كلية العلوم

القسم : الكيمياء

السنة : الاولى

اسئلة دوراات محلولة

رياضيات عامة ٢

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة)

بمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

جامعة طرطوس	امتحان الرياضيات العامة (2)	اسم الطالب:
كلية العلوم	لطلاب السنة الأولى	الدرجة العظمى: 90 درجة
قسم الكيمياء	الدورة الفصلية الأولى 2025	المدة: ساعتان

****

السؤال الأول: أجب عن **ثلاثة فقط** من الأسئلة الآتية: (30 درجة)

1. احسب النهاية : $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin x}$.
2. بين أن $x = 1$ نقطة انقطاع للدالة:
$f(x) = \begin{cases} x+1 & ;x \neq 1 \\ 3 & ;x = 1 \end{cases}$ بين نوعها و هل يمكن إزالتها؟
3. مدد تعريف الدالة $f(x) = \frac{2\sin x}{5x}$ إلى النقطة $x = 0$ بحيث تصبح الدالة $f(x)$ مستمرة في هذه النقطة.
4. أوجد المشتق الأول للدالة: $f(x) = x.\arcsin(x) + arctg\,(x)$

السؤال الثاني: أوجد **أربعة فقط** من التكاملات الآتية : (40 درجة)

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$
2. $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}.dx$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$
4. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$
5. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}.dx$
6. $\int \frac{x}{sin^2(x)}.dx$

السؤال الثالث: احسب قيمة التكامل الآتي: $\int_1^2 x.\ln x\,.dx$ (10 درجات)

السؤال الرابع: أجب عن السؤال الآتي: (10 درجات)

1. احسب مساحة الشكل المحصور بين منحنيي الدالتين:
$f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = |x-2|$

انتهت الأسئلة

طرطوس في 20/2/2025

مدرّس المقرر

ق.أ. نوره العسلي

A to Z

جامعة طرطوس — سلم تصحيح الرياضيات العامة (2)

كلية العلوم — لطلاب السنة الأولى

قسم الكيمياء — الدورة الفصلية الأولى 2025

****

السؤال الأول: أجب عن ثلاثة فقط من الأسئلة الآتية: (30 درجة)

1. احسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin x}$ عدم تعيين من النمط $\frac{0}{0}$ ، باستخدام قاعدة أوبيتال نجد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x}=0$$

2. بين أن $x=1$ نقطة انقطاع للدالة:

$f(x)=\begin{cases}x+1 & ;x\neq 1\\ 3 & ;x=1\end{cases}$ بين نوعها و هل يمكن إزالتها؟

الحل:

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$ و لدينا $f(1)=3$ بالتالي $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$

فالدالة غير مستمرة عند $x=1$ و هي نقطة انقطاع من النوع الثاني قابلة للإزالة بإسناد القيمة 2 لصورة 1 بالشكل الآتي: $f(x)=\begin{cases}x+1 & ;x\neq 1\\ 2 & ;x=1\end{cases}$

3. مدد تعريف الدالة $f(x)=\frac{2\sin x}{5x}$ إلى النقطة $x=0$ بحيث تصبح الدالة $f(x)$ مستمرة في هذه النقطة.

الحل:

الدالة $f(x)=\frac{2\sin x}{5x}$ المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ غير مستمرة عند الصفر لأنها غير معرفة عندها، و بالتالي $x=0$ نقطة انقطاع من النوع الثاني قابلة للإزالة :

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x}{5x}\right)=\frac{2}{5}$$

بوضع $\tilde{f}(x)=\begin{cases}\frac{2\sin x}{5x} & ;x\neq 0\\ \frac{2}{5} & ;x=0\end{cases}$ نجد أنها دالة مستمرة عند الصفر لأن :

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{2x}\right)=\frac{2}{5}=f(0)$$

A to Z

4. أوجد المشتق الأول للدالة: $f(x) = x.\arcsin(x) + arctg\,(x)$

الحل:

$$f'(x) = \arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2}$$

السؤال الثاني: أوجد أربعة فقط من التكاملات الآتية : (40 درجة)

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$ 2. $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}.dx$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

4. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ 5. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}.dx$ 6. $\int \frac{x}{sin^2(x)}.dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$$

