

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z



كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الأولى

اسئلة دورات محلولة

جابر خطي

A 2 Z LIBRARY

مكتبة A to Z : Facebook Group

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ، علم الحياة)

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم 0931497960 TEL:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

الجمهورية العربية السورية

جامعة طرطوس

كلية العلوم

امتحان جبر خطي

لطلاب السنة الأولى - فيزياء

الدورة الفصلية الأولى

المدة ساعتان

الدرجة العظمى: 90 درجة

اسم الطالب:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & x & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 0 & x & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x & 3 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

السؤال الأول: (45 درجة) 1- أوجد قيمة المحدد

2- لتكن لدينا المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

أ - أوجد ناتج مايلي : CA^T , BA

ب - هل C جذر لكثير الحدود $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

ت - أوجد رتبة المصفوفة D .

السؤال الثاني: (45 درجة) 1- لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 + \lambda x_3 = 0$$

أوجد حلول هذا الجملة بطريقة غوص مناقشاً حسب قيم λ .

2- أوجد مقلوب المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ باستخدام نظرية كيلي هاملتون.

3- أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ، ثم إذا علمت أن $\lambda = -2$ قيمة ذاتية لـ A ، أوجد الفضاء الشعاعي

الذاتي الموافق لهذه القيمة الذاتية فقط.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

د. علياء حكيم

2025-2-25

ف.ع.

حل خطي
من فزياء

[45]

السؤال الأول

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 2 \times 3^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$$

11

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

7

12

$$CA^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

8

$$C^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

7

13

$$f(C) = -C^2 + 4C - 3I = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 \\ -4 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

7

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \neq O_{3 \times 3}$$

C ليست حيد ، لـ f(x)

14

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -i_1+i_2 \\ -i_1+i_3 \\ -i_1+i_4 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

8

$$\xrightarrow{\begin{matrix} -2i_2+i_3 \\ \frac{1}{2}i_2+i_4 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \nu(D) = 3$$

[45]

السؤال الثاني

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 3i_1+i_2 \\ 2i_1+i_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & \lambda+4 \end{bmatrix} \xrightarrow{2i_2+i_3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & \lambda+14 \end{bmatrix}$$

8

من أجل $\lambda \neq -14$ للجملة حل وحيد هو الحل الصفري لأنه الجملة تكون قطيعة.
من أجل $\lambda = -14$ نحصل عن الجملة:

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_2 + 5x_3 = 0$$

الجملة عدد لا نهائي من الحلول. نعرف $x_3 = \alpha$ $\Leftrightarrow x_2 = 5\alpha$ $\Leftrightarrow x_1 = -3\alpha$

8

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 4\lambda + 11 \quad \underline{6} \quad \underline{2}$$

$$\Rightarrow A^2 - 4A + 11I = 0 \xrightarrow{\times A^{-1}} A - 4I + 11A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{11}(A - 4I)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{11} \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix} \quad \underline{7}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -3 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{-r_1+r_3} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad \underline{3}$$

$$\xrightarrow{j_3+j_2} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1-\lambda)(-2-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$\lambda = -2$ من أجل

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -r_1+r_2 \\ -r_1+r_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix} \quad \underline{8}$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = x \Rightarrow x_3 = x \text{ من أجل}$$

$$\Rightarrow E_{\lambda} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ x \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

السؤال الأول: (45 درجة) 1- أوجد قيمة المحدد

2- لتكن لدينا المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

أ- أوجد ناتج مايلي : BA , $B^T C$, $A^2 - 4I$ ب- أوجد مقلوب المصفوفة C .ت- أوجد رتبة المصفوفة D .

السؤال الثاني: (45 درجة) 1- أوجد حلول جملة المعادلات الخطية الآتية بطريقة غوص:

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

$$4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -4$$

2- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$.3- أثبت أن $S = \{v_1 = (-1, 4), v_2 = (3, 2)\}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ ، ثم أوجد قاعدة عامة لكتابة عناصر $\mathbb{R}^2$ وفق الأساس S ، ثم اكتب الشعاع $(1, -2)$ كتراكيب خطي لعناصر S .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

د. علياء حكيم

2024-7-24

فد

جد قطري

السؤال الأول [45]

$$\Delta = \prod_{k \neq l} (a_k - a_l) = (2-5)(2-3)(2-1)(5-3)(5-1)(3-1) = 48 \quad \underline{5} \quad \underline{11}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \quad \underline{5} \quad \underline{12}$$

$$B^T \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 18 & 17 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{5}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 20 & 5 \end{bmatrix} \quad \underline{5}$$

$$A^2 - 4I = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 20 & 5 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 20 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{5}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-2i_1 + i_2 \\ -i_1 + i_3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-i_2 + i_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-i_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-i_3 + i_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-3i_3 + i_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{4i_2 + i_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-i_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad |C| = 1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 2 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{2i_1 + i_2 \\ 3i_1 + i_3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 14 & -4 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{-2i_2 + i_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow r(D) = 2$$

السؤال الثاني [45]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-2i_1 + i_2 \\ -i_1 + i_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & -4 & 1 & 12 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -4x_2 + x_3 = -12 \\ -5x_3 = -15 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 3$$

$$\Rightarrow -4x_2 = -12 - x_3 = -12 - 3 = -15 \Rightarrow x_2 = \frac{15}{4} \quad 7$$

$$\Rightarrow 2x_1 = 8 - x_2 - 2x_3 = 8 - \frac{15}{4} - 6 = -\frac{7}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{7}{8}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \quad L2$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \text{أو} \quad \lambda_2 = 6 \quad 5$$

من أجل $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 4x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 - \frac{x_2}{4} = \frac{x}{4} \quad \leftarrow x_2 = x$$

$$\Rightarrow E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{x}{4} \\ x \end{bmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow E_{\lambda_1} = \text{خط} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad 5$$

من أجل $\lambda_2 = 6$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow -x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 = -x \quad \leftarrow x_2 = x$$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow E_{\lambda_2} = \text{خط} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad 5$$

$$\alpha v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 (-1, 4) + \alpha_2 (3, 2) = (0, 0) \quad L3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 14\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0$$

وبالتالي S متجهة خطية، وبما أن عدد عناصر S يساوي 2 وهو بعد الفضاء $\mathbb{R}^2$ فإن S قاعدة ل $\mathbb{R}^2$.

$$\alpha_1 (-1, 4) + \alpha_2 (3, 2) = (1, -2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1 \\ 14\alpha_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{7} \quad 7$$

$$\Rightarrow -\alpha_1 = 1 - 3\alpha_2 = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{4}{7}$$

$$(1, -2) = -\frac{4}{7} v_1 + \frac{1}{7} v_2$$

الجمهورية العربية السورية

جامعة طرطوس

كلية العلوم

امتحان جبر خطي

لطلاب السنة الأولى - فيزياء

الدورة الفصلية الأولى

المدة ساعتان

الدرجة العظمى: 90 درجة

اسم الطالب:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ x & x & x & \dots & x & x+a \end{vmatrix}$$

السؤال الأول: (40 درجة) 1- أوجد قيمة المحدد

2- لتكن لدينا المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & -1 \\ -4 & -8 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

أ - أوجد ناتج مايلي : $2C - \frac{1}{3}I$, $B^T C$, BA^2

ب - أوجد مقلوب المصفوفة C باستخدام نظرية كلي هاملتون .

