

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z



كلية العلوم

القسم : الرياضيات

السنة : الرابعة

اسئلة دورات محلولة

خليل عددي ٢

A 2 Z LIBRARY

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ، علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

تسلم توزيع الدرجات: لغير تحليل عددي (2) - سنة رابعة رياضيات - فصل أول $\frac{c.c.c}{c.c.c}$

(23) درجة
رابط الأول: (-1)
(11)

$$f(x) = 3 + \cos x - e^x, \quad f' = -\sin x - e^x$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - \frac{m}{2} f(x_k) \cdot f''(x_k)}$$

لأن الجذر بسيط $m=1$

$$x_1 = x_0 - \frac{(3x_0 + \sin x_0 - e^{x_0})(3 + \cos x_0 - e^{x_0})}{[3 + \cos x_0 - e^{x_0}]^2 - \frac{1}{2}(3x_0 + \sin x_0 - e^{x_0})(-\sin x_0 - e^{x_0})} = 0.3529$$

$$x_2 = x_1 - \frac{(3x_1 + \sin x_1 - e^{x_1})(3 + \cos x_1 - e^{x_1})}{[3 + \cos x_1 - e^{x_1}]^2 - \frac{1}{2}(3x_1 + \sin x_1 - e^{x_1})(-\sin x_1 - e^{x_1})} = 0.36042$$

$$|f(x_2)| = 4.26 \times 10^{-6} < 1 \times 10^{-5}$$

يتحقق شرط التوقف، إذاً x_2 هو الجذر المطلوب ($n=2$)

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2} = x+1 \Rightarrow x \in [-1, +1]$$

$$\Rightarrow f(x) = x\sqrt{1-x^2}, \quad T_0 = 1, T_1 = x, T_2 = 2x^2 - 1$$

$$P_2(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \quad a_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} x \cdot x dx = \frac{4}{3\pi}$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} x(2x^2 - 1) dx = 0 \Rightarrow P_2(x) = \frac{4}{3\pi} x, \quad x \in [-1, +1], x = t-1$$

$$P_2(t) = \frac{4}{3\pi}(t-1), \quad t \in [0, 2]$$

السؤال الثاني : (-1) 10 23 درجة

$$H_3(x) = \sum_{j=0}^1 \delta_j(x) f_j + \sum_{j=0}^1 R_j(x) f_j'$$

$$= \delta_0(x) f_0 + \delta_1(x) f_1 + R_0(x) f_0' + R_1(x) f_1'$$

$$= \delta_0(x) f_0 + R_0(x)(-1) = \delta_0(x) - R_0(x)$$

$$\delta_0(x) = [1 - 2(x - x_0) L_0'(x)] L_0^2(x) \quad , \quad L_0'(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 1}{0 - 1} = 1 - x$$

$$L_0'(x) = -1 \Rightarrow L_0'(x_0) = -1$$

$$\delta_0(x) = [1 - 2(x - 0)(-1)] (1 - x)^2$$

$$= (1 + 2x)(1 - x)^2$$

$$R_0(x) = (x - x_0) L_0^2(x) = x(1 - x)^2$$

$$\Rightarrow H_3(x) = (1 + 2x)(1 - x)^2 - x(1 - x)^2$$

$$= (1 - x)^2(1 + x) = (1 - x^2)(1 - x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

يكتب أن تذكر عبارة الخطأ المرتكب لأن صيغة الـ لا غير معطاة :

$$E_T(x) = \frac{(x - x_0)^2 (x - x_1)^2}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad ; \quad c \in [x_0, x_n] \quad , \quad n=3$$

$$E_T(x) = \frac{(x - x_0)^2 (x - x_1)^2}{4!} f^{(4)}(c)$$

(-2) المسألة من المرتبة الخامسة 13

$$d_2(x, h) = \frac{1}{h^2} [f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)]$$

$$f(x+h) = f(1.1) = \sin(1.1-1) + (1.1)^3 = 0.09983 + 1.331 = 1.43083$$

$$f(x-h) = f(0.9) = \sin(-0.1) + (0.9)^3 = -0.09983 + 0.729 = 0.62917$$

$$f(x) = f(1) = 1$$

$$d_2(1, 0.1) = \frac{1}{(0.1)^2} [1.43083 + 0.62917 - 2] = 5.999 \approx 6$$

$$E(1, h) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(c) \quad ; \quad c \in [1-h, 1+h] \quad , \quad \Rightarrow E(1, h) = -\frac{h^2}{12} \cdot M$$

$$M = \max \{ |f^{(4)}(1-h)|, |f^{(4)}(1+h)| \} \Rightarrow f(x) = \sin(x-1) \Rightarrow f^{(4)}(1-h) = \sin(-0.1) = -0.09983$$

$$f^{(4)}(1+h) = \sin(1.1) = 0.891207$$

تمتة حل السؤال الثاني (-2) 7

$$E(1, h) = -\frac{(0.1)^2}{12} (0.891207) = 0.00074267$$

النسبة من الخلية الثالثة :

$$d_3(x, h) = \frac{1}{2h^3} [f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)]$$

$$d_3(1, 0.1) = \frac{1}{2(0.1)^3} [f(1.2) - 2f(1.1) + 2f(0.9) - f(0.8)] = 5.00249$$

$$E(1, h) = \frac{h^2}{2} f^{(5)}(c) : c \in [x-2h, x+2h] \Rightarrow E(1, h) = \frac{h^2}{2} M :$$

$$M = \max_{(5)} \{ |f^{(5)}(x-2h)|, |f^{(5)}(x+2h)| \}$$

$$f(x) = \cos(x-1) \Rightarrow f^{(5)} = \cos(1-1) = 1 \Rightarrow E(1, 0.1) = \frac{(0.1)^2}{2} (1) = 0.005$$

$$\frac{1}{2} [5t^3 - 3t] = 0$$

حل السؤال الثالث : (-1) 24

$$t [5t^2 - 3] = 0 \Rightarrow t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, t_2 = 0, t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 2$$

$$\begin{cases} -\sqrt{\frac{3}{5}} w_1 + \sqrt{\frac{3}{5}} w_3 = 0 \\ \frac{3}{5} w_1 + \frac{3}{5} w_3 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow w_1 = w_3 = \frac{5}{9}, w_2 = \frac{8}{9}$$

$$I = \sum_{i=1}^3 w_i f(t_i) = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_3 f(t_3)$$

$$f(t_1) = t_1^2 \cos t_1 = 0.4288219, f(t_2) = t_2^2 \cos t_2 = 0, f(t_3) = 0.4288219$$

$$I = \frac{5}{9} (0.4288219) + \frac{5}{9} (0.4288219) = 0.476469$$

تمت هذه الأسئلة : 2-) ندرس أن $z = y'$ وبالتالي :

$$f_1(t, y, z) = y' = z$$

$$f_2(t, y, z) = z' = y'' = -y - z + \cos t$$

$$y(0) = 1, z(0) = 1$$

$$y_{i+1} = y_i + h f_1(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2} f_1'(t_i, y_i, z_i)$$

$$z_{i+1} = z_i + h f_2(t_i, y_i, z_i) + \frac{h^2}{2} f_2'(t_i, y_i, z_i)$$

$$f_1'(t, y, z) = z' = -y - z + \cos t$$

$$f_2'(t, y, z) = -y' - z' - \sin t = -z' - (-y - z + \cos t) - \sin t = y - \cos t - \sin t$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + h z_0 + \frac{h^2}{2} (-y_0 - z_0 + \cos t_0)$$

$$= 0 + (0.1)(1) + \frac{(0.1)^2}{2} (-0 - 1 + 1) = 0.1$$

$$z_1 = z_0 + h (-y_0 - z_0 + \cos t_0) + \frac{h^2}{2} (y_0 - \cos t_0 - \sin t_0)$$

$$= 1 + (0.1)(-0 - 1 + 1) + \frac{(0.1)^2}{2} (0 - 1 - 0) = 1 - 0.005 = 0.995$$



قسم الرياضيات

كلية العلوم

جامعة طرابلس

سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل عقدي 2 لطلاب السنة الثالثة رياضيات

الدورة التكميلية - العام الدراسي 2023-2024.

الدرجة: تسعون

السؤال الأول: (48 درجة)

(1) مبرهنة. (10 درجات).

(2) (18 درجة). ليكن $f(z) = \frac{e^z}{z-2}$ تابع عقدي و $z_0 = 2$ والمطلوب:

1. حدد القسم الرئيسي والقسم التحليلي في نشر لوران للتابع f في D حيث:

$$D = \{z : 0 < |z - z_0| < \infty\} \quad (10 \text{ درجات})$$

2. أوجد قيمة التكامل $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$ حيث C دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها $r = 1$. (8 درجات)

الحل:

1.

$$f(z) = \frac{e^z}{z-2} = \frac{e^{(z-2)+2}}{z-2} = \frac{e^2}{z-2} e^{(z-2)} = \frac{e^2}{z-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2 (z-2)^{n-1}}{n!}$$

القسم التحليلي هو:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^2 (z-2)^{n-1}}{n!}$$

القسم الرئيسي هو:

$$\sum_{n=0}^0 \frac{e^2 (z-2)^{n-1}}{n!} = \frac{e^2}{z-2}$$

2. طريقه أولى: (لدينا $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}} dz$ أمثال متسلسلة لوران للتابع $f(z)$ في D حيث C منحنى مغلق تقع $z_0 = 2$ داخله)

بأخذ C الدائرة التي مركزها $z_0 = 2$ ونصف قطرها $r = 1$ عندئذ

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-2} dz \Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z-2} dz = 2\pi i \times a_0 = 2\pi i \times e^2 = 2\pi i e^2$$

طريقه ثانيه:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-2} dz = \int_C \frac{e^z}{(z-2)^2} dz$$

نطبق صيغة كوشي الثانية نجد

$$\int_C \frac{e^z}{(z-2)^3} dz = \frac{2\pi i}{1!} \times g^{(1)}(2)$$

حيث $g(z) = e^z$ و $g^{(1)}(z) = e^z$ بالتالي

$$\int_C \frac{e^z}{(z-2)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \times e^2 = 2\pi i e^2$$

طريقه ثالثه: التكامل $\int_C \frac{e^z}{(z-2)^2} dz$ يمكن إيجاد قيمته باستخدام نظرية الرواسب علما أن $z = 2$ قطب للتابع $h(z) = \frac{e^z}{(z-2)^2}$ المرتبه الثانيه. $\int_C \frac{e^z}{(z-2)^2} dz = 2\pi i \times \text{Res}[h(z), 2]$ (3) (10 درجات). أوجد منطقة التقارب لمتسلسلة القوى التاليه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i3^n(z+i)^n}{n!}$$

الحل:

$$a_n = \frac{i3^n}{n!}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} = \infty$$

منطقة التقارب هي المستوى العقدي

(4) (10 درجات). ليكن $f(z) = \frac{z^3 - 4z^2}{1 - e^{\frac{z^2}{2}}}$ والمطلوب:

1. أوجد $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ ثم بين نوع النقطه الشاذة $z = 0$ للتابع $f(z)$.
2. أوجد راسب التابع $f(z)$ عند $z = 0$.