نفرض أن $t = 2x$ فيكون $dt = 2dx$ أي $dx = \frac{1}{2}dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(2x)^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \frac{1}{2}arcsin\left(\frac{t}{3}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}arcsin\left(\frac{2x}{3}\right) + c$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}.dx$$

بالإتمام لمربع كامل نجد:

$$x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + 5 = (x-1)^2 + 4$$

نفرض أن $t = x - 1$ فيكون $x = t + 1$ و بالتالي: $dx = dt$ نعوض في التكامل:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}.dx = \int \frac{2(t+1)+1}{t^2+4}.dt = \int \frac{2t}{t^2+4}.dt + 3\int \frac{dt}{t^2+4}$$

$$= ln|t^2+4| + \frac{3}{2}.arctg\left(\frac{t}{2}\right) + c$$

A to Z

$$= ln|x^2 - 2x + 5| + \frac{3}{2}.arctg\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

نكتب التكامل بالشكل: $I = \int \frac{dx}{\frac{1}{x^2}+x^{\frac{1}{3}}}$ بالتالي نفرض أن $x = t^6$ فيكون $dx = 6t^5dt$ ،

نبدل في التكامل نجد: $I = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6(t^2 - t + 1)dt - 6\int \frac{dt}{t+1}$

$$I = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\,ln|t + 1| + c$$

$$I = 2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3 - 3\left(\sqrt[6]{x}\right)^2 + 6\left(\sqrt[6]{x}\right) - 6\,ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

نفرض أن $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ و بالتالي $x = 2arctg\,t$ و منه $dx = 2\frac{dt}{1+t^2}$ و باستخدام

الدساتير $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ نبدل في التكامل المعطى

$$\int \frac{2\frac{dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2t+2} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t + 1| + c$$

$$= \ln\left|1 + tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

$$\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}.dx$$

نفرض أن: $t = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)'$

$t = \frac{1}{2}(2x - 4) = x - 2$ فيكون $dx = dt$ و $x = t + 2$

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}.dx = \int \frac{2(t+2)+1}{\sqrt{t^2-1}}.dt = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2-1}}.dt + \int \frac{5}{\sqrt{t^2-1}}.dt$$

$$= 2\sqrt{t^2 - 1} + 5argch\,t + c$$

$$= 2\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 5argch\,(x - 2) + c$$

A to Z

$$\int \frac{x}{sin^2(x)}.dx$$

يحسب بطريقة التجزئة كما يلي:

نفرض $u = x$ فيكون $du = dx$ و $dv = \frac{dx}{sin^2(x)}$ فيكون $v = -cotgx$

$$I = -x.cotgx + \int cotgx.dx = -x.cotgx - \int \frac{cosx}{sinx}.dx$$

$$I = -x.cotgx - ln|sinx| + c$$

السؤال الثالث: احسب قيمة التكامل الآتي: $\int_1^2 x.\ln x.dx$ (10 درجات)

نفرض أن $u(x) = ln(x)$ فيكون $du = \frac{dx}{x}$ و $dv = x.dx$ بالتالي: $v = \frac{1}{2}x^2$

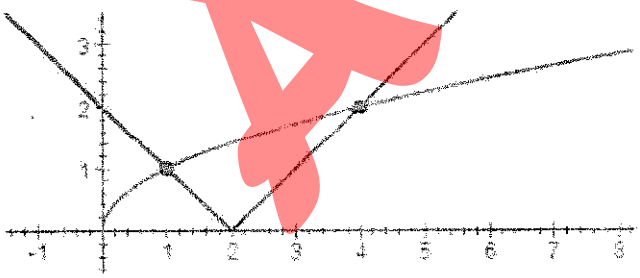
$$I = \left[\frac{1}{2}x^2.ln(x)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x.dx$$

$$= 2\ln 2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

السؤال الرابع: أجب عن السؤال الآتي: (10 درجات)

I. احسب مساحة الشكل المحصور بين منحنيي الدالتين:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{و} \quad g(x) = |x-2|$$



ندرس تقاطع المنحنيين:

$$\sqrt{x} = |x-2|$$
$$x = x^2 - 4x + 4$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
إما $x = 1$ أو $x = 4$

