_i a_i)) =$$

$$= \beta \sum_{i=1}^{5} x_i a_i + \gamma \sum_{i=1}^{5} y_i a_i = \beta f(x) + \gamma f(y) \quad (6)$$

مكتبة A to Z

f محدود : أي أنه يوجد c بحيث $\exists c \in \mathbb{R}; c>0$ و $|f(x)| \le c.\|x\|; \forall x \in \mathbb{R}^5$ (2)

لدينا $|f(x)| = |x \cdot a| = \left|\sum_{i=1}^{5} x_i a_i\right| \le \sum_{i=1}^{5} |x_i a_i| \le$ (4)

حسب متراجحة هولدر للمجاميع ذات $p=q=2$

$$\left(\sum_{i=1}^{5} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{5} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\| \cdot \|a\| = c.\|x\|$$

أي أن :

$|f(x)| \le c.\|x\|$; $c = \|a\| > 0$ وبالتالي f محدود.

إعادة تنظيم f أي $\|f\|$ لدينا :

$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \|a\|$; $x \neq 0 \Leftarrow |f(x)| \le \|a\|.\|x\|$

وبأخذ الحد الأعلى (sup) للعلاقة السابقة من أجل جميع العناصر x من $\mathbb{R}^5$ وبحيث $\|x\| = 1$ نجد أن $\|f\| = \sup |f(x)| \le \|a\|$ (3) وبالتالي

(1) $\|f\| \le \|a\|$

من جهة أخرى بوضع $x = a$ في العلاقة $x \in \mathbb{R}^5$, $\|x\| = 1$

$\|f\| \ge \frac{|f(x)|}{\|x\|}$ نجد أن :

$$\|f\| \ge \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\left|\sum_{i=1}^{5} a_i^2\right|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|$$

(3)

$\Rightarrow$ (II) $\|f\| \ge \|a\|$

من (I) و (II) نجد أن : (2)

$$\|f\| = \|a\|$$

ملاحظة: جميع الأسئلة والتمارين الواردة في سلم التصحيح لها أكثر من طريقة ربما أطول للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح.

طرطوس في 7/1/2019

مدرس المقرر: د. عائشة صالحة

مكتبة A to Z

الجمهورية العربية السورية — امتحان التحليل التابعي (1) — المدة: ساعتان
جامعة طرطوس — لطلاب الرابعة-رياضيات — الدرجة العظمى:90درجة
كلية العلوم — امتحان الفصل الثاني — اسم الطالب:

****

السؤال الأول: (20 درجة)

أثبت صحة النظرية التالية:

إذا كان: $f:D(f)\to R$ دالياً خطياً، حيث: $D(f)\subset X$ و X فضاء منظم ،عندئذ فإن : f مستمراً إذا وفقط إذا كان محدوداً.

السؤال الثاني: (45 درجة)

أولاً: اذكر خواص متتاليات كوشي في الفضاء المتري $(R,|\ |)$.
ثانياً: اذكر العلاقة بين الفضاء المنظم والفضاء المتري ثم برهن عليها.
ثالثاً: عرف المجموعة المتراصة في فضاء منظم منتهي البعد.
رابعاً: إذا كان $T:D(T)\subseteq X\to Y$ مؤثراً خطياً ، فاذكر علاقتين لحساب نظيم المؤثر T .
خامساً: عرف ومثل هندسياً الكرة الواحدية في الفضاء المنظم R^2 حيث يعطى النظيم وفق العلاقة التالية: $\|x\|=|x_1|+|x_2|=1\ ;\forall x=(x_1,x_2)\in R^2$

السؤال الثالث: (25 درجة)

لنعرف على الفضاء ℓ^2، المجموعة S بالشكل التالي:

$$S=\left\{x=(x_n)_{n\geq 1}\in\ell^2\ ;\sum_{n=1}^{\infty}x_n=0\right\}$$ والمطلوب:

1- عرف الفضاء ℓ^2 ، ثم أثبت أن S فضاء خطي جزئي في ℓ^2 .
2- إذا كانت $x_n=\left(-1,\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n},0,0,\dots\right)$ فتحقق أن $x_n\in S$.

**********انتهت الأسئلة**********

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق.
د. عائدة صائمة

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم لتصحيح مادة التحليل الثاني ١١١
لطلاب سنوي للفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٧-٢٠١٨

السؤال الأول: (٢٥ درجة)

أثبت صحة الفقرة التالية:

إذا كان: $f: D(f) \to \mathbb{R}$ دالياً ما حيث: $D(f) \subset X$ و X فضاء منظم، عندئذٍ فإن: f مستمر إذا وفقط إذا كان محدوداً.

الحل: لزوم الشرط: الفرض: f دالي مستمر (١)
الطلب: f محدود.

البرهان: لنفرض جدلاً أن الدالي f غير محدود عندئذٍ توجد متتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ من عناصر $D(f)$ بحيث يكون:

$$|f(x_n)| > n\|x_n\| \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

الآن إذا وضعنا $u_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ حيث $n = 1, 2, \dots$ (٤)
عندئذٍ نجد أن:

$$\|u_n - 0_X\| = \|u_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|x_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

أي أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من 0_X (٥)
ولكن:

$$|f(u_n)| = \left|f\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right)\right| = \frac{1}{n\|x_n\|}|f(x_n)| > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1 \; ; n = 1, 2, \dots$$

وهذا يقتضي أن:
أي أن f ليس مستمراً وهذا يخالف الفرض وبالتالي الفرض خاطئ و f محدود.

