ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

اسئلة دوراات محلولة

تحليل رياضي ١

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة)

بمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

ABCDEFGHIJKLMNOPQSTUVWXYZ

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

الامتحان النهائي لمقرر تحليل رياضي1
الدورة الاولى (2024- 2025)
السنة الأولى- المدة : ساعتين

السؤال الأول : (20درجة)

1- برهن حسب تعريف الاساسي للنهاية ان نهاية الدالة $y=-x-6$ تساوي (-7) اذا انتهت $x\to 1$

2- برهن حسب تعريف الاساسي للمشتقة ان مشتقة الدالة $y=\sin x$ تساوي $y=\cos x$

السؤال الثاني: (45 درجة)

1- احسب قيمة النهايتين التاليتين :

$$a)\ y=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x^2},\qquad b)\ y=\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

2- ادرس استمرارية الدالة التالية:

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{3\pi}{2}x & ;\ x\le 1\\ \left|\frac{x-1}{2x}\right| & ;\ x>1\end{cases}$$

3- اوجد مشتقة الدالة التالية

$$y=\left(\frac{1}{x-1}\right)^{x}$$

السؤال الثالث : (25 درجة)

أدرس تقارب السلسلتين التاليتين :

$$s_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$$

$$s_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

مع التمنيات للجميع بالتوفيق والنجاح

أ. د. نبيل أحمد علي

A to Z

مادة التحليل الرياضي 1
لطلبة السنة الأولى - فيزياء
الدورة الاستثنائية الأولى 2025-2024

السؤال الأول: حسب التوقيت الآتية:

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ , \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ (3)

2) تعريف النهاية

لنبرهن أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ نجد $\delta > 0$

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |-x - 6 + 7| < \varepsilon \quad (3)$$

$$\Rightarrow |-x + 1| < \varepsilon \Rightarrow -|x - 1| < \varepsilon \quad (3)$$

$$\Rightarrow |x - 1| < -\varepsilon \quad (1)$$

يوجد فعلا δ حيث $(-\varepsilon)$

2) حساب المشتقة

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \quad (2)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2\cos\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right) / \Delta x$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \quad (2)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\left(\frac{2x}{2} + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}{\Delta x \to 0}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(\frac{2x}{2} + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \quad (2)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x \quad (2)$$

التمرين الأول: 1) حساب النهايات

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{0}{0}$

صيغة عدم التعيين نزيلها حسب الحالة (5)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{1}{0} = \infty$$

b) $y = \lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = 1^{\infty}$

حسب لوبيتال نأخذ لوغاريتم الطرفين 5

$$\ln y = \frac{3}{x^2}\ln(\cos 2x) = \frac{3\ln\cos 2x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

حسب لوبيتال مشتقة البسط على مشتقة المقام 5

$$\ln y = \frac{-3\sin 2x \times 2}{\cos 2x} \Big/ 2x = \frac{-6\sin 2x}{2x\cos 2x} = -\frac{6\sin 2x}{2x}\times\frac{1}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} \times \lim_{x\to 0}\frac{-6}{\cos 2x} = 1(*)\ -\frac{6}{1} = -6$$

$$\ln y = -6 \Rightarrow y = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

2 حسب دراسة استمرارية f عند $x_0 = 1$ 5

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left|\frac{x-1}{x}\right| = \lim_{x\to 1^+}\begin{cases}\frac{x-1}{x} = 0\\ \frac{1-x}{x} = 0\end{cases}$$ 5

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\cos\frac{3\pi}{2}x = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} = \lim_{x\to 1^-} = f(x)\Big|_{x=1} = \cos\frac{3\pi}{2}x\Big|_{x=1} = 0$$ 5

f دالة مستمرة

3 دراسة الاستقاق والفروع اللانهائية

$$\ln y = \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)^x = x\ln\left(\frac{1}{x-1}\right) =$$ 5

$$\ln y = x\left[\ln 1 - \ln(x-1)\right] = -x\ln(x-1)$$ (5)

نشتق الطرفين نجد

$$\frac{y'}{y} = -\ln(x-1) + \frac{x}{x-1}$$ (5)

$$y' = \left(\frac{1}{x-1}\right)^x \left[-\ln(x-1) - \frac{x}{x-1}\right]$$

السؤال الثاني: [S1] حسب قيمة العدد الحقيقي x (25)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2^n \times 2} \cdot \frac{2^n}{n+1}$$ (5) (5)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{\infty}{\infty}$$

حسب لوبيتال (5)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2} < 1$$

ومنه السلسلة متقاربة.

[S2] يمكن الحصول على النتيجة نفسها حسب دالمبير

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$ (5)

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow S_2 = 1$$ (متقاربة / متقاربة أكيد)

حسب دالمبير حالة شك.

يمكن البرهان بطريقة المقارنة ($\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ متباعدة $\Leftarrow$)

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

الامتحان النهائي لمقرر تحليل رياضي١
الدورة الثانية (٢٠٢٣- ٢٠٢٤)
السنة الأولى- المدة : ساعتين

السؤال الأول : (٢٠درجة)

١- برهن حسب تعريف الاساسي للنهاية ان نهاية الدالة $y = 4x - 5$ تساوي (-9) اذا انتهت $x \to -1$

٢- برهن حسب تعريف الاساسي للمشتقة ان مشتقة الدالة $y = \sin x$ تساوي $y' = \cos x$

مكتبة A to Z

السؤال الثاني: (٤٥ درجة)

١- أوجد المشتقة من المرتبة الأولى للدالتين التاليتين :

$$y = 3^{\ln x} \quad , \quad y = \arctan(\sqrt{\cos x})$$

٢- ادرس استمرارية الدالة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}x & ; \ x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{x} & ; \ x > 1 \end{cases}$$

السؤال الثالث : (٢٥ درجة)

١- أدرس تقارب السلسلة التالية :

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

٢-أوجد أربعة حدود غير معدومة من منشور ماك لوران للدالة التالية :

$$y = e^{\sin x}$$

مع التمنيات للجميع بالتوفيق والنجاح

أ. د. نبيل احمد علي

الإجابة في
تحليل رياضي 1
لطلاب السنة الأولى فيزياء

السؤال الأول: [1] صحيح بالبرهان على الأربعة

20 درجة

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; ; \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ (3)

لنوضح لكل ε نجد δ مناسب

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; ; \; |x+1| < \delta \Rightarrow |4x - 5 + 9| < \varepsilon$ (4)

$|4x + 4| < \varepsilon \Rightarrow 4|x+1| < \varepsilon$

$|x+1| < \frac{\varepsilon}{4}$ (3)

باختيار δ المطلوب يساوي $\frac{\varepsilon}{4}$.

[2] صحيح بالبرهان للمشتقة

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ (3)

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$ (2)

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\Delta x - x}{2}\right)}{\Delta x}$$ (2)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right) \lim_{2\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$ (1)

$$= \cos x \times 1 = \cos x$$

A to Z مكتبة

السؤال الثاني (15) درجة

1)

$$y' = \frac{(\sqrt{\cos x})'}{1+(\sqrt{\cos x})^2} \quad (5) = \frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{1+\cos x} \quad (5) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}(1+\cos x)} \quad (5)$$

$$y = 3^{\ln x} \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \otimes 3^{\ln x} \otimes \ln 3 \quad (10)$$

2) أوجد:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad (5)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{النهاية اليمنى} \quad (5)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{x-1}{x} = 0 \quad \text{النهاية اليسرى} \quad (5)$$

$$f(x_0) = \cos \frac{\pi}{2} x \Big|_{x=1} = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad (5)$$

مكتبة A to Z

السؤال الثالث: (25 درجة)

1) بيّن صحة النظرية كوشي وطريقة الجذر ونظرية المقارنة

صحة الجذر ثم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+1}}$$

صحة لوبتال $\sqrt{\frac{n+1}{n+1}}=\sqrt{\frac{0}{0}}$ $\Rightarrow \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=1$