و منه:

$$S = \int_1^4 (f(x) - g(x))dx = \int_1^2 (\sqrt{x} - 2 + x)dx - \int_2^4 (\sqrt{x} + 2 - x)\,dx$$

$$s = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{7}{6} + \frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{13}{6}$$

مدرّس المقرر

ق.أ. نوره العسلي

A to Z

سلم تصحيح

جامعة طرطوس	امتحان الرياضيات العامة (2)	اسم الطالب:
كلية العلوم	لطلاب السنة الأولى	الدرجة العظمى: 90 درجة
قسم الكيمياء	الدورة الفصلية الثانية	المدة: ساعتان

****

السؤال الأول: أجب عن **سؤالين فقط** مما يلي: (20 درجة)

1. احسب النهاية : $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$.

2. مدد تعريف الدالة $f(x)=\frac{\sin x}{2x}$ إلى النقطة $x=0$ بحيث تصبح الدالة $f(x)$ مستمرة في هذه النقطة.

3. احسب تفاضل االدالة $x^2+y^3-2xy=0$.

السؤال الثاني: حل **أربعة تمارين فقط** مما يلي: (40 درجة)

1. $\int \sqrt{3x+1}.dx$ 2. $\int x\cos x\,.dx$ 3. $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}.dx$

4. $\int (\sin x)^5(\cos x)^2\,.dx$ 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x}}$

السؤال الثالث: احسب قيمة التكامل الآتي: $\int_1^e \frac{1}{x}(lnx)^2.dx$ (10 درجات)

السؤال الرابع: أجب عن السؤالين الآتيين: (20 درجة)

1. احسب مساحة الشكل المحصور بين منحني الدالة $y=\cos x$ و المحور ox حيث $0\le x\le \pi$.

2. احسب طول قوس المنحني المعطى بالمعادلة الآتية: $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ و ذلك في المجال $[0,8]$.

انتهت الأسئلة

طرطوس في 21/7/ 2024

مدرّس المقرر: نوره العسلي

مكتبة A to Z

قسم الكيمياء — سلم تصحيح الرياضيات العامة (2)

الدورة الفصلية الثانية 2024

السؤال الأول :

1.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)-\cos(2x)-1}{\sin x-\cos x} \quad (5^{o})$$

عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لإزالته.

طريقة أولى : باستخدام الدساتير المثلثية

$$\frac{\sin(2x)-\cos(2x)-1}{\sin x-\cos x} = \frac{2\sin x\cdot\cos x-(2\cos^2 x-1)-1}{\sin x-\cos x}$$

$$= \frac{2\cos x(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x} = 2\cos x \quad (5^{o})$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)-\cos(2x)-1}{\sin x-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (2\cos x) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

طريقة ثانية : باستخدام قاعدة أوبيتال

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)-\cos(2x)-1}{\sin x-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos(2x)+2\sin(2x)}{\cos x+\sin x} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

2. $f(x)=\frac{\sin x}{2x}$ (5^{o})

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{2x}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

عند f بالشكل

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x} : & x\neq 0 \\ \frac{1}{2} : & x=0 \end{cases} \quad (5^{o})$$

مكتبة A to Z

② $\tilde{f}$ دالة مرفقة عند $x=0$ ، $\tilde{f}(0)=\frac{1}{2}$ ، $\lim_{x\to 0} \tilde{f}(x)=\frac{1}{2}$

$\tilde{f}(x)$ مستمرة عند $x=0$ أي $\lim_{x\to 0} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0)$

3. $x^2+y^3-2xy=0$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x نجد

$$2x+3y^2\frac{dy}{dx}-2y-2x\frac{dy}{dx}=0 \qquad (5^\circ)$$

$$(3y^2-2x)\frac{dy}{dx}=2y-2x=2(y-x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(y-x)}{3y^2-2x} \qquad (5^\circ)$$

