كلية العلوم

القسم : الكيمياء

السنة : الأولى

أسئلة دوراة محلولة

رياضيات عامة ٤

A 2 Z LIBRARY

Facebook Group : A to Z مكتبة

كلية العلوم (فيزياء ، كيمياء ، رياضيات ،علم الحياة)

بمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app) على الرقم TEL: 0931497960

جامعة طرطوس	امتحان مقرر الرياضيات عامة (4)	الاسم:
كلية العلوم	السنة الأولى كيمياء	الدرجة: 90
قسم الكيمياء	الفصل الدراسي الأول 2025/2024	المدة: ساعتان

السؤال الأول: (25) درجة

ادرس تقارب المتسلسلة الآتية باستخدام اختبار نهاية النسبة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

السؤال الثاني: (20) درجة

ادرس تقارب المتسلسلة العددية الآتية مستخدماً اختبار دالامبير:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$$

السؤال الثالث: (25) درجة

ادرس التقارب النقطي و التقارب المنتظم لمتتالية الدوال الآتية مستخدماً اختبار فايرشتراس:

$$f_n(x) = \frac{1}{nx} \quad ; x \in [a, \infty[$$

السؤال الرابع: (20) درجة

ادرس تقارب متسلسلة القوى الآتية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}\, x^n$$

انتهت الأسئلة مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

د. سهى علي سلامه

A to Z

سلم تحلي

سلم تصحيح فقرة الرياضيات 4
السنة الأولى كيمياء

السؤال الأول | 25 درجة

ادرس تقارب المتسلسلة الآتية باستخدام اختبار رهابة النسبة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

الحل:

نأخذ المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ (5) ونطبق اختبار رهابة النسبة:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1$$ (1ن)

⇐ المتسلسلتين من طبيعة واحدة.

ومن تقارب $\sum \frac{1}{n^2}$ لأنها متسلسلة ريمان (1ن)

$S = 2 > 1$

⇐ المتسلسلة المعطاة متقاربة.

السؤال الثاني | 20 درجة

ادرس تقارب المتسلسلة العددية الآتية مستعملاً اختبار دالامبير:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$$

الحل: تطبيق اختبار دالامبير.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!}$$ (5)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty > 1$$ (1ن) (5)

فالمتسلسلة متباعدة.

السؤال الثالث | 25 درجة

ادرس التقارب النقطي والتقارب المنتظم للمتتالية الدوال الآتية مستعملاً اختبار مايرشتراس.

$$f_n(x) = \frac{1}{nx} \quad ; \quad x \in [a, \infty[$$

الحل:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0$$ (1ن)

$$\alpha_n = \sup_{x\in[a,+\infty[} \left|\frac{1}{nx}\right| = \frac{1}{an} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ (1ن)

والتقارب منتظم. (5)

السؤال الرابع | 20 درجة

ادرس تقارب متسلسلة القوى الآتية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n$$

الحل:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$ (1ن)

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0$$ (5)

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{0} \Rightarrow R = +\infty$$

والمتسلسلة متقاربة في كل $\mathbb{R}$ (5)

دمشق كلية سراقب

A to Z

سلم تصحيح امتحان الرياضيات عامة 4
سنة أولى كيمياء الدورة التكميلية
2023 - 2024

السؤال الأول | 25 درجة

بإثبات المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ وتطبيق اختبار

نهاية النسبة:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$ (10)

فالمتسلسلتين من طبيعة واحدة

$\Leftarrow$ من تقارب $\sum \frac{1}{n^2}$ لأنها متسلسلة ريمان (10)

$s = 2 > 1$

$\Leftarrow$ تقارب المتسلسلة المعطاة. (5)

السؤال الثاني | 20 درجة

بتطبيق اختبار دالامبير:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!}$$ (10)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty > 1$$ (10)

والمتسلسلة متباعدة.

السؤال الثالث | 25 درجة

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^x} = 0$$ (5)

$$\alpha_n = \sup_{x\in[a,+\infty[} \left| \frac{1}{n^x} \right| = \frac{1}{a^n} \to 0$$ (5) (5) (5) (5)

والتقارب منتظم

السؤال الرابع | 20 درجة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} x^n$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} \right|$$ (10)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$$

$\Leftarrow$ $\alpha = 0$ والمتسلسلة متباعدة (10)

في كل جوار $x_0 = 0$ عدا المركز فهي متقاربة عنده.

→

مدرسة المقرر
د. سلطان سلامة

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الكيمياء

امتحان مقرر الرياضيات (4)
لطلاب السنة الأولى
من مقررات الفصل الثاني

ف1 2023-2024
اسم الطالب:
الدرجة العظمى (90)

السؤال الأول: (45 درجة)

1) اكتب العدد العقدي $z = 1-3i+\frac{2}{1-i}$
ثم اكتب العدد الناتج بالشكل المثلثي والأسي.

2) أوجد المحل الهندسي لمجموعة النقاط z من المستوي العقدي والتي تحقق المتراجحة:
$$2 \leq |z-1| \leq 3$$

3) تحقق هل الدالة $w(z)=\sqrt{z}$ تحليلية.

4) تحقق هل الدالة $u(x,y)=3xy^2-x^3$ توافقية.
إذا تبين لك أنها توافقية أوجد الدالة المرافقة لها v حتى تكون الدالة $f(z)=u+iv$ تحليلية

السؤال الثاني: (45 درجة)

1) أنشر الدالة $f(z)=\frac{1}{2-z}$ بجوار النقطة $z=1$ مكتفياً بثلاثة حدود واكتب العام، ثم حدد منطقة تقارب السلسلة الناتجة.

2) احسب التكامل $I=\int_{\Gamma}(z+1)dz$ حيث Γ هو النصف العلوي من قوس الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=2$ ما يوافق الموجب $(|z|=2)$.

3) احسب التكامل $I=\oint_{\Gamma}\frac{z\,dz}{(z+1)^2}$ عندما:
a) Γ هو $|z|=\frac{1}{2}$ b) Γ هو $|z|=2$

4) استخدم نظرية الرواسب في حساب التكامل
$$I=\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx$$

مكتبة A to Z

ممنوع استعمال الآلة الحاسبة

الاجابة بالقلم الأزرق

مدرس المقرر.
أ.د. نزار حسن

كلية العلوم — سلم تصحيح مقر الرياضيات (4) — 2024 - 2023
قسم الكيمياء — لطلاب السنة الأولى — مسقرات الفصل الثاني

السؤال الأول: 1)

$$z=(1-3i)+\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=(1-3i)+\frac{2(1+i)}{2}$$

$$=1-3i+\frac{2+2i}{2}=1-3i+1+i=2(1-i)$$

وأن طويلة العدد $|z|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ ولتحديد الدليل الرئيسي

$$\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \operatorname{Arg} z=-\frac{\pi}{4}$$

وبالتالي الشكل المثلثي للعدد العقدي هو

$$z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

والشكل الأسي: $z=2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2) لتحديد الحل الهندسي نجد $|z-1|\le 3$ تمثل قرص دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها 3 بالإضافة لمحيط الدائرة أما بالنسبة $|z-1|\ge 2$ هي نقاط محيط وخارج الدائرة التي مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها $r=2$

وبالتالي الحل الهندسي مجموعة نقاط الحلقة المحددة بالدائرتين السابقتين.