لوبتال = مشتق البسط / مشتق المقام

مكتبة A to Z

ولكن ... بيّن صحة طريقة المقارنة على المتسلسلة التوافقية

$S=\sum\frac{1}{n}$

2) صحة منشور ماكلورين

$$f(x)=e^{\sin x}=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$ (3)

$$f(0)=e^{\sin x}\Big|_{x=0}=e^0=1$$ (1)

$$f'(0)=\cos x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0}=1$$ (2)

$$f''(0)=-\sin x\, e^{\sin x}+\cos^2 x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0}=1$$ (2)

$$f''(0) = -\cos x\, e^{\sin x} - \sin x \cos x\, e^{\sin x} - 2\sin x \cos x\, e^{\sin x} + \cos^2 x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0} = -1 + 1 = 0$$

$$f^{(4)}(0) = -\cos^2 x\, e^{\sin x} + \sin x\, e^{\sin x} - \cos^2 x\, e^{\sin x} + \sin^2 x\, e^{\sin x} - \sin x \cos^2 x\, e^{\sin x} - 2\cos^2 x\, e^{\sin x} + 3\sin^2 x\, e^{\sin x} - 2\sin x \cos^2 x\, e^{\sin x} + \cos^4 x\, e^{\sin x}$$

$$= -1 + 0 - 1 + 0 - 0 - 2 + 0 - 0 - 0 + 1$$

$$= -3$$

مكتبة A to Z

نقوم بالنشر لـ

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!}$$ (3)

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$$ ونجد أن

3/7/2024

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

الامتحان النهائي لمقرر تحليل رياضي١
الدورة الاولى (٢٠٢٣ - ٢٠٢٤)
السنة الأولى- المدة : ساعتين

السؤال الأول : (٢٠درجة)

١- برهن حسب تعريف الاساسي للنهاية ان نهاية الدالة $y = 2x - 3$ تساوي (-1) اذا انتهت $x \to 1$

٢- برهن حسب تعريف الاساسي للمشتقة ان مشتقة الدالة $y = x^n$ تساوي

$$y' = nx^{n-1}$$

مكتبة A to Z

السؤال الثاني: (٤٥ درجة)

١- أوجد المشتقة من المرتبة الأولى للدالتين التاليتين :

$$y = 3^{\ln x^2} \quad , \quad y = \arcsin(\sqrt{\cos x})$$

٢- برهن إن المشتقة من المرتبة الثانية تساوي y/a^2 للدالة التالية :
حيث a عدد ثابت

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$

٣- ادرس استمرارية الدالة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}x & ; \ x \le 1 \\ \left|\frac{x-1}{x}\right| & ; \ x > 1 \end{cases}$$

السؤال الثالث: (٢٥ درجة)

١- أدرس تقارب السلسلة التالية :

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$$

٢- أوجد منشور ماك لوران للدالة التالية :

$$y = \sin x$$

مع التمنيات للجميع بالتوفيق والنجاح
أ. د. نبيل أحمد علي

لفترة السنة الأولى شهر أيار

الدور الأول ٢٠٢٠ — ٢٠٢١

السؤال الأول : 1 حسب تعريف بوسائل للنهاية

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; |x - 1| < \delta \Rightarrow |2x - 3 + 1| < \varepsilon$

$|2x - 2| < \varepsilon \Rightarrow 2|x - 1| < \varepsilon$

$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$

يوجد فيكل ε حيث $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

2 حسب التعريف الأساسي للمشتقة

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

حسب مبرهنة ذات الحدين نيوتن

$$y' = \frac{x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}\Delta x^3 + \cdots + \Delta x^n - x^n}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{n}{1!}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}\Delta x^2 + \cdots + \Delta x^{n-1}\right)$$

$$y' = n x^{n-1} + 0 + 0 + 0 + \cdots + 0$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

السؤال الثاني : 1

$$y' = \frac{3(\sqrt{\cos x})'}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}\sqrt{1-\cos x}}$$

$$y' = 2x\cos x^2 \cdot 3^{\sin x^2} \ln 3 \cdot (2)$$

$y' = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}\right)$ (3)

نشتق الدالة

$y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{-x}{a}}\right)$

$y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{a}e^{\frac{-x}{a}}\right)$

نشتق ثانية

$y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right)$

نضرب a^2 الطرفين

$a^2 y'' = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right)$

$a^2 y'' = y$ (2) $\Rightarrow y'' = \frac{y}{a^2}$

وهو المطلوب

بطريقة ثانية : نستخدم الدوال العكسية .

3- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$ شرط الاستمرار

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left|\frac{x-1}{x}\right| = \lim_{x \to 1^+} \begin{cases} \frac{x-1}{x} = 0 \\ \frac{1-x}{x} = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \cos\frac{\pi}{2}x = 0$ و

$f(x)\Big|_{x=1} = \cos\frac{\pi}{2}x\Big|_{x=1} = 0$ أي

الشرط محقق والدالة مستمرة .

السؤال الثالث : (1) حسب اختيارك

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+1}{2^n}} = \lim_{\infty} \frac{n+2}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^n}{n+1}$

Ato Z مكتبة

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2} < 1$$

فالسلسلة متقاربة .

2) منشور ماكلورين بجوار الصفر

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n$$

باقي لاجرانج $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$

مكتبة A to Z

$f(x) = \sin x \Big|_{x=0} = 0$ $\quad$ $f^{(4)}(x) = \sin x \Big|_{x=0} = 0$

$f'(x) = \cos x \Big|_{x=0} = 1$ $\quad$ $f^{(5)}(x) = \cos x \Big|_{x=0} = 1$

$f''(x) = -\sin x \Big|_{x=0} = 0$ $\quad$ $f^{(6)}(x) = -\sin x \Big|_{x=0} = 0$

$f'''(x) = -\cos x \Big|_{x=0} = -1$ $\quad$ $f^{(7)}(x) = -\cos x \Big|_{x=0} = -1$

نعوض بالمنشور

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

انتهت الإجابة

بنيل ...!

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

الامتحان النهائي لمقرر تحليل رياضي١
الفصل الدراسي الثاني(٢٠٢٢-٢٠٢٣)
سنة أولى - المدة : ساعتين

السؤال الأول (٣٠ درجة)

١- لتكن لدينا الدالتين التاليتين :

$$a)\ y=\frac{\sqrt{x}}{x^2},\qquad b)\ y=(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

أوجد نهاية الدالة a عندما x تسعى إلى الصفر ونهاية الدالة b عندما x تسعى إلى الصفر.

٢- ادرس استمرارية الدالة التالية :

$$f(x)=\begin{cases}\sin \pi x & ;\ x\le 1\\ \dfrac{|x-1|}{x-2} & ;\ x>1\end{cases}$$

السؤال الثاني : (٣٠ درجة)

١- برهن إن المشتقة من المرتبة الثانية تساوي y/a^2 للدالة التالية :
حيث a عدد ثابت

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)$$

٢- اوجد المشتقة الاولى للدالة التالية

$$y=\arg sh(\sqrt{x})$$

السؤال الثالث : (٣٠ درجة)

١- أدرس تقارب السلسلة التالية :

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

٢- أوجد أربعة حدود غير معدومة من منشور ماك لوران للدالة التالية :

$$y=e^{\sin x}$$

مع التمنيات للجميع بالتوفيق والنجاح

د. نبيل أحمد علي

A to Z

سلم تصحيح فرض تأليفي رقم 1
للأقسام السنة الأولى علوم التجريبية
الدورة الثانية الباكالوريا ج.ع - ج.ت