ت - أوجد رتبة المصفوفة D .

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- أوجد حلول جملة المعادلات الخطية الآتية بطريقة كرامر:

$$-2x + y - z = -3$$

$$3x - 2y + 2z = 4$$

$$x + y + z = 9$$

2- أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. ثم إذا علمت أن $\lambda = -1$ قيمة ذاتية لـ A ، أوجد الفضاء الشعاعي

الذاتي المرافق لهذه القيمة الذاتية وأساس لهذا الفضاء.

السؤال الثالث: (20 درجة) 1- هل المجموعة $S = \{v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (-2, 0, -1), v_3 = (3, 1, -1)\}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ ؟

2- لتكن $S = \{v_1 = 2x, v_2 = 1+x, v_3 = x^2\}$ أساس للفضاء الشعاعي $P_2(x)$. أوجد قاعدة عامة لكتابة أي عنصر من

عناصر $P_2(x)$ كتراكيب خطي لعناصر S ، ثم اكتب الشعاع $p(x) = 3 - 4x + x^2$ كتراكيب خطي لعناصر الأساس S .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

د. علياء حكيم

2024-2-26

علياء

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 25 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow BA^2 = \begin{bmatrix} 22 & -11 \\ 2 & 10 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} \quad \text{ب} \quad \text{2}$$

$$B^T \cdot C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 22 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{5}$$

$$2C - \frac{1}{3}I = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 4 & 0 \\ 4 & -\frac{7}{3} & 2 \\ 0 & 10 & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \quad \text{5}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 5\lambda + 11 \quad \text{ب}$$

$$\Rightarrow A^2 - 5A + 11I = 0 \Rightarrow A - 5I + 11A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11}(-A + 5I)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11} \left(-\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & -1 \\ -4 & -8 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2I_1 + I_2 \\ 3I_1 + I_3 \\ 4I_1 + I_4}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2I_2 + I_3 \\ -I_2 + I_4}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{ت} \quad \text{6}$$

$$\Rightarrow v(D) = 3$$

السؤال الثاني: [30] 11

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (4 + 2 - 3) - (2 - 4 + 3) = 3 - 1 = 2 \quad \text{3}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (6 + 18 - 4) - (18 - 6 + 4) = 20 - 16 = 4 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{4}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix} = (-8 - 6 - 27) - (-4 - 9 - 36) = -41 + 49 = 8 \Rightarrow x_2 = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{4}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = (36 + 4 - 9) - (6 - 8 + 27) = 31 - 25 = 6 \Rightarrow x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{4}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda)-8] = 0$$

$$(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0)$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ أو } \lambda_2 = 5$$

$$\lambda_3 = -1 \text{ من أجل}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 = x_2 - x_3 = \alpha - \beta \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = \beta \quad , \quad x_2 = \alpha$$

$$\Rightarrow E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow E_{\lambda_1} = \text{خط} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

السؤال الثالث: [20]

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

$$\alpha_1 (1, 2, 1) + \alpha_2 (-2, 0, 1) + \alpha_3 (3, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 2i_1 + i_2 \\ -i_1 + i_2 \end{matrix}}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{4i_3 + i_2} \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

دالة مستقلة خطياً، وبالتالي حدد دالة مستقلة 3 ديارية لـ الفضاء $\mathbb{R}^3$ قاعته

$$ax^2 + bx + c = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \alpha(2x) + \beta(1+x) + \gamma(x^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \gamma \\ b = 2\alpha + \beta \\ c = \beta \end{cases} \Rightarrow b = 2\alpha + c \Rightarrow \alpha = \frac{b-c}{2}$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = \frac{b-c}{2} v_1 + c v_2 + a v_3$$

$$\Rightarrow 3 - 4x + x^2 = -\frac{7}{2}(2x) + 3(1+x) + 1(x^2)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+3 & a & a & \dots & a & a \\ 3 & x & a & \dots & a & a \\ 3 & 0 & x & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 3 & 0 & 0 & \dots & x & a \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

السؤال الأول: (45 درجة) -1 أوجد قيمة المحدد

2 - إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ وكان $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ احسب $f(A)$ و $r(A)$ رتبة المصفوفة A .

3 - أوجد مقلوب المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

السؤال الثاني: (45 درجة) -1 أوجد حلول جملة المعادلات الخطية الآتية بطريقة غوص:

$$x - 2y + z = 1$$

$$2x + 3y + z = 0$$

$$x + 5y = -1$$

2 - أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

3 - أثبت أن $S = \{v_1 = (-1, -3), v_2 = (2, 4)\}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ ، ثم أوجد قاعدة عامة لكتابة عناصر $\mathbb{R}^2$ وفق الأساس S ، ثم اكتب الشعاع $(2, -1)$ كتركيب خطي لعناصر S .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

د. علياء حكيم

2023-8-2

لم نصل إلى نقطة
بفزياء فهدت

السؤال الأول: [45]

$$A = \begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a \\ 0 & x & a & \dots & a \\ 0 & 0 & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & a & a & \dots & a \\ 3 & x & a & \dots & a \\ 3 & 0 & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} = ax^{n-1} + 0 = ax^{n-1}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -10 & 2 \\ -2 & -14 & 10 \\ -8 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = -A^2 + 3A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & 10 & -2 \\ 2 & 14 & -10 \\ 8 & 2 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 7 & 7 \\ 8 & 12 & 2 \\ 5 & -7 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-i_1 + i_3]{-2i_1 + i_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{2i_2 + i_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \nu(A) = 2$$

$$[B:I] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-i_1 + i_3]{-2i_1 + i_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2i_2 + i_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}i_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2i_3 + i_1]{i_3 + i_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{i_2 + i_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

السؤال الثاني: [45]

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-i_1 + i_3]{-2i_1 + i_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-i_2 + i_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المجموعة المتعادلة - الموافقة

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 7x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

نفرض $x_3 = \alpha \Rightarrow x_2 = \frac{-2 + \alpha}{7} \Rightarrow x_1 = 1 + 2x_2 - x_3$

$$\Rightarrow x_1 = 1 + \frac{4 + 2\alpha}{7} - \alpha = \frac{-5\alpha + 3}{7}$$

$$\{x_1 = \frac{-5\alpha + 3}{7}, x_2 = \frac{-2 + \alpha}{7}, x_3 = \alpha\}$$

مجموعة الحلول

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5 \end{aligned}$$

من أجل $\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

المجموعة الموافقة

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1 = -\alpha$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}; \alpha \in \mathbb{R} \right\} = F_{\lambda_1}$$