3) إذا كانت $z=re^{i\theta}$ فإن:

$$w(z)=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}=\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{r}i\sin\frac{\theta}{2}\Rightarrow u=\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2},\ v=\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$$

تكون الدالة تحليلية إذا تحقق شرط كوشي ريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\ \&,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2},\ \frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{1}{2}\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2},\ \frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2},\ \frac{\partial v}{\partial\theta}=\frac{\sqrt{r}}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

بالتعويض بالعلاقات شرط كوشي

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\theta=\frac{1}{r}\frac{\sqrt{r}}{2}\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\quad(1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{\sqrt{r}}{2}\cdot\frac{1}{r}\sin\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}=-\frac{\partial v}{\partial r}\quad(2)$$

من (1) و (2) نجد أن الدالة تحليلية.

4) إذا الدالة u هي دالة توافقية إذا تحقق الشرط

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3y^2-3x^2\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=6xy\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x$$

إذاً هي دالة توافقية لتحديد الدالة v المرافقة من شرطي كوشي ريمان نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial y}=3y^2-3x^2\Rightarrow v=\int(3y^2-3x^2)dx+A(x)$$

$$v=y^3-3x^2y+A(x)\quad(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=6xy\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=-6xy\Rightarrow v=-\int 6xy\,dx+A(y)$$

$$=-3x^2y+A(y)\quad(2)$$

من (1) و (2) نجد الدالة التحليلية

$$f(z)=u+iv=(3xy^2-x^3)+i(y^3-3x^2y)$$

مكتبة A to Z

السؤال الثاني: 1) كيفية تحديد النقاط الطوبولوجية، الدالة التحليلية، السلسلة الهندسية

$$f(z)=\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-(z-1)}=1+(z-1)+(z-1)^2+\dots+(z-1)^n+\dots$$

حيث تكتب

وهي سلسلة هندسية أساسها $|z-1|$ تتقارب عندما $|z-1|<1$ وعنده

$-1<z-1<1 \Leftarrow 0<z<2$ وهي تمثل داخل دائرة مركزها $(1,0)$

ونصف قطرها $r=1$.

2) يمكن التعبير عن معادلة الدائرة حيث $z=2e^{i\theta}$ ونقطة الطوبولوجيا فإن $0\le\theta\le\pi$

$$\Rightarrow dz=2ie^{i\theta}d\theta,\quad z+1=2e^{i\theta}+1$$

$$I=\int_0^{\pi}(2e^{i\theta}+1)(2ie^{i\theta})d\theta=\int_0^{\pi}(4ie^{i2\theta}+2ie^{i\theta})d\theta$$

$$=4i\cdot\frac{1}{2i}e^{i2\theta}\Big|_0^{\pi}+2i\cdot\frac{1}{i}e^{i\theta}\Big|_0^{\pi}=2e^{i2\theta}\Big|_0^{\pi}+2e^{i\theta}\Big|_0^{\pi}$$

$$=2(e^{i2\pi}-1)+2(e^{i\pi}-1)=2(\cos 2\pi+i\sin 2\pi-1)+2(\cos\pi+i\sin\pi-1)$$

$$=2(1-1)+2(-1-1)=0-4=-4$$

3) أ) $f(z)=z$ هي دالة تحليلية وأن النقطة $z=-1$ تقع

$|z|\le\frac{1}{2}$ التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=\frac{1}{2}$ فإن نظرية التكامل وصيغة كوشي

التكاملية صالحة لهذه الحالة

ب) النقطة $z=-1$ هي داخل الدائرة $|z|\le 2$ بالتالي نظرية التكامل وصيغة كوشي

$$f(-1)=\frac{1!}{2\pi i}\oint_{|z|\le 2}\frac{z}{(z+1)^2}dz,\quad f(z)=z\Rightarrow f'(z)=1$$

$$1=\frac{1!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{z}{(z+1)^2}dz\Rightarrow\oint_{\Gamma}\frac{z}{(z+1)^2}dz=2\pi i$$

4) أن التكامل I المطلوب هو من الشكل $\int_{-\infty}^{\infty}\cos mx\,f(x)dx$ لذلك يمكن استخدام

$f(x)=\frac{1}{x^2+9}$ ، الذي يحقق الشرط $f(z)=\frac{1}{z^2+9}$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^2+9}=0$$

، الدالة $e^{imz}f(z)$ تكون نظرية التكامل المطلوب

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[2\pi i\,\mathrm{Res}(3i)\right]$$

أ) $z=3i$ هي قطب بسيط يقع في النصف العلوي وليس دالة نقاط التفرع

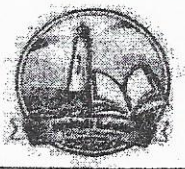
المطلوب، كيف وأن

$$\mathrm{Res}(3i)=\lim_{z\to 3i}\frac{e^{iz}(z-3i)}{(z-3i)(z+3i)}=\lim_{z\to 3i}\frac{e^{iz}}{z+3i}=\frac{e^{i(3i)}}{3i+3i}=\frac{e^{-3}}{6i}$$

$$I=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[2\pi i\cdot e^{-3}\frac{1}{6i}\right]=\frac{\pi}{6e^3}$$

د. [illegible]

A to Z مكتبة

جامعة طرطوس		التكميلي 2022-2023
كلية العلوم		الدرجة العظمى (90)
قسم الكيمياء		اسم الطالب:
مقرر الرياضيات (4) الثاني	السنة الأولى	من مقررات الفصل

السؤال الأول: (50 درجة)

1- أوجد حلاً (واحداً فقط) للمعادلة $z^3+2i=0$.

2- أوجد المحل الهندسي لمجموعة النقاط z من المستوي العقدي والتي تحقق المتراجحة $|z-(1+2i)|<4$

3- انشر الدالة $f(z)=\frac{1}{5-z}$ بجوار النقطة $z=1$ مكتفياً بأربعة حدود والحد العام, ثم حدد منطقة تقارب السلسلة الناتجة.

4- تحقق هل الدالة $U(x,y)=3x^2y-y^3$ توافقية؟. إن تبين لك أنها توافقية أوجد الدالة المرافقة.

5- تحقق هل الدالة $f(z)=z^2.\bar{z}$ تحليلية.

السؤال الثاني (40 درجة)

1- احسب هذا التكامل $\int_{\Gamma}(2z-1)dz$ إذا كان Γ هو منحني القوس العلوي من الدائرة $|z|=1$ والموجهة بالاتجاه الموجب.

2- احسب التكامل $I=\oint_{\Gamma}\frac{z^2\,dz}{(z-1)^2}$ حيث Γ هو منحني مغلق.

3- احسب التكامل $I=\int_0^{\infty}\frac{1}{(x-3)(x^2+1)}dx$.