السؤال الثاني:

$$\int \sqrt{3x+1}\,dx=\int (3x+1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{3}\int 3(3x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}\,\frac{(3x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}+C \qquad (10^\circ)$$

$$=\frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3}+C$$

$$\int x\cdot\cos x\,dx \qquad (10^\circ)$$

نطبق التجزئة

$$u=x \Rightarrow du=dx$$

$$dv=\cos x\,dx \Rightarrow v=\sin x$$

$$\int x\cdot\cos x\,dx = x\cdot\sin x-\int \sin x\,dx = x\cdot\sin x+\cos x+C$$

مكتبة A to Z

$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}\,dx$$

إكمال المربع في المقام:

$$x^2-2x+5 = x^2-2x+1-1+5$$
$$= (x-1)^2+4$$

نفرض $t = x-1 \Rightarrow dt = dx$

نعوض في التكامل $x = t+1$

$$\int \frac{2(t+1)+1}{t^2+4}\,dt = \int \frac{2t+3}{t^2+4}\,dt$$
$$= \int \frac{2t}{t^2+4}\,dt + 3\int \frac{dt}{t^2+4}$$
$$= \ln(t^2+4) + \frac{3}{2}\arctg\left(\frac{t}{2}\right)+c$$
$$= \ln(x^2-2x+5) + \frac{3}{2}\arctg\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$$

(10)

A to Z مكتبة

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x}}$$

$$-x^2+6x = -(x^2-6x+9-9)$$
$$= -(x-3)^2+9$$
$$= 9-(x-3)^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-3)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3)^2-(x-3)^2}} \quad (10)$$

$$= \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right)+C$$

(4)

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^2 x \cdot dx$$

$(-\sin x)^5 \cos^2 x = -\sin^5 x \cos^2 x$

الناتج يغير إشارته عند وضع $-\sin x$ مكان

$dt = -\sin x \cdot dx$ $\Leftarrow$ $t = \cos x$ لذا نفرض $\sin x$ كل

ويكون $\sin^2 x = 1 - t^2$

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x \cdot \cos^2 x \cdot dx$$

$$= \int (1-t^2)^2 \cdot t^2 (-dt)$$

$$= \int [-t^2 + 2t^4 - t^6]\, dt$$

$$= -\frac{t^3}{3} + \frac{2}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 + c$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + c$$

(10)

A to Z مكتبة

السؤال الثالث :

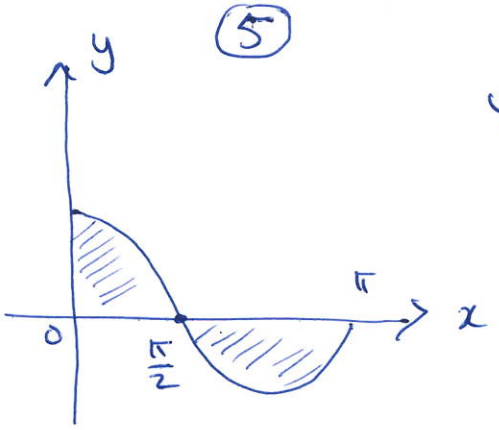
$$\int_1^e \frac{1}{x} \ln^2(x) \cdot dx = \int_1^e (\ln x)' \cdot \ln^2(x) \cdot dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}\ln^3(x)\right]_1^e = \frac{1}{3}[\ln(e) - \ln(1)]$$

(10)

$$= \frac{1}{3}$$

(5)



السؤال الرابع: [1]

$y = \cos x$

$0 \leq x \leq \pi$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x).dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -f(x).dx$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x.dx \quad (10^{\circ})$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin \frac{\pi}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) - (\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2})$$

$$= (1-0) - (0-1) = 1+1 = 2$$

مكتبة A to Z

$y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ $\quad x \in [0,8]$ [2]

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$L = \int_0^8 \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^8 \sqrt{1+x}.dx \quad (10^{\circ})$$

$$= \int_0^8 (1+x)^{\frac{1}{2}}.dx = \left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^8$$

$$= \frac{2}{3}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \frac{2}{3}\left[(9)^{\frac{3}{2}} - (1)\right]$$

$$= \frac{52}{3}$$

* انتهى السلم *

جامعة طرطوس | امتحان رياضيات عامة (2) | اسم الطالب:

كلية العلوم | لطلاب السنة الأولى | الدرجة العظمى: 90 درجة

قسم الكيمياء | الفصل الأول | المدة: ساعتان

****

السؤال الأول: أجب عن الأسئلة الآتية: (20 درجة)

1. احسب النهاية: $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

2. إذا علمت ان الدالة: $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{4+ax}-\sqrt{4-ax}}{x} & ;\ -1\le x<0\\ \frac{3x+2}{x-8} & ;\ 0\le x\le 1\end{cases}$ هي دالة مستمرة على المجال $[-1,1]$ فأوجد قيمة a.