من أجل $\lambda_2 = 5$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1 = \alpha \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\alpha \\ E_{\lambda_2} &= \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \Rightarrow \alpha(-1, -3) + \beta(2, 4) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + 2\beta = 0 \\ -3\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \xrightarrow{-3(1)+1} \begin{cases} -\alpha + 2\beta = 0 \\ -2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

بما أن v_1, v_2 متجهين خطيين مستقلين في $\mathbb{R}^2$ فإن قاعدة $\mathbb{R}^2$ عبارة عن $\{v_1, v_2\}$ أي v_1, v_2 وهما

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (a, b) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(-1, -3) + \beta(2, 4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + 2\beta = a \\ -3\alpha + 4\beta = b \end{cases} \xrightarrow{-3(1)+1} \begin{cases} -\alpha + 2\beta = a \\ -2\beta = -3a + b \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{3a - b}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2\beta - a = 2a - b \Rightarrow (a, b) = (2a - b)v_1 + \left(\frac{3a - b}{2}\right)v_2$$

$$\Rightarrow (2, -1) = (2(2+1))v_1 + \frac{3(2+1)}{2}v_2 = 5v_1 + \frac{7}{2}v_2$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 6 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 6 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 6 \end{bmatrix}$$

السؤال الأول: (٣٠ درجة) ١- أوجد قيمة المحدد

٢- لتكن لدينا المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

أ- أوجد ناتج مايلي: BA , $C^2 A^T$ ب- أوجد رتبة المصفوفة D .

السؤال الثاني: (٤٠ درجة) ١- لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

$$-x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 = 0$$

أوجد حلول هذا الجملة بطريقة غوص، ناقشاً حسب قيم λ .٢- أوجد مقلوب المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ باستخدام نظرية كلي هاملتون.٣- أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، ثم إذا علمت أن $\lambda = 1$ قيمة ذاتية لـ A ، أوجد الفضاء الشعاعي الذاتي

الموافق لهذه القيمة الذاتية فقط.

السؤال الثالث: (٢٠ درجة) ١- هل الشعاع $v = 2x^2 - x - 1$ تركيب خطي للأشعة $v_1 = x^2 - x$ ، $v_2 = 2x - 1$ ، $v_3 = x^2 - 1$ في الفضاء الشعاعي $P_2(x)$ ؟٢- أثبت، أن $S = \{v_1 = (-1, 3), v_2 = (2, -1)\}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ ، ثم أوجد قاعدة عامة لكتابة عناصر $\mathbb{R}^2$ وفق الأساس S .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتفريق

منوع استعمال الآلة الحاسبة

د. علياء حكيم

٢٠٢٣-٢٠٢٠

ع

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 6 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 6 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{نضرب الصف} \\ \text{الأول بـ } (-1) \\ \text{ونضيفه للآخر} \\ \text{أخيراً} \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{نأخذ صف} \\ \text{الأول} \end{array} = 2 \times 4^{n-1}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -6 & 8 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad C^2 = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -3 \\ 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C^2 \cdot A^T = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -3 \\ 8 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -10 & 2 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-i_1 + i_2 \\ -i_1 + i_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{2i_4 + i_2 \\ 4i_4 + i_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \nu(D) = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2i_1 + i_2 \\ i_1 + i_3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 2 + \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{i_2 + i_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -5 + \lambda \end{bmatrix}$$

إذا كانت $\lambda + 5 = 0$ تكون الجذور صليبة ولها حل وحيد هو الحل التافه
إذا كانت $\lambda = 3$ نعمل على حل المعادلات:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$3x_2 - 7x_3 = 0$$

لدينا مجهولان رئيسيان x_1, x_2 ومجهول حر x_3 نضع $x_3 = \alpha$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{7}{3}\alpha, \quad x_1 = \frac{7}{3}\alpha - 2\alpha = \frac{\alpha}{3}$$

عبارة الحل العام:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \alpha = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \alpha$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) + 15 = 0 \quad [2]$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda + 13 = 0$$

$$\Rightarrow A^2 - A + 13I = 0 \Rightarrow A - I_2 + 13A^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{13}(A - I_2) = -\frac{1}{13} \left(\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{1i+1i} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 4 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \quad [3]$$

$$\xrightarrow{-i_1+i_2} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \rightarrow (2-\lambda)(-1-\lambda)(5-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1, \lambda = 2, \lambda = 5$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2i_1+i_1 \\ -4i_2+i_3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad [3]$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$E_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} -x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow E_\lambda = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

نفرین $x_2 = x \leftarrow x_1 = -x$

السؤال الثاني [20]

$$2x^2 - x + 1 = \alpha(x^2 - x) + \beta(2x - 1) + \gamma(x^2 - 1) \quad [1]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 2 \\ -\alpha + 2\beta = -1 \\ -\beta - \gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta + 1 \\ \gamma = -\beta + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\beta + 1 - \beta + 1 = 2 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma = 1$$

$$\Rightarrow v = v_1 + 0v_2 + v_3$$

وبالتالي هي مركبة خطين الخط

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1(-1, 3) + \alpha_2(2, -1) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{3i_1+i_2} \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 5\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

وبالتالي S' متقلة خطياً وعدد عناصرها 2 متساوية الفضاء وبالتالي S' كـ $\mathbb{R}^2$

$$(a, b) = \alpha_1(-1, 3) + \alpha_2(2, -1) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ b = 3\alpha_1 - \alpha_2 \end{cases} \xrightarrow{3i_1+i_2} \begin{cases} a = -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 3a + b = 5\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{3a+b}{5}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -a + 2\alpha_2 = -a + 2 \times \frac{3a+b}{5} = \frac{a+2b}{5}$$

$$\Rightarrow (a, b) = \frac{a+2b}{5}(-1, 3) + \frac{3a+b}{5}(2, -1)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

السؤال الأول: (45 درجة) 1- أوجد قيمة المحدد

2- لتكن لدينا المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

أ - أوجد ناتج مايلي : AB , $C^T B$, $\frac{1}{2}C - 3I$ ب - أوجد مقلوب المصفوفة C باستخدام نظرية كيلى هاملتون .ت - أوجد رتبة المصفوفة D .