كفاية الشرط: الفرض: f محدود (١)
الطلب: f مستمر

البرهان: لتكن x نقطة كيفية من $D(f)$ و $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية كيفية من عناصر $D(f)$ بحيث أن $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ (٦)
عندئذٍ يكون لدينا:

$$0 \leq |f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq c|x_n - x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

حيث c ثابت موجب لأن f محدود

وبالتالي: $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ أي أن f مستمر في المنظم الكيفي x من $D(f)$ (٣)
وبالتالي f مستمر.

السؤال الثاني: (٤٥ درجة)

أولاً: اذكر خواص متتاليات كوشي في الفضاء المتري (X, d)

ثانياً: اذكر العلاقة بين الفضاء المنظم والفضاء المتري ثم برهن عليها.

ثالثاً: عرف المجموعة المتراصة في فضاء متري ثم استنتج بعدها.

مكتبة A to Z

رابعاً: ليكن $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow Y$ مؤثراً خطياً، فاذكر علاقتين لحساب تنظيم المؤثر T.

خامساً: عرف وشكل هندسياً الكرة الواحدية في الفضاء المنظم $\mathbb{R}^2$ حيث يعطى التنظيم وفق العلاقة التالية: $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \|x\| = |x_1| + |x_2| = 1$

الحل: أولاً: 1) كل متتالية كوشي في الفضاء الذي $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ محدودة (5)

2) كل متتالية كوشي في الفضاء الذي $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ متقاربة (5) } لا تعلم منه

ثانياً: كل فضاء منظم X هو فضاء متري حاملته تعطى بالعلاقة: (3) $d(x,y) = \|x - y\| \; ; \; \forall x, y \in X$

البرهان: نبرهن أن d تحقق شروط المسافة:

أ: من تعريف d نجد أن $d(x,y) \geq 0$ لأن $\|x - y\| \geq 0$ (1) وهي دالة معينة عن سالبة.

ب: $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ (2)

ج: $d(x,y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \, \|y - x\| = \|y - x\| = d(y,x) \; ; \; \forall x, y \in X$ (2)

د: $d(x,y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$ (2)

$\leq d(x,z) + d(z,y) \; ; \; \forall x, y, z \in X$

وبالتالي d تحقق شروط المسافة إذاً (X, d) فضاء متري.

ثالثاً: إذا كان X فضاء منظم منتهي البعد أي $\dim X = n$ عندئذ نقول المجموعة الجزئية $M \subseteq X$ مجموعة متراصة في X إذا كانت M مجموعة مغلقة ومحدودة في هذا الفضاء. (3)

رابعاً: العلاقة الأولى:

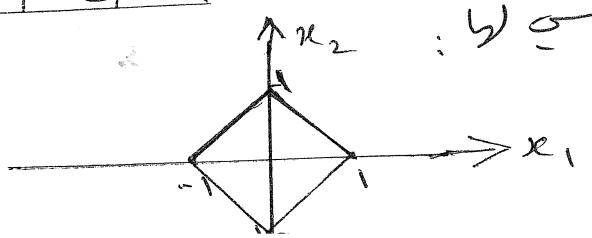
العلاقة الثانية: (5) $\|T\| = \sup_{\substack{\|x\| \neq 0 \\ x \in D(T)}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$

خامساً: (5) $\|T\| = \sup_{x \in D(T)} \|Tx\|$

تعريف: $B(0,1) = \{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \|x\| = |x_1| + |x_2| = 1 \}$ (5)

x_1	0	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	1	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

التمثيل الهندسي لها: (5)



مكتبة A to Z

السؤال الثالث: (5 2 درجة)

لنعرف الفضاء ℓ^2 والمجموعة S بالشكل التالي:

$S=\{x=(x_n)_{n\geq 1}\in \ell^2 ;\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$ ، المطلوب:

أ: عرف الفضاء ℓ^2 ثم أثبت أن S فضاء خطي جزئي في ℓ^2.

ج: إذا كانت $x_n=(-1,\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n},0,0,\dots)$ فتحقق أن $(x_n)_{n\geq 1}\in S$.

الحل: الطلب الأول أ: $\ell^2=\{x, x=(x_n)_{n\geq 1} + \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty\}$ (6)

ج: إثبات أن S فضاء خطي جزئي من ℓ^2

من أجل أي $x=(x_n)_{n\geq 1}$ ، $y=(y_n)_{n\geq 1}$ من المجموعة S ، α,β من K حيث $K=\mathbb{C}$ أو $K=\mathbb{R}$ لنبرهن أن $(\alpha x_n+\beta y_n)_{n\geq 1}\in S$:

لدينا $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha x_n+\sum_{n=1}^{\infty}\beta y_n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}x_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ (8)

$=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0 \Rightarrow (\alpha x_n+\beta y_n)_{n\geq 1}\in S$

بالتالي S فضاء خطي جزئي من ℓ^2

الطلب الثاني: في نكمن $(x_n)_{n\geq 1}\in S$ يجب أن نتحقق أن $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=0$

لدينا $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=-1+\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}}_{n\text{ مرة}}+0+0=-1+n\left(\frac{1}{n}\right)=-1+1=0$ (9)

$\Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}\in S$

ملاحظة: جميع العناصر الواردة في سلم التصحيح لها كذلك طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لأي سلم التصحيح.

