كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثانية

أسئلة دورات محلولة

توابع خاصة

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة طرطوس-كلية العلوم
قسم الفيزياء

مقرر التوابع الخاصة
لطلاب السنة الثانية
اسم الطالب:
الرقم الجامعي:

السؤال الأول (60 درجة):

أوجد ناتج التكاملات التالية باستخدام تابعي غاما وبيتا:

1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot e^{x}}$,
2. $\int_0^{\infty} x^3\cdot e^{-2\sqrt{x}}dx$,
3. $\int_0^{1} (\ln x)^2 dx$
4. $\int_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$,
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$,
6. $\int_0^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x}} dx$

السؤال الثاني (15 درجة):

استخرج كثيرات حدود ليجندر $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$، إذا علمت أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\cdot r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial n}{\partial r^n}(1-2x\cdot r+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_{r\to 0}\cdot r^n$$

السؤال الثالث (15 درجة):

أوجد تحويل لابلاس للتابع:

$$f(t) = t\cdot e^{-t}; t>0$$

علماً أن:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-p.t}\, dt$$

A to Z

مدرس المقرر

أ.د. تيسير أحمد معلا

$$\sim I_6 = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int_0^1 x^{4-1}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^1 x^{4-1}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}-1}\,dx$$

$$= B\left(4,\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(4)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{3!\cdot\sqrt{\pi}}{\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{48}{105}$$

(2) (3) (2) (2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\cdot r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial r^n}\left(1-2xr+r^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot r^n$$

: نمره این سوال

15

$\sim n=0 \Rightarrow P_0(x) = 1$ (1)

$$\sim n=1 \Rightarrow P_1(x) = \frac{1}{1}\frac{\partial}{\partial r}\left(1-2xr+r^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left[\left(1-2xr+r^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2r)\right]_{r\to 0}$$

(3)

$$= -\frac{1}{2}(1)(-2x) = x$$

$$\sim n=2 \Rightarrow P_2(x) = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(1-2xr+r^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{2}\left(1-2xr+r^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2r)\right)\right]_{r\to 0}$$

(5)

$$= \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$\sim n=3 \Rightarrow P_3(x) = \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3}{\partial r^3}\left(1-2xr+r^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_{r\to 0}$$

(5)

$$= \frac{1}{6}\left[15x^3-9x\right] = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

الحوال للحالات:

$$f(t) = t \cdot e^{-t} \Rightarrow \mathcal{L}[t \cdot e^{-t}, p] = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-t} \cdot e^{-pt} \cdot dt$$

$$= \int_0^{\infty} t \cdot e^{-(p+1)t} \cdot dt \quad (3)$$

نكامل بالتجزئة:

$$u = t, \quad e^{-(1+p)t} \cdot dt = dv \Rightarrow du = dt$$

$$v = -\frac{1}{1+p} e^{-(1+p)t} \quad (4)$$

ومنه:

$$\mathcal{L}[t \cdot e^{-t}, p] = -\lim \frac{t}{p+1} \cdot e^{-(p+1)t} \Big|_0^a - \lim \int_0^a -\frac{1}{1+p} e^{-(p+1)t} \cdot dt$$

$$= \frac{1}{1+p} \int_0^{\infty} e^{-(p+1)t} \cdot dt = \frac{1}{1+p} \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-(p+1)t} \cdot dt \quad (4)$$

$$= \frac{1}{1+p} \lim_{a \to \infty} \left[-\frac{1}{1+p} \left(e^{-(p+1)t} - 1 \right) \right] = \frac{1}{(1+p)^2}$$

AtoZ

الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة طرطوس-كلية العلوم
قسم الفيزياء

مقرر التوابع الخاصة
لطلاب السنة الثانية
اسم الطالب:
الرقم الجامعي:

السؤال الأول (60 درجة):

أوجد ناتج التكاملات التالية باستخدام تابعي غاما وبيتا:

1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot e^{x}}$,
2. $\int_0^{\infty} x^3\cdot e^{-2\sqrt{x}}dx$,
3. $\int_0^{1} (\ln x)^2 dx$
4. $\int_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$,
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$,
6. $\int_0^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x}}dx$

السؤال الثاني (15 درجة):

استخرج كثيرات حدود ليجندر $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$، إذا علمت أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\cdot r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial n}{\partial r^n}(1-2x\cdot r+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_{r\to 0}\cdot r^n$$

السؤال الثالث (15 درجة):

أوجد تحويل لابلاس للتابع:

$$f(t) = t\cdot e^{-t}; t>0$$

علماً أن:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-p}\, dt$$

مدرس المقرر
أ.د. تيسير أحمد معلا

مكتبة AtoZ

السؤال الأول: 60

(10) 1) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,e^x} = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\,dx = \int_0^\infty x^{(\frac{1}{2}-1)} e^{-x}\,dx = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

(10) 2) $\int_0^\infty x^3 e^{-2\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty (\frac{t^2}{4})^3 e^{-t} \frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{128}\int_0^\infty t^7 e^{-t}\,dt$

$= \frac{1}{128}\int_0^\infty t^{(8-1)} e^{-t}\,dt = \frac{1}{128}\Gamma(8) = \frac{1}{128}(7!)$

$= \frac{63}{8}$.

حيث $2\sqrt{x} = t \Rightarrow x = \frac{t^2}{4} \Rightarrow dx = \frac{t}{2}dt$.

(10) 3) $\int_0^1 (\ln x)^2\,dx$ ؛ نفرض:

$\ln x = -t \Rightarrow x = e^{-t} \Rightarrow dx = -e^{-t}\,dt$

$\Rightarrow = +\int_\infty^0 t^2 (e^{-t})\,dt = +\int_0^\infty t^2 e^{-t}\,dt = +\Gamma(3) = +2! = +2$

$\ln 1 = 0,\ \ln 0 \Rightarrow \infty$ لأن

(10) 4) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2}}$ ؛ نفرض

$x = 3t \Leftarrow dx = 3\,dt \Leftarrow$

$\int_0^1 \frac{3\,dt}{3\sqrt{t(1-t)}} = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \int_0^1 t^{(\frac{1}{2}-1)} \cdot (1-t)^{(\frac{1}{2}-1)}\,dt$

$= B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$.

أو

$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi$.

مكتبة A to Z

(195) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2(\frac{1}{4})-1} \cdot (\sin\theta)^{2(\frac{3}{4})-1}\, d\theta$

$= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} B\left(1-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(196) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x}}\, dx = \int_0^1 x^{(4-1)} (1-x)^{\frac{1}{2}-1}\, dx = B\left(4, \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\Gamma(4)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{3!\sqrt{\pi}}{\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{\pi}} = \frac{48}{105}$

مكتبة A to Z

15: السؤال البرهاني

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n}{\partial r^n}(1-2xr+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right] r^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\cdot r^n$

(3) ⇐ $n! = 0! = 1$, $r^0 = 1$ ⇐ $n=0$ عند

1) $P_0(x) = 1$

2) $P_1(x) = \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial}{\partial r}(1-2xr+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_{r\to 0}$ (5)

$= -\frac{1}{2}\left[(1-2xr+r^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2r)\right]_{r\to 0} = -\frac{1}{2}(1)(-2x) = x$

3) $P_2(x) = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(1-2xr+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_{r\to 0}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{1}{2}(1-2xr+r^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2r)\right]\right]_{r\to 0} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[-\frac{3}{2}(1-2xr+r^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x+2r)(-2x+2r)+(1-2xr+r^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2)\right]_{r\to 0}$$

$$\cdot(-2x+2r)$$

$$= \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

مكتبة A to Z

السؤال الثاني: 15

$$L[t\cdot e^{-t}, p] = \int_0^\infty t\cdot e^{-t}\cdot e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty t\cdot e^{-(p+1)t}\,dt.$$