السؤال الثاني: (45 درجة) 1- أوجد حلول جملة المعادلات الخطية الآتية بطريقة كرامر:

$$2x + 3y + z = 1$$

$$3x - y + 2z = 1$$

$$x + 4y - z = 2$$

2- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

3- لتكن $S = \{v_1 = x - 1, v_2 = 1 + x^2, v_3 = 2x^2\}$ أساس للفضاء الشعاعي $P_2(x)$. أوجد قاعدة عامة لكتابة أي عنصر من عناصر $P_2(x)$ كتراكيب خطي لعناصر S ، ثم اكتب الشعاع $p(x) = 1 - 2x + x^2$ كتراكيب خطي لعناصر الأساس S .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

د. علياء حكيم

2022-7-27

بررسی می‌کنیم
در فصل ۱

سوال اول: [45]

$$\prod_{k \neq l} (a_k - a_l) = (2-5)(2-4)(2-1)(5-4)(4-1) = 72 \quad \underline{11}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 24 \end{bmatrix} \quad \underline{12}$$

$$C^T B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -9 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \underline{13}$$

$$\frac{1}{2}(C-3I) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \underline{14}$$

$$|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)-3] = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 8\lambda + 5 \quad \underline{15}$$

$$\Rightarrow -C^3 + 4C^2 - 8C + 5I = 0 \Rightarrow -C^2 + 4C - 8I + 5C^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{5} [C^2 - 4C + 8I]$$

$$\Rightarrow C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \\ -6 & -9 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{16}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{5} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \\ -6 & -9 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2I_1 + I_2 \\ -5I_1 + I_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \kappa(D) = \frac{5}{2} \quad \underline{17}$$

سوال الثاني: [45]

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (2+12+6) - (-1+16-9) = 14 \quad \underline{18}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (1+12+4) - (-2+8-3) = 14 \quad \underline{19}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2+6+7) - (1+8-3) = 0 \quad \underline{20}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-4+12+3) - (-1+18+8) = -14 \quad \underline{21}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \end{aligned} \quad \begin{matrix} 12 \\ 14 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \det(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ نصف من المتكافئ

$\lambda = 1$ نصف من

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x - y = 0$$

نصف من $y = x$

$$x = \frac{x}{2} \Rightarrow 2x = x$$

$$\Rightarrow E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ x \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow E_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

3

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \Rightarrow \alpha(x-1) + \beta(1+x^2) + \gamma(2x^2) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

مسألة خطية، ولأن عدد عناصر $\mathcal{B}$ يساوي 3، فإن $\mathcal{B}$ هو قسمة
الفضاء $P_2(x)$ فإن $\mathcal{B}$ قاعدة $P_2(x)$.

$$\forall a+bx+cx^2 \in P_2(x) \Rightarrow a+bx+cx^2 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$

$$\Rightarrow a+bx+cx^2 = \alpha(x-1) + \beta(1+x^2) + \gamma(2x^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\alpha + \beta \\ b = \alpha \\ c = \beta + 2\gamma \end{cases} \Rightarrow \beta = a + \alpha = a + b$$

$$b = \alpha$$

$$c = \beta + 2\gamma$$

$$\Rightarrow 2\gamma = c - \beta = \frac{1}{2}(c - a - b)$$

$$\Rightarrow a+bx+cx^2 = b v_1 + (a+b) v_2 + \frac{1}{2}(c-a-b) v_3$$

4) $1 - 2x + x^2 = -2v_1 - v_2 + v_3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+2 & a & a & \dots & a & a \\ 2 & x & a & \dots & a & a \\ 2 & 0 & x & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \dots & x & a \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

السؤال الأول: (35 درجة) 1- أوجد قيمة المحدد

2- إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ وكان $f(x) = x^2 - 2x + 4$ احسب $f(A)$ و $r(A)$ رتبة المصفوفة A .

3- أوجد مقلوب المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$.

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4$$

$$3x_1 + 2x_2 + 9x_3 = \lambda$$

أوجد حلول هذا الجملة بطريقة غوص مناقشاً حسب قيم λ .

2- أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. ثم إذا علمت أن $\lambda = 2$ قيمة ذاتية لـ A ، أوجد الفضاء الشعاعي الذاتي الموافق لهذه القيمة الذاتية وأساس لهذا الفضاء.

السؤال الثالث: (25 درجة) 1- هل الشعاع $v = x^2 - x + 1$ تركيب خطي للأشعة $v_1 = x$ ، $v_2 = 3x - 1$ ، $v_3 = x^2 + 2$ في الفضاء الشعاعي $P_2(x)$ ؟

2- أثبت أن $S = \{v_1 = (1, -2), v_2 = (2, 1)\}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ ، ثم أوجد قاعدة عامة لكتابة عناصر $\mathbb{R}^2$ وفق الأساس S .

انتهت الأسئلة

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2022-2-21

$$A = \begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ 0 & x & a & \dots & a & a \\ 0 & 0 & x & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a & a & \dots & a & a \\ 2 & x & a & \dots & a & a \\ 2 & 0 & x & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \dots & x & a \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} = a^{\frac{n-1}{2}} x + 0 = a^{\frac{n-1}{2}} x$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 3 \\ 8 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = A^2 - 2A + 4I_3$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 6 & 3 \\ 8 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & -8 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 10 \\ 8 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3I_1 + I_2, 2I_1 + I_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2I_2 + I_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 26 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4I_1 + I_2, -I_1 + I_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{I_2 + I_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-9I_3 + I_2, 12I_3 + I_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 14 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{I_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} +18 & 4 & 21 \\ 41 & -8 & -9 \\ 10 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 2 & 9 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{-2I_1 + I_2, -3I_1 + I_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & -1 & 6 & \lambda - 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{I_2 + I_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 14 \end{bmatrix}$$

عندما $\lambda \neq 14$ المحلة مستقيمة الكل / $(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda - 14 & 0 & 0 \end{bmatrix})$

عندما $\lambda = 14$ جميع المحلة بالمثل:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_2 - 8x_3 = -8$$

$$x_2 = 8x_3 - 8$$

$$\Leftrightarrow x_3 = \alpha$$

$$x_1 = 2 - x_2 - x_3 = 2 - 8\alpha + 8 - \alpha = -7\alpha + 10$$

وبالتالي مجموعة الحلول $\{ -7\alpha + 10, 8\alpha - 8, \alpha \}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{-R_2 + R_3} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad [2]$$

$$\phi(\lambda) = (2-\lambda) [(4-\lambda)(6-\lambda) - 8] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 16)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-8)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 8$$

من أجل $\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_1 = -\alpha - \beta \Leftrightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \Leftrightarrow x_3 = \beta, x_2 = \alpha$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} ; \alpha, \beta \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

السؤال الثالث [25]

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = \alpha(x) + \beta(3x-1) + \gamma(x^2+2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \gamma \\ -1 = \alpha + 3\beta \\ 1 = -\beta + 2\gamma \end{cases} \Rightarrow \beta = 2\gamma - 1 = 1 \Rightarrow \alpha = -1 - 3\beta$$

وبالتالي نستطيع كتابة v كتركيب خطي للأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$

$$v = -4v_1 + v_2 + v_3$$

10

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \Rightarrow \alpha(1, -2) + \beta(2, 1) = (0, 0) \quad [2]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 5\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = \alpha = 0 \quad [7]$$

وبالتالي $\{v_1, v_2\}$ متجهان خطيين، وبالتالي $\{v_1, v_2\}$ ياربان $\mathbb{R}^2$

وهو بعد الفضاء $\mathbb{R}^2$ فإن $\{v_1, v_2\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$

$$(a, b) = \alpha v_1 + \beta v_2 \Rightarrow \begin{cases} a = \alpha + 2\beta \\ b = -2\alpha + \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \alpha + 2\beta$$

$$2a + b = 5\beta \Rightarrow \beta = \frac{2a + b}{5} \Rightarrow \alpha = a - 2\beta$$

$$\Rightarrow \alpha = a - \frac{4a + 2b}{5} = \frac{a - 2b}{5}$$

$$(a, b) = \frac{a - 2b}{5} v_1 + \frac{2a + b}{5} v_2$$

→

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$$

السؤال الأول: (45 درجة) -1 أوجد قيمة المحدد

2- لتكن لدينا المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -5 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

أ- أوجد ناتج مايلي: AB , $C^T B$, $C^2 - 3I$ ب- أوجد مقلوب المصفوفة C .ت- أوجد رتبة المصفوفة D .