يمنع استعمال الآلة الحاسبة

الإجابة بالقلم الأزرق حصراً

أ.د. نزار حسن

A to Z

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الكيمياء

سلم تصحيح رياضيات (3)
الطلاب المنتظمون

تكميلي 2022 - 2023

السؤال الأول: 1) حل المعادلة $z^3+2i=0 \Leftarrow z=\sqrt[3]{-2i}$ (2) فيكون لكل الطلاب الجذور الثلاثة

نوجد أولاً العدد المركب $-2i$ حيث $\cos\theta=\frac{0}{2}=0$ و $\sin\theta=\frac{-2}{2}=-1$ وبالتالي $\arg z=\frac{3\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$ (2) مأخوذة بالشكل المثلثي

$-2i=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ (2) الدليل المركب

$\eta_k=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$ (2) (2) وبكون الحلول موضحة كالتالي: الجذور هي

$k=0,1,2$

$\eta_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt[3]{2}\,i$ (2) (2)

وهي الحلول والحلول الباقية هي من أجل $k=1,2$

2- الشكل الهندسي لمجموعة النقاط z التي تحقق $|z-(1+2i)|<4$ هي (2) نعلم أن $|z-(1+2i)|=4$ (2) هي معادلة دائرة مركزها $(1+2i)$ ونصف قطرها 2 (2) وبالتالي مجموعة نقاط z المطلوبة هي مجموعة نقاط داخل هذه الدائرة (2) هي مجموعة النقاط

3- أن نشر المطلوب هو نشر تايلور وصيغة العلاقة

$$f(z)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(z-1)+\frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n+\dots$$

أو مكتوبة بشكل مختصر كالتالي حيث تكتب الدالة $f(z)$ بدلالة $(z-1)$ (2)

$$\frac{1}{5-z}=\frac{1}{4-(z-1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{4}}=\frac{1}{4}\left[1+\frac{z-1}{4}+\left(\frac{z-1}{4}\right)^2+\dots+\left(\frac{z-1}{4}\right)^n+\dots\right]$$ (2)

(3) وهذا يتقارب من أجل $\left|\frac{z-1}{4}\right|<1 \Leftarrow |z-1|<4$ (1) أي عندما z تقع داخل الدائرة التي

مركزها $z=(1,0)$ ونصف قطرها $r=4$ (2)

4- تكون الدالة $u(x,y)=3x^2y-y^3$ توافقية إذا تحقق الشرط $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ (2)

$\frac{\partial u}{\partial x}=6xy \Rightarrow \frac{\partial^2u}{\partial x^2}=6y$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-6y$ (2)

وهذا يدل على أن الدالة توافقية لكن لنبرهن على ذلك يجب أن نوجد الدالة المرافقة لها ولتحديد الدالة المرافقة نطبق شرط كوشي

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial x}=6xy=\frac{\partial v}{\partial y} \xrightarrow{\text{بالتكامل}} v=3xy^2+A(x)$ (1)

$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2=-\frac{\partial v}{\partial x} \xrightarrow{\text{بالتكامل}} v=x^3-3y^2x+A(y)$ (2)

من (1) و (2) نجد

$v=-x^3+3xy^2+A$ ، $f(z)=f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$

5- تكون الدالة تحليلية إذا تحقق شرط كوشي ريمان، وإذا أوجدنا أن $z=x+iy$ فإن

$f(z)=z^2\bar{z}=[(x^2+y^2)+i2xy](x-iy)=x(x^2+y^2)+2xy^2+i[y(x^2+y^2)+2x^2y]$ (2) (2)

$=u(x,y)+iv(x,y)$ ، $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-y^2+2y^2=3x^2+y^2$ (2)

$\frac{\partial v}{\partial xy}=x^2-3y^2+2x^2=3x^2-2y^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$ (2) (2)

ومنه غير تحليلية

السؤال الثاني: 1- الحساب بإستخدام $\int_{|z|=1} (2z-1)\,dz$ عكسية ثم تعويض ان $z = re^{i\theta}$

حيث $|z|=1$ تمثل محيط دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=1$ وبما كانت تمثل النصف العلوي لهذه الدائرة فإن θ تغير من $0 \le \theta \le \pi$ وان

$z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta$

$$I = \int_0^{\pi} (2e^{i\theta} - 1)\, ie^{i\theta} d\theta = i\int_0^{\pi} (2e^{i2\theta} - e^{i\theta})\, d\theta = i\left[\frac{2}{2i}e^{i2\theta} - \frac{1}{i}e^{i\theta}\right]_0^{\pi}$$

$$= (e^{i2\pi} - 1) - (e^{i\pi} - 1) = 2$$

2- عكسية حساب التكامل وفق صيغة كوشي

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

$f(z) = z^2$, $n=1 \Rightarrow f'(z) = 2z$, $a=1 \Rightarrow f'(1) = 2$

$$f'(1) = \frac{1!}{2\pi i}\oint_C \frac{z^2\,dz}{(z-1)^2} \Leftrightarrow 2 \times 2\pi i = \oint_C \frac{3\,dz}{(z-1)^2}$$

3- الحساب بإستخدام التكامل $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ حيث $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-3)(x^2+1)}\,dx$

عكسية حساب التكامل وفق نظرية الراسب بتعويض ان:

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^2+1)}$$

وبما ان النقاط شاذة عند $z = \pm i \Rightarrow z = 3$

بتعويض الصيغة العلوي من $z = i$ حيث المقدار كبير $z = 3$ على الجزء الحقيقي و $z = i$ على الجزء التخيلي

وان كلاهما قطب بسيط من النمط الاول عندئذ تكون التكامل

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dz}{(z-3)(z^2+1)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z-3)(z-i)(z+i)} = 2\pi i\, Res(i) + \pi i\, Res(3)$$

$$Res(i) = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)}{(z-3)(z+i)(z-i)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z-3)(z+i)} = \frac{1}{-2-6i}$$

$$Res(3) = \lim_{z\to 3} \frac{z-3}{(z-3)(z^2+1)} = \lim_{z\to 3} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{10}$$

$$I = \frac{1}{2}\left[2\pi i\left(\frac{1}{-2+6i}\right) + \pi i \frac{1}{10}\right]$$

A to Z

نموذج (A)

جامعة طرطوس		الفصل الثاني 2023-2022
كلية العلوم		الدرجة العظمى (90)
قسم الكيمياء		اسم الطالب:
مقرر الرياضيات (4)	السنة الأولى	من مقررات الفصل الثاني

السؤال الأول: (50 درجة)

1- أوجد حلاً (واحداً فقط) للمعادلة $z^3+2i=0$.

2- أوجد المحل الهندسي لمجموعة النقاط z من المستوي العقدي والتي تحقق المتراجحة $|z-(1+2i)|<4$

3- انشر الدالة $f(z)=\frac{1}{5-z}$ بجوار النقطة $z=1$ مكتفياً بأربعة حدود والحد العام، ثم حدد منطقة تقارب السلسلة الناتجة.

4- تحقق هل الدالة $U(x,y)=3x^2y-y^3$ توافقية؟. إن تبين لك أنها توافقية أوجد الدالة المرافقة.

5- تحقق هل الدالة $f(z)=z^2\cdot\bar{z}$ تحليلية.

السؤال الثاني: (40 درجة)

1- بفرض لدينا التكامل $\int_\Gamma f(z)dz=\int_\Gamma (z+i)dz$، تحقق هل التكامل متعلق بالطريق المسلوك؟، إن تبين لك أنه غير متعلق احسب هذا التكامل إذا كان Γ هو منحني يصل بين النقطتين $B(1,3)$, $A(0,0)$.