أطروحس في 15/ 6 / 2018

مدرس المقرر: د. عائدة علي صالحة

مكتبة A to Z

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان التحليل التابعي (1)
لطلاب السنة الرابعة-رياضيات
الدورة الثالثة

المدة: ساعتان
الدرجة العظمى:75
اسم الطالب:

السؤال الأول: (35 درجة)

إذا كان $(X,\|.\|_1)$ و $(Y,\|.\|_2)$ فضاءين منظمين وكان $Z=X\times Y=\{(x,y);\ x\in X\wedge y\in Y\}$ وعرفنا على Z الدالة : $\|\ \|:Z\longrightarrow R$ بالشكل التالي:

$\forall z\in Z\ ;\ \|z\|=\|(x,y)\|=\|x\|_1+\|y\|_2$ ، والمطلوب:

1- تحقق أن $(Z,\|.\|)$ فضاء منظم.

2- برهن أن $z_n=(x_n,y_n)$ متقاربة من $z=(x,y)$ إذا وفقط إذا كان $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ و $y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}y$.

السؤال الثاني: (25 درجة)

ليكن المؤثر : $T:C[0,1]\longrightarrow C[0,1]$ معرف بالشكل التالي: $Tx=\int_0^1\left(t^2+s^2\right)x(s)\,ds$

، أثبت أن المؤثر T خطي ومحدود ، وأوجد نظيمه.

السؤال الثالث:(15 درجة)

برهن ما يلي : إذا كان T مؤثراً خطياً فإن المدى $R(T)$ فضاء خطي جزئي من الفضاء الخطي الذي يقع فيه.

---انتهت الأسئلة---

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2017/8/26

جامعة طرطوس
كلية العلوم

سلم لتصحيح طارة القليل (الباب 1) لطلاب سنة 1
الدورة الثالثة للعام الدراسي 2016 - 2017

السؤال الأول: (5 درجات)

إذا كان $(X, \|\cdot\|_1)$ و $(Y, \|\cdot\|_2)$ فضاءين منظمين وكان:
$Z = X \times Y = \{(x,y) ; x \in X \wedge y \in Y\}$ وعرفنا على Z التابع $\|\cdot\| : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ بالعلاقة التالية:
$\forall z \in Z : \|z\| = \|x\|_1 + \|y\|_2$

والمطلوب: أ) تحقق أن $(Z, \|\cdot\|)$ فضاء منظم.

ب) برهن أن $z_n = (x_n, y_n)$ متتالية متقاربة في $(Z, \|\cdot\|)$ من أجل $z = (x,y)$ إذا وفقط إذا كانت $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ في الفضاء $(X, \|\cdot\|_1)$ و $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ في الفضاء $(Y, \|\cdot\|_2)$.

الحل: الحل الأول: نتحقق أن $\|\cdot\|$ يحقق مسلمات النظيم:

أ) $\forall z = (x,y) \in Z$ فإن:
$\|z\| = \|(x,y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2 \geq 0 + 0 = 0$ (3)

كذلك
$\|z\| = 0 \Leftrightarrow \|(x,y)\| = 0 \Leftrightarrow \|x\|_1 + \|y\|_2 = 0$ (2)
$\|x\|_1 = 0 \wedge \|y\|_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow z = (x,y) = (0,0) = 0$ (2)

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ و $\forall z = (x,y) \in Z$:
$\|\alpha z\| = \|\alpha(x,y)\| = \|(\alpha x, \alpha y)\| = \|\alpha x\|_1 + \|\alpha y\|_2$ (2)
$= |\alpha| \|x\|_1 + |\alpha| \|y\|_2 = |\alpha| (\|x\|_1 + \|y\|_2) = |\alpha| \cdot \|z\|$ (2)

$\forall z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2) \in Z$: (1)
$\|z_1 + z_2\| = \|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\| = \|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\|$ (2)
$= \|x_1 + x_2\| + \|y_1 + y_2\|_2 \leq \|x_1\|_1 + \|x_2\|_1 + \|y_1\|_2 + \|y_2\|$ (1)
$\leq (\|x_1\|_1 + \|y_1\|_2) + (\|x_2\|_1 + \|y_2\|_2)$ (2)
$\leq \|z_1\| + \|z_2\|$

وبالتالي $\|\cdot\|$ النظيم على Z إذاً $(Z, \|\cdot\|)$ فضاء منظم (1)

الطلب الثاني: لدراسة الوصل: $z_n=(x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}z=(x,y)$ في الفضاء $(Z,\|\ \|)$

الطلب: $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ في الفضاء $(X,\|\ \|_1)$، $y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}y$ في الفضاء $(Y,\|\ \|_2)$ (1)

من الفرض لدينا: $z_n\xrightarrow[n\to\infty]{}z$ في الفضاء $(Z,\|\ \|)$ وبالتالي لبرهان التكافؤ نحقق (1)

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N};\ \forall n>N(\varepsilon)\Rightarrow\|z_n-z\|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\|(x_n,y_n)-(x,y)\|<\varepsilon \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow\|(x_n-x,y_n-y)\|<\varepsilon \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow\|x_n-x\|_1+\|y_n-y\|_2<\varepsilon \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow\|x_n-x\|_1<\varepsilon+\|y_n-y\|_2<\varepsilon \quad (1)$$