السؤال الثاني: (45 درجة) -1 أوجد حلول جملة المعادلات الخطية الآتية بطريقة غوص:

$$x + y + z = 7$$

$$3x + y - z = 9$$

$$2x - 2y + z = -3$$

2- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$.3- أثبت أن $S = \{v_1 = (1, -2), v_2 = (-3, 4)\}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ ، ثم أوجد قاعدة عامة لكتابة عناصر $\mathbb{R}^2$ وفق الأساس S ، ثم اكتب الشعاع $(1, -1)$ كتركيب خطي لعناصر S .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

د. علياء حكيم

2021-7-29



المسألة 13

$\Delta = (3-2)(3-4)(3-1)(2-4)(2-1)(4-1) \cdot 1$
 $= 1(-1)(2)(-2)(1)(3) = -12$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ -4 & 27 \end{bmatrix}$

$C^T \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -2 & 12 \\ 17 & 20 \end{bmatrix}$

$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 20 & 5 \\ 22 & 25 & 16 \\ 11 & 4 & 39 \end{bmatrix}$

$C^2 - 3I = \begin{bmatrix} 16 & 20 & 5 \\ 22 & 25 & 16 \\ 11 & 4 & 39 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 20 & 5 \\ 22 & 22 & 16 \\ 11 & 4 & 36 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -2r_1 + r_2 \\ -3r_1 + r_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -15 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{-4r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 & -4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 4r_3 + r_2 \\ -5r_3 + r_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -24 & 20 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 18 & -15 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

$C^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad |C| = 1$

$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -5 & 11 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{i_1 \leftrightarrow i_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -5 & 11 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -2r_1 + r_2 \\ -r_1 + r_3 \\ -3r_1 + r_4 \end{matrix}}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2 + r_4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 11 \end{bmatrix} \quad (r_4) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-3r_1 + r_2 \\ -2r_1 + r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & -12 \\ 0 & -4 & -1 & -17 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 7 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 7 \\ -y - 2z = 6 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 6 - 2z = 4 \Rightarrow x = 7$$

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 4 \\ &= 6 - 5\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 5\lambda + 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow F_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 4x + y = 0$$

$$x = -\frac{1}{4}y = -\frac{1}{4}\alpha \Rightarrow y = \alpha$$

$$F_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow F_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\alpha(1, -2) + \beta(-3, 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 3\beta = 0 \\ -2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{cases} \alpha - 3\beta = 0 \\ -2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

هذا الحل هو الحل الوحيد الذي يحقق المعادلة

$$(x, y) = \alpha(1, -2) + \beta(-3, 4)$$

$$= (\alpha - 3\beta, -2\alpha + 4\beta)$$

$$\Rightarrow x = \alpha - 3\beta$$

$$y = -2\alpha + 4\beta$$

$$\begin{cases} 2i + 2j \\ \longrightarrow \end{cases}$$

$$\alpha - 3\beta = x$$

$$-2\beta = 2x + y$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{-2x - y}{2} \Rightarrow \alpha = x + 3\beta = \frac{2x - 6x - 3y}{2}$$

$$= \frac{-4x - 3y}{2}$$

$$\Rightarrow (x, y) = \left(\frac{-4x - 3y}{2} \right) (1, -2) + \left(\frac{-2x - y}{2} \right) (-3, 4)$$

$$(1, -1) \text{ do } \rightarrow$$

$$(1, -1) = -\frac{1}{2}(1, -2) - \frac{1}{2}(-3, 4)$$

Atol

السؤال الأول: (30 درجة) -1 أوجد قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2^2 & \dots & 2^2 & 2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ x & x & x & \dots & x & x+2^n \end{vmatrix}$$

2- لتكن لدينا المصفوفتان الآتيتان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

أ- أوجد ناتج مايلي : AB , BA^T , $3B-4I$

ب- أوجد رتبة المصفوفة B .

السؤال الثاني: (40 درجة) -1 أوجد حلول جملة المعادلات الخطية الآتية بطريقة كرم:

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4$$

2- أوجد مقلوب المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ باستخدام نظرية كلي هاملتون.

3- أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، ثم إذا علمت أن $\lambda = 1$ قيمة ذاتية لـ A ، أوجد الفضاء الشعاعي الذاتي

موافق لهذه القيمة الذاتية فقط.

السؤال الثالث: (20 درجة) -1 هل المجموعة $S = \{v_1 = (1,2,1), v_2 = (-2,0,2), v_3 = (3,1,-1)\}$ أساس للفضاء الشعاعي R^3 ؟

2- لتكن $S = \{v_1 = 2x, v_2 = 1+x^2, v_3 = x^2\}$ أساس للفضاء الشعاعي $P_2(x)$. أوجد قاعدة عامة لكتابة أي عنصر من عناصر $P_2(x)$ كتركيب خطي لعناصر S ، ثم اكتب الشعاع $p(x) = 2+3x-x^2$ كتركيب خطي لعناصر الأساس S .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

د. علياء حكيم

2021-1-25

ملاحظة
نبدأ من

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2^2 & \dots & 2^2 & 2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ x & x & x & \dots & x & x+2 \end{vmatrix}$$

8

11

10

5

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2^2 & \dots & 2^2 & 2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ x & x & x & \dots & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2^2 & \dots & 2^2 & 2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2^n \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 2 \times 2^2 \times \dots \times 2^n = 2^{1+2+3+\dots+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

نلاحظ

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$B \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -7 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$3B - 4I = 3 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 3 \\ -6 & -7 & 0 \\ 9 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2i_1 + i_2 \\ -3i_1 + i_3}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -10 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$r(B) = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

السؤال الثاني:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -14$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{21}{-7} = -3$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) + 12$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 + 12$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 14$$

$$P(A) = 0 \Rightarrow A^2 - 3A + 14I_2 = 0$$

$$\Rightarrow A - 3I_2 + 14A^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{14} (A - 3I_2)$$

$$= -\frac{1}{14} \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\frac{1}{14} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{4}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{2}{14} \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & +2 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(-\lambda(3-\lambda)+2)$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$$\Rightarrow \lambda=1, \lambda=2$$

$$\lambda=1$$

$$1/\lambda^3 (5\lambda^2 - 8\lambda + 4)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & +2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-i_1 + i_2 \\ -i_1 + i_3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & +2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_1 + 2x_3 = 0$$

$$x_2 - 3x_3 = 0$$

$$x_1 = +2\alpha \quad \Leftarrow \quad x_2 = +3\alpha \quad \Leftarrow \quad x_3 = \alpha \quad \text{نفس } \alpha$$

$$E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0 \quad \text{الـ 20} \quad \text{الـ 20}$$

$$\Rightarrow x_1(1, 2, 1) + x_2(-2, 0, 2) + x_3(3, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{-2i_1 + i_2 \\ -i_1 + i_3}} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-i_2 + i_3} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