2- احسب التكامل $I=\oint_\Gamma \frac{z\,dz}{z-3}$ (Γ منحني مغلق).

3- احسب التكامل $I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

يمنع استعمال الآلة الحاسبة

الإجابة بالقلم الأزرق حصراً

أ.د. نزار حسن

A to Z

قسم تصحيح مقرر رياضيات 4 نموذج (A) الفصل الدراسي الثاني
الطلاب السنة الأولى كيمياء (A) الدرجة العظمى (90) نموذج A

السؤال الأول: (30 درجة)

1- أوجد الحلول المختلفة للمعادلة $z^3 = -2i$ ثم حدد الحل الرئيسي.

$z = -2i$ حيث $|z| = 2$ و $\arg(-2i)$ هو الزاوية θ حيث $\cos\theta = \frac{0}{2} = 0$ و $\sin\theta = \frac{-2}{2} = -1$

إذن $\arg(-2i) = \frac{3\pi}{2}$ أو عكسيا $-\frac{\pi}{2}$

$-2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ أو $-2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

وهذه الصيغة المثلثية للعدد المعقد $-2i$

والحلول هي الجذور التكعيبية للعدد المعقد $-2i$

$\eta_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$

$k=0 \Rightarrow \eta_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

وهو الحل الرئيسي للمعادلة

2- أ- المتراجحة $|z-(1+2i)| < 4$ تمثل قرص مركزه $z_0 = (1+2i)$ ونصف قطره 4 (القرص المفتوح)

ب- المعادلة $|z-(1+2i)| = 4$ تمثل دائرة مركزها $z_0 = (1+2i)$ ونصف قطرها 4

ج- الشكل الهندسي لمجموعة النقاط هي مجموعة النقاط الداخلية للدائرة المذكورة في المستوي العقدي (يمكن للطالب التعبير عن ذلك بطريقة تحليلية $z = x+iy$ ولكن يفضل عرض مجموعة النقاط هي)

3- أ- النشر المطلوب للدالة $f(z) = \frac{1}{5-z}$ حول النقطة $z=1$ أي النشر وفق قوى $(z-1)$ هو

$$f(z) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(z-1) + \frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n + \dots$$

ب- نصف قطر التقارب للمتسلسلة القوى الحقيقية هو $R = 4$

$$f(z) = \frac{1}{5-z} = \frac{1}{5-(z-1)-1} = \frac{1}{4-(z-1)} = \frac{1}{4\left(1-\frac{z-1}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{z-1}{4} + \left(\frac{z-1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z-1}{4}\right)^n + \dots\right] = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{4}\right)^n$$

وهذه المتسلسلة هي مجموع متسلسلة هندسية أساسها $\frac{z-1}{4}$ تتقارب عندما $\left|\frac{z-1}{4}\right| < 1$

وهذا يكافئ $|z-1| < 4$ وبالتالي z تمثل في المستوي العقدي هي مجموعة نقاط داخل دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها 4 وهي المنطقة المطلوبة.

4- الدالة $u(x,y) = 3x^2y - y^3$ توافقية إذا تحقق الشرط $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6y$$

إذاً: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y - 6y = 0$

والدالة المعطاة توافقية.

لتحديد الدالة المرافقة يتم تحقيق شرط كوشي لدالة تحليلية هو:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 6xy = \frac{\partial v}{\partial y}$$

بالتكامل $v = 3xy^2 + A(x)$ ... (1)

نشتق بالنسبة لـ x ونعوض في الشرط الثاني

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -v = x^3 - 3xy^2 + A(y)$$

بالتكامل الدالة المرافقة تأخذ الشكل $v = -x^3 + 3xy^2 + A$ ... (2)

عندما نجمع (1) و (2) نحصل على $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

5- الدالة تكون تحليلية إذا تحقق شرط كوشي فإذا عوضنا أن $z = x+iy$ فإن:

$$z^2 = (x^2-y^2) + i2xy \Rightarrow z^2\cdot\bar{z} = [(x^2-y^2)+i2xy](x-iy)$$

$$z^2\cdot\bar{z} = x(x^2-y^2) + 2xy^2 + i[y(x^2-y^2) + 2x^2y] = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - y^2 + 2y^2 = 3x^2 + y^2 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 - 3y^2 + 2x^2 = 3x^2 - 3y^2$$

نلاحظ من ذلك أن أحد شرطي كوشي غير محقق حيث

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

وبالتالي الدالة غير تحليلية (يمكن البرهان باستخدام الشرط الآخر $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$)

السؤال الأول: (1) أوجد بالمعادلة جذور المعادلة $z^3 = -2i$ ثم أوجد $\sqrt[3]{-2i}$ وعين الجذور

$z = -2i$ حيث $|z| = 2$ ① أوجد $\text{Arg}(-2i)$ ثم عين الحل الرئيسي

$\cos\theta = \frac{0}{2} = 0$ ، $\sin\theta = \frac{-2}{2} = -1$ ① $\text{Arg}(-2i) = \frac{3\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$ هو الزاوية

$-2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ أو $-2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ① وعليه الحل الرئيسي

$\eta_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$ ① والحل هو أحد الجذور وعليه الجذور

$k=0 \Rightarrow \eta_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ① وهو الحل المطلوب

2- أ) المتراجحة $|z-(1+2i)| < 4$ تمثل قرص دائري مركزه $z_0 = (1+2i)$ ④ ونصف قطره 4 على المستوي العقدي ④ وبالتالي فإن مجموعة النقاط المحققة للمتراجحة المذكورة على المستوي العقدي (مع ترك الطالب ليضع ذلك بشكل تخطيطي ودون عرض مجموعة النقاط هي $z = x+iy$ ②)

ب) أثبت أن $f(z) = \frac{1}{5-z}$ يمكن نشره وفق متسلسلة تايلور إذا وقعت $z=1$ ④ أي نشره وفق القوى الصحيحة الموجبة للمقدار $(z-1)$

$f(z) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(z-1) + \frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n + \dots$

ووفق هذا النشر فإن الدالة مجموع سلسلة قوى صحيحة موجبة في $(z-1)$

$$f(z) = \frac{1}{5-z} = \frac{1}{5-(z-1)-1} = \frac{1}{4-(z-1)} = \frac{1}{4\left(1-\frac{z-1}{4}\right)} = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{z-1}{4} + \left(\frac{z-1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z-1}{4}\right)^n + \dots\right] = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{4}\right)^n$$

وعليه فإن مجموع سلسلة هندسية أساسها $\frac{z-1}{4}$ تتقارب عندما $\left|\frac{z-1}{4}\right| < 1$ ① وهذا يكافئ $|z-1| < 4$ ① ومركزها z_0 يمثل في المستوي العقدي هي مجموعة نقاط داخل دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها 4 وهي منطقة التقارب المطلوبة.

4- الدالة $U(x,y) = 3x^2y - y^3$ توافقية إذا تحقق شرط $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ②

$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y$ ② ، $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6y$ ②

إذاً: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y - 6y = 0$ ② والدالة المعطاة توافقية.