نحل بالتجزئة مرتين:

$$u = t,\quad e^{-(1+p)t}\,dt = dv \Rightarrow du = dt,\quad v = -\frac{1}{p+1}e^{-(1+p)t}$$

ومنه:

$$L[t\cdot e^{-t}, p] = -\lim_{a\to\infty}\frac{t}{p+1}\cdot e^{-(p+1)t}\Big|_0^{+a} + \lim_{a\to\infty}\int_0^{+a}\frac{1}{1+p}e^{-(p+1)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{p+1}\lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{1+p}\left(e^{-(p+1)a}-1\right)\right] = \frac{1}{(p+1)^2}.$$

آ و :

$$L\left[t.e^{-t}p\right] = \int_0^\infty t.e^{-t}e^{-p}.dt = \int_0^\infty t.e^{-(p+t)}dt.$$ (II)

نكامل بالتجزيئة:

$$= e^{-p}\int_0^\infty t.e^{-t}.dt$$ (5)

$$u\,dv = uv - v\,du \Rightarrow u = t \Rightarrow du = dt$$

$$dv = e^{-t}dt \Rightarrow \boxed{v = -e^{-t}}$$ $\Rightarrow$ (5)

$$\sim e^{-p}\int_0^\infty = e^{-p}\left\{-te^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}dt\right\}$$

$$= e^{-p}\left\{0 - e^{-t}\Big|_0^\infty\right\} = e^{-p}\left[-0+1\right] = e^{-p}$$ (5)

مكتبة A to Z

الجمهورية العربية السورية — الفصل الدراسي الثاني

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي — التوابع الخاصة

جامعة طرطوس – كلية العلوم

قسم الفيزياء – السنة الثانية

A to Z

السؤال الأول : (60درجة)

أوجد ناتج التكاملات التالية باستخدام تابعي غاما وبيتا :

1) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{2X}}}{\sqrt{2X}}\, dx$ 0

2) $\int_0^{\infty} \frac{X^2}{1+X^4}\, dx$ 0

3) $\int_0^1 \frac{dX}{\sqrt[n]{1-X^m}}$ 0

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\emptyset}{\cot \emptyset}$ 0

السؤال الثاني(15 درجة)

تعطى كثيرات حدود ليجندر وفق صيغة رود ريج بالعلاقة التالية:

$$l_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n]$$

أوجد:

1) توابع ليجندر l_1 ، l_2 ، l_3

2) برهن ان التوابع الثلاث متعامدة في المجال $[-1,+1]$ ،علما أن تابع الوزن $w(x)=1$.

السؤال الثالث (15 درجة)

أوجد تحويل لا بلاس للتابع $F(t) = \cos t$

بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر أ. د. تيسير أحمد معلا

السؤال الأول: (100 درجة)

16

1) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}}\,dx$;

نفرض: $y=\sqrt{2x} \Leftarrow y^2=2x$ (2)

$2y\,dy=2dx \Rightarrow y\,dy=dx$ (3)

إذاً: $x=0 \Rightarrow y=0$ (2)

$x=\infty \Rightarrow y=\infty$

$\sim \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}\cdot y\,dy =$ (2)

$= \int_0^{\infty} y^0 e^{-y}\,dy$ (2)

بما أن: $\Gamma(a)=\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\,dx \Rightarrow$ (1)

$a-1=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow \Gamma(1)=1$ (2)

20

2) $I=\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$;

نفرض: $x^4=y \Rightarrow x=y^{(\frac{1}{4})}$ (2)

$4x^3dx=dy \Rightarrow dx=\frac{1}{4x^3}dy=\frac{1}{4}\cdot y^{-\frac{3}{4}}\cdot dy$ (2) $\Rightarrow$

حدود التكامل:

$x \to 0 \Rightarrow y=0$

$x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$ (2)