تمرين 3 ن 01

السؤال الأول : a1

الطلب الأول

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x^2} : \frac{0}{0}$$

نلاحظ تعيين لحالة لويبتال نجد (5)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$y = \infty$ تكتب الدالة

b1

$$y = \lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} : 1^{\infty}$$

نلاحظ تعيين حالة من حالات الأشكال غير محددة لنأخذ اللوغاريتم الطبيعي (5)

$$\ln y = \frac{3}{x^2} \ln \cos 2x = \frac{3 \ln \cos 2x}{x^2} : \frac{0}{0}$$

نلاحظ تعيين لحالة لويبتال نجد

$$\ln y = -6 \frac{\sin 2x}{2x \cos 2x} \Rightarrow \ln y = -6 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{\cos 2x} \quad (5)$$

$$\ln y = -6 \times 1 \times 1 = -6 \Rightarrow y = e^{-6}$$ تكتب الدالة

الطلب الثاني : دراسة استمرارية الدالة f على اليسار

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$ (3)

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1|}{x-2}$$

النهاية من اليمين :

← نعوض القيم المحققة لما يؤول

1) $\lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)}{x-2} = \frac{0}{1-2} = \frac{0}{-1} = 0$ (3)

2) $\lim_{x \to 1^+} \frac{-(x-1)}{x-2} = \frac{0}{1-2} = \frac{0}{-1} = 0$ (3)

النهاية من اليسار :

$$\lim_{x \to 1^-} \sin \pi x = \sin \pi = 0$$ (3)

نهاية الدالة عند $x=1$

$$\sin \pi x \Big/_{x=1} = \sin \pi = 0$$ (3)

إذا النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار وتساوي القيمة بالتعويض المباشر

عند النقطة $x=1$

السؤال الثاني (30 درجة)

أ) أثبت أن : تؤهد المشتقة الأول :

$$y' = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a} e^{x/a} - \frac{1}{a} e^{-x/a}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right)$$ (7)

مشتقة ثانية :

$$y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} e^{x/a} + \frac{1}{a} e^{-x/a}\right) = \frac{1}{2a}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$ (7)

نضرب الطرفين بـ a^2

A to Z

$$a^2 y'' = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = y$$

$$y'' = \frac{y}{a^2}$$ (6)

وهو المطلوب

المطلب الثاني

$$y = \operatorname{argsh}\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{(\sqrt{x})^2+1}}$$ (5)

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}$$ (5)

السؤال الثالث

(30)

المطلب الأول: حسب اختبار كوشي

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{n}}$$ (5)

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(n^{-\frac{1}{2n}}\right)$$

حسب لوبيتال نأخذ لوغاريتم:

$$I = (n)^{-\frac{1}{2n}} \Rightarrow \ln I = -\frac{1}{2n}\ln n = \frac{-\ln n}{2n}$$ (5) $$= \frac{-\frac{1}{n}}{2} = \frac{-1}{2n}$$

بأخذ النهاية $n \to \infty$

$$\ln I = \frac{-1}{\infty} = 0$$ (5)

$$I = e^0 = 1 \Rightarrow \boxed{\rho = 1}$$

بما أن $\rho = 1$ فالسلسلة متباعدة حسب معيار كوشي.

A to Z

طريقة ثانية: حسب دالمبير

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1$$

صالحة شرط ايضا

الطريقة الثانية: حرفانوف مشهور مالا لورن:

$$f(x) = e^{\sin x} = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n$$

$$f(0) = e^{\sin 0} = 1 \quad (2)$$

$$f'(0) = \cos x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0} = 1 \quad (2)$$

$$f''(0) = -\sin x\, e^{\sin x} + \cos^2 x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0} = 1 \quad (2)$$

$$f'''(0) = -\cos x\, e^{\sin x} - \sin x \cos x\, e^{\sin x} - 2\sin x \cos x\, e^{\sin x} + \cos^3 x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0} = 0$$

$$f^{(4)}(0) = -\cos^2 x\, e^{\sin x} + \sin x\, e^{\sin x} - \cos^2 x\, e^{\sin x} + \sin^2 x\, e^{\sin x} - \sin x \cos^2 x\, e^{\sin x} - 2\cos^2 x\, e^{\sin x} + 2\sin^3 x\, e^{\sin x} - 2\sin x \cos^2 x\, e^{\sin x} - 3\cos^2 x \sin x\, e^{\sin x} + \cos^4 x\, e^{\sin x} = -1 + 0 - 1 + 0 - 0 - 2 + 0 - 0 - 3 + 1 = -5 \quad (5)$$

$$f^{(4)}(0) = -3$$

نعوض بالنشور

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!}$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \quad (2)$$

وهذا المطلوب

انتهت الإجابة

28/7/2023

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

الامتحان النهائي لمقرر تحليل رياضي١
الفصل الدراسي الثاني(٢٠٢٢ - ٢٠٢٣)
سنة أولى - المدة : ساعتين

السؤال الأول (٣٠ درجة)

١- لتكن لدينا الدالتين التاليتين :

$$a)\ y=\frac{\sqrt{x}}{x^2},\qquad b)\ y=(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

أوجد نهاية الدالة a عندما x تسعى إلى الصفر ونهاية الدالة b عندما **x** تسعى إلى الصفر.

٢- ادرس استمرارية الدالة التالية :

$$f(x)=\begin{cases}\sin \pi x & ;\ x\le 1\\ \dfrac{|x-1|}{x-2} & ;\ x>1\end{cases}$$

السؤال الثاني : (٣٠ درجة)

١- برهن إن المشتقة من المرتبة الثانية تساوي y/a^2 للدالة التالية :
حيث a عدد ثابت

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)$$

٢- اوجد المشتقة الاولى للدالة التالية

$$y=\arg sh(\sqrt{x})$$

السؤال الثالث : (٣٠ درجة)

١- أدرس تقارب السلسلة التالية :

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

٢- أوجد أربعة حدود غير معدومة من منشور ماك لوران للدالة التالية :

$$y=e^{\sin x}$$

مع التمنيات للجميع بالتوفيق والنجاح

د. نبيل أحمد علي

تصحيح تمرين مقترح للمراقبة 1
للطلاب السنة الأولى علوم البيولوجيا
المدة: ساعتان

التمرين الأول: (3 ن)

السؤال الأول: (1 ن)

a) حساب النهاية:

$$y = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x^2} : \frac{0}{0}$$

نلاحظ أن لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{1}{0} = \infty$$ (5)

إذن $y = \infty$

b)

$$y = \lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} : 1^{\infty}$$

نلاحظ أن لدينا حالة عدم التعيين من الشكل 1^{∞}

$$\ln y = \frac{3}{x^2} \ln \cos 2x = \frac{3 \ln \cos 2x}{x^2} : \frac{0}{0}$$ (5)

نلاحظ أن لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\ln y = -6 \frac{\sin 2x}{2x \cos 2x} \Rightarrow \ln y = -6 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{\cos 2x}$$ (5)

$$\ln y = -6 \times 1 \times 1 = -6 \Rightarrow y = e^{-6}$$ إذن

السؤال الثاني: دراسة استمرارية دالة على يمين x_0

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$ (3)

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1|}{x-2}$$

النهاية من اليمين :

← حسب قواعد القيم المطلقة لدينا حالتين

1) $\lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)}{x-2} = \frac{0}{1-2} = \frac{0}{-1} = 0$ (3)

2) $\lim_{x \to 1^+} -\frac{(x-1)}{x-2} = \frac{0}{1-2} = \frac{0}{-1} = 0$ (3)

النهاية من اليسار :

$$\lim_{x \to 1^-} \sin \pi x = \sin \pi = 0$$ (3)

حيث الدالة عند $x=1$

$$\sin \pi x \Big|_{x=1} = \sin \pi = 0$$ (3)

إذا النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار وتساوي القيمة بالتعويض المباشر عند النقطة $x=1$

السؤال الثاني (30 درجة)

أ) أثبت أن : $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ تحقق المعادلة :

$$y'' = \frac{1}{a^2} y$$

$$y' = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a} e^{x/a} - \frac{1}{a} e^{-x/a}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right)$$ (7)

نشتق مرة ثانية :

$$y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} e^{x/a} + \frac{1}{a} e^{-x/a}\right) = \frac{1}{2a}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$ (7)