لتحديد الدالة المرافقة يتم وضع شرط كوشي لدالة تحليلية x هو:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 6xy = \frac{\partial v}{\partial y}$ ① بالتكامل $v = 3xy^2 + A(x)$ ② ثابت يعتمد

وضع الشرط الثاني $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -v = x^3 - 3xy^2 + A(y)$ ② بالتكامل

بالتالي الدالة المرافقة تأخذ الشكل التالي عندما نجمع ① ، ② معاً:

$v = -x^3 + 3xy^2 + A \Rightarrow W = f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ ①

5- الدالة تكون تحليلية إذا تحقق شرط كوشي إذا عرفنا أن $z = x+iy$ فإن:

$z^2 = (x^2-y^2) + i2xy \Rightarrow \bar{z}\cdot\bar{z} = [(x^2-y^2) + i2xy](x-iy)$ ② ②

$\bar{z}\cdot\bar{z} = x(x^2-y^2) + 2xy^2 + i[y(x^2-y^2) + 2x^2y] = u(x,y) + iv(x,y)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - y^2 + 2y^2 = 3x^2 + y^2$ ② ، $\frac{\partial v}{\partial y} = x^2 - 3y^2 + 2x^2 = 3x^2 - 3y^2$ ②

نلاحظ من ذلك أن أحد شرطي كوشي غير محقق حيث $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ ②

وبالتالي الدالة غير تحليلية (يمكن البرهان باستخدام الشرط الآخر $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$)

السؤال الثاني: يكون التكامل $\int_\Gamma (\bar{z}+i)\,dz$ غير متعلق بالطريق لأن الدالة $f(z)=\bar{z}+i$ تحليلية لتحقق شرطي كوشي ريمان حيث $z=x+iy$ وتتحقق أن:

$$f(z)=\bar{z}+i=x+i(y+1)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0=\frac{\partial v}{\partial x}$$

وبما أن التكامل غير متعلق بالطريق لأن الدالة تحليلية.

وبما أن التكامل يمكن اعتباره على المنحنى Γ الذي يصل بين النقطتين A و B هو مستقيم معادلته بالمعادلة بين النقطتين A و B أي يمكن اعتباره معادلة المستقيم $y=3x$ من هذه العلاقة يمكن رد التكامل الى تكامل حقيقي (عندما x متغير) حيث $0\le x\le 1$

$$I=\int_\Gamma (\bar{z}+i)\,dz=\int_0^1 [x+i(3x+1)](dx+i3dx)=(1+i3)\int_0^1 [x(1+3i)+i]\,dx$$

$$=(1+i3)\left[\frac{x^2}{2}(1+3i)+ix\right]_0^1=(1+i3)\left[\frac{1}{2}(1+3i)+i-0\right]=(1+i3)\left(\frac{1}{2}+i\frac{5}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{15}{2}\right)+i\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)=-7+i4$$

2- حساب التكامل $I=\oint_\Gamma \frac{3\,dz}{\bar{z}-3}$

نلاحظ أن النقطة $z=3$ هي نقطة شاذة أي الدالة تحليلية فيما عدا هذه النقطة وحساب التكامل يمكن اعتماد إحدى طريقتين:

الأولى: وهي صيغة كوشي التكاملية

$$f^{(n)}(3)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{3\,dz}{(\bar{z}-3)^{n+1}}$$

حيث أن $f(\bar{z})=\bar{z}$ و $n=0$

$$I=f(3)=\frac{0!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{3\,dz}{\bar{z}-3}\Leftrightarrow 3=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{3\,dz}{\bar{z}-3}\Rightarrow \oint_\Gamma =6\pi i$$

وبالتالي قيمة التكامل

الثانية: استخدام صيغة كوشي العكسية وهي أن المنحنى مغلق والدالة $f(z)=\frac{3}{\bar{z}-3}$ وللنقطة شاذة عند التكامل

$$I=\oint_\Gamma \frac{3\,dz}{\bar{z}-3}=\oint_{\Gamma_1} \frac{3\,dz}{\bar{z}-3}=6\pi i$$

حيث أن Γ_1 هو منحنى مغلق يمكن اعتباره دائرة مركزها النقطة $(3,0)$ ونصف قطرها الاعتباري $\rho=1$ والاعتبار أن $z=e^{i\theta}+3$ نتحقق بأن dz الدائرة. متضمن Γ_1 نفس اتجاه Γ حيث $0\le\theta<2\pi$ يحيط

3- يمكن حساب التكامل وفق نظرية البواقي والدالة الحقيقية حيث لدينا

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

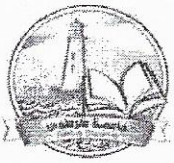
حيث لدينا $f(z)=\frac{1}{z}$ فالنقطة $z=0$ نقطة شاذة. عبارة عن قطب بسيط من المرتبة الأولى. واقع على المحور الحقيقي

$$I=\frac{1}{2}\{Im[\pi i\,Res(0)\},\quad Res(0)=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^{iz}}{z}=\lim_{z\to 0} e^{iz}=1$$

أي حساب البواقي للدالة $\frac{e^{iz}}{z}$ وعليه

$$I=\frac{1}{2}Im[\pi i]=\frac{\pi}{2}$$

نموذج (B)

جامعة طرطوس		الفصل الثاني 2023-2022
كلية العلوم		الدرجة العظمى (90)
قسم الكيمياء		اسم الطالب:
مقرر الرياضيات (4)	السنة الأولى	من مقررات الفصل الثاني

A to Z

السؤال الأول: (50 درجة)

1- احسب $(1-i)^{16}$ (أبسط شكل)

2- تحقق هل الدالة $f(z)=z^{\frac{1}{2}}$ تحليلية.

3- تحقق هل الدالة $U(x,y)=6x(2y-1)$ توافقية؟ إن تبين لك أنها توافقية أوجد الدالة المرافقة.

4- أوجد المحل الهندسي لمجموعة النقاط z من المستوي العقدي والتي تحقق المتراجحة $|z-1|\le|z+3-i|$.

5- بفرض لدينا السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot 3^n}(z+1)^n$ ، حدد نصف قطر تقارب السلسلة ثم حدد منطقة تقاربها

السؤال الثاني (40 درجة)

1- احسب هذا التكامل $\int_{\Gamma}(2z-1)dz$ إذا كان Γ هو منحني القوس العلوي من الدائرة $|z|=1$ والموجهة بالاتجاه الموجب.

2- احسب التكامل $I=\oint_{\Gamma}\frac{z^2\,dz}{(z-1)^2}$ حيث Γ هو منحني مغلق.

3- احسب التكامل $I=\int_0^{\infty}\frac{1}{(x-3)(x^2+1)}dx$.