وبالتالي: $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ في الفضاء $(X,\|\ \|_1)$، $y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}y$ في الفضاء $(Y,\|\ \|_2)$ (1)

كفاية النشاط: من الفرض $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ في الفضاء $(X,\|\ \|_1)$، $y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}y$ في الفضاء $(Y,\|\ \|_2)$ (1)

الطلب: $z_n=(x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}z=(x,y)$ في الفضاء $(Z,\|\ \|)$ (1)

من الفرض لدينا $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ في الفضاء $(X,\|\ \|_1)$، $y_n\to y$ في الفضاء $(Y,\|\ \|_2)$

وبالتالي فإن الرمز ∀ التاليان محققان:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_1(\varepsilon)\in\mathbb{N};\ \forall n>N_1(\varepsilon)\Rightarrow\|x_n-x\|_1<\frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_2(\varepsilon)\in\mathbb{N};\ \forall n>N_2(\varepsilon)\Rightarrow\|y_n-y\|_2<\frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

وأخيرا $N_0=\max\{N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon)\}$ يتحقق:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_0\in\mathbb{N};\ \forall n>N_0\Rightarrow\|x_n-x\|_1+\|y_n-y\|_2<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad (1)$$

$$\Rightarrow\|(x_n-x,y_n-y)\|<\varepsilon\Rightarrow\|z_n-z\|<\varepsilon \quad (1)$$

وبالتالي $z_n\xrightarrow[n\to\infty]{}z$ في الفضاء $(Z,\|\ \|)$ (1)

السؤال الثاني (25 درجة)

ليكن المؤثر $T: C[0,1] \to C[0,1]$ معرف بالشكل التالي:

$Tx = \int_0^1 (t^2+s^2)x(s)ds$ أثبت أن المؤثر T خطي ومحدود وأوجد نظيمه.

الحل: T خطي لأنه: $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ و $\forall x,y \in C[0,1]$:

$$T(\alpha x+\beta y) = \int_0^1 (t^2+s^2)(\alpha x+\beta y)(s)ds$$

$$= \int_0^1 (t^2+s^2)((\alpha x)(s)+(\beta y)(s))ds \quad (4)$$

$$= \int_0^1 (t^2+s^2)(\alpha x)(s)ds + \int_0^1 (t^2+s^2)(\beta y)(s)ds$$

$$= \alpha \int_0^1 (t^2+s^2)x(s)ds + \beta \int_0^1 (t^2+s^2)y(s)ds \quad (4)$$

$$= \alpha Tx + \beta Ty$$

T محدود: سنأخذ ذلك لتعريف التالي:

$\exists c \in \mathbb{R}^+ \; c>0; \; \|Tx\| \le c\|x\| \; ; \forall x \in C[0,1]$ (2)

لدينا $\|T(x(t))\| = \max_{0\le t\le 1} \left|\int_0^1 (t^2+s^2)x(s)ds\right|$

$$\le \max_{0\le t\le 1}|x(t)| \cdot \max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 (t^2+s^2)ds\right| =$$

$$\max_{0\le t\le 1}|x(t)| \cdot \max_{0\le t\le 1}\left|\left[t^2 s + \frac{s^3}{3}\right]_0^1\right| =$$

$$\max_{0\le t\le 1}|x(t)| \max_{0\le t\le 1}\left[t^2+\frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3}\|x\| \quad (4)$$

($\max_{0\le t\le 1}|x(t)| = \|x\|$, $\max_{0\le t\le 1}\left[t^2+\frac{1}{3}\right] = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$)

أي أن: $\|Tx\| \le c\|x\| \; ; \; c = \frac{4}{3} > 0$ (2)

وبالتالي T محدود.

لدينا $\|Tx\| \le \frac{4}{3}\|x\|$

إيجاد النظيم: بقسمة طرفي هذه العلاقة على $\|x\| \neq 0$ نجد أن

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le \frac{4}{3}$$

وبأخذ sup لطرفي العلاقة السابقة نجد أن:

$x \in C[0,1]$

$x \neq 0$

4

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in C[0,1] \\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \frac{4}{3}$$

(1) $\|T\| \leq \frac{4}{3}$ (3) أي أن :

من جهة أخرى بوضع $x = x_0 \neq 0$ حيث $\|x_0\| = 1$ في العلاقة

$$\|T\| \geq \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

نجد أن :

$$\|T\| \geq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|} = \|Tx_0\| = \max_{0\leq t\leq 1} \left|\int_0^1 (t^2+s^2)\,ds\right| :$$

$$= \max_{0\leq t\leq 1} \left|\left[t^2 s + \frac{s^3}{3}\right]_0^1\right| = \max_{0\leq t\leq 1} \left|t^3 + \frac{1}{3}\right| = \frac{4}{3}$$

(4) (II) $\|T\| \geq \frac{4}{3}$ أي أن

من (I) و (II) نجد أن : (1) $\|T\| = \frac{4}{3}$

السؤال الثالث : (15 درجة)

برهن ما يلي : إذا كان T مؤثر خطي فإن المجال $R(T)$ فضاء خطي جزئي من الفضاء الخطي الذي ينتمي منه.