الحل:

$$1. \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \frac{0}{0} \text{ (عدم تعيين)}$$

نطبق أوبيتال

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3 - 4z^2}{1 - e^{\frac{z^2}{2}}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3z^2 - 8z}{-ze^{\frac{z^2}{2}}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{6z - 8}{-e^{\frac{z^2}{2}} - z^2 e^{\frac{z^2}{2}}} = 8$$

بما أن $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 8$ عندئذ $z = 0$ نقطه شاذه قابله للحذف

2. بما أن $z = 0$ نقطه شاذه قابله للحذف عندئذ $\text{Res}[f(z), 0] = 0$

السؤال الثاني: (42 درجة)

(1) (12 درجات) . ليكن $f(z) = \frac{z+2}{z^2(z+2i)}$ و $C: |z| = \frac{1}{2}$ والمطلوب: أوجد

$$\int_C \frac{\hat{f}(z)}{f(z)} dz$$

الحل:

$f(z)$ يملك صفر بسيط $z = -2$ يقع خارج الدائرة $C: |z| = \frac{1}{2}$

$f(z)$ يملك قطبين هما:

$z = 0$ قطب من المرتبة الثانية للتابع $f(z)$ وهي تقع داخل الدائرة $C: |z| = \frac{1}{2}$

$z = -2i$ قطب بسيط للتابع $f(z)$ وهي تقع خارج الدائرة $C: |z| = \frac{1}{2}$

$$\int_C \frac{\hat{f}(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(N - P)$$

حيث N عدد أصفار التابع $f(z)$ والواقعه داخل الدائرة $C: |z| = \frac{1}{2}$. نلاحظ $N = 0$

حيث P عدد أقطاب التابع $f(z)$ والواقعه داخل الدائرة $C: |z| = \frac{1}{2}$. نلاحظ $P = 2$

$$\int_C \frac{\hat{f}(z)}{f(z)} dz = -4\pi i$$

(2) (30 درجة) . 15 درجة لكل تكامل . باستخدام نظرية الرواسب أوجد قيمة التكاملين:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

الحل:

✓ التكامل الأول:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$$

الحل: نفرض $z = e^{i\theta}$ حيث $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta} = \int_{C: |z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2 + \frac{z + z^{-1}}{2}} = \frac{1}{i} \times \int_{C: |z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 4z + 1}$$

$z_1 = -2 + \sqrt{3}$ قطب بسيط للتابع $f(z) = \frac{2}{z^2 + 4z + 1}$ يقع داخل دائرة الوحدة.

$f(z) = \frac{2}{z^2+4z+1}$ قطب بسيط للتابع $z_2 = -2 - \sqrt{3}$ يقع خارج دائرة الوحدة.

نطبق نظرية الرواسب

$$I_1 = \frac{1}{i} \times 2\pi i \times \text{Res}[f(z), z_1]$$

$$\text{Res}[f(z), z_1] = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{2}{z - z_2} = \frac{2}{z_1 - z_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$I_1 = \frac{1}{i} \times 2\pi i \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

✓ التكامل الثاني:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

الحل:

$$m = 1 > 0$$

لنأخذ $R(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ لا يملك نقاط شاذة على المحور الحقيقي Ox .

❖ من أجل انجاز هذا التكامل نأخذ التابع العندي $f(z) = R(z)e^{iz} = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \text{Re} \left(2\pi i \times \sum_{\text{Im} z_k > 0} \text{Res}[f(z), z_k] \right)$$

المجموع مأخوذ من أجل جميع النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ الواقعة فوق المحور Ox .

$z_0 = -i$ قطب من المرتبة 2 $f(z)$ وهي تقع تحت المحور الحقيقي Ox .

$z_1 = i$ قطب من المرتبة 2 $f(z)$ وهي تقع فوق المحور الحقيقي Ox .

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \text{Re}(2\pi i \times \text{Res}[f(z), i])$$

$$\text{Res}[f(z), i] = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} (z - i)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{iz}}{(z + i)^2} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow i} \frac{ie^{iz}(z + i) - 2e^{iz}}{(z + i)^3} = -\frac{i}{2e}$$

عندئذ:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \text{Re} \left(2\pi i \times \left(-\frac{i}{2e} \right) \right) = \frac{\pi}{e}$$

✓ بعض التمارين تحل بأكثر من طريقة، شأى طريقة متبعة من قبل الطالب لحل تمرين معين وهذه الطريقة صحيحة ينال الطالب العلامة المخصصة لهذا التمرين.

مدرس المقرر: د. أحمد عيسى

جامعة طرطوس

تحليل عددي ٢ سنة رابعة رياضيات

الاسم

كلية العلوم

الفصل الثاني ٢٠٢٣-٢٠٢٤

الدرجة ٧٠

السؤال الأول: (٣٠ درجة)

١- احسب الخطأ المطلق والنسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة $f(x, y) = \frac{\ln(x, y)}{x^2 e^y}$ في النقطة $(x, y) = (1.5, 2.25)$ (اعداد مدورة)

٢- لتكن لدينا الدالة $f(t) = 2t\sqrt{12t - 4t^2} - 8$ المعرفة والمستمرة على المجال $[+1, 2]$ والمطلوب : أوجد كثيرة حدود تشبتشيف $P_2(x)$ واحسب القيمة التقريبية عند منتصف المجال واحسب الخطأ المطلق المرتكب

٣- استخدم طريقة التقريبات المتتالية لإيجاد الجذر التقريبي (x_1, y_1) لجملة المعادلتين :

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \sin(x - 0.6) - y = 1.6 \\ f_2(x, y) &= 3x - \cos y = 0.9 \end{aligned}$$

علماً أن $(x_0, y_0) = (0.1, -1.9)$

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

١- أوجد استيفاء هرميت التكعيبي للدالة المعرفة بالجدول التالي:

x_i	0	1
y_i	0	1
y'_i	-1	4

٢- استخدم طريقة سيمبسون على قاعدة أربعة مجالات جزئية لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل

$$n = 4, I = \int_1^2 x^2 \ln x dx$$

السؤال الثالث: (٢٠ درجة)

١- استخدم طريقة غاوس ليجندر من أجل ثلاث نقاط غاوسية ($N = 3$) لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل :

$$I = \int_{-1}^{+1} x^2 \cos x dx$$

٢- استخدم طريقة منشور تايلور من المرتبة الثانية لحل المعادلة التفاضلية التالية : $y'' + y' + y = \cos t$ و $t \in [0, 0.1]$ والشروط الابتدائية $y(0) = 0, y'(0) = 1$ بخطوة $h = 0,1$

مدرس المقرر
أ.د نضال إبراهيم حسن

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح
طرطوس في ٢٠٢٤/٨/

إجابة سؤال المثال: 1-) نكتب الحجة الصفوية:

(10)

(20) عشر

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

لنحسب t_1, t_2, t_3 يجعل $L_3(t) = 0$ نجد:

$$\frac{1}{2} [5t^3 - 3t] = 0 \Rightarrow t(5t^2 - 3) = 0$$

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, t_2 = 0, t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

نضرب:

بالعوض في الحجة الصفوية وإجراء عملية الضرب:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{بالحذف المشترك} \Rightarrow w_1 = w_3 = \frac{5}{9}, w_2 = \frac{8}{9} \end{array} \right.$$

$$-\sqrt{\frac{3}{5}} w_1 + \sqrt{\frac{3}{5}} w_3 = 0$$

$$\frac{3}{5} w_1 + \frac{3}{5} w_3 = \frac{2}{3}$$

$$S = \sum_{i=1}^3 w_i f(t_i) = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_3 f(t_3)$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{3}{5} \cos(-\sqrt{\frac{3}{5}}) \right] + \frac{8}{9} \left[\frac{3}{5} \cos(\sqrt{\frac{3}{5}}) \right] = 0.476469$$

2-) قبل تطبيق الطريقة عدد البؤلة يجب تخفيضها وتحويلها إلى حجة معادلتين كل منهما من المرتبة الأولى:

لذلك: نعرض أن: $z = y' \Leftrightarrow z' = -y - z + \cos t$ بالعوض في المعادلتين نجد:

(10)

$$P_1(t, y, z) = y' - z \Rightarrow P_1(t, y, z) = z' - (-y - z + \cos t)$$

$$P_2(t, y, z) = z' - (-y - z + \cos t)$$

بالعوض في شرط الابتدائي:

$$P_2(t, y, z) = -y' - z' - \sin t = -z - (-y - z + \cos t) - \sin t = y - \cos t - \sin t$$

$$y_1 = y_0 + h P_1(t_0, y_0, z_0) + \frac{h^2}{2} P_1'(t_0, y_0, z_0)$$

$$y_1 = y_0 + h z_0 + \frac{h^2}{2} (-y_0 - z_0 + \cos t_0) = 0 + 0.1(1) + \frac{(0.1)^2}{2} (-0 - 1 + 1) = 0.1$$

$$z_1 = z_0 + h P_2(t_0, y_0, z_0) + \frac{h^2}{2} P_2'(t_0, y_0, z_0)$$

$$z_1 = z_0 + h (-y_0 - z_0 + \cos t_0) + \frac{h^2}{2} (y_0 - \cos t_0 - \sin t_0) = 1 + 0.1(-0 - 1 + 1) + 0.005(-1) = 0.995$$

إجابة السؤال الثاني: (-1) (20) شرف

$$H_3(x) = \sum_{j=0}^1 \underset{(0)}{S_j(x)} \underset{(1)}{P_j} + \sum_{j=0}^1 \underset{(1)}{R_j(x)} \underset{(-1)}{P_j'} \\ = S_0(x) P_0 + S_1(x) P_1 + R_0(x) P_0' + R_1(x) P_1' \\ = S_1(x) - R_0(x) + 4 R_1(x)$$

$$S_1(x) = [1 - 2(x - x_1) L_1'(x)] L_1^2(x)$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x}{+1} = x \Rightarrow L_1'(x) = +1, L_1'(x_1) = +1$$

$$S_1(x) = [1 - 2(x - 1)(1)] x^2 = 3x^2 - 2x^3$$

$$R_0(x) = (x - x_0) L_0^2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 1}{0 - 1} = 1 - x \Rightarrow L_0^2(x) = (1 - x)^2$$

$$R_0(x) = x(1 - x)^2 = x - 2x^2 + x^3$$

$$R_1(x) = (x - x_1) L_1^2(x) = (x - 1) x^2 = x^3 - x^2$$

$$H_3(x) = 3x^2 - 2x^3 - x^3 + 2x^2 - x + 4(x^3 - x^2) = x^3 + x^2 - x$$

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{2-1}{4} = 0.25, \quad n=4, \quad m = \frac{n}{4} = 1 \quad (-2)$$

$$x_0 = 1 \Rightarrow P(x_0) = P_0 = 1 \cdot \ln 1 = 0$$

$$x_1 = 1.25 \Rightarrow P(x_1) = P_1 = 1.25 \ln(1.25) = 0.348662$$

$$x_2 = 1.5 \Rightarrow P(x_2) = P_2 = 1.5 \ln(1.5) = 0.912296$$

$$x_3 = 1.75 \Rightarrow P(x_3) = P_3 = 1.75 \ln(1.75) = 1.713820$$

$$x_4 = 2 \Rightarrow P(x_4) = P_4 = 2 \ln(2) = 2.77259$$

$$S = \frac{2h}{45} [7P_0 + 32P_1 + 12P_2 + 32P_3 + 7P_4] = 1.07061$$

تسمية السؤال الأول (2-) قيمة الدالة عند تصنيفها لمجال:

$$x=0 \Rightarrow p_2(0) = \frac{10}{\pi}, \quad f(0) = 3 \Rightarrow \text{الخطأ المطلق} \Rightarrow \rho_p = \left| \frac{10}{\pi} - 3 \right| = 0.18309$$

إجابة السؤال الأول: (3-) من المعادلة الأولى نعرف y بالكود:

$$y = \sin(x - 0.6) - 1.6 = g_2(x, y)$$

من المعادلة الثانية نعرف x بالكود:

$$x = \frac{1}{3} \cos y + 0.3 = g_1(x, y)$$

نلاحظ أن:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = -\frac{1}{3} \sin y, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x} = \cos(x - 0.6), \quad \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0$$

وبالتالي تتحقق العلاقة:

$$\left\{ \left| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x} \right| \right\} = |\cos(x - 0.6)| < 1 \quad \forall x_0 = 0.1$$

$$\left\{ \left| \frac{\partial g_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial y} \right| \right\} = \left| -\frac{1}{3} \sin y \right| < 1 \quad \forall y_0 = -1.9$$

وبالتالي يمكن التعويض من الحل الأول بتدريج

$$(x_0, y_0) = (0.1, -1.9) \text{ هي نقطة البداية}$$

$$x_{n+1} = g_1(x_n, y_n) = \frac{1}{3} \cos y_n + 0.3$$

$$y_{n+1} = g_2(x_n, y_n) = \sin(x_n - 0.6) - 1.6$$

وبالتالي نفس عدد التقرّيب الأول (x_1, y_1)

$$x_1 = g_1(x_0, y_0) = \frac{1}{3} \cos(-1.9) + 0.3 = 0.19228 \Rightarrow$$

$$y_1 = g_2(x_0, y_0) = \sin(0.1 - 0.6) - 1.6 = -2.07946$$

$$(x_1, y_1) = (0.19228, -2.07946)$$

الحل التقرّيب المطلوب:

ملاحظة: كل طالب يحل أي سؤال بطريقة مختلفة عن الطريقة المطلوبة في الامتحان
ننال نصف درجة السؤال (إذا كان الحل صحيحاً)

سليم توزيع الدرجات لغير تحليل عددي 2، سنة اربعة رياضيات مفراتاني 0.03
0.04

$$f(x,y) = \frac{\ln(1.5 \times 2.25)}{(1.5)^2 e^{2.25}} = 0.056980942 \quad \text{اجابة اول اقول: -1} \quad (10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 - 2 \ln(x \cdot y)}{x^3 \cdot e^y} = -0.04474519$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y x^2 e^y} - \frac{\ln(x \cdot y)}{x^2 \cdot e^y} = -0.036161342$$

$$\begin{cases} \delta_x \leq 5 \times 10^{-2} \\ \delta_y \leq 5 \times 10^{-3} \end{cases}$$

$$(\delta_f)_{\max} \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| \delta_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \delta_y$$

$$\begin{aligned} &= 0.04474519 \times 5 \times 10^{-2} + 0.036161342 \times 5 \times 10^{-3} \\ &= 0.00223725 + 0.000180807 = 0.00241805741 \end{aligned}$$

$$(e_f)_{\max} \leq \frac{(\delta_f)_{\max}}{|f(x,y)|} = 0.04243624$$

(-2) لنغير المتحول بفرض متحول جديد بالكل ، نجد أن حدود المتحول الجديد : $x \in [-1, +1]$ ولناخذ دالة الوزن $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (10)

$$\begin{cases} x = -1 \text{ فإن } t = 1 \\ x = +1 \text{ فإن } t = 2 \end{cases}$$

$$F(x) = (x+3)\sqrt{1-x^2}$$

$$P_1(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) \quad ; \quad T_0(x) = 1 \quad \text{و} \quad T_1(x) = x$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} w(x) F(x) dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{(x+3)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^{+1} = \frac{6}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{x(x+3)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} x^2 \right]_{-1}^{+1} = \frac{4}{3\pi}$$

$$P_1(x) = \frac{6}{\pi} + \frac{4}{3\pi} x, \quad P_2(x) = P_1(x) + a_2 T_2(x) \quad ; \quad T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} w(x) F(x) T_2(x) dx = \frac{-4}{\pi}$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{(x+3)(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}} dx \Rightarrow P_2(x) = \frac{6}{\pi} + \frac{4}{\pi} x - \frac{4}{\pi} (2x^2-1) = \frac{10}{\pi} + \frac{4}{\pi} x - \frac{8}{\pi} x^2$$

سليم توزييع الدرجات - لفر - قليل عددي 2 - سنة رابعة - يامينا - مضي اول $\frac{0.24}{0.54}$

اجابة السؤال الاول: 1 - قيمة لالة: 22 10

الخطأ المطلق:

$$(1.5, 2.25) = (2.25)^{1.5} = 3.375$$

$$(\delta_f)_{\max} \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \delta_y$$

$$\delta_x \leq 5 \times 10^{-2}, \delta_y \leq 5 \times 10^{-3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^x \ln y \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x} (x, y) \right| = (2.25)^{1.5} \cdot \ln(2.25) = 2.73688948$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^x \cdot \frac{x}{y} \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y} (x, y) \right| = (2.25)^{1.5} \cdot \frac{1.5}{2.25} = 2.25$$

$$(\delta_f)_{\max} \leq 2.73688948 \times 5 \times 10^{-2} + 2.25 \times 10^{-3} \times 5 = 0.136844474 + 0.01125 = 0.148094474$$

الخطأ النسبي:

$$(e_f)_{\max} \leq \frac{\delta_f}{|f|} = \frac{0.148094474}{3.375} = 0.043879844$$

ملاحظة: يمكن اعتبار $\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot y^{x-1}$ ويعطي نفس النتيجة

ج - لدينا $m=2$ ، $n+1=4 \Rightarrow 3$ ، إذاً يوجد أربعة أمتار $x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{8}$ 12 $k=0, 1, 2, 3$

$$k=0 \Rightarrow x_0 = \cos \frac{\pi}{8} = 0.923879 \Rightarrow y_0 = 0.088947$$

$$k=1 \Rightarrow x_1 = \cos \frac{3\pi}{8} = 0.382683 \Rightarrow y_1 = 0.3626663$$

$$k=2 \Rightarrow x_2 = \cos \frac{5\pi}{8} = -0.382683 \Rightarrow y_2 = 0.3626663$$

$$k=3 \Rightarrow x_3 = \cos \frac{7\pi}{8} = -0.923879 \Rightarrow y_3 = 0.088947$$

$$a_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^3 y_k = \frac{1}{4} [y_0 + y_1 + y_2 + y_3] = 0.22580665$$

$$a_1 = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^3 y_k T_1(x_k) = \frac{2}{4} \sum_{k=0}^3 \frac{x_k}{1+12x_k^2} = 0$$