يمنع استعمال الآلة الحاسبة

الإجابة بالقلم الأزرق حصراً

أ.د. نزار حسن

سلم تصحيح مقرر رياضيات (4) نموذج (B) الفصل الثاني 2023-2022
لطلاب السنة الأولى كيمياء — نموذج B

1- لدينا $|1-i|=\sqrt{2}$ حيث $z=1-i$ ② ، $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{4}$ ③ ومنه $\theta=Arg(1-i)$ ③
$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow(1-i)=(\sqrt{2})^{16}\left(\cos 16\frac{\pi}{4}-i\sin 16\frac{\pi}{4}\right)=(\sqrt{2})^{16}(\cos 4\pi-i\sin 4\pi)$ ②
$(1-i)^{16}=(\sqrt{2})^{16}.1=(\sqrt{2})^{16}$ ②

2- تحقق هل $f(z)=z^{\frac{1}{2}}$ تحليلية لنبين ذلك سنضع تعريف z بالشكل الأسي ② أي $z=re^{i\theta}$ ومنه
$f(z)=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\Leftarrow f(z)=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ ① ②
$f(z)=f(r,\theta)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)=\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}+i\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$
$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$ (1) ② ، $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}$ (2) وتكون تحليلية اذا تحقق شرطي كوشي
$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}$ ، $\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{\sqrt{r}}{2}\sin\frac{\theta}{2}$ ، $\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}$ ، $\frac{\partial v}{\partial\theta}=\frac{\sqrt{r}}{2}\cos\frac{\theta}{2}$
(1) $\frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{r}\frac{\sqrt{r}}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ ① محقق ، (2) $\frac{1}{r}\left(-\frac{\sqrt{r}}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}$ ① محقق
وبالتالي الدالة تحليلية.

3- الدالة $u(x,y)=6x(2y-1)$ توافقية اذا تحقق $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ ②
$\frac{\partial u}{\partial x}=6(2y-1)\Rightarrow\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0$ ① ، $\frac{\partial u}{\partial y}=12x\Rightarrow\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ ①
$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ ① شرطي كوشي
والدالة توافقية لإيجاد الدالة المرافقة نكامل شرطي كوشي
(1) $\frac{\partial u}{\partial x}=6(2y-1)=\frac{\partial v}{\partial y}$ بالتكامل بالنسبة لـ y $\Longrightarrow$ $v=6(y^2-y)+A(x)$ ②
(2) $\frac{\partial u}{\partial y}=12x=-\frac{\partial v}{\partial x}$ بالتكامل بالنسبة لـ x $\Longrightarrow$ $-v=6x^2+A(y)$ ②
$v=6(y^2-y)+6x^2+A$ ② يتحدد $A(x)$ بالمحدود المشتركة وغير المشتركة في (1) و (2)

4- لدينا $|z-1|\leq|z+3-i|$ ① بالمداد ② تمثل مجموعة نقاط محور القطعة المستقيمة الواصلة بين $(1,0)$ و $(-3,1)$ ② والذي يقسم المستوي العقدي الى نصفي مستويين وبالتالي وحده ③ المتراجحة مجموعة نقاط نصف المستوي الذي حده المحور والذي يحتوي النقطة $(1,0)$ عاكس نقاط المحور.
(عكس البرهان بالشكل التحليلي حيث نعوض $z=x+iy$ بدل المتراجحة z.)
ينتج لدينا المتباينة التالية
$\sqrt{(x-1)^2+y^2}\leq\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}$

5- السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2.3^n}(z+1)^n$ هي سلسلة قوى صحيحة عكس دراستنا ومنه دراسة سلسلة حقيقية. بالتالي لتحديد نصف قطر التقارب عكس مواصفات المحدد القوي (كوشي) حيث
$\lambda=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2.3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2.3}=\frac{1}{1.3}=\frac{1}{3}$ ③ ②
وبالتالي نصف قطر التقارب هو $R=\frac{1}{\lambda}=3$ ② بالتالي السلسلة تتقارب من أجل $|z+1|<3$ وهي تمثل مجموعة نقاط داخل دائرة مركزها $(-1,0)$ ونصف قطرها $r=3$ ② ①

السؤال الثاني:

1- لحساب التكامل $\int_{|z|=1}(2z-1)\,dz$ باستخدام نظرية التكامل لكوشي نفرض $z=1\cdot e^{i\theta}$ حيث $0\le\theta\le\pi$ حيث Γ هو النصف العلوي من الدائرة $|z|=1$ ويمثل نقاط الدائرة

$z=e^{i\theta}\Rightarrow dz=i\,e^{i\theta}\,d\theta$

$$I=\int_0^{\pi}(2e^{i\theta}-1)\,i\,e^{i\theta}\,d\theta=i\int_0^{\pi}(2e^{i2\theta}-e^{i\theta})\,d\theta=i\left[\frac{2}{2i}e^{i2\theta}-\frac{1}{i}e^{i\theta}\right]_0^{\pi}$$

$$=e^{i2\theta}\Big]_0^{\pi}-e^{i\theta}\Big]_0^{\pi}=(e^{i2\pi}-1)-(e^{i\pi}-1)=(1-1)-(-1-1)=2$$

2- لحساب التكامل $I=\oint_{\Gamma}\frac{z^2}{(z-1)^2}dz$ يمكن حساب التكامل بصيغة كوشي

$$f'(1)=\frac{1!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{z^2}{(z-1)^2}dz,\quad f(z)=z^2\Rightarrow f'(z)=2z,\ n=1$$

$$2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{z^2}{(z-1)^2}dz\Rightarrow\oint_{\Gamma}\frac{z^2dz}{(z-1)^2}=4\pi i \Rightarrow f'(1)=2$$

3- التكامل $I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$ هو تكامل محدود $I=\int_0^{\infty}\frac{1}{(x-3)(x^2+1)}dx$

فيه $f(z)$ تحليلي في النصف العلوي ما عدا قطب بسيط $z=3$ وتحقق $\lim_{z\to\infty}z\cdot f(z)=0$

وهنا نعتبر الدالة $f(z)=\frac{1}{(z-3)(z^2+1)}$ وهنا قطب بسيط $z=\pm i$ القطب البسيط $z=i$ يقع في النصف العلوي من المستوى العقدي

بالتالي يمكن استخدام نظرية البواقي لدينا

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{(z-3)(z^2+1)}dz=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-3)(z^2+1)}dz=[2\pi i\,Res(i)+\pi i\,Res(3)]\cdot\frac{1}{2}$$

$$Res(i)=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-3)(z+i)(z-i)}=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-3)(z+i)}=\frac{1}{(-3+i)(2i)}$$

$$=\frac{1}{-2-6i}$$

$$Res(3)=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{1}{(z-3)(z^2+1)}=\lim_{z\to 3}\frac{1}{9+1}=\frac{1}{10}$$

$$I=\frac{1}{2}\left[2\pi i\,\frac{1}{-2-6i}+\pi i\,\frac{1}{10}\right]=\frac{\pi}{3+i}+\frac{\pi i}{10}$$

الجمهورية العربية السورية جامعة طرطوس كلية العلوم	امتحان مادة رياضيات 4 سنة 1 – كيميا ء	تاريخ الامتحان: 8 / 2 / 2023 التوقيت: 11.30 - 13.30 المدة: ساعتان

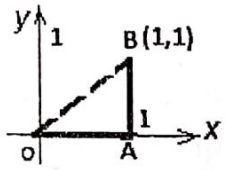
السؤال الاول (21 درجة): حل المعادلة $z^2+3z+3=0$ واكتب جذورها بالشكل الجبري والشكل المثلثي والشكل الاسي ومن ثم احسب قيمة العبارة $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{12}=?$.