الحل : المعطى : $T : D(T) \subseteq X \to R(T) \subseteq Y$ مؤثر خطي حيث X و Y فضاءان خطيان فوق نفس الحقل K. (2)

المطلوب (1) : $R(T) \subseteq Y$ فضاء خطي جزئي من الفضاء الخطي Y.

البرهان : لكي نبرهن أنه من أجل أي عددين α و β من K ومن أجل أي عنصرين y_1 و y_2 من $R(T)$ فإن (2)

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$$

بما أن $y_1, y_2 \in R(T)$ فإنه يوجد عنصران x_1, x_2 من $D(T)$ وعلى الترتيب بحيث يكون (4)

$y_1 = Tx_1$ ، $y_2 = Tx_2$ وبما أن T مؤثر خطي وبالتالي فإن :

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T\alpha x_1 + T\beta x_2$$

$$= T(\alpha x_1 + \beta x_2) \in R(T)$$

(4)

$D(T)$ (1) $\alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$: إذاً

(1) وبالتالي $R(T)$ فضاء خطي جزئي من الفضاء الخطي Y

ملاحظة : العبارات الواردة في سلم التصحيح ليست أكثر طريقة رياضية للحل وجميعها تأخذ نفس العلامة المخصصة لها في سلم التصحيح

طرطوس في 17/ 1 / 26

مدرسة المقرر : د. نائلة صابة

الجمهورية العربية السورية
جامعة طرطوس
كلية العلوم

امتحان التحليل التابعي (1)
لطلاب الرابعة-رياضيات
امتحان الفصل الثاني

المدة: ساعتان
الدرجة العظمى:75
اسم الطالب:

****

السؤال الأول: (20 درجة)

أثبت أن الفضاء المتري ℓ^3 هو فضاء تام ، حيث المترك المعرف على هذا الفضاء يعطى بالعلاقة: $d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^3\right)^{\frac{1}{3}}$ ، ثم تحقق فيما إذا كانت المتتالية $x_n=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},0,0,\ldots\right)$ متقاربة في هذا الفضاء.

السؤال الثاني: (20 درجة)

ليكن $f:R^3\to R$ دالي معرف بالشكل:

$\forall\ x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$; $f(x)=x.\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$ و $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in R^3$ عنصر ثابت من R^3 والمطلوب أثبت أن f دالي خطي ومحدود وأوجد نظيمه.

السؤال الثالث: (20 درجة)

أولا : عرف فضاء الجداء الداخلي ، ثم برهن أن: $\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\overline{\alpha}\langle x,y\rangle+\overline{\beta}\langle x,z\rangle$.

ثانيا: برهن أن كل متتالية متقاربة في أي فضاء متري هي متتالية لكوشي.

السؤال الرابع: (15 درجة)

عرف الكرة الواحدية في الفضاء المنظم ، ثم أثبت أن الكرة الواحدية المغلقة في الفضاء المنظم هي مجموعة محدبة.

**********انتهت الأسئلة**********

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق.

د. عائدة صائمة

طرطوس في 2017/6/14

جامعة طرطوس

كلية العلوم سلم التصحيح طاولة التحليل التابعية (1)

لطلاب س3، للفصل الثاني للعام ج.ر - ج.ر

السؤال الأول: (20 درجة)

أثبت أن الفضاء الشعاعي ℓ^3 هو فضاء تام مع ذكر المترى الذي يولد هذا الفضاء، علماً أن الفضاء ℓ^3 معرف بالعلاقة: $d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^3\right)^{\frac{1}{3}}$ ثم تحقق فيما إذا كانت المتالية: $x_n=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},0,0,\dots)$ متقاربة في هذا الفضاء.

الحل: ℓ^3 فضاء تام: لتكن $(x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}=(\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)},\dots)$ متالية كوشي في الفضاء ℓ^3 ولنبرهن أن هذه المتالية متقاربة أي تنتظم من الفضاء ℓ^3 علماً أن $(x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ متالية كوشي في الفضاء ℓ^3 وبالتالي فإن شرط كوشي يتحقق:

$$\forall\varepsilon>0;\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N};\ \forall n,m>N(\varepsilon)\Rightarrow d(x^{(n)},x^{(m)})<\varepsilon$$

أي أن:

$$\forall\varepsilon>0;\ \forall n,m>N(\varepsilon)\quad \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|^3\right)^{\frac{1}{3}}<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|^3<\varepsilon^3;\ \forall\varepsilon>0;\ \forall n,m>N(\varepsilon)$$

وبالتالي من أجل كل $k\in\mathbb{N}$ يكون لدينا:

$$\forall\varepsilon>0\ +\ \forall n,m>N(\varepsilon);\ |\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}|^3<\varepsilon^3$$

وبالتالي من أجل كل $i\in\mathbb{N}$ تتحقق المتباينة:

$$\forall\varepsilon>0\ +\ \forall n,m>N(\varepsilon);\ |\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|<\varepsilon$$

أي أنه من أجل كل $i\in\mathbb{N}$ فإن الشرط التالي محقق:

$$\forall\varepsilon>0;\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N};\ \forall n,m>N(\varepsilon)\Rightarrow|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|<\varepsilon$$