والباقى \$ \rightarrow \$ متجه واحد

2/ وبما أن عدد عناصر \$ \mathbb{R}^3 \$ يساوي 3 وبما أن بعد الفضاء

والباقى \$ \rightarrow \$ متجه واحد

$$p(x) = a + bx + cx^2 = \alpha(2x) + \beta(1+x^2) + \gamma(x^2) \quad (2)$$

$$= \beta + 2\alpha x + (\beta + \gamma)x^2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\Rightarrow} \left. \begin{aligned} a &= \beta \\ b &= 2\alpha \\ c &= \beta + \gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= \frac{b}{2} \\ \gamma &= c - \beta = c - a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{b}{2}(2x) + a(1+x^2) + (c-a)x^2$$

$$p(x) = 2 + 3x - x^2 = \frac{3}{2}(2x) + 2(1+x^2) + (-1-2)x^2$$

$$\frac{3}{= \frac{3}{2}(2x) + 2(1+x^2) - 3(x^2)}$$

A to Z

الجمهورية العربية السورية

جامعة طرطوس

كلية العلوم

امتحان جبر خطي

لطلاب السنة الأولى - فيزياء

الدورة الفصلية الثانية

المدة ساعتان

الدرجة العظمى: 90 درجة

اسم الطالب:

السؤال الأول: (35 درجة) لتكن لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

1- احسب $B.A$ ، $B^T + \frac{1}{2}A$

2- إذا كان $f(x) = x^2 - x + 2$ ، احسب $f(C)$

3- أوجد مقلوب المصفوفة C

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$-x_1 - x_2 + 3x_3 = 6$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 28$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$

أوجد حلول هذا الجملة بطريقة غوص.

2- أوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، ثم إذا علمت أن $\lambda = 1$ قيمة ذاتية لـ A ، أوجد الفضاء الشعاعي الذاتي

الموافق لها.

السؤال الثالث: (25 درجة) 1- برهن أن تقاطع فضاءين شعاعيين جزئيين W_1, W_2 من فضاء شعاعي V فوق حقل K هو فضاء شعاعي جزئي منه .

2- أثبت أن $S = \{v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (-2, 0, 1), v_3 = (3, 1, -\frac{1}{4})\}$ أساس للفضاء الشعاعي R^3 ، ثم اكتب الشعاع $v = (2, 0, 1)$

كتركيب خطي لعناصر الأساس S .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

د. علياء حكيم

2020-9-6

ع

في هذه الحالة

الـ 40 الأول

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix}$$

$$B^T + \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -1 & +1 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 22 & 11 \\ 20 & 25 & 4 \\ 5 & 16 & 39 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 12 \\ 5 \end{matrix}$$

$$f(C) = \begin{bmatrix} 16 & 22 & 11 \\ 20 & 25 & 4 \\ 5 & 16 & 39 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 20 & 8 \\ 20 & 26 & 0 \\ 0 & 10 & 41 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-5r_1 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} 13 \\ 4r_2 + r_3 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-4r_3 + r_2, -3r_3 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-2r_2 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right] \quad 13$$

$$A = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1$$

1

$$[30] \quad \underline{3231015} \quad 11$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 28 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ 3r_1 + r_3}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 12 & 40 \\ 0 & -1 & 10 & 28 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_2 + r_3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 12 & 40 \\ 0 & 0 & 16 & 48 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_3 = 3}, \quad 2x_2 = 40 - 36 = 4 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2}$$

$$-x_1 = 6 + 2 - 9 = -1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

$$C \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{-1i+j} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1+\lambda & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{2i+1j} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(4-\lambda)^2 - 9 = (1-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 7) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^2(\lambda-7) = 0$$

$$\lambda = 1 \quad \text{مع اقلية}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

طريقة الحساب = الطريقة

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 = -x - \beta = x_3 = \beta, \quad x_2 = x$$

$$E_{\lambda} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_{\lambda} \perp \text{to } \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

المسألة 10
 $0 \in W_1, 0 \in W_2 \Rightarrow W \neq \emptyset, W \subseteq V$

$$W_1 \cap W_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow 0 \in W_1 \cap W_2$$

$$\forall x, y \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow x, y \in W_1, x, y \in W_2$$

$$\Rightarrow x + y \in W_1 \text{ و } x + y \in W_2$$

$$\Rightarrow x + y \in W_1 \cap W_2$$

$$\forall x \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow x \in K \Rightarrow x \in W_1 \text{ و } x \in W_2$$

$$\Rightarrow x \in W_1 \text{ و } x \in W_2$$

$$\Rightarrow x \in W_1 \cap W_2$$

المسألة 11
 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 (1, 2, 0) + \alpha_2 (-2, 0, 1) + \alpha_3 (3, 1, -\frac{1}{4}) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$

$$2\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \quad \begin{cases} -2\alpha_1 + \alpha_3 \\ \frac{1}{4}\alpha_2 + \alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$

$$+4\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \Rightarrow 4\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_2 - \frac{1}{4}\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{4}x_3 = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{-2v_1 + 1v_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 21x_2 - 5x_3 = -4 \\ x_2 - \frac{1}{4}x_3 = 1 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}v_2 + 1v_3} \left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_2 - 5x_3 = -4 \\ x_3 = 2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x_3 = 2 \quad x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 = 2 + 3 - 6 = -1$$

$$(2, 0, 1) = -1v_1 + \frac{3}{2}v_2 + 2v_3 \quad \text{So}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$$

السؤال الأول: (35 درجة) 1- أوجد قيمة المحدد

2- لتكن لدينا المصفوفتان الآتيتان

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد ناتج ما يلي: AB , BA^T , $-2B + 3I$

3- أوجد مقلوب المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

السؤال الثاني: (30 درجة) 1- أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2- لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

أوجد حلول هذا الجملة بطريقة كرامر.

السؤال الثالث: (25 درجة) 1- أثبت أن $S = \{v_1 = (1, 2), v_2 = (-4, 3)\}$ أساس للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ ، ثم أوجد قاعدة عامة لكتابة عناصر $\mathbb{R}^2$ وفق الأساس S .