أجب عن "ثلاثة أسئلة فقط" من الاسئلة الاربعة التالية (23 درجة لكل سؤال) خلاف ذلك لاتصحح فقط الا اول ثلاث اجابات للطالب:

السؤال الثاني (23 درجة):

أدرس فيما اذا كان التابع التالي تحليليا على C : $f(z)=(x^2-y)+i(y^2-x)$,ومن ثم احسب تكامل هذا التابع

أ -على المسار OAB .
ب – على المسار OB .
كما هو مبين بالشكل، وقارن بين النتيجتين موضحا سبب التساوي او الاختلاف حسب النتائج.



السؤال الثالث (23 درجة):

ليكن التابع العقدي: $f(z)=\sin z$ اكتب هذا التابع على الشكل $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ واوجد المنطقة التي يكون هذا التابع تحليليا عليها ومن ثم برهن ان مشتق هذا التابع حسب صيغة كوشي ريمان هو $f'(z)=\cos z$.

السؤال الرابع(23 درجة): احسب التكامل $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}d\theta$ بالاعتماد على نظرية الرواسب، استفد من التحويل: $z=e^{i\theta}$.

السؤال الخامس(23 درجة): ليكن التابع : $f(z)=\frac{z^2+1}{(z^2+4)^2}$ ،عين اقطاب هذا التابع واحسب الرواسب عند هذه الاقطاب ومن ثم احسب التكاملات التالية:

1 - $\int_{C_1} f(z)dz$ حيث C_1 هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 أي $C_1: |z|=1$.

2 - $\int_{C_2} f(z)dz$ حيث C_2 هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 أي $C_2: |z|=3$.

++++++++ انتهت الأسئلة ++++++++

د احمد الشيخة

CamScanner

$z^2+3z+3=0$ والمطلوب حلها باستخدام الصيغة العامة ثم إيجاد $(\sqrt{3}+i)^{12}$

(6) $z^2+3z+3=0$, $\Delta=(3)^2-4(3)=-3=3i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{3}\,i$

(5) $z_1=\dfrac{-3-\sqrt{3}i}{2}=\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)}$

(5) $z_2=\dfrac{-3+\sqrt{3}i}{2}=\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)}$

(5) $(1+\sqrt{3}i)=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)}$

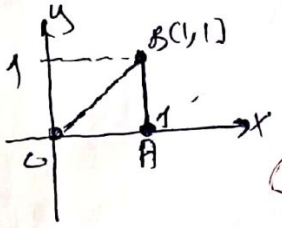
$(1+\sqrt{3}i)^{12}=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{12}=2^{12}e^{i4\pi}=2^{12}$

---

(5) أوجد $f(z)=(x^2-y)+(y^2-x)i$ تحليليا على كامل المستوى ومن ثم أوجد

(22) قيمة $\int_{oAB} f(z)\,dz$ حيث AB و oAB المبينة بالشكل وضح

(22) تفاضلي لكل القطعة المستقيمة oB ثم أوجد معادلة المستقيم الذي يقبل وعلى المتجه.



(5) $u(x,y)=x^2-y$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-1 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}$

(5) $v(x,y)=y^2-x$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-1$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2y$

$I_1=\int_{oBB} f(z)\,dz=\int_{oA} f(z)\,dz+\int_{AB} f(z)\,dz$ نكامل على كل جزء على حدة

(5) $\int_{oA} f(z)\,dz \underset{z=x}{\overset{y=0}{\Longrightarrow}} \int_0^1 (x^2-ix)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2i\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i$

(5) $\int_{AB} f(z)\,dz \underset{z=1+iy \Rightarrow dz=i\,dy}{\overset{x=1}{\Longrightarrow}} \int_0^1 [(1-y)+i(y^2-1)]\,i\,dy=\left[(y-\frac{1}{2}y^2)+i\left(\frac{1}{3}y^3-y\right)\right]_0^1 i=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

(5) $\int_{oAB} f(z)\,dz=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)=1 \Rightarrow I_1=1$

(8) $I_2=\int_{oB} f(z)\,dz \underset{z=x+ix}{\overset{y=x}{\Longrightarrow}} \int_0^1 [(x^2-x)+(x^2-x)i](1+i)\,dx=(1+i)^2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=-\frac{1}{3}i$

(3) $I_1\neq I_2$ بما أن التكامل يعتمد على المسار

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ اذا كانت $f(z)=\sin z$ اثبت ان $(\sin z)'=\cos z$ ثم اوجد المنطقة التي يكون عندها غير مشتق ثم اوجد مشتقاتها كدوال بمتغير z

(5) $\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy$

(6) $\cos iy=\dfrac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2}=\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}=\cosh y,\quad \sin iy=\dfrac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2i}=i\sinh y$

$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

(5) $u(x,y)=\sin x\cosh y\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x\cosh y,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin x\sinh y$

$v(x,y)=\cos x\sinh y\Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\sinh y,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\cos x\cosh y\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$

(6) $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\cos x\cosh y+i(-\sin x\sinh y)$

$=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy$

$=\cos(x+iy)$

$=\cos z$

احسب التكامل $\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{2+\cos\theta}d\theta$ حيث $z=e^{i\theta}$ باستخدام نظرية البواقي

(4) (23) (23)

$z=e^{i\theta}\Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ d\theta=\frac{1}{iz}dz$

$I=\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{2+\cos\theta}d\theta=\int_{C:|z|=1}\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\dfrac{1}{iz}dz=\dfrac{2}{i}\int_C\dfrac{1}{z^2+4z+1}dz$

(5) $z^2+4z+1=0\Rightarrow \Delta=16-4=12\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$z_1=\dfrac{-4-2\sqrt{3}}{2}=-2-\sqrt{3}$

$z_2=\dfrac{-4+2\sqrt{3}}{2}=-2+\sqrt{3}$

$\Rightarrow I=\dfrac{1}{2i}\int_C\dfrac{1}{[z+(2+\sqrt{3})][z-(-2+\sqrt{3})]}dz$

وبما ان z_1, z_2 كل منهما قطب بسيط لدالة $f(z)$ والقطب الذي يقع داخل الدائرة الواحدية هو z_2 فنوجد Res

(5) $\operatorname{Res}[f(z),z=z_2=-2+\sqrt{3}]=\lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z)=\lim_{z\to -2+\sqrt{3}}\dfrac{1}{z+(2+\sqrt{3})}=\dfrac{1}{-2+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

(6) $I=2\pi i\cdot\operatorname{Res}(f(z),z_2)=2\pi i\cdot\dfrac{2}{i}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

$$I=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

(5) $f(z)=\frac{z^2+1}{(z^2+4)^2}$ اثبت أن

(23) اجب واحد فقط من الاثنين والدرجة على قدر ما تجيب

23 أ- تقع على الدائرة $C_1:|z|=1$

ب- تقع على الدائرة $C_2:|z|=3$

(5) $z^2+4=0 \Rightarrow (z+2i)(z-2i)=0 \Rightarrow z_1=-2i,\ z=2i$ الأصفار

$f(z)$ أقطاب من الرتبة الثانية z_2, z_1

(5) $f(z)=\frac{z^2+1}{(z-2i)(z+2i)} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{z\to 2i}(z-2i)^2 f(z) = \frac{(2i)^2+1}{(2i+2i)^2} = \frac{3}{16} \\ \lim_{z\to -2i}(z+2i)^2 f(z) = \frac{(-2i)^2+1}{(-2i-2i)^2} = \frac{3}{16} \end{cases}$