ونثبت الآن أن $\xi_i^{(m)}=(\xi_i^{(1)},\xi_i^{(2)},\dots)$ متالية عددية في الحقل $\mathbb{C}$ وبما أن $\mathbb{C}$ فضاء تام وبالتالي فإن المتالية $(\xi_i^{(m)})$ متقاربة أي تنتظم من هذا الفضاء ولتكن هذه النهاية:

$$\lim_{m\to\infty}\xi_i^{(m)}=\xi_i\ ;\ \exists i\in\mathbb{N},\ \exists\xi_i\in\mathbb{C}$$

وبتجميع هذه النهايات من أجل كل $i\in\mathbb{N}$ يمكننا تشكيل

$x = (\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$

- لبرهن الآن أن: $x \in \ell^3$ ، $x^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} x$

لاستفادة من التقارب (I) نجعل $n \to \infty$ نجد أن:

$\forall \varepsilon > 0$; $\exists N(\varepsilon)$; $\forall m > N(\varepsilon)$; $\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(m)} - \xi_i|^3 < \varepsilon^3$

ونجعل $k \to \infty$ نجد أن:

(II) $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)} - \xi_i|^3 < \varepsilon^3$; $\forall m > N(\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow d(x^{(m)}, x) < \varepsilon$; $\forall n > N(\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$

$x^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} x$

- لدينا حسب تعريف الفضاء ℓ^3 ، $x^{(m)} \in \ell^3$

وبالاعتماد على المتراجحة (II) نجد $x - x^{(m)} \in \ell^3$

(لأن ℓ^3 فضاء خطي) أي أن $x^{(m)} \in \ell^3$ من أجل $m > N$

أي أن كل متتالية للعناصر $(x^{(m)})_{m\geq 1}$ من الفضاء ℓ^3 متقاربة إذا تحقق الشرط التالي

$x = x^m - x + x^{(m)} \in \ell^3$

ℓ^3 فضاء تام.

- لنتحقق من أن x_n متقاربة في هذا الفضاء

من أجل $m > n$ لدينا:

$x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$

$x_m = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots)$

$d(x_m, x_n) = (|\frac{1}{n+1}|^3 + |\frac{1}{n+2}|^3 + \dots + |\frac{1}{m}|^3 + 0 + 0 + \dots)^{\frac{1}{3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

وبالتالي فإن المتتالية (x_n) متقاربة في هذا الفضاء ℓ^3

السؤال الثاني: (05 درجات)

نعتبر $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة بالشكل:

$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; $f(x) = x \cdot a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$ و

$a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ عنصر ثابت من $\mathbb{R}^3$ والمطلوب أثبت أن f دالة خطية ومستمرة

ثم أوجد نظيمها.

ب) إثبات خطية f:

$\forall \beta, \gamma \in \mathbb{R} \; \forall x, y \in \mathbb{R}^3 \; ; x = (x_1, x_2, x_3) \; y = (y_1, y_2, y_3)$

$f(\beta x + \gamma y) = f(\beta x_1 + \gamma y_1, \beta x_2 + \gamma y_2, \beta x_3 + \gamma y_3)$

$= (\beta x_1 + \gamma y_1)\alpha_1 + (\beta x_2 + \gamma y_2)\alpha_2 + (\beta x_3 + \gamma y_3)\alpha_3$

$= \beta(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) + \gamma(y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3)$

$= \beta f(x) + \gamma f(y)$ (6)

أ) وجود $\alpha \in \mathbb{R}^3$; $c > 0$; $|f(x)| \le c \cdot \|x\| \; ; \forall x \in \mathbb{R}^3$ (2)

لدينا $|f(x)| = |x \cdot \alpha| = |x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3| = \left|\sum_{i=1}^{3} x_i\alpha_i\right| \le$

حسب متباينة هولدر للجداءات السلمية $p = q = 2$

$\le \left(\sum_{i=1}^{3} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} |\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\| \cdot \|\alpha\| = c \cdot \|x\|$ (4)

أي أن: $|f(x)| \le c \cdot \|x\| \; ; c = \|\alpha\| > 0$

وبالتالي فحسب تعريف النظيم لدينا: $|f(x)| \le \|\alpha\| \cdot \|x\|$ (1)

$\Rightarrow \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \le \|\alpha\| \; ; x \ne 0$

بأخذ الحد الأعلى (sup) لكل طرفي العلاقة السابقة من أجل جميع x من $\mathbb{R}^3$

$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \le \|\alpha\| \Rightarrow \boxed{\|f\| \le \|\alpha\|}$ I (3)

$\|f\| \ge \dfrac{|f(x)|}{\|x\|}$; $x = \alpha$ في العلاقة

$\|f\| \ge \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} = \dfrac{|f(\alpha)|}{\|\alpha\|} = \dfrac{\left|\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2\right|}{\|\alpha\|} = \dfrac{\|\alpha\|^2}{\|\alpha\|} = \|\alpha\|$

$\boxed{\|f\| \ge \|\alpha\|}$ II (3)

من I و II نجد: $\|f\| = \|\alpha\|$ (1)

السؤال الثالث (20 درجة)

أولاً: نعرف فضاء الجداء الداخلي كما يلي: $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha}\langle x, y \rangle + \bar{\beta}\langle x, z \rangle$ أيضاً، برهن أن كل متتالية متقاربة في أي فضاء متري هي متتالية كوشي.