السؤال الثاني: أوجد التكاملات الآتية: (40 درجة)

1. $\int\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}.dx$

2. $\int x.arctgx.dx$

3. $\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}.dx$

4. $\int\frac{(\cos x)^3}{(\sin x)^2}.dx$

السؤال الثالث: احسب قيمة التكامل الآتي: (10 درجات)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}.dx$$

السؤال الرابع: أجب عن السؤالين الآتيين: (20 درجة)

1. احسب طول منحني السيكلوئيد المعين بالمعادلتين:

$$x=a(t-\sin t)\ ,y=a(1-\cos t)\ ;0\le t\le 2\pi$$

2. احسب الحجم المتولد من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين:

$f(x)=x^2\ ,g(x)=2x$ حول المحور ox.

انتهت الأسئلة

طرطوس في 2024 /2/ 1

مدرس المقرر: ق.أ. نوره العسلي

مكتبة A to Z

قسم الكيمياء
السنة الأولى

سلم تصحيح مقرر
رياضيات عامة (2)

الدورة الفصلية الأولى
لعام 2024/2023

السؤال الأول : 20 درجة

① احسب النهاية (15 درجة)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

الحل: حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

نطبق قاعدة أوبتال: $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(-\frac{1}{3}\right)(1)=-\frac{1}{3}$$

② إذا علمت أن الدالة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4+ax}-\sqrt{4+ax}}{x} & ;-1\le x<0\\[2mm] \dfrac{3x+2}{x-8} & ;0\le x\le 1\end{cases}$$

هي دالة مستمرة على المجال $[-1,1]$ ، أوجد قيمة a (5 درجات)

الحل: بما أن الدالة مستمرة على $[-1,1]$ فهي مستمرة عند $x=0$ $\Leftarrow \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=-\frac{1}{4}\quad ,\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)$$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+ax}-\sqrt{4-ax})(\sqrt{4+ax}+\sqrt{4-ax})}{x(\sqrt{4+ax}+\sqrt{4-ax})}$$ نضرب ونقسم على المرافق

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(4+ax)-(4-ax)}{x(\sqrt{4+ax}+\sqrt{4-ax})}=\lim_{x\to 0}\frac{2ax}{x(\sqrt{4+ax}+\sqrt{4-ax})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2a}{\sqrt{4+ax}+\sqrt{4-ax}}=\frac{2a}{\sqrt{4+0}+\sqrt{4+0}}=\frac{2a}{4}=\frac{a}{2}$$

مكتبة A to Z

2

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

السؤال الثاني: احسب التكاملات الآتية [40 درجة]

① $\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} \cdot dx$ (15 درجة)

$$x^3+x^2-6x = x(x^2+x-6) = x(x-2)(x+3)$$

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} = \frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

نضرب الطرفين بـ x ونجعل $x=0$ نجد $A = \frac{5}{6}$

نضرب الطرفين بـ $(x-2)$ ونجعل $x=2$ نجد $B = \frac{9}{10}$

نضرب الطرفين بـ $(x-3)$ ونجعل $x=3$ نجد $C = \frac{-26}{15}$

$$\frac{7x-5}{x(x-2)(x-3)} = \frac{5}{6}\frac{1}{x} + \frac{9}{10}\frac{1}{x-2} - \frac{26}{15}\frac{1}{x+3}$$

$$\int \frac{7x-5}{x(x-2)(x-3)} \cdot dx = \frac{5}{6}\int \frac{dx}{x} + \frac{9}{10}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{26}{15}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{5}{6}\ln|x| + \frac{9}{10}\ln|x-2| - \frac{26}{15}\ln|x+3| + C$$

* يمكن إيجاد قيم الثوابت A، B، C بتوحيد المقامات والمطابقة ثم حل جملة المعادلات الناتجة.