بسبب التناظر

$$a_2 = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^3 y_k T_2(x_k) = \frac{2}{4} \sum_{k=0}^3 \frac{2x_k^2 - 1}{1+12x_k^2} = -0.38709838$$

$$p_2(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x)$$

$$p_2(x) = -0.77419676 x^2 + 0.61290503$$

$$H_3(x) = \begin{cases} H_1(x) & : x \in [0, 1] \\ H_2(x) & : x \in [1, 2] \end{cases}$$

$$H_1(x) = \sum_{j=0}^1 \delta_j(x) y_j + \sum_{j=0}^1 R_j(x) y_j'$$

$$= \delta_0(x) y_0 + \delta_1(x) y_1 + R_0(x) y_0' + R_1(x) y_1'$$

$$= \delta_0(x) - 2R_0(x) + R_1(x) \quad ; \quad x \in [0, 1]$$

$$\delta_0(x) = [1 - 2(x - x_0) L_0'(x_0)] L_0^2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = 1 - x, \quad L_0'(x_0) = -1$$

$$\delta_0(x) = [1 - 2(x - 0)(-1)](1 - x)^2 = (1 + 2x)(1 - x)^2$$

$$R_0(x) = (x - x_0) L_0^2(x) = x(1 - x)^2$$

$$R_1(x) = (x - x_1) L_1^2(x), \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = x$$

$$R_1(x) = (x - 1)x^2$$

$$H_1(x) = (1 + 2x)(1 - x)^2 - 2x(1 - x)^2 + (x - 1)x^2 = x^3 - 2x + 1$$

$$H_2(x) = \sum_{j=1}^2 \delta_j(x) y_j + \sum_{j=1}^2 R_j(x) y_j', \quad x \in [1, 2]$$

$$= \delta_1(x) y_1 + \delta_2(x) y_2 + R_1(x) y_1' + R_2(x) y_2'$$

$$= 4\delta_2(x) + R_1(x) + 8R_2(x)$$

$$\delta_2(x) = [1 - 2(x - x_2) L_2'(x_2)] L_2^2(x), \quad L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = x - 1$$

$$L_2'(x) = 1$$

$$\delta_2(x) = [1 - 2(x - 2)(1)](x - 1)^2 = (5 - 2x)(x - 1)^2$$

$$R_1(x) = (x - x_1) L_1^2(x)$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = 2 - x$$

$$R_1(x) = (x - 1)(2 - x)^2$$

$$R_2(x) = (x - x_2) L_2^2(x) = (x - 2)(x - 1)^2$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = x - 1$$

$$H_2(x) = 4(5 - 2x)(x - 1)^2 + (x - 1)(2 - x)^2 + 8(x - 2)(x - 1)^2 = x^3 - x^2$$

$$H_3(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1 & ; x \in [0, 1] \\ x^3 - x^2 & ; x \in [1, 2] \end{cases}$$

تسعة إجابة السؤال الثاني: (1)

$$y' = y^2 + 1$$

إجابة السؤال الثاني: (10)

لنكتب المشتقات المتتالية حيث: $y_1 = y_0 + h y_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' + \frac{h^4}{4!} y_0^{(4)}$

$$y' = y^2 + 1 \Rightarrow y'(0) = 1$$

$$y'' = 2yy' \Rightarrow y''(0) = 0$$

$$y''' = 2y y'' + 2y'^2 \Rightarrow y'''(0) = 2$$

$$y^{(4)} = 6y y'' + 2y y''' \Rightarrow y^{(4)}(0) = 0$$

$$y_1 = 0 + (0.1) \cdot 1 + \frac{(0.1)^2}{2!} (0) + \frac{(0.1)^3}{3!} (2) + \frac{(0.1)^4}{4!} (0) = 0.1 + \frac{(0.1)^3}{3!} (2) = 0.100333$$

إجابة السؤال الثالث: (23) تمرين عشوائي

نعلم أن التقاطع النظامي يجب أن يكون على المجال $[-1, +1]$ وهنا

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2} = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (t+1) \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$$

$$f(t) = [2(\frac{1}{2}(t+1) - 1)]^2 \cdot e^{2[\frac{1}{2}(t+1) - 1]}$$

بالعوض:

$$f(t) = [(t+1) - 1]^2 \cdot e^{t+1-1} = t^2 \cdot e^t$$

ونصبح حدود التكامل:

$$x=0 \Rightarrow \frac{1}{2}(t+1)=0 \Rightarrow t=-1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} t \in [-1, +1]$$

$$x=1 \Rightarrow \frac{1}{2}(t+1)=1 \Rightarrow t=1$$

وبالعوض في التكامل نجد:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} t^2 \cdot e^t dt$$

لنقسم $L_3(t)$ حسب t_1, t_2, t_3 :

$$L_3(t) = \frac{1}{2} [5t^3 - 3t] = 0 \Rightarrow t[5t^2 - 3] = 0 \Rightarrow t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, t_2 = 0, t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

لنكتب حلقة الكد بالشكل المصغر:

بالعوض نجد :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

بالحد المتكبر نجد :

$$w_1 = w_3 = \frac{5}{9}, w_2 = \frac{8}{9}$$

$$f(t_1) = \frac{3}{5} \cdot e^{-\sqrt{\frac{3}{5}}} = 0.27653$$

$$f(t_2) = 0$$

$$f(t_3) = \frac{3}{5} e^{\sqrt{\frac{3}{5}}} = 1.30183$$

$$\delta = \sum_{i=1}^3 w_i f(t_i)$$

$$= w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_3 f(t_3) = \frac{5}{9} (0.27653 + 1.30183) = 0.87686$$

تتم الإجابة السؤال الثالث : (-) لتحويل المسألة المعطاة إلى جملتين معادلتين : لنفرض $y = z$ فإن نيلون

$$y' = z = f_1(t, y, z), y(0) = 1$$

بالإستظام نجد : $y' = z'$ بالعوض في المعادلة :

$$y' = -y' + y + e^t$$

$$z' = -z + y + e^t = f_2(t, y, z), z(0) = 1, z_0 = y_0 = 1, t_0 = 0$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} [K_1^{(0)} + K_2^{(0)}], z_1 = z_0 + \frac{1}{2} [L_1^{(0)} + L_2^{(0)}]$$

$$K_1^{(0)} = h f_1(t_0, y_0, z_0) = h z_0 = 0.1$$

$$L_1^{(0)} = h f_2(t_0, y_0, z_0) = h (y_0 - z_0 + e^{t_0}) = 0.1$$

$$K_2^{(0)} = h f_1(t_0 + h, y_0 + K_1^{(0)}, z_0 + L_1^{(0)}) = h (z_0 + L_1^{(0)}) = 0.11$$

$$L_2^{(0)} = h f_2(t_0 + h, y_0 + K_1^{(0)}, z_0 + L_1^{(0)}) = h [(y_0 + K_1^{(0)}) - (z_0 + L_1^{(0)}) + e^{t_0 + h}]$$

$$= (0.1) [1.1 - 1.1 + e^{0.1}] = 0.110517$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2} [0.1 + 0.11] = 1.105$$

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2} [0.1 + 0.110517] = 1.10526$$

سليم توزيع الدرجات المقرر قليل عددي 2، ثم 4 لا ضياع - دقة تكيفية $\frac{0.02}{0.02}$

اجابة السؤال الاول: (10) درجة 20

$$f(x, y, z) = f(1.009, 2.1, 3.05) = \frac{[\ln(1.009)][3.05]}{2.1} = 0.013012957$$

$$\delta_x \leq 5 \times 10^{-4}, \delta_y \leq 5 \times 10^{-2}, \delta_z \leq 5 \times 10^{-3}$$

$$(\delta f)_{\max} \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \right| \delta_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \right| \delta_y + \left| \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right| \delta_z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{x \cdot y} \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \right| = \frac{3.05}{2.1189} = 1.439426117$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\ln(x) \cdot z}{y^2} \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \right| = \left| \frac{-0.027327211}{4.41} \right| = 0.0061966461$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\ln(x)}{y} \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right| = \frac{0.089597413}{2.1} = 0.004266543$$

$$(\delta f)_{\max} \leq 1.439426117 \times 5 \times 10^{-4} + 0.0061966461 \times 5 \times 10^{-2} + 0.004266543 \times 5 \times 10^{-3}$$

$$= 0.00071913 + 0.000309832 + 0.0000213327 = 0.001050877$$

$$(L f)_{\max} \leq \frac{(\delta f)_{\max}}{|P|} = \frac{0.001050877}{0.013012957} = 0.080756203$$

$$f(x) = 3 + \cos x - e^x, \quad f'(x) = -\sin x - e^x$$

(10) (ع) ولأن الجذر يساوي (m=1)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - \frac{m}{2} f(x_k) f''(x_k)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{(3x_0 + \sin x_0 - e^{x_0})(3 + \cos x_0 - e^{x_0})}{[3 + \cos x_0 - e^{x_0}]^2 - \frac{1}{2}(3x_0 + \sin x_0 - e^{x_0})(-\sin x_0 - e^{x_0})} = 0.35294$$

$$x_2 = x_1 - \frac{(3x_1 + \sin x_1 - e^{x_1})(3 + \cos x_1 - e^{x_1})}{[3 + \cos x_1 - e^{x_1}]^2 - \frac{1}{2}(3x_1 + \sin x_1 - e^{x_1})(-\sin x_1 - e^{x_1})} = 0.3604216$$