2- ليكن $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ تطبيقاً خطياً معرفاً وفق القاعدة $f(x, y, z) = (x + y + z, x - z)$. عيّن $\text{Ker } f$ وأوجد أساساً لها، ثم وسع هذا الأساس إلى أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

انتهت الأسئلة

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2020-2-16

د. علياء حكيم

علياء

→ 10th sem
 2019-2020 session

(11)

[35] (15)

$$\Delta = \prod_{k > l} (a_k - a_l) = (2-1)(5-1)(5-2)(3-2)(3-1) \\ = 1 \times 4 \times 3 \times 1 \times (-2) = -48 \quad (15)$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 11 & 4 \\ 11 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$B.A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 7 \\ -13 & -4 \\ 22 & 11 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$-2B + 3I = -2 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -10 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2i_1 + i_2 \\ -4i_1 + i_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\xrightarrow{i_2 + i_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-i_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{i_3 + i_2 \\ -2i_3 + i_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-i_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

[35] (15)

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda[(1-\lambda)(2-\lambda)+2] \\ + 1(-2(2-\lambda)-2) \\ - (-4 + 2(1-\lambda)) \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\lambda(2 - 3\lambda + \lambda^2 + 2) - 4 + 2\lambda - 2 + 4 \\
 &= -2\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 2\lambda + 4\lambda - 4 \\
 &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$$

عند $\lambda_1 = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \xrightarrow{2i_1 + i_2} \\ \xrightarrow{2i_1 + i_3} \end{matrix}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ -3x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_3 = 0$$

$$x_1 = \alpha \leftarrow x_2 = \alpha \quad \text{نفرين}$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$E_{\lambda_1} \rightarrow \text{أ}$$

عند $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \xrightarrow{-2i_1 + i_2} \end{matrix}$$

$$-2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$3x_2 + x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_3 = -\alpha \quad \text{مجهولان أو متباين ومجهول مر. نفرين}$$

$$x_2 = -\frac{\alpha}{3} \Rightarrow -2x_1 - x_2 + x_3 = -\frac{\alpha}{3} + \alpha = \frac{2\alpha}{3}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{\alpha}{3}$$

$$T_N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 11 + 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24 \quad \text{u}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 11 - 8(-3) + 1(-1) = 9$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \quad \text{u}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{24}{11} = 2 \quad \text{u} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{9}{11} \quad \text{u} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8}{11}$$

[70]: الزاد الزاد الزاد

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0 \Rightarrow x_1 (1, 2) + x_2 (-4, 3) = (0, 0) \quad \begin{matrix} 1 \\ 15 \end{matrix}$$

$$\rightarrow (x_1 - 4x_2, 2x_1 + 3x_2) = (0, 0) \quad \text{u}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{-2x_1 + 8x_2} \begin{cases} x_1 - 4x_2 = 0 \\ 11x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

و با توجه به $\mathbb{R}^2$ ، با آن $\mathbb{R}^2$ = $\mathbb{R}^2$ ، $\mathbb{R}^2$ فضا $\mathbb{R}^2$.

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = (a, b)$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_2 = a \\ 2x_1 + 3x_2 = b \end{cases} \xrightarrow{-2x_1 + 8x_2} \begin{cases} x_1 - 4x_2 = a \\ 11x_2 = -2a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = a \\ 11x_2 = -2a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{2a+b}{11}$$

$$\Rightarrow x_1 = a + 4x_2 = a + 4 \left(\frac{-2a+b}{11} \right) \\ = \frac{11a - 8a + 4b}{11} = \frac{3a+b}{11} \quad \underline{5}$$

$$\Rightarrow (a, b) = \frac{3a+b}{11} v_1 + \frac{-2a+b}{11} v_2$$

(5) $\lfloor 2$

$$\text{Ker } f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; f(x, y, z) = (0, 0) \}$$

$$= \{ (x+y+z, x-z) = (0, 0) ; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \xrightarrow{-x+1} \begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-2z=0 \end{cases} \quad \underline{2}$$

معادلات این‌ها را حل می‌کنیم. $z = \alpha$ و x, y را به صورت z بنویسیم.

$$x = -y - z = 2x - x = x \Leftarrow y = -2x$$

$$\text{Ker } f = \{ (x, -2x, x) ; x \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{Ker } f \hookrightarrow \{ (1, -2, 1) \}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \hookrightarrow \{ (1, -2, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0) \}$$

الجمهورية العربية السورية

جامعة طرطوس

كلية العلوم

امتحان جبر خطي

لطلاب السنة الأولى - فيزياء

الدورة الفصلية الثالثة

المدة ساعتان

الدرجة العظمى: 90 درجة

اسم الطالب:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

السؤال الأول: (30 درجة) -1 أوجد قيمة المحدد

-2 إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ وكان $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ، احسب $f(A)$.

-3 أوجد مقلوب المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$.

السؤال الثاني: (30 درجة) -1 لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -4$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

$$4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$

أوجد حلول هذا الجملة بطريقة غوس.

-2 أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

السؤال الثالث: (30 درجة) -1 برهن أن تقاطع فضاءين شعاعيين جزئيين W_1, W_2 من فضاء شعاعي V هو فضاء شعاعي جزئي منه .

-2 أثبت أن $S = \{v_1 = 1, v_2 = 1 + 2x^2, v_3 = x^2\}$ أساس للفضاء الشعاعي $P_2(x)$ ، ثم اكتب $P(x) = 1 + x^2$ كتركيب خطي لعناصر الأساس S .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

2019-8-1

د. علياء حكيم



غير خطي وخطي

(1)

المعادلة الأولى [30]

نضرب الطرف الأول بـ (-1) ونضيفه إلى بقية الأصفار

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & (a_2-1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (a_3-1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (a_n-1) \end{vmatrix} = (a_2-1)(a_3-1)\dots(a_n-1)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$P(A) = A^2 - 3A + 2I$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 5 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{i_1 - i_2 \\ 2i_1 - i_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-i_2 + i_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{3i_3 - i_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{3i_1 - i_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1$$

(2)

المسألة الثانية [30]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right] \quad (15)$$

$$\begin{array}{l} -2i_1 + i_2 \\ -2i_1 + i_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & 8 & -7 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{-2i_2 + i_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array} \right]$$

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -4$$

$$4x_2 - x_3 = 12$$

$$-5x_3 = -15$$

مكتبة

$$x_3 = 3$$

$$x_2 = \frac{12 + x_3}{4} = \frac{12 + 3}{4} = \frac{15}{4}$$

7

$$x_1 = \frac{-4 + 3x_2 - 3x_3}{2} = \frac{1}{2} \left(-4 + 3 \cdot \frac{15}{4} - 9 \right) = \frac{1}{2} \left(-4 + \frac{45}{4} - 9 \right) = \frac{1}{2} \left(-13 + \frac{45}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{-52 + 45}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{7}{4} \right) = -\frac{7}{8} \quad (35)$$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda) + 1) + 1(1-\lambda+1) - 1(-1+3-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1) + 2 - \lambda - 2 + \lambda$$

$$= (1-\lambda)(4 - 4\lambda + \lambda^2) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1$$

5

(3)

نصف اول $\lambda_1 = 1$

$$\begin{cases} -y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \xrightarrow{(2)+(3)} \begin{cases} -y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

هـ

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$x = -2y - z = -2(-x) - (-x) = x \Leftrightarrow y = -x \Leftrightarrow z = x \quad \text{نصف اول}$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \\ x \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad E_{\lambda_1} \text{ راسخ}$$