A to Z

$$I=\int_0^{\frac{1}{4}\infty}\frac{\frac{2}{y^4}}{1+y}\cdot y^{-\frac{3}{4}}\cdot dy=\int_0^{\infty}\frac{y^{(\frac{2}{4}-\frac{3}{4})}}{1+y}dy=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{y^{-\frac{1}{4}}}{1+y}\cdot dy$$

(2) (2)

نحن:

$$B(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$$

(1) (1)

$$p-1=-\frac{1}{4}\Rightarrow\boxed{p=\frac{3}{4}}\quad;\quad p+q=1\Rightarrow q=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

(2) وعند:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\cdot\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(1)}\Rightarrow$$

(2) (1)

$$I=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\cdot\Gamma(\frac{1}{4})}{1}=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{4}}=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

(1)

حسب خواص الدوال:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}$$

(19)

3)

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$$

نضع:

(1) (2) (2)

$$y=x^m\Rightarrow x=y^{\frac{1}{m}}\Rightarrow dx=\frac{1}{m}y^{(\frac{1}{m}-1)}\cdot dy$$

حدود التكامل:

(2)

$$\left.\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=0\\ x=1\Rightarrow y=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{m}\int_0^1 y^{\left(\frac{1}{m}-1\right)}\cdot(1-y)^{-\frac{1}{n}}\,dy \quad (2)$$

اذا قارنا مع تعريف B فإن:

$$B(p,q) = \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}\,dy \quad (2)$$

حيث:

$$p = \frac{1}{m},\quad q-1 = -\frac{1}{n} \Rightarrow q = 1-\frac{1}{n} \quad (3)$$

$$I = \frac{1}{m}B\left(\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)} \quad (2)\ (2)$$

(5) 4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cot\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cdot d\theta}{\cos\theta} \quad (1)\ (1)$$

$$= -\ln(\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\ln\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) + \ln(\cos 0) \quad (1)\ (1)$$

$$= (\ln 1 - \ln 0) = \ln\frac{1}{0} \quad (1)$$

(غير معين)

A to Z

السؤال الثاني: 15

$$l_n = \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^n\right].$$

الحل:

$$n=1 \Rightarrow l_1 = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{1!} \frac{d}{dx}(1-x^2) = x \quad (3)$$

$$n=2 \Rightarrow l_2(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dx^2}(1-x^2)^2$$

$$= \frac{1}{8} \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(1-x^2)^2\right] \quad (3)$$

$$= \frac{1}{8} \frac{d}{dx}\left[2(1-x^2)(-2x)\right] = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx}\left[x(1-x^2)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}(1-3x^2) = \frac{1}{2}(3x^2-1) = \frac{3}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

$$n=3 \Rightarrow l_3(x) = \frac{-1}{8} \cdot \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dx^3}\left[(1-x^2)^3\right]. \quad (3)$$

$$= \frac{-1}{48} \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d}{dx}(1-x^2)^3\right] = \frac{-1}{48} \frac{d^2}{dx^2}\left[3(1-x^2)^2 \cdot (-2x)\right]$$

$$= \frac{+1}{8} \frac{d^2}{dx^2}\left[x(1-x^2)^2\right]$$

A to Z

$$l_3(x) = \cancel{-1+\frac{3}{2}x^2} \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\sim \int_{-1}^{+1} l_n l_m \cdot w(x)\,dx = 0$$

$\Leftarrow n=1, m=2$ (1

$$\int_{-1}^{+1} l_1 l_2 \cdot 1\,dx = \int_{-1}^{+1} x\left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2\right]dx$$

$\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$$= \int_{-1}^{+1}\left[-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^3\right]dx = \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x^4\right)\Big|_{-1}^{+1}$$

$$= \left(-\frac{1}{4}(1) + \frac{3}{8}(1)\right) - \left[-\frac{1}{4}(1) + \frac{3}{8}(1)\right] = 0$$