② $\int x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot dx$ (10 درجات)

نكامل بالتجزئة نفرض:

$$u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$dv = x \cdot dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left[\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx\right]$$

A to Z مكتبة

3

$$\int x.\operatorname{arctg}x\,.dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\left[x - \operatorname{arctg}x\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}x + C$$

(3) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx$ (10 درجات)

$$t = \frac{1}{2}(x^2-4x+3)' = \frac{1}{2}(2x-4) = x-2$$

$$x^2-4x+3 = x^2-4x+4-4+3 = (x-2)^2-1$$

$$= t^2-1$$

$dt = dx$ ، $x = t+2$ ،

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx = \int \frac{2(t+2)+1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \int \frac{2t+5}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

A to Z مكتبة

$$= \int \frac{2t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt + 5\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$= 2\sqrt{t^2-1} + 5\operatorname{arg\,ch}\,t + C$$

$$= 2\sqrt{x^2-4x+3} + 5\operatorname{arg\,ch}(x-2) + C$$

(4) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx$ (5 درجات)

نلاحظ أن $R(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$ ، $R(x)$ تابع

$\frac{(-\cos x)^3}{\sin^2 x} = -\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} = -R(x)$ ؛ $(-\cos x)$ نغير إشارته عند وضع

$(\cos x)$ كل مكان

لذا نجري التحويل $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x\,.\cos x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{(1-t^2)}{t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} - \int dt = -\frac{1}{t} - t + C$$

$$= -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C$$

السؤال الثالث: 10 درجات — احسب قيمة التكامل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x + \sin x)'}{\cos x + \sin x}\,dx$$

$$= \left[\ln\left[\cos x + \sin x\right]\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \ln(0+1) - \ln(1+0) = 0$$

السؤال الرابع: 20 درجة

① احسب طول مخنى السيكلوئيد المعطى بالمعادلتين:

$$x = a(t - \sin t) \qquad y = a(1 - \cos t) \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$x' = a(1 - \cos t) \qquad y' = a\sin t$$

نشتق بالنسبة لـ t:

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t} = a\sqrt{2 - 2\cos t} = 2a\sin\frac{t}{2}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

(10 درجات)

$$= 2a\left[-2(-1) + 2(1)\right] = 8a$$

② احسب الحجم المتولد عن دوران المنطقة المحصورة بين منحني الدالتين: (10 درجات)

$f(x) = x^2$ ، $g(x) = 2x$ حول المحور ox.

$f(x) = g(x)$

$$x^2 = 2x \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x = 0 \\ \text{أو } x = 2 \end{cases}$$

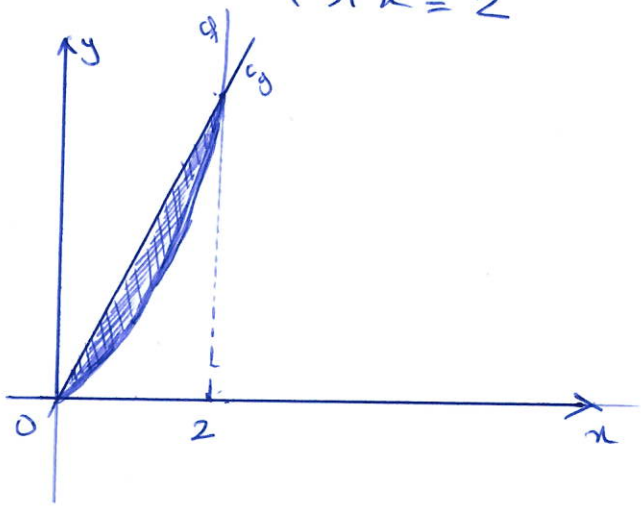
$$V = \pi\int_0^2 \left(g^2(x) - f^2(x)\right).dx$$

$$= \pi\int_0^2 \left[4x^2 - x^4\right]dx$$

$$= \pi\left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$$= \pi\left[\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) - (0)\right]$$

$$= \frac{64\pi}{15}$$



انتظر السلم

م. أ. نور العسلي
0991410556

A to Z مكتبة

مكتبة A to Z