نضرب الطرفين بـ a^2

$$a^2 y'' = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = y$$

$$y'' = \frac{y}{a^2}$$ (6)

وهو المطلوب

المطلب الثاني

$$y = \operatorname{argsh}\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{(\sqrt{x})^2+1}}$$ (5)

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}$$ (5)

السؤال الثالث (3 نقاط)

المطلب الأول: حسب اختبار كوشي

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{n}}$$ (5)

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(n^{-\frac{1}{2n}}\right)$$

حسب لوغاريتم ناخذ لوغاريتم:

$$I = (n)^{-\frac{1}{2n}} \Rightarrow \ln I = -\frac{1}{2n}\ln n = \frac{-\ln n}{2n} \overset{(5)}{=} \frac{-\frac{1}{n}}{2} = \frac{-1}{2n}$$

بنهاية عندما $n \to \infty$

$$\ln I = \frac{-1}{\infty} = 0$$ (5)

$$I = e^0 = 1 \Rightarrow \boxed{\rho = 1}$$

بالتالي حسب حالة شك، نستخدم طريقة لوغاريتم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r_{n+1}}{r_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=1$$

صالة شرل أيضاً

2 الطريقة الثانية: مفكوك متسلسلة ماكلورين:

$$f(x)=e^{\sin x}=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_n$$

2

$$f(0)=e^{\sin x}\Big|_{x=0}=1$$

2

$$f'(0)=\cos x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0}=1$$

2

$$f''(0)=-\sin x\, e^{\sin x}+\cos^2 x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0}=1$$

2

$$f'''(0)=-\cos x\, e^{\sin x}-\sin x\cos x\, e^{\sin x}-2\sin x\cos x\, e^{\sin x}+\cos^2 x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0}=0$$

$$f^{(4)}(0)=-\cos^2 x\, e^{\sin x}+\sin x\, e^{\sin x}-\cos^2 x\, e^{\sin x}+\sin^2 x\, e^{\sin x}-\sin x\cos^2 x\, e^{\sin x}-2\cos^2 x\, e^{\sin x}+2\sin^3 x\, e^{\sin x}-2\sin x\cos^2 x\, e^{\sin x}-3\cos^2 x\sin x\, e^{\sin x}+\cos^4 x\, e^{\sin x}$$

5

$$f^{(4)}(0)=-3$$

نعوض بالنشور

$$e^{\sin x}=1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{3x^4}{4!}$$

$$e^{\sin x}=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}$$

2

وهو المطلوب

انتهت الإجابة

28/7/2023

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

الامتحان النهائي لمقرر تحليل رياضي١
الفصل الدراسي الأول (٢٠٢٢ - ٢٠٢٣)
سنة أولى - المدة : ساعتين

السؤال الأول (٣٠ درجة)

١- لتكن لدينا الدالتين التاليتين :

$$a)\ y=\frac{x-x\cos x}{\sin x} \qquad b)\ y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$$

أوجد نهاية الدالة a عندما x تسعى إلى الصفر ونهاية الدالة b عندما x تسعى إلى ∞.

٢- ادرس استمرارية الدالة التالية :

$$f(x)=\begin{cases}-3x & ; \quad x\le 1\\ 3x-6 & ; \quad 1<x<3\\ x^2-6 & ; \quad x\ge 3\end{cases}$$

السؤال الثاني : (٣٠ درجة)

١- برهن إن المشتقة من المرتبة الأولى تساوي ½ للدالة التالية :

$$y=arc\tan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

٢- اوجد المشتقة الاولى للدالة التالية

$$y=\arg th(\cos x)$$

السؤال الثالث : (٣٠ درجة)

١- أدرس تقارب السلسلة التالية :

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$$

٢- أوجد منشور ماك لوران للدالة التالية : $y=\ln(x+1)$

مع التمنيات للجميع بالتوفيق والنجاح

د. نبيل أحمد علي

A to Z

سلم تصحيح فرض تحليل رياضي 1
لطلاب السنة الاولى قسم الفيزياء لجامعة
الفصل الاول 2021 ـــ 2022

السؤال الاول 3d ورقة

1

a) $y = \frac{x - x\cos x}{\sin x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = \frac{0}{0}$ حالة عدم تعين

حسب لوبيتال نجد (5)

$$\lim_{x\to 0} y = \frac{1 - (\cos x + x\sin x)}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

b) $\lim_{x\to\infty} y = \left(\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{x})^x}{(1-\frac{1}{x})^x} = \frac{e}{I_1}$ (5)

لحساب I_1

$$\lim_{x\to\infty} (1-\frac{1}{x})^x = 1^\infty$$ حالة لم تعين

نفرض ان $\alpha = \frac{-1}{x} \Leftarrow x = -\frac{1}{\alpha}$ (5) نعوض بدالة α حيث $\alpha \to 0 \Leftarrow x \to \infty$

$$I_2 = \lim_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} = \lim_{\alpha\to 0} \left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-1} = e^{-1}$$

نعوض قيمة I_2 نجد

$$\lim_{x\to\infty} y = \frac{e}{e^{-1}} = e^2$$

2

لدراسة الاستمرارية عند النقطة $x=1$ نبرهن نجد

(1) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ (2)

$$\lim_{\substack{x\to 1^- \\ <}} (-3x) = -3 \quad , \quad \lim_{\substack{x\to 1^+ \\ >}} (3x-6) = 3-6 = -3$$

$$f(x)\Big|_{x=1} = -3x\Big|_{x=1} = -3$$ (6)

الدالة مستمرة عند الواحد لتحقق الشرط

A to Z

ا) الاستمرارية عند $x=3$ حسب تعريف الاستمرارية

$$\lim_{\substack{x\to 3^+ \\ x>3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3^- \\ x<3}} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x\to 3^+} (x^2-6) = 3 \qquad \lim_{x\to 3^-} (3x-6) = 3 \quad (6)$$

$$f(x)\Big|_{x=3} = (x^2-6)\Big|_{x=3} = 3$$

الدالة مستمرة عند $x=3$

السؤال الثاني: الطلب الاول

لدينا طريقتين للحل (3 ن)

طريقة اولى: $y = \arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

من دساتير المثلثات

$$y = \arctan\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}} = \arctan\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \arctan\tan\frac{x}{2}$$

$$y = \arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{x}{2}$$

بالاشتقاق نجد

$$y' = \frac{1}{2}$$

طريقة ثانية: $y' = \dfrac{\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)'}{1+\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad (5) = \dfrac{\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)'}{\frac{2}{1+\cos x}} = \dfrac{\frac{\sin x(1+\cos x)+\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2}}{\frac{2}{1+\cos x}}$

$$= \frac{1+\cos x}{2}\left(\frac{\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\right) \quad (5) = \frac{\sin x}{2(1+\cos x)\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} = \frac{\sin x}{2\sqrt{(1+\cos x)(1-\cos x)}}$$

$$= \frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{2\sin x} = \frac{1}{2} \quad (5)$$

الطلب الثاني:

$$y' = \frac{(\cos x)'}{1-\cos^2 x} = \frac{-\sin x}{1-\cos^2 x} \quad (5)$$

A to Z

السؤال الثالث: الطلب الأول

30 درجة يمكن دراسة التقارب بطريقتين (كوشي ودالمبير)

حسب اختبار كوشي:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{2^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} \quad (*)$$ (5)

حالة لم نعينها بعد ∞^0 لنأخذ لغاريتم الطرفين

$$I = (n+1)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \ln n = \frac{1}{n}\ln(n+1) = \frac{\ln(n+1)}{n}$$

نعتبر الأيمن ونشتغل $\frac{\infty}{\infty}$ حسب لوبيتال نجد (5)

$$\ln I = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow I = e^0 = 1$$

نعوض في $(*)$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} < 1$$ (5)

فالسلسلة متقاربة.