نصف اول $\lambda_2 = 2$

$$\begin{cases} -x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

هـ

$$x = -y - z \quad \leftarrow \quad y = x, z = -x \quad \text{نصف اول}$$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} -x - \beta \\ x \\ \beta \end{bmatrix} ; x, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad E_{\lambda_2} \text{ راسخ}$$

سؤال الثالث: [30]

[1] واضح أن $W_1 \cap W_2 \subseteq V$

$$0 \in W_1 \cap W_2 \Leftrightarrow 0 \in W_1 \text{ و } 0 \in W_2 \text{ و } W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$$

$$\forall x, y \in W_1 \cap W_2 \text{ و } \alpha, \beta \in K \Rightarrow x, y \in W_1 \text{ و } x, y \in W_2$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in W_1 \text{ و } \alpha x + \beta y \in W_2$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in W_1 \cap W_2$$

و بالتالي $W_1 \cap W_2$ فضاء

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$$

$$\alpha_1 x + \alpha_2 (1 + 2x^2) + \alpha_3 x^2 = 0$$

$$\alpha_1 x + \alpha_2 + 2\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^2 = 0$$

$$\alpha_2 + \alpha_1 x + (2\alpha_2 + \alpha_3) x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = 0$$

مع العلم أن $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$$p(x) = 1 + x^2 = \alpha \cdot 1 + \beta(1 + 2x^2) + \gamma \cdot x^2$$

$$= \alpha + \beta + 2\beta x^2 + \gamma x^2$$

$$= \alpha + \beta + (2\beta + \gamma) x^2$$

$$\Rightarrow \alpha = 1$$

$$\beta = 0$$

$$2\beta + \gamma = 1 \Rightarrow \gamma = 1 \Rightarrow$$

$$1 + x^2 = 1v_1 + 0v_2 + 1v_3$$

المسألة

المس

السؤال الأول: (30 درجة) لتكن لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 0 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

1- احسب $A.B$, $B.A$ 2- إذا كان $f(x) = x^2 - 2x + 3$. احسب $f(C)$ 3- أوجد مقلوب المصفوفة C

السؤال الثاني: (35 درجة) 1- لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_3 = 0$$

$$3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 2$$

أوجد حلول هذا الجملة بطريقة كرامر.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 2- \text{أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة}$$

السؤال الثالث: (25 درجة) 1- بين فيما إذا كان $\{A \mid A = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & -a \end{bmatrix}; a, b \in R\}$ فضاء شعاعي جزئي من فضاءالمصفوفات المربعة من الدرجة الثانية $M_2(R)$ فوق الحقل R .2- أثبت أن $S = \{v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (2, 0, 1)\}$ أساس للفضاء الشعاعي R^3 ، ثم اكتب الشعاع $v = (7, -2, 2)$ كتركيب خطي لعناصر الأساس S

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. علياء حكيم

2019-1-20

الخطوة الأولى: [30]

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 0 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 21 & 45 & -19 \\ 48 & 0 & 32 \\ -17 & 35 & -37 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 0 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -4 & 82 \\ 54 & -12 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 0 & -36 \\ -16 & 1 & -50 \\ 27 & 0 & 88 \end{bmatrix}$$

$$f(C) = \begin{bmatrix} -11 & 0 & -36 \\ -16 & 1 & -50 \\ 27 & 0 & 88 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -10 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 0 & -44 \\ -18 & 2 & -62 \\ 33 & 0 & 111 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 + r_2 \\ 3r_1 + r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{r_3}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2r_3 + r_2 \\ -4r_3 + r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2$$

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & -4 \\ -8 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

السؤال الثاني: [35]

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 10 \quad 3$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 8 \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -1.5 \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-1.5}{10} = -0.15$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -16 \Rightarrow x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-16}{10} = -\frac{8}{5}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \quad 2$$

$$\varphi(\lambda) = 0 \Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)^2 (\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ و } \lambda_2 = 4$$

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda - 4) = 0$$

عند $\lambda_1 = 1$ فإن

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

درجة الحرارة المراقبة لا تتغير

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

لدينا مجهول رئيسي x_1 ومجهولان x_2, x_3 حران
نعرهن $x_2 = \alpha$ ، $x_3 = \beta$ وفيه $x_1 = -\alpha - \beta$

عبارة الحل العام:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ هما المتجهات

الموافقان للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$

في A $\lambda_2 = 4$ تكون المتجهات المقابلة

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-r_1 + r_2 \\ 2r_1 + r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

والمتعادلة الموافقة لها

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

لدينا مجهولان رئيسيان x_1, x_2 ومجهول حر x_3

نعرهن $x_2 = x_3 = \alpha$ وفيه $x_1 = -\alpha + 2\alpha = \alpha$

$$x_1 = -x_2 + 2x_3 = -\alpha + 2\alpha = \alpha$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و بالتالي $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ المتجه الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda = 1$.

(10) السؤال الثالث [25]

2. P. 1. اصفح أن $W \subset M_2(\mathbb{R})$ و $W \neq \emptyset$ فإن W فضاء متجهي على $\mathbb{R}$ حيث $0 \in W$.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ و } a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & -a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha b_1 & -\alpha a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta a_2 & \beta b_2 \\ \beta b_2 & -\beta a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 & -(\alpha a_1 + \beta a_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 & -(\alpha a_1 + \beta a_2) \end{bmatrix} \in W$$

من P و C نرى أن W فضاء متجهي على $\mathbb{R}$ في $M_2(\mathbb{R})$.

(15)

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} ; x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 (+1, -1, 0) + x_2 (0, 1, 1) + x_3 (2, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (x_1 + 2x_3, -x_1 + x_2, x_2 + x_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 - 2x_2 = 0 \Rightarrow -x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

وبالتالي v_1, v_2, v_3 متجهات خطية مستقلة.

وبما أن عدد متجهات $\mathbb{R}$ في $M_2(\mathbb{R})$ هو 4، فإن

$$P_2[x] \text{ ليس أساساً لـ } M_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
 (7, -2, 2) &= \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \\
 &= \alpha(1, -1, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(2, 0, 1) \\
 &= (\alpha + 2\gamma, -\alpha + \beta, \beta + \gamma)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 \alpha + 2\gamma = 7 \\
 -\alpha + \beta = -2 \\
 \beta + \gamma = 2
 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= 2 + \beta \\ \gamma &= 2 - \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 + \beta + 4 - 2\beta = 7$$

$$\Rightarrow -\beta = 7 - 6 = 1 \Rightarrow \beta = -1 \Rightarrow \alpha = 1, \gamma = 3$$

$$(7, -2, 2) = 1(1, -1, 0) + (-1)(0, 1, 1) + 3(2, 0, 1)$$



فرع 1
تجمع الكليات (كلية العلوم)
فرع 2

الكورنيش الشرقي جانب MTN

مكتبة



طباعة محاضرات - قرطاسية

Mob: 0931 497 960