$$|f(x_2)| = 4.26 \times 10^{-6} < 5 \times 10^{-5}$$

وبالتالي $x_2 = 0.3604216$ هو الجذر التقريبي المطلوب

$$H_3(x) = \sum_{j=0}^1 \delta_j(x) f_j + \sum_{j=0}^1 R_j(x) f'_j$$

(12) (-1) : إجابة السؤال الثاني : عند عشرين 25

$$= \delta_0(x) f_0 + \delta_1(x) f_1 + R_0(x) f'_0 + R_1(x) f'_1 = \delta_0(x)(1) + \delta_1(x)(0) + R_0(-1) + R_1(0)$$

$$= \delta_0(x) - R_0(x)$$

$$\delta_0(x) = [1 - 2(x - x_0) L'_0(x)] L_0^2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 1}{0 - 1} = 1 - x \Rightarrow L'_0(x) = -1 \Rightarrow L'_0(x_0) = -1$$

$$L_0^2(x) = (1 - x)^2$$

$$\delta_0(x) = [1 - 2(x - 0)(-1)] (1 - x)^2$$

$$= (1 + 2x)(1 - x)^2$$

$$R_0(x) = (x - x_0) L_0^2(x) = (x - 0)(1 - x)^2 = x(1 - x)^2$$

$$H_3(x) = (1 + 2x)(1 - x)^2 - x(1 - x)^2$$

$$= (1 - x)^2 [1 + 2x - x] = (1 - x)^2 (1 + x)$$

$$= x^3 - x^2 - x + 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$L_3(t) = 0$ عند t_1, t_2, t_3 فبذلك

$$\frac{1}{2} [5t^3 - 3t] = 0 \Rightarrow t(5t^2 - 3) = 0 \Rightarrow t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, t_2 = 0, t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} w_1 + \sqrt{\frac{3}{5}} w_3 = 0 \\ \frac{3}{5} w_1 + \frac{3}{5} w_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

الكل مقسوم على $\sqrt{\frac{3}{5}}$

$$w_1 = w_3 = \frac{5}{9}$$

$$w_2 = \frac{8}{9}$$

$$S = \sum_{i=1}^3 w_i f(t_i) = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_3 f(t_3)$$

$$S = \frac{5}{9} \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cos \frac{5}{9} + \frac{8}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cos \frac{8}{9} + \frac{5}{9} \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cos \frac{5}{9} = 0.476469$$

إجابة السؤال: (-1) نقوم بتغيير المتكامل (13) 25 درجة التفاضل أصبحت $x \in [-1, +1]$ بالتعويض في الدالة:

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$$

لنوجد كثير حدود تربيعية:

$$P_2(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x)$$

$$T_0 = 1, T_1 = x, T_2 = 2x^2 - 1$$

حيث

ولدينا أيضاً:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} x \cdot x dx = \frac{4}{3\pi}, \quad a_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} x(2x^2 - 1) dx = 0$$

بالتعويض:

$$P_2(x) = 1 \cdot (0) + \frac{4}{3\pi}(x) + (2x^2 - 1)(0) = \frac{4}{3\pi}x, \quad x \in [-1, +1], \quad x = t - 1$$

$$P_2(t) = \frac{4}{3}(t-1) : t \in [0, 2]$$

$$y' = y - 3 + e^t = f_1(t, y, z)$$

$$z' = -y + 3 + e^t = f_2(t, y, z)$$

(-2) (12)

$$y_1 = y_0 + h f_1(t_0, y_0, z_0) = y_0 + h(y_0 - 3 + e^{t_0}) \\ = 1 + (0.1)(1 - 1 + 1) = 1.1$$

$$z_1 = z_0 + h f_2(t_0, y_0, z_0) = z_0 + h(-y_0 + 3 + e^{t_0}) \\ = 1 + (0.1)(-1 + 1 + 1) = 1.1$$

$$\delta_{y_1} = |y_1 - y(t_1)| = |1.1 - e^{0.1}| = 5.1707 \times 10^{-3}$$

$$\delta_{z_1} = |z_1 - z(t_1)| = |1.1 - e^{0.1}| = 5.1707 \times 10^{-3}$$

السؤال الاول: (25) درجة

١ - أوجد الخطأ المطلق والنسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة $f(x, y, z) = \frac{\ln x - \cos y}{xe^z}$ حيث $(x, y, z) = (5.125, 4.25, 2.5)$ (أعداد مدورة)

2- استخدم طريقة نيوتن المعدلة لإيجاد الحل التقريبي X_1 فقط لجملة المعادلتين:

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad \text{حيث:} \quad \begin{aligned} f_1(x, y) &= x \cdot y + x^2 = 3 \\ f_2(x, y) &= x \cdot y + y = 4 \end{aligned}$$

السؤال الثاني: (23) درجة

١- أوجد كثيرة حدود هرميت التقريبية للدالة المعطاة بالجدول التالي:

x_i	0	1
y_i	1	0
y'_i	-1	0

واحسب قيمة تقريبية لها عند النقطة $x = 0.5$ واحسب الخطأ المقتطع الاعظمي. واكتب عبارة

٢- استخدم طريقة سيمبسون على قاعدة ثلاث مجالات جزئية ($n = 3$) لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل: $I = \int_1^2 x e^x dx$ واحسب الخطأ المقتطع الاعظمي.

السؤال الثالث: (22) درجة

1- لتكن لدينا الدالة $f(t) = (t-1)\sqrt{2t-t^2}$ فوق المجال $[0, 2]$ والمطلوب: أوجد تقريب تشيتشيف التربيعي لها

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{إذا علمت أن دالة الوزن:}$$

2- لتكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية التالية:

$$f_1(t, y, z) = y' - y + z = e^t$$

$$f_2(t, y, z) = z' + y - z = e^t$$

والشروط الابتدائية $y(0) = 1, z(0) = 1$ بحيث $t_0 = 0$ ، والمطلوب:

أوجد الحل العددي (y_1, z_1) باستخدام طريقة أولر بخطوة $h = 0.1$ ، واحسب الخطأ المطلق في الحل العددي ،

$$y(t) = z(t) = e^t \quad \text{علماً أن}$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: أ.د. نضال ابراهيم حسن

طرطوس في ٢٠٢٣/٧/١٧

اسم توريخ الدرجات لفرر قليل عددي - 2 - سنة رابعة رياضيات - فصل ثاني ٢٠٢٢/٢٠٢٣

25

إجابة السؤال الأول:

(12)

$$f(x, y, z) = \frac{\ln(5.125) - \cos(4.25)}{5.125 \cdot e^{2.5}} = \frac{2.08021792}{62.43528155} = 0.033317987$$

$$\delta_x \leq 5 \times 10^{-4}, \delta_y \leq 5 \times 10^{-3}, \delta_z \leq 5 \times 10^{-2}$$

$$(\delta f)_{\max} \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \delta_y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \delta_z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 - \ln x + \cos y}{x^2 \cdot e^z} = \frac{-1.08021852}{319.980817918} = -0.00337588523$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sin y}{x \cdot e^z} = \frac{-0.894989358}{62.43528155} = -0.014334673$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-\ln x + \cos y}{x \cdot e^z} = -0.033317987$$

$$(\delta f)_{\max} \leq (0.00337588523 \times 5 \times 10^{-4} + 0.014334673 \times 5 \times 10^{-3} + 0.033317987 \times 5 \times 10^{-2})$$

$$= 0.0000016879425 + 0.000071673365 + 0.001665899367$$

$$= 0.001739259365$$

$$(e f)_{\max} \leq \frac{(\delta f)_{\max}}{|f|} = \frac{0.001739259365}{0.033317987} = 0.052201814$$

$$f_1(x, y) = x \cdot y + x^2 - 3 = 0$$

$$f_2(x, y) = x \cdot y + y - 4 = 0$$

(-2) حسب معقونة جاكوبي للالة $F(x)$ بالار:

13

$$W(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+2x & x \\ y & x+1 \end{bmatrix} \Rightarrow W(x_0) = \begin{bmatrix} y_0+2x_0 & x_0 \\ y_0 & x_0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

لايجاد $W(x_0)^{-1}$ نجد:

$$|W(x_0)| = 9$$

$$(-1)^{i+j} |W| = \begin{bmatrix} 2.5 & -1.5 \\ -1.5 & 4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & -1.5 \\ -1.5 & 4.5 \end{bmatrix}^T \in |W| = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 1.5 & 4.5 \end{bmatrix}$$

$$W(x_0)^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} 2.5 & -1.5 \\ -1.5 & 4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.27778 & -0.16667 \\ -0.16667 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$F(x_0) = \begin{bmatrix} x_0 y_0 + x_0^2 - 3 \\ x_0 y_0 + y_0 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.25 \end{bmatrix}, \quad X_{k+1} = X_k - W(x_k) f(x_k)$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.27778 & -0.16667 \\ -0.16667 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.04167 \\ 1.124995 \end{bmatrix}$$

23 : اجابة سؤال 4 ب

(13) (-1)

$$H_3(x) = \sum_{j=0}^1 \delta_j(x) f_j + \sum_{j=0}^1 R_j(x) f_j'$$

$$= \delta_0(x) f_0 + \delta_1(x) f_1 + R_0(x) f_0' + R_1(x) f_1'$$

$$= \delta_0(x) - R_0(x)$$

$$\delta_0(x) = [1 - 2(x-x_0) L_0'(x)] L_0^2(x), \quad L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-1}{0-1} = 1-x, \quad L_0'(x) = -1, \quad L_0'(x_0) = -1$$

$$\delta_0(x) = [1 - 2(x-0)(-1)] \cdot (1-x)^2 = (1+2x)(1-x)^2$$

$$R_0(x) = (x-x_0) L_0^2(x) = x(1-x)^2$$

$$\Rightarrow H_3(x) = (1+2x)(1-x)^2 - x(1-x)^2$$

$$= (1-x)^2(1+x) = (1-x^2)(1-x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$H_3\left(\frac{1}{2}\right) = 0.375$$

$$E_T(x) = \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) : c \in [x_0, x_1], \quad n=3$$

$$E_T(x) = \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}{4!} f^{(4)}(c)$$