$l_1(x) \perp l_2(x)$.

$$\sim \int_{-1}^{+1} l_1(x)\, l_3(x) \cdot 1\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x \cdot \left(-3x + \frac{5}{2}x^3\right)dx$$

$\Leftarrow n=1, m=3$ (2

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{3x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(5x^4 - 3x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1+1) - (1+1)\right] = 0 \Rightarrow l_1 \perp l_3$$

A to Z

$$\sim \int_{-1}^{+1} l_2(x)\, l_3(x)\, w'(x)\, dx = 0 \quad ?$$

$$= \frac{15}{4}\int_{-1}^{+1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)dx = \frac{15}{4}\int_{-1}^{+1}\left(x^5-\frac{3}{5}x^3-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x\right)dx$$

$$= \frac{15}{4}\int_{-1}^{+1}\left(x^5-\frac{14}{15}x^3+\frac{1}{5}x\right)dx \quad (1)$$

$$= \frac{15}{4}\left[\frac{x^6}{6}-\frac{14}{60}x^4+\frac{1}{10}x^2\right]_{-1}^{+1}$$

$$= \frac{15}{4}\left\{\frac{1}{6}(1-1)-\frac{14}{60}(1-1)+\frac{1}{10}(1-1)\right\} = 0 \quad (1)$$

A to Z

(15) السؤال الثاني:

$$\mathcal{L}[\cos t, p] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, p\right] = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[e^{it}+e^{-it}\right] e^{-pt}\,dt$$

(4) $$= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{it}\cdot e^{-pt}\,dt + \int_0^\infty e^{-it}\cdot e^{-pt}\,dt\right]$$

(4) $$= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-(p-i)t}\,dt + \int_0^\infty e^{-(p+i)t}\,dt\right]$$

(4) $$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{p-i}e^{-(p-i)t}\Big|_0^\infty - \frac{1}{p+i}e^{-(p+i)t}\Big|_0^\infty\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 + \frac{1}{p-i} - 0 + \frac{1}{p+i}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2p}{p^2+1}\right)$$

$$\mathcal{L}[\cos t, p] = \frac{p}{p^2+1}$$ (3)

A to Z

أسئلة مقرر التوابع الخاصة للسنة الثانية فيزياء

(خمس عشرة درجة) 1- انطلاق من تعريف(β (p, q أثبت أن $\beta(p,q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dq$

(خمس عشرة درجة) 2- ومن تعريف التابع $\Gamma(a)$ أثبت صحة العلاقة $\Gamma(a+1) = a\ \Gamma(a)$

(ثلاثون درجة) 3- أوجد قيمة التكاملين التاليين :

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1+x^4} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x} dx}{(1+e^{3x})^2}$$

(خمس عشرة درجة) 4- أوجد تحويل لابلاس للتابعين:

$$f_2(t) = e^{-t} dt \qquad f_1(t) = (1+2t) dt$$

(خمس عشرة درجات) 5- باستخدام طريقة غرام شميدت للتعامد عيّن الحدوديات المتعامدة على المجال [-1,1] باعتبار تابع للوزن $\omega(x)=1$ وأيضاً $\varphi_0(x) = 1$

انتهت الأسئلة

أستاذ المقرر

د.أسف يوسف

① c.c/c.ce سلم تصحيح مقترح لفرض خاصة س ف فصل أول

س 1 15

تعريف تابع β

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad ; p>0, q>0$$ (5)

نوظف $y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x = \frac{y}{1+y}$

$$dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$x=0 \Rightarrow y=0$

$x=1 \Rightarrow y \to \infty$

بالتعويض في التعريف (5)

$$\beta(p,q) = \int_0^\infty \left(\frac{y}{1+y}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{1+y}\right)^{q-1}\frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy$$ (5)

س 2 15

تعريف تابع غاما

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty x^a e^{-x}\,dx$$ (5)