ثانياً: أولاً نذكر التعريف: $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاء جداء داخلي إذا كان X فضاء شعاعي فوق الحقل العددي k و $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow k$, $(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle$ تحقق الشروط التالية:

1- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (1)

2- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ (1)

3- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (1)

4- $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ و $\langle x, x \rangle \geq 0$ (2)

وذلك مهما كانت x, y, z من X و α, β من k.

نذكر بعض خواص الجداء الداخلي:

$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\langle \alpha y + \beta z, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle + \beta \langle z, x \rangle}$ (2)

$= \bar{\alpha}\overline{\langle y, x \rangle} + \bar{\beta}\overline{\langle z, x \rangle} = \bar{\alpha}\langle x, y \rangle + \bar{\beta}\langle x, z \rangle$ (2)

ثالثاً: لتكن $(x_n)_{n \geq 1}$ متتالية في الفضاء الذي نبرهن أنها متقاربة، أي $x \in X$ وليكن $x_n \longrightarrow x$ (1)

و $(x_n)_{n \geq 1}$ متتالية كوشي، أي:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}; \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

حسب متراجحة المثلث إذا كان $n, m > N(\varepsilon)$ فإن:

$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ (1)

إذاً أصبح لدينا الشرط التالي محقق:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}; \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$ (1)

وبالتالي $(x_n)_{n \geq 1}$ كوشي في الفضاء (1)

السؤال الرابع: (15 درجة)

عرف الآلة الوامضة في الفضاء المنظم ثم اثبت أن الآلة الوامضة المغلقة في الفضاء المنظم هي مجموعة محدبة.

(5)

كلمة : الكرة الواحدية : ليكن X فضاء ناظميا . نعرف الكرة الواحدية في X بالكرة التي مركزها الصفر ونصف قطرها الواحد ونرمز لها بالرمز $B(0,1)$ ونكتب

$$B(0,1) = \{x \in X ; \|x\| = 1\}$$

(5)

برهان أن الكرة الواحدية المغلقة في الفضاء الناظمي X مجموعة محدبة :

$$\overline{B}(0,1) = \{x \in X ; \|x\| \leq 1\}$$

(2)

$\forall x_1, x_2 \in \overline{B}(0,1) \Rightarrow \|x_1\| \leq 1 \quad + \|x_2\| \leq 1$

لنأخذ القطعة المستقيمة التي طرفاها :

$$z = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \; ; \; 0 \leq \alpha \leq 1$$

ولنبرهن أن $z \in \overline{B}(0,1)$

$$\|z\| = \|(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2\| \leq \|(1-\alpha)x_1\| + \|\alpha x_2\|$$

$$= |1-\alpha|\|x_1\| + |\alpha|\|x_2\| = (1-\alpha)\|x_1\| + \alpha\|x_2\|$$

$$\leq (1-\alpha) + \alpha = 1 \Rightarrow \|z\| \leq 1 \Rightarrow z \in \overline{B}(0,1)$$

(6)

وبما أن z نقطة مستقيمة واصلة بين نقطتين x_1 و x_2 من $\overline{B}(0,1)$

(2)

فإن $\overline{B}(0,1)$ مجموعة محدبة

ملاحظة : التمارين الواردة في سلم التصحيح ليست كل طريقة رياضية للحل صحيحة نأخذ نقطة العلامة الخاصة بها في سلم التصحيح

أطروحة في 2017/6/14

مدرسة المقرر : د. عائشة عباد

الفصل الأول

الفصل الدراسي الأول

السؤال الأول

أ) ضع علامة (✓) أو علامة (✗) أمام العبارات التالية مع ذكر السبب (لا تقبل الإجابة بدون تعليل)

١- الدالة الخطية $f: C[1,3] \to \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x)=\int_1^3 x(t)dt$ ، $x\in C[1,3]$ محدودة وتأخذ قيمتها في $\mathbb{R}$.

٢- المتتالية $(x^n)_{n\geq 1}$ حيث $x^n=\left(\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}, \frac{n^2}{n^2+1}, 0, 0, \dots\right)$ متقاربة في الفضاء $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

٣- كل فضاء جزئي لفضاء باناخ X محدود.

٤- الفضاء $\mathbb{R}^2$ المزود بالنظيم $\|x\|=|x_1|+|x_2|$ ، $x=(x_1,x_2)$ فضاء هلبرت.

٥- في فضاء الجداء الداخلي $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فإن العلاقة التالية محققة:

$$\langle \alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y\rangle = |\alpha|^2\langle x,x\rangle + \alpha\overline{\beta}\langle x,y\rangle + \beta\overline{\alpha}\langle y,y\rangle$$

الحل

① التطبيق f المعرف أعلاه خطي محدود حيث أنه:

$$|f(x)| = \left|\int_1^3 x(t)dt\right| \leq \int_1^3 |x(t)|dt \leq \max_{1\leq t\leq 3}|x(t)|\int_1^3 dt = (3-1)\|x\| = 2\|x\|$$

أي أن: $\exists c=2>0$ بحيث $|f(x)|\leq c\|x\|$ ، $\forall x\in C[1,3]$

ولكن (1) $\|f\|=3$ حيث: $\|f\|=\sup_{x\in C[1,3]}\frac{|f(x)|}{\|x\|}$ ، $\|x\|=\max_{1\leq t\leq 3}|x(t)|$