بما أن الخط

إجابة السؤال الثاني : -2) لدينا $m = \frac{n}{3} = 1 \Rightarrow n = 3$

(10)

$$h = \frac{b-a}{3} = \frac{2-1}{3} = 0.33333 \Rightarrow m = \frac{n}{3} = 1 \Rightarrow n = 3$$

$$x_0 = 1, f_0 = f(x_0) = e = 2.76828$$

$$x_1 = 1.33333, f_1 = f(x_1) = 5.05822$$

$$x_2 = 1.66667, f_2 = f(x_2) = 8.82415$$

$$x_3 = 2, f_3 = f(x_3) = 14.77810$$

$$S = \frac{3h}{8} [f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3] = 7.39294$$

$$f^{(4)}(x) = (4+x)e^x$$

$$\max_{x \in [x_0, x_3]} f^{(4)}(x) = (4+2)e^2, x \in [x_0, x_3] = [1, 2]$$

$$E_T(h) = \left| \frac{2-1}{180} (0.33333)^4 6 \cdot e^2 \right| = 6.8414 \times 10^{-3}$$

حساب الخطأ المتوقع !

[22] إجابة السؤال الثالث:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1, 1)$$

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2} = x+1, \quad x \in [-1, +1]$$

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}, \quad T_0=1, T_1=x, T_2=2x^2-1$$

$$P_2(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \quad a_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} x \cdot x dx = \frac{4}{3\pi},$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} x(2x^2-1) dx = 0$$

$$P_2(x) = \frac{4}{3\pi}x, \quad x \in [-1, +1], \quad x = t-1$$

$$P_2(t) = \frac{4}{3\pi}(t-1), \quad t \in [0, 2]$$

$$y' = y - 3 + e^t = f_1(t, y, 3)$$

$$z' = -y + 3 + e^t = f_2(t, y, 3)$$

$$y_1 = y_0 + h f_1(t_0, y_0, 3_0) = y_0 + h(y_0 - 3_0 + e^{t_0}) = 1 + (0.1)(1 - 1 + 1) = 1.1$$

$$z_1 = z_0 + h f_2(t_0, y_0, 3_0) = 3_0 + h(-y_0 + 3_0 + e^{t_0}) = 1 + (0.1)(-1 + 1 + 1) = 1.1$$

$$(y_1, z_1) = (1.1, 1.1)$$

$$\delta y_1 = |y_1 - y(t_1)| = |1.1 - e^{0.1}| = 5.1707 \times 10^{-3}$$

$$\delta z_1 = |z_1 - z(t_1)| = |1.1 - e^{0.1}| = 5.1707 \times 10^{-3}$$

(11) (-2)

أي أن كل:

الخطأ المطلق:

السؤال الأول: (25) درجة

1 - أوجد الخطأ المطلق والنسبي المرتكبين في حساب قيمة الدالة $f(x, y, z) = \sin(x^2)y^3 + \frac{e^x}{z^2}$ حيث

$$(x, y, z) = (-2.5000, 1.999, 0.49) \text{ (أعداد مدورة)}$$

2- استخدم صيغة الفروق المركزية من المرتبة الثانية في إيجاد قيمة تقريبية لكل من المشتقين الثاني والثالث للدالة $f(x) = \sin(x-1) + x^3$ في النقطة $x = 1$ ، و $h = 0.1$ ، واحسب الخطأ المقطوع في كل حالة

السؤال الثاني: (23) درجة

1- لتكن لدينا الدالة $f(t) = \frac{1}{t^2 - 2t + 2}$ والمعطاة فوق المجال $[0, 2]$ ، أوجد تقريب تشبثيف $P_2(t)$ في الحالة المنفصلة، باستخدام

أصفار $T_5(x)$ ، واحسب قيمة تقريبية عند $t = 1$ ، واحسب الخطأ المطلق المرتكب

2- استخدم طريقة غاوس ليجندر من أجل ثلاث نقاط غاوسية ($N = 3$) لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل: $I = \int_{-1}^{+1} x^2 \cos x dx$

السؤال الثالث: (22) درجة

1- باستخدام الدستور التدريجي لنيوتن-رافسون، استنتج الصيغة التي تعطي $\sqrt[n]{a}$ ، ثم أوجد $\sqrt[4]{100}$ ، لثلاثة منازل عشرية

2- لتكن لدينا جملة المعادلتين $y' = y - z + t + e^t = f_1(x, y, z)$
 $z' = z - y + e^t - t + 1 = f_2(x, y, z)$

حيث $y(0) = 1, z(0) = 1$ ، بخطوة $h = 0.1$ ،

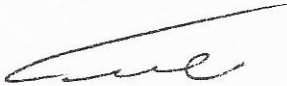
أوجد الحل (y_1, z_1) ، باستخدام طريقة رانج كوتا من المرتبة الرابعة ، واحسب الخطأ المطلق في الحل العددي ، علماً أن

$$y(t) = e^t; \quad z(t) = e^t + t$$

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: أ. د. نضال حسن

طرطوس في 2023/2/6



الإجابة النموذجية لأسئلة مقرر تحليل عددي (٢) سنة رابعة رياضيات - فصل أول $\frac{c \cdot c}{c - c^3}$ ططوس

(11)

25

$$f(-2.5000, 1.999, 0.49) = \sin[(-2.5)^2](1.999)^3 + \frac{e^{-2.5}}{(0.49)^2} = 0.0764346736$$

إن الخطأ المطلق الناتجة عن تدوير قيم المتغيرات تعطى بالعلاقة:

$$\delta_x \leq 5 \times 10^{-5}, \quad \delta_y \leq 5 \times 10^{-4}, \quad \delta_z \leq 5 \times 10^{-3}$$

يعطى الخطأ المطلق المركب في حساب قيمة الدالة بالعلاقة:

$$(\delta_f)_{\max} \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \delta_y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \delta_z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(x^2) \cdot y^3 + \frac{e^x}{z^2} \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = 39.5761613974$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3 \sin(x^2) y^2 \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = 0.3977525449$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-2e^x}{z^3} \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| = 1.39542195$$

$$(\delta_f)_{\max} \leq (39.57616139)(5 \times 10^{-5}) + (0.3977525449)(5 \times 10^{-4}) + (1.39542195)(5 \times 10^{-3})$$

$$0.0019788081 + 0.0001988763 + 0.0069771098 = 0.00915479$$

$$(e_f)_{\max} \leq \frac{(\delta_f)_{\max}}{|f|} = \frac{0.00915479}{0.0764346736} = 0.1197727908$$

14

المسألة الثانية

$$d_2(x, h) = \frac{1}{h^2} [f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)]$$

6

$$f(x+h) = f(1.1) = \sin(1.1-1) + (1.1)^3 = 0.09983 + 1.331 = 1.43083$$

$$f(x-h) = f(0.9) = \sin(-0.1) + (0.9)^3 = -0.09983 + 0.729 = 0.62917$$

$$f(x) = f(1) = 1$$

$$d_2(1, 0.1) = \frac{1}{(0.1)^2} [1.43083 + 0.62917 - 2] = 6 \approx 5.999$$

$$E(1, h) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(c); c \in [1-h, 1+h], \quad m = \max_{x \in [1-h, 1+h]} |f^{(4)}(x)|$$

$$f^{(4)}(1-h) = f^{(4)}(0.9) = \sin(-0.1) = -0.09983$$

$$f^{(4)}(1+h) = f^{(4)}(1.1) = \sin(1.1) = 0.891207$$

$$f(x) = \sin(x-1) \quad \text{وبما أن}$$

(1)

$$E(1, h) = -\frac{(0.1)^2}{12} (0.891207) = 0.00074267$$

$$d_3(x, h) = \frac{1}{2h^3} [f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)] \quad \text{المشتق الثالث}$$

8

$$d_3(1, 0.1) = \frac{1}{2(0.1)^3} [f(1.2) - 2f(1.1) + 2f(0.9) - f(0.8)]$$

$$= 5.00249$$

$$E(1, h) = \frac{h^2}{2} f^{(5)}(\xi) : \xi \in [x-2h, x+2h], \quad M = \max \{ |f^{(5)}(x-2h)|, |f^{(5)}(x+2h)| \}$$

$$f^{(5)} = \cos(x-1) \Rightarrow M = 1$$

$$E(1, 0.1) = \frac{(0.1)^2}{2} (1) = 0.005$$

إجابة السؤال الثاني : (1) يجب تغيير المتحول t في $[0, 2]$ إلى متحول في $[-1, +1]$ بالمتحول:

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} = x+1, \quad x \in [-1, +1] \quad n=4, m=2$$