نوظف $u = x^a$

ومنه انطلاقا من $dx = e^{-x}dx$

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty x^a e^{-x}dx = -\int_0^\infty x^a\,d(e^{-x}) = -\left[x^a e^{-x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\,a\,x^{a-1}dx\right]$$ (5)

$$= a\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = a\,\Gamma(a)$$

س 3 30

$$J = \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{1+x^4}$$

نوظف $t = x^4 \Leftarrow 4x^3\,dx = dt$

ومنه انطلاقا من العلاقة $dx = \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt$

$$J = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{1+t}t^{-\frac{3}{4}}dt = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{1+t}dt$$ (5)

وهذا تابع β

$p-1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{3}{4}$

$p+q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{4}$ (5)

$$J = \frac{1}{4}\beta\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$ (5)

وبالتالي

(2)

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2x}dx}{(1+e^{3x})^2}$$

نفرض $t=e^x \Leftarrow dt=e^x dx$ وبالتعويض $dx=\frac{dt}{t}$

$x\to-\infty \Rightarrow t=0$
$x\to\infty \Rightarrow t\to\infty$ $\Big\}\Rightarrow$

$$J=\int_0^{\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\frac{dt}{t}=\int_0^{\infty}\frac{t\,dt}{(1+t^3)^2}$$

نفرض $u=t^3 \Leftarrow t=\sqrt[3]{u}$ (5)

وبالتعويض $dt=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}du$

$$J=\frac{1}{3}\int_0^{\infty}\frac{u^{\frac{1}{3}}u^{-\frac{2}{3}}}{(1+u)^2}=\frac{1}{3}\int_0^{\infty}\frac{u^{-\frac{1}{3}}}{(1+u)^2}du$$

بالمقارنة مع تابع بيتا نجد:

$p-1=-\frac{1}{3}\Rightarrow p=\frac{2}{3}$ (5)

$p+q=2\Rightarrow q=\frac{4}{3}$

$$J=\frac{1}{3}\beta\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3}+\frac{4}{3})}=\frac{1}{9}\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(2)}=\frac{1}{9}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{9\sqrt{3}}$$

وبالتعويض (5)

س4 (15)

$$\mathcal{L}(1+2t)=\int_0^{\infty}e^{-st}(1+2t)dt=\int_0^{\infty}e^{-st}dt+2\int_0^{\infty}te^{-st}dt$$

نفرض $u=t \Leftarrow du=dt$ و $dv=e^{-st}dt \Leftarrow v=-\frac{1}{s}e^{-st}$

فنجد بتطبيق التكامل بالتجزئة

$$=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}+2\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{\infty}e^{-st}dt\right]$$

$$=\frac{1}{s}+2\left[-\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^{\infty}\right]=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}$$ (5)

$$\mathcal{L}(f_2(t))=\int_0^{\infty}e^{-t}e^{-st}dt=\int_0^{\infty}e^{-(s+1)t}dt=-\frac{1}{s+1}$$ (5)

(3)

$$\boxed{\varphi_0 = 1}$$

$$\varphi_1(x) = x + \alpha_{10} \Rightarrow \alpha_{10} = \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} dx} = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_1(x) = x}$$

5

15

$$\varphi_2(x) = x^2 + \alpha_{20}\varphi_0 + \alpha_{21} x$$

$$\alpha_{20} = \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} dx} = \frac{1}{3} \qquad \alpha_{21} = \frac{\int_{-1}^{1} x \cdot x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = 0$$

5

$$\boxed{\varphi_2 = x^2 - \frac{1}{3}}$$

$$\varphi_3(x) = x^3 + \alpha_{30}\varphi_0(x) + \alpha_{31}\varphi_1(x) + \alpha_{32}\varphi_2(x)$$

$$= x^3 + \alpha_{30} + \alpha_{31} x + \alpha_{32}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