الطلب الثاني: بتطبيق صيغة ماك لوران نجد

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n$$ (2)

$$f(x) = \ln(x+1)\Big|_{x=0} = \ln 1 = 0$$ (2)

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}\Big|_{x=0} = 1$$ (2)

$$f''(x) \quad \frac{-1}{(x+1)^2}\Big|_{x=0} = -1$$ (2)

$$f'''(x) = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4}\Big|_{x=0} = 2$$ (2)

$$f''''(x) = \frac{-6}{(x+1)^4} = -6$$ (2)

نعوض بالصيغة نجد

$$y = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\times 1 + \frac{x^3}{3!}\times 2 + \frac{x^4}{4!}\times(-6) + \cdots$$

$$y = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$ (3)

$$(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

انتهى السؤال الثالث

6/3/2023

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

الامتحان النهائي لمقرر تحليل رياضي١
الفصل الدراسي الثاني (٢٠٢١ - ٢٠٢٢)
السنة الأولى- المدة : ساعتين

السؤال الأول : (٣٠درجة)

١- أوجد المشتقة من المرتبة الأولى للدالتين التاليتين :

$$y = \arg th(\cos x) \quad , \quad y = e^{x^x}$$

٢- برهن إن المشتقة من المرتبة الثانية تساوي y/a^2 للدالة التالية :
حيث a عدد ثابت

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$

السؤال الثاني : (٢٠ درجات)

أدرس استمرارية الدالة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}x & ; \quad x \le 1 \\ \dfrac{|x-1|}{x} & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

السؤال الثالث : (٤٠ درجة)

١- أدرس تقارب السلسلة التالية : $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

١- أوجد أربعة حدود غير معدومة من منشور ماك لوران للدالة التالية :

$$y = e^{\sin x}$$

مع التمنيات للجميع بالتوفيق والنجاح
د. نبيل أحمد علي

سلم تصحيح فرض محروس رقم 1
للدورة الاستدراكية لشهر يناير
السنة الدراسية 2021-2022

السؤال الأول : (15 نقطة) لكل طالب

1) (3 نقط)

$y = arg\,th(\cos x)$.

نفرض $t = \cos x \Leftarrow dt = -\sin x\,dx \Leftarrow t' = -\sin x$ (1)

نكتب $y = arg\,th\,u$ (3)

نشتق $y' = \dfrac{u'}{1-u^2} = \dfrac{-\sin x}{1-\cos^2 x}$ (3)

2) (12 نقطة)

$y = e^{x^x}$

1.2) نشتق $\ln$ الطرفين

$\ln y = x^x \ln e = x^x \times 1$ (2)

نشتق $\dfrac{y'}{y} = (x^x)' \Rightarrow y' = e^{x^x}(x^x)'$ (*)

(2)

نفرض أن $u = x^x$ ونحسب u'

نأخذ $\ln$ الطرفين

$\ln u = x \ln x$ (1)

نشتق $\dfrac{u'}{u} = \ln x + 1$ (1)

$u' = u(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$ (1)

$y' = e^{x^x}\left(x^x(\ln x + 1)\right)$. (1)

نعوض في (*)

A to Z

2/ (15) الموضوع الثاني

(2) الطلب الثاني: نشتق مرة أولى

$$y' = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}e^{x/a} - \frac{1}{a}e^{-x/a}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right)$$

(3) (2)

نشتق مرة ثانية:

$$y'' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}e^{x/a} + \frac{1}{a}e^{-x/a}\right] = \frac{1}{2a}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$

(3)

$$y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$ (2)

نضرب الطرفين بـ a^2

$$a^2 y'' = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$ (3)

$$a^2 y'' = y \Rightarrow y'' = \frac{y}{a^2}$$ (2)

وهو المطلوب. تبرهن أن $y = a\,ch\frac{x}{a}$ تحقق: $y' = sh\frac{x}{a} \Rightarrow y' = \frac{1}{a^2}ch\frac{x}{a} = \frac{y}{a^2}$

السؤال الثاني: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \cos\frac{\pi}{2}x$ إذا كان $x \le 1$ و $f(x) = \frac{x-1}{x}$ إذا كان $x > 1$

1) ندرس استمرارية f عند 1 (2d)

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$ (2)

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x} = \frac{1-1}{1} = 0$$ (G)

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \cos\frac{\pi}{2}x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$ (G)

$$f(x)\Big|_{x=1} = \cos\frac{\pi}{2}x\Big|_{x=1} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$ (6)

بما أن النهاية من اليمين = النهاية من اليسار = قيمة الدالة عند 1 فإن f مستمرة

A to Z

الموضوع الثاني

التمرين الأول: دراسة تقارب السلسلة ذات الحدود العامة

الطلب الأول: طبيعة السلسلة

طلب أول (2ن)

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} \overset{(5)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left[n^{\frac{-1}{2n}}\right]}_{I} = 0^0$$

(5) حالة عدم تعين حسب نيوتن نأخذ لوغاريتم المقدار

$$I = n^{\frac{-1}{2n}}$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\ln I = \frac{-1}{2n}\ln n = \frac{\frac{-1}{n}}{2} = \frac{-1}{2n} \longrightarrow \ln I = 0$$

(5) بالاشتقاق حسب لوبيتال $n\to\infty$

$$I = e^0 = 1 \quad (3)$$

نعوض بقيمة I نجد

$$\rho = \lim_{n\to\infty} = 1 \Rightarrow \rho = 1 \quad (2)$$

وهي حالة شك.

نعود لدراسة تقارب السلسلة باستعمال معيار دالمبير ومقارنة مع السلسلة $\frac{1}{n}$ أو دالمبير

$\frac{1}{n}$ متباعدة عندئذ تكون السلسلة متباعدة أو دالمبير

حالة شك أيضاً.

طلب ثاني (2ن)

الطلب الثاني: نعرف منشور ماك لوران نجد

$$f(x) = e^{\sin x} = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n$$

(4) حيث $R_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ حسب دالمبير

٨/

$f(0) = e^{\sin x}\Big|_{x=0} = e^0 = 1$ (2) ✓

$f'(0) = \cos x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0} = 1$ (2)

$f''(0) = -\sin x\, e^{\sin x} + \cos^2 x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0}$, $f''(0) = 1$ (2)

$f'''(0) = -\cos x\, e^{\sin x} - \sin x \cos x\, e^{\sin x} - 2\sin x \cos x\, e^{\sin x} + \cos^2 x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0} = -1 - 0 - 0 + 1 = 0$ (2)

$f^{(4)}(0) = -\cos^2 x\, e^{\sin x} + \sin x\, e^{\sin x} - \cos^2 x\, e^{\sin x} + \sin^2 x\, e^{\sin x} - \sin x \cos^2 x\, e^{\sin x} - 2\cos^2 x\, e^{\sin x} + 2\sin x\, e^{\sin x} - 2\sin x \cos^2 x\, e^{\sin x} - 3\cos^2 x \sin x\, e^{\sin x} - \cos^4 x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0}$ (4)

$= -1 + 0 - 1 + 0 - 0 - 2 + 2 - 0 - 0 + 1$

$= -3$

باستخدام النتائج السابقة نجد أن مفكوك تايلور حتى الحد الرابع هو

$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!}$ (4)

انتهت الإجابة

سلمك الله

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم - طرطوس
قسم الفيزياء

الامتحان النهائي لمقرر تحليل رياضي1
الفصل الدراسي الثاني (2021- 2022)
السنة الأولى- المدة : ساعتين

مكتبة A to Z

السؤال الأول : (25 درجة)

1- أوجد المشتقة من المرتبة الأولى للدالتين التاليتين :

$$y = arc\tan(\cos x) \quad , \quad y = x^x$$

2- اوجد المشتقة من المرتبة n للدالة التالية :

$$y = xe^x$$

السؤال الثاني : (15 درجة)

أدرس استمرارية الدالة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}x & ; \quad x \le 1 \\ |x-1| & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

السؤال الثالث : (25 درجة)

لتكن لدينا الدالتين التاليتين :

$$a)\ y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x , \quad b)\ y = (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

أوجد نهاية الدالة (a)عندما x تسعى إلى اللانهاية، ونهاية الدالة (b) عندما x تسعى إلى الصفر.