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2 - 2(x+1) + 2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2(n+1)} \pi = \cos \frac{2k+1}{10} \pi, \quad k=0,1,2,3,4$$

$$x_0 = \cos \frac{\pi}{10} = 0.951057, \quad x_1 = 0.587785, \quad x_2 = 0$$

$$x_3 = -0.587785, \quad x_4 = -0.951057$$

$$y_0 = f(x_0) = \frac{1}{x_0^2 + 1} = \frac{1}{(0.951057)^2 + 1} = 0.5250696, \quad y_1 = \frac{1}{(0.587785)^2 + 1} = 0.7432229$$

$$y_2 = \frac{1}{1} = 1, \quad y_3 = y_1, \quad y_4 = y_0$$

$$a_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^4 y_k = \frac{1}{5} [y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4] = 0.707317$$

$$a_1 = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^4 y_k \cdot T_1(x_k) = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^4 y_k x_k = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^4 \frac{x_k}{1+x_k^2} = 0 \quad \text{لأنه}$$

$$a_2 = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^4 y_k T_2(x_k) = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^4 \frac{2x_k^2 - 1}{1+x_k^2} = -0.243902$$

$$P_2(x) = 0.707317 - 0.243902(2x^2 - 1) = 0.951219 - 0.487804x^2$$

$$P_2(t) = 0.951219 - 0.487804(t-1)^2$$

$$\Leftarrow x = t-1 \quad \text{المتحول}$$

$$= 0.463415 + 0.975608t - 0.487804t^2$$

$$f(1) = 0.902438, \quad P_2(1) = 0.951219 \Rightarrow \delta = |f(1) - P_2(1)| = 0.04878$$

$$f_3(t) = \frac{1}{2}[5t^3 - 3t] = 0$$

إجابة السؤال (ج) : لنب t_1, t_2, t_3 من المعادلة

(10)

$$t(5t^2 - 3) = 0 \Rightarrow t = 0, t = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, t_2 = 0, t_3 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 2$$

$$-\sqrt{\frac{3}{5}}w_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}w_3 = 0 \Rightarrow w_1 = w_3 = \frac{5}{9}, w_2 = \frac{8}{9}$$

$$\frac{3}{5}w_1 + \frac{3}{5}w_3 = \frac{2}{3}$$

$$I = \sum_{i=1}^3 w_i f(t_i) = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_3 f(t_3)$$

$$f(t_1) = t_1^2 \cos t_1 = 0.4288219, f(t_2) = t_2^2 \cos t_2 = 0, f(t_3) = 0.4288219$$

$$I = \frac{5}{9}(0.4288219) + \frac{5}{9}(0.4288219) = 0.476469$$

تأجيل السؤال (12) المطلوب حساب (y_1, z_1) فقط عند $t_1 = 0.1$

(12)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} [K_1 + 2(K_2 + K_3) + K_4], \quad z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6} [L_1 + 2(L_2 + L_3) + L_4]$$

$$K_1 = h f_1(t_i, y_i, z_i), \quad L_1 = h f_2(t_i, y_i, z_i)$$

$$K_2 = h f_1(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}, z_i + \frac{L_1}{2}), \quad L_2 = h f_2(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}, z_i + \frac{L_1}{2})$$

$$K_3 = h f_1(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}, z_i + \frac{L_2}{2}), \quad L_3 = h f_2(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}, z_i + \frac{L_2}{2})$$

$$K_4 = h f_1(t_i + h, y_i + K_3, z_i + L_3), \quad L_4 = h f_2(t_i + h, y_i + K_3, z_i + L_3)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6} [K_1 + 2(K_2 + K_3) + K_4], \quad z_1 =$$

$$K_1 = h f_1(t_0, y_0, z_0) = (0.1) [y_0 + z_0 + t_0 + e^{t_0}] = 0.1 (1 - 1 + 0 + 1) = 0.1$$

$$L_1 = h f_2(t_0, y_0, z_0) = (0.1) [-z_0 - y_0 + e^{t_0} - t_0 + 1] = 0.1 (1 - 1 + 1 - 1 + 1) = 0.2$$

$$K_2 = 0.10513, \quad L_2 = 0.20513, \quad K_3 = 0.20513, \quad L_3 = 0.20513$$

$$K_4 = 0.11052, \quad L_4 = 0.21052$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6} [0.1 + 2(0.10513 + 0.10513) + 0.11052] = 1.10517$$

$$z_1 = 1 + \frac{1}{6} [0.2 + 2(0.20513 + 0.20513) + 0.21052] = 1.20517$$

$$\delta_{y_1} = |y_1 - y(t_1)| = 3.65 \times 10^{-9}, \quad \delta_{z_1} = |z_1 - z(t_1)| = 3.65 \times 10^{-9}$$

إجابة السؤال الثالث: (10) 22

نفرض أن

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[n]{\alpha}$$

بالإشارة إلى القيم التقريبية

بالعويض بالعمدة الأولى:

$$f(x_k) = x_k^n - \alpha, \quad f'(x_k) = n x_k^{n-1}$$

$$x_{k+1} = \frac{x_k (n x_k^{n-1})' - x_k^n + \alpha}{n x_k^{n-1}} = \frac{(n-1)x_k^n + \alpha}{n x_k^{n-1}}$$

وهو الدستور التكراري المطلوب:

$$\alpha = 100, \quad n = 4 \Leftrightarrow x^4 = 100 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{100}$$

$$f(3) \times f(4) < 0$$

الجذر موجود في المجال $[3, 4]$ لأن:

$$x_0 = \frac{3+4}{2} = 3.5$$

$$x_1 = \frac{(4-1)(x_0)^4 + \alpha}{4 x_0^{n-1}} = \frac{3(3.5)^4 + 100}{4(3.5)^3} = \frac{550.1875}{171.5} = 3.20809$$

x	$f(x)$
0	-
1	-
2	-
3	-
4	+

$$x_2 = \frac{3(3.20809)^4 + 100}{4(3.20809)^3} = \frac{417.76615}{132.06861} = 3.16325$$

$$x_3 = \frac{3(3.16325)^4 + 100}{4(3.16325)^3} = \frac{400.36944}{126.607823} = 3.16228$$

$$x_4 = \frac{3(3.16228)^4 + 100}{4(3.16228)^3} = \frac{400.001047}{126.49138} = 3.162278$$

الجذر المطلوب $x_4 = 3.162278$ تكرار ثلاثة منازل عشرية مع الجذر $x_3 = 3.16228$

سلم تصحيح مقرر التحليل العددي 2

طلاب السنة الرابعة - رياضيات الفصل الأول 2021-2022

السؤال الأول : (25 درجة) 1- بفرض أن $y = f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[-1, 1]$ و $p_i(x)$ كثيرات حدود ليجندر .

$$(5) \quad I = \|y(x) - P(x)\| = \min \int_{-1}^1 [y(x) - P(x)]^2 dx =$$

$$= \min \int_{-1}^1 [y(x) - a_0 p_0(x) - a_1 p_1(x) - \dots - a_n p_n(x)]^2 dx$$

نعين المعاملات a_i بحيث يبلغ هذا المقدار قيمة صغرى وبالتالي يجب أن يكون:

$$(2) \quad \frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \Rightarrow -2 \int_{-1}^1 [y(x) - a_0 p_0(x) - a_1 p_1(x) - \dots - a_n p_n(x)] p_i(x) dx = 0$$

بالاعتماد على خاصية التعامد نجد:

$$(2) \quad \int_{-1}^1 [y(x) - a_i p_i(x)] p_i(x) dx = 0$$

$$(2) \quad \int_{-1}^1 [p_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad \text{حسب الخاصة:}$$

$$(2) \quad a_i = \frac{\int_{-1}^1 y(x) p_i(x) dx}{\int_{-1}^1 [p_i(x)]^2 dx} = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 y(x) \cdot P_i(x) dx$$

2- دستور التكاملات الثنائية بطريقة شبه المنحرف يكتب بالشكل:

$$(3) \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \frac{hk}{4} \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^2 \lambda_{ij} f_{ij}$$

$$(2) \quad \lambda_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{حيث أن:}$$

نحسب قيم الدالة عند النقاط المطلوبة:

x_i	0	1	2	3	4
y_i					
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	6	8

(5)

بتطبيق الدستور نجد:

$$(2) \quad \int_0^4 \int_0^2 x y dx dy = \frac{1}{4} [8 + 2(16) + 4(6)] = 16$$

السؤال الثاني: (20 درجة 1- نطبق دستور رونج . كوتا فنجد إن :

$$(4) \quad y_1 = y(0.1) = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.2(x_0 - y_0) = 0.2(0 - 2) = -0.4$$

$$k_2 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2) = 0.2(0.1 - 1.8) = -0.34$$

$$(4) \quad k_3 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_2/2) = 0.2(0.1 - 1.8) = -0.346$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.2(0.2 - y_0 + k_3) = -0.2908$$

بالتبديل نحصل على الحل التقريبي الأول للمعادلة التفاضلية المطلوبة عند النقطة $x = 0.2$ ، أي:

$$(2) \quad y_1 = y(0.2) = 2 + \frac{1}{6}[-0.4 + 2(-0.34) + 2(-0.346) + (-0.2908)] = 1.6562$$

$$(4) \quad y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}_n + \dots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}_n \quad \text{2 - دستور تايلور هو:}$$

لنحسب المشتقات المتتالية عند النقطة $x_0 = 1$ ، فنجد أن :

$$y'(1) = 3$$

$$(4) \quad y''(x) = -\frac{y'}{x} + 4\frac{y}{x^2} - \frac{3}{x} \Rightarrow y''(1) = 10$$

$$y'''(x) = -\frac{y''}{x} + \frac{5y'}{x^2} - \frac{8y}{x^3} + \frac{3}{x^2} \Rightarrow y'''(1) = -24$$

بالتبديل في دستور تايلور من أجل أربعة حدود نجد أن:

$$y_1 = y(x_1) = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \frac{h^3}{3!}y'''_0 =$$

$$(2) \quad = 4 + (0.2).(3) + \frac{(0.2)^2}{2!}(10) + \frac{(0.2)^3}{3!}(-24) = 4.768$$