نلاحظ أن: $|f(x)|\leq 2\|x\|$ ، $\forall x\in C[1,3]$

من جهة أخرى نجد أن $\|x\|\leq 1$ ، $\forall x\in C[1,3]$ يكون من أجل $\|x\|=1$ نجد أن:

$$\|f\| = \sup_{x\in C[1,3]}\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq 2 \Rightarrow \|f\|\leq 2 \quad (2)$$

من جهة ثانية نأخذ $x=x_0=1$ حيث $\|x_0\|=1$ والتعويض في العلاقة

$$\|f\| \geq \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \int_1^3 dt = 3-1 = 2 \Rightarrow \|f\|\geq 2 \quad (3)$$

من (2) و(3) نجد أن $\|f\|=2$ (1)

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{n^3}{n^2(n+2)}, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = (0,1,e)$$

$$d(x^n, x^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i^n - x_i^0)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{n}-0\right)^2 + \left(\frac{n^3+1}{n^2(n+2)} - 1\right)^2 + \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - e\right)^2} \to 0$$

$n \to \infty$

$x^n \to x^0$ متقاربة نقطة من $(x^n)_{n\geq 1}$ متتالية كانت

x^0 و x نهاية المتتالية فإن النقاط متساوية.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}; \; \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

$\varepsilon = 1$ نأخذ $d(x_n, x) < 1$ أي أن جميع حدود المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ تقع داخل الكرة $B(x,1)$ ما عدا عدد منتهي من الحدود $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}$

$$\alpha = \max\{d(x_1,x), d(x_2,x), \ldots, d(x_{n_0-1},x)\}$$

$d(x_n, x) < 1 + \alpha$ فإن جميع حدود المتتالية محصورة.

$(x_n)_{n\geq 1}$ متقاربة في X محدودة بالتالي كل متتالية

$T: D(T) \to Y$ نظرية: ليكن

$x, y \in D(T)$ و Y فضاءان منظمان فإن الشرط اللازم

T لكي تكون $\|x\| = 1$ هو أن يكون $\|Tx\| = 1$

صحيحة دائما.

$$\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle x, \alpha x + \beta y \rangle + \beta \langle y, \alpha x + \beta y \rangle$$

$$= \alpha\langle \alpha x + \beta y, x\rangle + \beta\langle \alpha x + \beta y, y\rangle = \alpha\bar{\alpha}\langle x, x\rangle + \alpha\bar{\beta}\langle y, x\rangle$$

$$+ \beta\bar{\alpha}\langle x, y\rangle + \beta\bar{\beta}\langle y, y\rangle = \alpha\bar{\alpha}\langle x, x\rangle + \alpha\bar{\beta}\langle x, y\rangle +$$

$$\bar{\alpha}\beta\langle y, x\rangle + \beta\bar{\beta}\langle y, y\rangle = |\alpha|^2\langle x, x\rangle + \alpha\bar{\beta}\langle x, y\rangle +$$

$$\bar{\alpha}\beta\langle y, x\rangle + |\beta|^2\langle y, y\rangle \quad (\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2, \; \beta\bar{\beta} = |\beta|^2)$$

السؤال الثاني (بالدرجة).

ليكن T تطبيق خطي من فضاء X إلى فضاء منظم Y. إذا وجد عدد موجب $b > 0$ بحيث $\|x\| \geq b\|Tx\|$ برهن أن T^{-1} موجود ومحدود.

الحل

لكي نبرهن أن T^{-1} موجود يجب أن نبرهن أن

$Tx = 0 \Rightarrow x = 0$ ؟

لدينا $Tx = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0 \Rightarrow \|x\| \leq b\|Tx\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

$\exists c>0;\ \|T^{-1}y\| \le c\|y\| ;\ \forall y\in Y.$

$\|Tx\| \ge b\|x\|$ ، $x=T^{-1}y$ ، Tx ، $\|x\| \le \frac{1}{b}\|Tx\| \Rightarrow \|T^{-1}y\| \le \frac{1}{b}\|y\| \Rightarrow$

$\exists c=\frac{1}{b}>0;\ \|T^{-1}y\| \le c\|y\|;\ \forall y\in Y$ ، T^{-1} ، (1)

(3) (2) (1)

(4)

$d(x+z,y+z)=d(x,y);\ \forall x,y,z\in X$

$d(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|\,d(x,y);\ \forall \alpha\in\mathbb{C}$

(4)

$d(x+z,y+z)=\|x+z-(y+z)\|=\|x-y\|$

$d(\alpha x,\alpha y)=\|\alpha y-\alpha x\|=\|\alpha(x-y)\|=|\alpha|\,\|x-y\|$

(4)

$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{3}|x_i|=|x_1|+|x_2|+|x_3|$

$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{3}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$

$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{3}|x_i|=\sum_{i=1}^{3}|x_i\cdot 1| \le \left(\sum_{i=1}^{3}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{3}1^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\,\|x\|_2$

(4)

$\Rightarrow \|x\|_1 \le \sqrt{3}\,\|x\|_2$

$x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ ، $\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$

$x=\sum_{i=1}^{3}x_ie_i \Rightarrow \|x\|_2=\left\|\sum_{i=1}^{3}x_ie_i\right\|_2 \le \sum_{i=1}^{3}\|x_ie_i\| = \sum_{i=1}^{3}|x_i| = \|x\|_1$

$\Rightarrow \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{3}\,\|x\|_2$

(2)

$\|\ \|_1$ ، $\|\ \|_2$

طريقة رياضية للحل