السؤال الرابع: (25 درجة)

1. أدرس تقارب السلسلة التالية : $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$

2. أوجد أربعة حدود غير معدومة من منشور ماك لوران للدالة التالية :

$$y = e^{\sin x}$$

مع التمنيات للجميع بالتوفيق والنجاح
د. نبيل أحمد علي

سلم تصحيح مقترح لتحليل رياضي 1
لطلاب السنة الأولى فيزياء
دورة أولى 2022-2021

السؤال الأول: لكل طالب (25 درجة) (15 درجة)

$y = \arctan(\cos x)$

$y' = (\arctan u)'$ (7) , $u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x$

$y' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}$ $u^2 = \cos^2 x$

$y = x^x$

لا يمكن استخدام لوغاريتم العلامتين

بالاشتقاق

$\ln y = \ln x^x = x \ln x$ (4)

$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$ (4)

$y' = y(\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$

لكل طالب (10 درجات)

$y = xe^x$

نشتق عدة مرات ونستنتج الاشتقاق من المرتبة n.

$y' = e^x + xe^x$ (2)

$y'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$ (3)

$y''' = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x$ (3)

وهكذا

$y^n = ne^x + xe^x$ (2)

السؤال الثاني:
15 درجة
حساب نهايات

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$ (2)

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} |x-1| = \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} (x-1) = 0 \\ \lim_{x \to 1^-} -(x-1) = \lim_{x \to 1^+} -x+1 = 0 \end{cases}$$ (4)

$$= \lim_{x \to 1^+} |x-1| = 0$$ (2)

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \cos \frac{\pi}{2} x = 0$$ (4)

$$f(x)\Big|_{x=1} = \cos \frac{\pi}{2} x \Big|_{x=1} = 0$$ (3)

والدالة مستمرة لأنها مركبة من دوال مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية

السؤال الثاني:
25 درجة
a: 15 درجة
b: 10 درجات

a) $y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^x$ (2) $\left(\frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)^x$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$ (3)

(*) $\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)^x}{e} = \frac{1}{e}$ (2) , $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

يمكننا الحل بطريقة ثانية.

مكتبة A to Z

لتوجيه كرة I

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{x} \quad (2)$$

حالة عدم تعيين من الشكل 1^{∞} نأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\ln I = x\ln\left(\frac{1}{x}-1\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\frac{1}{x}} \quad (2) \quad \frac{0}{0}$$

نشتق حسب لوبيتال مشتق البسط على مشتق المقام

$$\ln I = \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{1}{x}-1\right)}}{-\frac{1}{x^2}(2)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}-1\right)}$$

بأخذ النهاية لكلا $x \to \infty$

$$\ln I = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow I = e^{-1}$$

$$\lim_{x\to\infty} y = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2} \quad (2)$$

نعوض في (*)

طريقة ثانية: توجيه

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = \left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x} = \left(\left(1-\frac{1}{\frac{x+1}{2}}\right)^{x}\right)'$$

b) $y = (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

نعوض في (*) نفرض أن $\frac{x+1}{2} = t$ فيكون $x = 2t-1$

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t-1} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{2}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)} \xrightarrow{\text{بأخذ النهاية}} \frac{1}{e^2\cdot 1} = \frac{1}{e^2}$$

بالعودة الى الإجابة النهائية [b]

$y = \ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$; 1^{∞} (1)

ناخذ لوغاريتم الطرفين (1)

$\ln y = \frac{3}{x^2}\ln(\cos 2x)$ (3) $\frac{3\ln\cos 2x}{x^2} = \frac{0}{0}$

نشتق حسب لوبيتال

$= \frac{3\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{2x} = \frac{-6\sin 2x}{2x\cos 2x}$ (2) نأخذ النهاية $x \to 0$

$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0}\left(-6\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\right) = -6\cdot 1\cdot 1 = -6$ (2)

$\ln y = -6 \Rightarrow y = e^{-6}$ (1)

السؤال الثاني: أعطى الأول نوعية اختبار كوشي (10) ودعائم (25)

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{(2^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}$ (*) (2)

وهي حالة من حالات (∞^0 / ∞) نفرض: $I = (n+1)^{\frac{1}{n}}$

نأخذ لوغاريتم الطرفين

$\ln I = \ln(n+1)^{\frac{1}{n}}$ (4)

$\ln I = \frac{1}{n}\ln(n+1) = \frac{\ln(n+1)}{n}$, $\frac{\infty}{\infty}$

حسب لوبيتال

$\ln I = \frac{1}{n+1}$ نأخذ النهاية $\lim \ln I = \frac{1}{\infty} = 0$

$I = e^0 = 1$ (4)

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} < 1$ (2) نعوض في (*)

6 السلسلة متقاربة.

مكتبة Ato Z

بمتسلسلة ماكلورين تجد

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n$$

$$f(0) = e^{\sin x}\Big|_{x=0} = e^0 = 1 \quad (2)$$

$$f'(0) = \cos x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0} = 1 \quad (2)$$

$$f''(0) = -\sin x\, e^{\sin x} + \cos^2 x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0} = 1 \quad (2)$$

$$f'''(0) = -\cos x\, e^{\sin x} - \sin x \cos x\, e^{\sin x} - 2\sin x \cos x\, e^{\sin x} + \cos^3 x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0} = -1 - 0 - 0 + 1 = 0 \quad (2)$$

$$f^{(4)}(0) = -\cos^2 x\, e^{\sin x} + \sin x\, e^{\sin x} - \cos^2 x\, e^{\sin x} + \sin^2 x\, e^{\sin x} - \sin x \cos^2 x\, e^{\sin x} - 2\cos^2 x\, e^{\sin x} + 2\sin^2 x\, e^{\sin x} - 2\sin x \cos^2 x\, e^{\sin x} - 3\cos^2 x \sin x\, e^{\sin x} + \cos^4 x\, e^{\sin x} \quad (2)$$

عند $x=0$ نجد

$$f^{(4)}(0) = -1 + 0 - 1 + 0 - 0 - 2 + 0 - 0 - 0 + 1 = -3$$

نعوض بمتسلسلة ماكلورين

$$e^{\sin x} = 1 + \frac{x}{1!}(1) + \frac{x^2}{2!}(1) + \frac{x^3}{3!}(0) + \frac{x^4}{4!}(-3)$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \quad (2)$$

ccc/15

سلم تصحيح

جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية- طرطوس
قسم الفيزياء

الامتحان النهائي لمقرر تحليل رياضي1
الدورة التكميلية (2014- 2015)
السنة الأولى- المدة : ساعتين

السؤال الأول : (30 درجة)

1. أوجد المشتقة من المرتبة الأولى للدالتين التاليتين :

$$y = \arg sh(\ln x) \quad , \quad y = e^{x^x}$$

2. أوجد نهاية الدالة التالية عندما x تسعى إلى الصفر:

$$y = x^x$$

السؤال الثاني : (15 درجات)

أدرس استمرارية الدالة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}x & ; \ x \le 1 \\ |x-1| & ; \ x > 1 \end{cases}$$

السؤال الثالث : (30 درجة)

1- أدرس تقارب السلسلة التالية : $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

2- أوجد أربعة حدود غير معدومة من منشور ماك لوران للدالة التالية :

$$y = e^{\sin x}$$

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

د. نبيل أحمد علي

A to Z

سلم تصحيح مقرر تكامل رياضي 2

لطلاب قسم الفيزياء السنة الأولى

الدورة الثالثة ١٤٣٨ - ١٤٣٩

السؤال الأول: أطلب الأول الاستفاتة الأول [5] درجات [15] استفاتة ثانية [30]

$$y = \operatorname{arg\,sh}(\ln x) \Rightarrow y' = \frac{(\ln x)'}{\sqrt{\ln^2 x + 1}} \quad (3) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x + 1}}$$