السؤال الثالث (25 درجة)

$$(5) \quad u_{i,j+1} = (1 - 2\lambda)u_{ij} + \lambda(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) \quad \text{المعادلة الفرقية :}$$

$$S = \frac{\alpha k}{h^2} = 2/5 \quad \text{حيث أن:}$$

وبالتالي فإن المعادلة الفرقية لهذه المسألة تكتب بالشكل التالي:

$$(2) \quad u_{i,j+1} = \frac{2}{5}(u_{i-1,j} + 0.5u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

نضع شروط البدء و الشروط الحدية في السطر الأول و العمود الأول ، ثم نتابع و نحسب كل سطر بدلالة السطر الذي يسبقه وفقاً للمعادلة الفرقية لهذه المسألة فنحصل على النتائج التالية :

(6)

x	0	0.5	1	1.5	2
t					
0	0	0.70710678	1	0.70710678	0
0.1	0	0.54142135	0.76568542	0.54142135	0

السؤال الأول: (25 درجة)

1- إذا كانت كثيرة حدود التقريب بدلالة كثيرات حدود ليجنדר $y(x) = \sum_{i=0}^n a_i P_i(x)$ ، فأثبت أن:

$$a_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 y(x) \cdot P_i(x) dx$$

2- أوجد بطريقة أشباه المنحرفات القيمة التقريبية للتكامل الثنائي التالي:

$$h = k = 1 \quad \text{حيث أن:} \quad \int_0^4 \int_0^2 x y \, dx \, dy, \quad x \in [0, 4], y \in [0, 2]$$

السؤال الثاني: (20 درجة)

1- استخدم طريقة رونج . كوتا لإيجاد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y' = x - y$$

عند النقطة $x = 0.2$ ، معتبراً أن $h = 0.2$.

$$y(0) = 2$$

2- أوجد بطريقة تابلور الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية: $x^2 y'' + xy' - 4y + 3x = 0$ حيث

إن: $y(1) = 4, y'(1) = 3$ ، وذلك عند النقطة $x = 1.2$ ، علماً أن $h = 0.2$ مستخدماً أربعة

حدود.

السؤال الثالث: (25 درجة)

1- أوجد بطريقة الفروق المحدودة حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad t > 0$$

• $u(x, t) = (1.5, 0.1)$ في النقطة المقابلة لـ $h = 0.5, k = 0.1$ حيث إن:

(احسب القيم بالراديان)

2- أوجد المعادلة الفرقية الموافقة لمعادلة بواسون التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12$$

علماً أن: $h = k = 1$.

***** انتهت الأسئلة *****

السؤال الأول: (25 درجة)

1- أوجد كثيرة حدود التقريب من الدرجة الأولى للدالة $f(x) = \frac{1}{x+2}$ بدلالة كثيرات حدود ليجنדר ، وذلك ضمن المجال $[-1, +1]$.

2- أوجد بطريقة سيمبسون القيمة التقريبية للتكامل الثنائي التالي:

$$\int_{-1}^3 \int_0^2 x^2 y \, dx \, dy \quad , \quad x \in [-1, 3], y \in [0, 2] \quad \text{حيث أن: } h = k = 1$$

السؤال الثاني: (25 درجة)

1- أوجد بطريقة أولر حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' = 2x - y$$

$$y(0) = 1$$

وذلك عند النقطة $x = 0.3$ حيث أن: $h = 0.1$.

2- أوجد بطريقة تايلور الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية : $y'' + \frac{2y'}{x} - \frac{2y}{x^2} = 0$

مع الشروط الابتدائية: $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ ، وذلك عند النقطة $x = 1.1$ ، علماً أن $h = 0.1$ مستخدماً أربعة حدود فقط.

السؤال الثالث: (30 درجة)

1- أوجد بطريقة كرانك - نيكلسون حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية (خطوة واحدة فقط) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad , \quad 0 < x < 2 \quad , \quad t > 0$$

وذلك من أجل الشروط الحدية التالية:

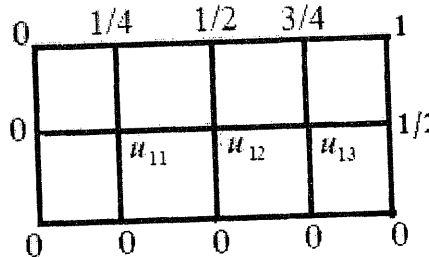
$$u(x, 0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad , \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$u(0, t) = 1, \quad u(2, t) = -1 \quad , \quad t > 0$$

حيث إن: $h = 0.5$, $k = 0.25$ (احسب القيم بالراديان)

2- أوجد الحل العددي لمعادلة لابلاس التالية: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ معتبراً أن: $h = 1/4$, $k = 1/2$

وذلك في النقاط الداخلية للشكل:



***** انتهت الأسئلة *****

13/2/ 2022

سلم تصحيح مقرر التحليل العددي 2

طلاب السنة الرابعة - رياضيات الفصل الأول 2021-2022

السؤال الأول : (25 درجة) بما أن كثيرة حدود التقريب من الدرجة الأولى، فإن كثيرات حدود ليجندر المطلوبة:

$$(2) \quad p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x$$

$$(2) \quad P_1(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x)$$

لنحسب كلاً من الثابتين a_0 ، a_1 من العلاقة:

$$(4) \quad a_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) p_i(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{2} \{ \ln(x+2) \}_{-1}^{+1} = \frac{1}{2} \ln 3 = 0.549306144$$

$$(4) \quad a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x+2} = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx = \frac{3}{2} \{x - 2 \ln(x+2)\}_{-1}^{+1} = 3(1 - \ln 3) = -0.295836866$$

أي أن كثيرة حدود التقريب هي:

$$(2) \quad P_1(x) = 0.549306144 - 0.295836866x$$

⁻² دستور التكاملات الثنائية بطريقة شبه المنحرف يكتب بالشكل:

$$(3) \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \frac{hk}{9} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^2 \lambda_{ij} f_{ij}$$

$$(2) \quad \lambda_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

حيث أن:

(3) نحسب قيم الدالة عند النقاط المطلوبة:

x_i	-1	0	1	2	3
y_i					
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	4	9
2	2	0	2	8	18

$$(3) \quad \int_{-1}^3 \int_0^2 x^2 y dx dy = \frac{1}{9} [20 + 4(18) + 2(2) + 16(4) + 8(1)] = \frac{168}{9}$$

السؤال الثاني: (20 درجة) 1- بتطبيق دستور أولر:

$$(4) \quad y_{k+1} = y_k + h y'_k = y_k + h f(x_k, y_k) \quad \text{نجد أن :}$$

$$y_1 = y(0.1) = 1 + 0.1(2 \times 0 - 1) = 0.9$$

$$(6) \quad y_2 = y(0.2) = 0.9 + 0.1(2 \times 0.1 - 0.9) = 0.83$$

$$y_3 = y(0.3) = 0.83 + 0.1(2 \times 0.2 - 0.83) = 0.787$$

$$(4) \quad y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}_n + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}_n \quad \text{- 2 دستور تايلور :}$$

لنحسب المشتقات المتتالية عند النقطة $x_0 = 1$ ، فنجد أن :

$$(4) \quad y'' = -\frac{2y'}{x} + \frac{2y}{x^2} \Rightarrow y''(1) = -2$$

$$y''' = -\frac{4y'}{x^2} + \frac{2y''}{x} + \frac{4y}{x^3} \Rightarrow y'''(1) = 8$$

بالتبديل في دستور تايلور من أجل أربعة حدود نجد أن:

$$(2) \quad y_1 = y(x_1) = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \frac{h^3}{3!}y'''_0 =$$

$$= 0 + (0.1)(1) + \frac{(0.1)^2}{2!}(-2) + \frac{(0.1)^3}{3!}(8) = 0.0913333333$$

السؤال الثالث (25 درجة)

المعادلة الفرقية :

$$(3) \quad -su_{i-1,j+1} + (2+2s)u_{i,j+1} - su_{i+1,j+1} = su_{i-1,j} + (2-2s)u_{i,j} + su_{i+1,j}$$

حيث أن: $h = 0.5$, $k = 0.25$

$$(1) \quad S = \frac{\alpha k}{h^2} = \frac{0.25}{0.25} = 1$$

$$(3) \quad u_{i,j+1} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1})$$

(3) نضع شروط البدء والشروط الحدية في السطر الأول والعمود الأول، نجد:

x	0	0.5	1	1.5	2
t					
0	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
0.25	1	u_1	u_2	u_3	-1

يمكننا إيجاد قيم أول سطر بحل مجموعة المعادلات الآتية:

$$(3) \quad u_1 = \frac{1}{4}(u_2 + 2) , u_2 = \frac{1}{4}(u_1 + u_3) , u_3 = \frac{1}{4}(u_2 - 2)$$

بالحل المشترك نجد:

$$(2) \quad u_1 = 0.5 , u_2 = 0 , u_3 = -0.5$$

2- نكتب المعادلة التفاضلية بدلالة الفروق من المرتبة الثانية ، نجد:

$$(3) \quad \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} = 0$$

بما أن $h = 1/4$, $k = 1/2$ فإن المعادلة الفرقية تكتب بالشكل التالي:

$$(2) \quad u_{i,j} = \frac{1}{10}[4u_{i-1,j} + 4u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}]$$

$$(3) \quad u_{11} = \frac{1}{10}(4u_{12} + 1/4) , u_{12} = \frac{1}{10}(4u_{11} + 4u_{13} + 1/2) , u_{13} = \frac{1}{10}[4u_{12} + 11/4]$$

بالحل المشترك نجد:

$$(2) \quad u_{11} = \frac{1}{8} , u_{12} = \frac{1}{4} , u_{13} = \frac{3}{8}$$

***** انتهى *****



فرع 1
تجمع الكليات (كلية العلوم)
فرع 2

الكورنيش الشرقي جانب MTN

مكتبة



طباعة محاضرات - قرطاسية

Mob: 0931 497 960