وبالتالي

$$\alpha_{30} = 0 \qquad \alpha_{31} = -\frac{3}{5} \qquad \alpha_{32} = 0$$

5

$$\boxed{\varphi_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x}$$

حيث

$$\alpha_{ij} = -\frac{\int_a^b \omega(x)\,\varphi_j(x)\,x^i\,dx}{\int_a^b \omega(x)\,\varphi_j^2(x)\,dx} \quad 5$$

$$= \frac{\int_a^b \omega(x)\,\varphi_j(x)\,x^i\,dx}{\|\varphi_j(x)\|^2} \qquad j = 0, 1, \ldots, i-1$$

د. آصف يوسف

عدلت الدرجات لتصبح $\frac{90}{100}$ عوضاً عن $\frac{70}{100}$

كون العلي $\frac{10}{100}$ وليس $\frac{30}{100}$

د. آصف يوسف

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الفيزياء

الاسم :

الرقم:

أسئلة مقرّر توابع خاصّة

السؤال الأول: 15 درجة

انطلاقاً من تعريف تابع $\beta(p, q)$ أثبت أن هذا التابع متناظر بالوسيطين p , q

السؤال الثاني : 30 درجة

احسب التكاملات التالية :

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \qquad I_2 = \int_0^{1} \ln^2 t dt \qquad I_3 = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^3}$$

السؤال الثالث : 15 درجة

حسب طريقة غرام – شميدت كيف تبني حدوديات متعامدة φ_i على المجال [a, b] انطلاقاً من مجموع التوابع المستقلة $1, x, x^2, \ldots$ مع تابع وزن $\omega(x) = 1$ يُكتفَى بإيجاد $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

السؤال الرابع : 15 درجة

اوجد تحويل لابلاس للتابع $f(t) = te^{at}$

السؤال الخامس : 15 درجة

إذا كانت لدينا معا دلة ليجندر التالية :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$

أوجد قيمة n والشكل العام لحدوديات ليجندر على اعتبار الأمثال تُعطى

$$c_{i+2} = \frac{(n-i)(n+i+1)}{(i+2)(i+1)} c_i$$

مع الأمنيات بالنجاح

د. آصف يوسف

A to Z

١٥ ذ (P,q)

١- اثبات أن صيغة التعريف تحقق

$$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

نفرض $u=1-x \Leftarrow du=-dx$ وبالتالي $x=1 \Leftarrow u=0$ و $x=0 \Leftarrow u=1$

$$\beta(p,q)=-\int_1^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}=\int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}du=\beta(q,p)$$

٢- لكل تكامل ($p>0$ و $q>0$)

$$I_1=\int_0^\infty e^{-t^2}dt$$

نفرض $t^2=x \Leftarrow dx=2t\,dt$ وبالتالي $dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$t=0 \Leftarrow x=0$

$t=\infty \Leftarrow x=\infty$

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$I_2=\int_0^1 \ln^2 t\,dt$$

نفرض $\ln t=-x \Leftarrow t=e^{-x}$

$$dt=-e^{-x}dx$$

$t=0 \Rightarrow x=\infty$

$t=1 \Rightarrow x=0$

$$I_2=-\int_\infty^0 (-x)^2e^{-x}dx=\int_0^\infty x^2e^{-x}dx$$

وهذا تكامل Γ حيث $a-1=2 \Leftarrow a=3$ وبالتالي

$$I_2=\Gamma(3)=2!=2$$

$$I_3=\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^3}$$

نفرض $t^3=x \Leftarrow dx=3t^2dt$ وبالتالي $dt=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

$$I_3=\int_0^\infty \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx}{1+x}=\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

A to Z

(15 د/م)

٣- باستخدام طريقة غرام-شميدث للتعامد كيف تبني جورديا ٣ متعامدة φ_1 على المجال $[a,b]$ ابتداءً من مجموعة (الدوال) $1, x, x^2, \ldots$ مع تابع وزن $\omega(x) = 1$ نكتفي بـ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ وما شرط التعامد نجد

$$\alpha_{ij} = -\frac{\int_a^b \omega(x)\,\varphi_j(x)\,x^i\,dx}{\int_a^b \omega(x)\,\varphi_j^2(x)\,dx}$$