$y = e^{x^x}$. ناخذ لوغاريتم الطرفين وبعد الاشتقاق .

$$\ln y = x^x \ln e = x^x \quad (3)$$

باشتقاق كل

$$\frac{y'}{y} = (x^x)' \Rightarrow y' = e^{x^x}(x^x)' \quad (*) \quad (3)$$

نفرض (1) $u = x^x$ لإيجاد المشتقة ناخذ لوغاريتم الطرفين

$$\ln u = x \ln x \Rightarrow \frac{u'}{u} = \ln x + 1 \quad (2)$$

$$u' = x^x(\ln x + 1) \quad (2)$$

$$(x^x)' = x^x(\ln x + 1) \quad (2)$$

نعوض في (*) نجد

$$y' = e^{x^x}\left[x^x(\ln x + 1)\right] \quad (2)$$

الطلب الثاني: [10] درجات $0^0 = \lim_{x \to 0} x^x$

$$\ln y = \lim_{x \to 0} \ln x^x \quad (2)$$

حالة عدم تعين حسب لوبيتال نجد

ناخذ لوغاريتم الطرفين $\ln y = x \ln x$

ناخذ نهاية الطرف الثاني تصبح حالة $(0 \cdot \infty)$ (2)

A to Z

21

$$\ln y = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad (1)$$

اعيد اشتقاق البسط والمقام كل على حدة

$$\ln y = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \quad (2)$$

$$\ln y = \lim_{x \to 0} (-x) = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1 \quad (1)$$

السؤال الثاني: ادرس استمرارية التابع

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} |x-1| = \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} -(x-1) = 0 & (3) \\ \lim_{x \to 1^+} -(x-1) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} |x-1| = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \cos \frac{\pi}{2} x = 0 \quad (3)$$

$$f(x)|_{x=1} = \cos \frac{\pi}{2} x \Big|_{x=1} = 0 \quad (3)$$

التابع مستمر عند النقطة $x=1$ لأن مستمر على اليمين واليسار وتساوي قيمة التابع (2)

السؤال الثالث: احسب نصف قطر التقارب وفترة التقارب (15)

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$ متسلسلة عددية

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{n}} \quad (3)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \to \infty} \left(n^{\frac{1}{2n}} \right) \quad (2)$$

$\rho = 0$ متسلسلة تباعدية

حالة عدم تعين من الشكل

3)

$$\ln I = \frac{-1}{2n}\ln n = \frac{-\frac{1}{n}}{2} = \frac{-1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln I = 0 \quad (2)\ (1)$$

$$I = e^0 = 1 \quad (2)$$ لفوضية I بالتالي

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left[n^{\frac{-1}{2n}}\right] = 1 \quad (1) \Rightarrow \rho = 1 \quad (1)$$ حالة شك

طريقة ثانية : حسب دالمبير (تقارب المتسلسلة)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1$$

حالة شك.

طريقة ثالثة : بالمقارنة مع السلسلة $\sum\frac{1}{n}$ نكون متباينة السلسلة متباعدة (تقارب العلاقات)

الطلب الثاني : نقوم بنشور ماك لورين لـ

$$f(x) = e^{\sin x} = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + o(x^n) \quad (2)$$ درجة (15)

$$f(0) = e^{\sin x}\Big|_{x=0} = e^0 = 1 \quad (2)$$

$$f'(0) = \cos x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0} = 1 \quad (2)$$

$$f''(0) = -\sin x\, e^{\sin x} + \cos^2 x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0} = 1 \quad (2)$$

A to Z

4)

$$f'''(0) = -\cos x e^{\sin x} - \sin x \cos x e^{\sin x} - 2\sin x \cos x e^{\sin x} + \cos^2 x e^{\sin x} \Big|_{x=0} = -1+1 = 0 \quad (3)$$

$$f^{(4)}(0) = -\cos^2 x e^{\sin x} + \sin x e^{\sin x} - \cos^2 e^{\sin x} + \sin^2 x e^{\sin x} - \sin x \cos^2 x e^{\sin x} - 2\cos^2 x e^{\sin x} + 2\sin^2 x e^{\sin x} - 2\sin x \cos^2 x e^{\sin x} - 3\cos^2 x \sin x e^{\sin x} + \cos^4 x e^{\sin x} \quad (4)$$

$$= -1+0-1+0-0-2+0-0-0+1$$
$$= -3$$

باتباع نفس الطريقة لإيجاد (1) هو ... (بالتعويض بالمكونة)

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} \quad (1)$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4\times 2}$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \quad (1)$$

A to Z

انتهت الإجابة

28/8/2015

جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية- طرطوس
قسم الفيزياء –نظام قديم (سادس)

الامتحان النهائي لمقرر تحليل رياضي1
الفصل الدراسي الثاني (2014- 2015)
الدور الأول- المدة : ساعتين

السؤال الأول : (35 درجة)

لتكن لدينا الدالتين التاليتين :

$$a)\ y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}, \qquad b)\ y=(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

أوجد نهاية الدالة (a)عندما x تسعى إلى اللانهاية, ونهاية الدالة (b) عندما x تسعى إلى الصفر.

السؤال الثاني: (30 درجة)

1- أوجد المشتقة من المرتبة الأولى للدالتين التاليتين :

$$y = arc\tan(\cos x) \quad , \quad y = x^{x}$$

2- برهن إن المشتقة من المرتبة الثانية تساوي y/a^2 للدالة التالية :
حيث a عدد ثابت

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)$$

السؤال الثالث : (35 درجة)

1. أدرس تقارب السلسلة التالية : $s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n}}$

2. أوجد أربعة حدود غير معدومة من منشور ماك لوران للدالة التالية : $y=e^{\sin x}$

مع التمنيات للجميع بالتوفيق والنجاح
د. نبيل أحمد علي

A to Z

تصحيح تحليل رياضي 1

نظام قديم (سداسي وحدات)

السؤال الأول: (35 درجة)

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x$ (5)

$= \left(1-\frac{1}{\frac{x+1}{2}}\right)^x$ (5)

نضع: $x+1=2t \Leftarrow \frac{x+1}{2}=t$ نضع بالمثل

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t+1}$ (15)

$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1}} = \frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)}$

$= \frac{1}{e^2\cdot 1} = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$ (2)

بصيغة أخرى

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{I_1}{I_2}$ (*)

نحسب I_1 و I_2 ثم نعوض في (*)

b) $y = \ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

حالة 1^∞ صيغة بالكل

$\ln y = \frac{3}{x^2}\ln(\cos 2x)$

$= \frac{3\ln\cos 2x}{x^2}$

حالة $\frac{0}{0}$ نشتق صيغة لوبيتال

A to Z

2)

$$\ln y = \frac{-3\ln 2n \cdot 2}{\ln 2n} = -6 \quad (5)$$

$$= \frac{-3\ln 2n \cdot 2}{2n} = \frac{-6\ln 2n}{2n \ln 2n} = \frac{-6}{2n \ln 2n}$$

$$\lim \ln y = -6 \cdot \lim \frac{1}{2n \ln 2n} = -6 \cdot 1 \cdot 1 = -6$$

$$\lim \ln y = -6 \Rightarrow y = e^{-6x}$$

1) السؤال الثاني: الصفحة رقم (15) في دفتر

1.3) $y = \arctan(\cos 2x) = -2x$

$$\frac{1}{1+\cos^2 2x}$$

$y = x^x$

والمطلوب إيجاد الحل

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = y(\ln x + 1)$$

$$y' = x^x(\ln x + 1)$$

الصفحة رقم (15)

$$y' = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}e^{x/a} - \frac{1}{a}e^{-x/a}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right)$$

$$y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}e^{x/a} + \frac{1}{a}e^{-x/a}\right) = \frac{1}{2a}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$

نعوض المعادلة في $a^2 y''$ المطلوبة:

$$a^2 y'' = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = y$$

$$\left(y = \frac{y}{2}\right)$$

A to Z

B)

التمرين الثاني: (17) النقطة 1

(35) دراسة تقارب السلسلة العددية

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+1}{2^n}} = \frac{n+2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1$$

إذن السلسلة متقاربة

حساب المجموع

النقطة الثانية: (18) دراسة قابلية نشر الدالة إلى سلسلة تايلور

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0)$$

نوجد المشتقات:

$$f(0) = e^0 + 1 = 2$$

$$f'(0) = e^0 + 1 = 2 \qquad f''(0) = e^0 = 1$$

$$f^{(3)} = e^x \qquad f^{(4)} = e^x$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!}(1) + \frac{1}{2!}(1) + \frac{1}{3!}(0) + \frac{1}{4!}(-1)$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24}$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24}$$

A to Z

جامعة تشرين
كلية العلوم الثانية- طرطوس
قسم الفيزياء - نظام حديث

الامتحان النهائي لمقرر تحليل رياضي١
الفصل الدراسي الأول (٢٠١٤- ٢٠١٥)
السنة الأولى- المدة : ساعتين

السؤال الأول : (٢٥درجة)

١- أوجد المشتقة من المرتبة الأولى للدالتين التاليتين :

$$y = arc\tan(\cos x) \quad , \quad y = x^x$$

٢- برهن إن المشتقة من المرتبة الثانية تساوي y/a^2 للدالة التالية :
حيث a عدد ثابت

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$

السؤال الثاني : (٢٥درجة)

لتكن لدينا الدالة التالية

$$f(x) = \begin{cases} -3x & ; \quad x \le 1 \\ ax - b & ; \quad 1 < x < 3 \\ x^2 - 6 & ; \quad x \ge 3 \end{cases}$$

١- أوجد قيمة الثابتين a , b حتى تكون الدالة مستمرة عند النقطة 1 ومستمرة عند النقطة 3

٢- بفرض أن a=3 و b=6 بين أن الدالة مستمرة عند النقطة 1 وبين إذا كانت مستمرة عند النقطة 3 .

السؤال الثالث : (٢٥درجة)

١. أدرس تقارب السلسلة التالية : $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$

٢. أوجد أربعة حدود غير معدومة من منشور ماك لوران للدالة التالية : $y = e^{\sin x}$

مع التمنيات للجميع بالتوفيق والنجاح
د. نبيل أحمد علي

(1)

سلم تصحيح تحليل رياضي 1
لطلاب السنة الأولى قسم الفيزياء
ف1، ف2، ف3 — 2014-2015

السؤال الأول: 10 درجات

الطلب الأول 10 درجات

$y = \arctan(\cos x)$ (3)

$y' = \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}$ (2)

$y = x^x$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي (1)

$\ln y = x \ln x$ (1)

بالاشتقاق

$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$ (1)

(1)

$y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$ (1)

الطلب الثاني: 15 درجة

يوجد طريقين

الأول

$y' = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{a}e^{x/a} - \frac{1}{a}e^{-x/a}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{x/a} - e^{-x/a}\right]$ (5)

$y'' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}e^{x/a} + \frac{1}{a}e^{-x/a}\right] = \frac{1}{2a}\left[e^{x/a} + e^{-x/a}\right]$ (5)

$a^2 y'' = \frac{a}{2}\left[e^{x/a} + e^{-x/a}\right] = y \Rightarrow y'' = \frac{y}{a^2}$ (5)

A to Z

7)

طريقة أخرى: نعلم أن

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

بالاشتقاق نجد

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$$

بالاشتقاق ثانية:

$$y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{y}{a} = \frac{y}{a^2}$$

السؤال الثاني: [25] درجة

الطلب الأول: [15] درجة

لكي تكون الدالة مستمرة على $\mathbb{R}$ يجب تحقق الشرط

$$\lim_{x \to 1^+} (ax - b) = \lim_{x \to 1^-} (-3x) \quad (3) \Rightarrow$$

$$a - b = -3 \quad (1)(2)$$

ولكي تكون الدالة مستمرة عند 3 يجب تحقق الشرط

$$\lim_{x \to 3^-} (ax - b) = \lim_{x \to 3^+} (x^2 - 6) \quad (3) \Rightarrow$$

$$3a - b = 3 \quad (2)(2)$$

من (1) و (2) نجد

$$(1)\ a = -3 + b \quad (3)$$

نعوض (2) في

$$-9 + 3b - b = 3$$

$$2b = 12 \Rightarrow \boxed{b = 6} \quad (2)$$

نعوض (3) نجد

$$a = -3 + 6 = 3$$

$$\{a = 3\} \quad (2)$$

A to Z

(3)

الطلب الثاني : (10) درجات

لندرس استمرارية الدالة عند النقطة $x=1$

$$\lim_{x \to 1^+} (3x-6) = \lim_{x \to 1^-} (-3x) = f(-3x)\Big|_{x=1}$$

(3)

$$-3 = -3 = -3$$ (2)

الدالة مستمرة عند النقطة 1 من اليمين واليسار

لندرس استمرارية الدالة عند النقطة $x=3$

$$\lim_{x \to 3^-} (3x-6) = \lim_{x \to 3^+} (x^2-6) = f(x^2-6)\Big|_{x=3}$$

(3)

$$3 = 3 = 3$$ (2)

الدالة مستمرة عند النقطة $x=3$

السؤال الثالث : الطلب الأول (10) درجات

(25) درجة

حسب اختبار كوشي

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{(2n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} (n+1)^{\frac{1}{n}}$$ (2) (2) (*)

نفرض أن:

$$I = \lim_{n \to \infty} (n+1)^{\frac{1}{n}}$$ (1)

وبما أنه لدينا تعيين من الشكل (∞^0) نأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\ln I = \frac{1}{n} \ln(n+1) = \frac{\ln(n+1)}{n}$$ (1)

ولدينا تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ حسب لوبيتال نجد

A to Z

4)

$$\ln I = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \ln I = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad (1)$$

$$\ln I = 0 \Rightarrow I = e^0 = 1 \quad (1)$$

نعوض بـ (*) نجد

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1 \quad (1)$$

ف السلسلة متقاربة (1)

النهاية: يمكن دراسة التقارب حسب رأيك،

الطلب الثاني (5) نقاط

نكتب سلسلة تايلور حيث الصفر يقطع بالشكل

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n$$

$f(x) = e^{\sin x}$ نوجد المشتقات للدالة المعرفة

$$f(0) = e^{\sin x}\Big|_{x=0} = e^0 = 1 \quad (1)$$

$$f'(0) = \cos x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0} = 1 \quad (1)$$

$$f''(0) = -\sin x e^{\sin x} + \cos^2 x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0} = 1 \quad (2)$$

$$f'''(0) = -\cos x e^{\sin x} - \sin x \cos x e^{\sin x} - 2\sin x \cos x e^{\sin x} + \cos^3 x\, e^{\sin x}\Big|_{x=0} = -1 - 0 - 0 + 1 = 0 \quad (2)$$

$$f^{(4)}(0) = -\cos^2 x e^{\sin x} + \sin x e^{\sin x} - \cos^2 x e^{\sin x} + \sin^2 x e^{\sin x} - \sin x \cos^2 x e^{\sin x} - 2\cos^2 x e^{\sin x} + 2\sin^2 x e^{\sin x} - 2\sin x \cos^2 x e^{\sin x} - \cdots \quad (3)$$

5)

$f^{(4)}(0) = -1 + 0 - 1 + 0 - 0 - 2 + 0 - 0 - 0 + 1 = -3$ (1)

نص نظرية ماكلورين فقير

$$e^{\sin x} = 1 + \frac{x}{1!}(1) + \frac{x^2}{2!}(1) + \frac{x^3}{3!}(0) + \frac{x^4}{4!}(-3) \quad (2)$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \quad (1)$$

انتهت الإجابة

A to Z