1- $\varphi_0(x) = 1$

2- $\varphi_1(x) = x + \alpha_{10}\varphi_0(x)$

نعين α_{10} بحيث يكون الداخلي الداخلي $\langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle$ معدوم أي

$$\int_a^b \omega(x)\,\varphi_0(x)\,[x + \alpha_{10}\varphi_0(x)]\,dx = 0 \Rightarrow \alpha_{10} = -\frac{\int_a^b \varphi_0(x)\cdot x\,dx}{\int_a^b \varphi_0^2(x)\,dx}$$

3- $\varphi_2(x) = x^2 + \alpha_{20}\varphi_0(x) + \alpha_{21}\varphi_1(x)$

نجد α_{20} ، α_{21} بحيث يتعامد كثير الحدود φ_2 مع كل من φ_0 ، φ_1 السابقين

$$\varphi_0 \perp \varphi_2 \Rightarrow \int_a^b \varphi_0(x)[x^2 + \alpha_{20}\varphi_0 + \alpha_{21}\varphi_1]\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{20} = -\dfrac{\int \varphi_0\,x^2\,dx}{\int \varphi_0^2\,dx} = \dfrac{\int x^2\varphi_0\,dx}{\|\varphi_0\|^2} \\ \Rightarrow \alpha_{21} = -\dfrac{\int_a^b x^2\varphi_1\,dx}{\int_a^b \varphi_1^2\,dx} = \dfrac{}{\|\varphi_1\|^2} \end{cases}$$

4- $\varphi_3 = x^2 + \alpha_{30}\varphi_0 + \alpha_{31}\varphi_1 + \alpha_{32}\varphi_2$

$$\alpha_{30} = -\frac{\int \varphi_0\,x^3\,dx}{\int \varphi_0^2\,dx} \qquad \alpha_{31} = -\frac{\int \varphi_1\,x^3\,dx}{\|\varphi_1\|^2}$$

$$\alpha_{32} = -\frac{\int \varphi_2\,x^3\,dx}{\|\varphi_2\|^2}$$

A to Z

٤- أوجد تحويل لابلاس لـ $f(t) = te^{at}$

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \int_0^\infty te^{at}e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty te^{-(p-a)t}\,dt$$

بالتجزئة

$u = t \qquad dv = e^{-(p-a)t}\,dt$

$du = dt \qquad v = -\frac{1}{p-a}e^{-(p-a)t}$

$$\mathcal{L}(te^{at}) = -\lim_{n\to\infty}\frac{t}{p-a}e^{-(p-a)t}\Big|_0^n + \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{1}{p-a}e^{-(p-a)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{p-a}\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-(p-a)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{p-a}\left[-\frac{1}{p-a}\left(e^{-(p-a)n} - 1\right)\right] = \frac{1}{(p-a)^2}$$

A to Z

(س 15)

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$

بالمقارنة مع الشكل العام لمعادلة ليجندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

نجد أن

$$n(n+1) = 6 \Leftarrow n = 2$$

وبالتالي نجد الأمثال بدلالة C_0, C_1 حسب العلاقة

$$i=0 \Rightarrow C_2 = 3C_0$$

$$i=1 \Rightarrow C_3 = \frac{2}{3}C_1$$

$$i=2 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$i=3 \Rightarrow C_5 = -\frac{3}{10}C_1$$

الحل العام على الشكل

$$y = Ay_1(x) + By_2(x)$$

$$y_1(x) = C_0 + C_2x^2 + \cdots$$

$$= 1 + 3x^2 + \cdots$$

$$y_2(x) = x + C_3x^3 + \cdots$$

$$= x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{10}x^5 + \cdots$$

A to Z

آصف يوسف

الأحد ٢٠٠٧/٢/٢٤ م

مكتبة A to Z