(3) $2\pi i \sum (\text{Res } f(z), z_c) = 2\pi i\left(-\frac{5}{32}i+\frac{5}{32}i\right)=0$

أ- الدائرة الواحدة التي بداخلها القطبين

(5) $\int_{C_1} \frac{z^2+1}{z^2+4}dz = 2\pi i(0) = 0$

ب- الدائرة $C:|z|=3$ تحيط بكل القطبين، إذن

(5) $\int_{C_2} \frac{z^2+1}{z^2+4}dz = 2\pi i\left(\sum \text{Res } f(z)\right) = 2\pi i\left(\frac{3}{4}i-\frac{3}{4}i\right)=0$

$\text{Res}(f(z), z=2i) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 2i}\left[\frac{d}{dz}(z-2i)^2 f(z)\right]$

$= \lim_{z\to 2i}\frac{2z(z+2i)^2-(z^2+1)[2(z+2i)]}{(z+2i)^4}$

$= \lim_{z\to 2i}\frac{2z(z+2i)-2(z^2+1)}{(z+2i)^3} = \frac{-16+6}{-64i} = -\frac{5}{32}i$

$\text{Res}(f(z), z=-2i) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -2i}\left[\frac{d}{dz}((z+2i)f(z)\right]$

$= \lim_{z\to -2i}\frac{2z(z-2i)^2-(z^2+1)[2(z-2i)]}{(z-2i)^4}$

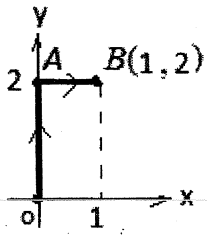
$= \lim_{z\to -2i}\frac{2z(z-2i)-2(z^2+1)}{(z-2i)^3} = \frac{-16+6}{64i} = \frac{5}{32}i$

الجمهورية العربية السورية جامعة طرطوس كلية العلوم	امتحان مادة رياضيات 4 (نموذج 2) سنة 1 – كيميا ء	تاريخ الامتحان: 26/ 6 / 2022 التوقيت: 9 - 11 المدة: ساعتان

السؤال الاول (22 درجة): حل المعادلة $z^2+2z+4=0$ واكتب جذورها بالشكل المثلثي والشكل الاسي ومن ثم احسب قيمة العبارة $\left(\frac{1-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}\right)^{20}=?$

السؤال الثاني (22 درجة):

أدرس فيما اذا كان التابع التالي تحليليا على C : $f(z)=(x^2-y^2-x)+i(2xy+x)$,ومن ثم احسب تكامل هذا التابع على المسار OAB المبين بالشكل المقابل:



السؤال الثالث (22 درجة):

ليكن التابع العقدي: $f(z)=sh\,z$ اكتب هذا التابع على الشكل $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ واوجد المنطقة التي يكون هذا التابع تحليليا عليها ومن ثم اوجد مشتق هذا التابع حسب صيغة كوشي ريمان وبين ان: $f'(z)=(sh\,z)'=ch\,z$.

يُعطى: $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}, \quad ch\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}, sh\theta=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$

أجب عن "سؤال واحد فقط" من السؤالين التاليين (24 درجة لكل سؤال) :

س4 – احسب التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2-2x+3}dx$ بالاعتماد على نظرية الرواسب مع التفصيل بالنسبة للشروط .

س5 – ليكن التابع : $f(z)=\frac{e^{iz}}{(z-i\pi)^2(z-2)}$ ،عين اقطاب هذا التابع واحسب الرواسب عند هذه الاقطاب ومن ثم احسب التكامل التالي : $\int_C f(z)dz$ حيث C هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 4 أي $C:|z|=4$.

++++++++ انتهت الأسئلة ++++++++

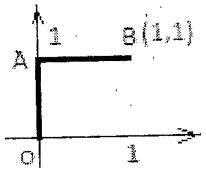
د. احمد حمزة الشيخة

الجمهورية العربية السورية جامعة طرطوس كلية العلوم	امتحان مادة رياضيات4 (نموذج 1) سنة 1-كيمياء	تاريخ الامتحان:26/ 6 / 2022 التوقيت:9- 11 المدة: ساعتان

السؤال الاول(22 درجة): حل المعادلة $z^2+2z+4=0$ واكتب جذورها بالشكل المثلثي والشكل الاسي ومن ثم احسب قيمة العبارة $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^{12}=?$

السؤال الثاني (22درجة):

أدرس فيما اذا كان التابع التالي تحليليا على C :, $f(z)=(y^2-x^2-y)+i(2xy+y)$ ومن ثم احسب تكامل هذا التابع على المسار OAB المبين بالشكل المقابل:



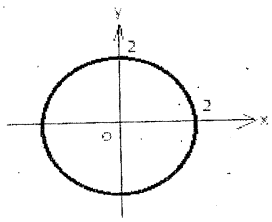
السؤال الثالث (22درجة):

ليكن التابع العقدي: $f(z)=e^{iz}$ اكتب هذا التابع على الشكل $f(z)=u(x;y)+iv(x,y)$ واوجد المنطقة التي يكون هذا التابع تحليليا عليها ومن ثم اوجد مشتق هذا التابع حسب صيغة كوشي ريمان.

أجب عن "سؤال واحد فقط" من السؤالين التاليين (24 درجة لكل سؤال) خلاف ذلك لاتصحح فقط الا اول اجابة للطالب:

س4-احسب التكامل $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}d\theta$ بالاعتماد على نظرية الرواسب ، استفد من التحويل: $z=e^{i\theta}$.

س5-ليكن التابع : $f(z)=\frac{z^2+2}{(z-i)(z-1)^2}$ ،عين اقطاب هذا التابع واحسب الرواسب عند هذه الاقطاب ومن ثم احسب التكامل التالي $\int_C f(z)dz$: حيث C هي الدائرة التي مركزها Oونصف قطرها 2 أي: $C:|z|=2$.



++++++ انتهت الأسئلة ++++++++

د احمد الشيخة

$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^{12} \hookrightarrow z^2+2z+4=0$ (5/2)

(22)

$* z^2+2z+4=0 \Rightarrow \Delta = 4-16 = -12 = 12i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}i$

(2) $\begin{cases} z_1 = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{2} \\ z_2 = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ z_2 = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases} =$

$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \\ z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$

(2)

$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$

(3) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^{12} = \left(\frac{(1-i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}\right)^{12} = \left(\frac{1-3-2i\sqrt{3}}{1+3}\right)^{12}$

$= \left(\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12} = \left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{12}$

$= \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^{12} = e^{i16\pi} = e^{i8(2\pi)} = 1$

(5/2) (22)

$f(z) = (y^2-x^2-y)+i(2xy+y) \Rightarrow u = y^2-x^2-y$

$\Rightarrow \begin{cases} u = y^2-x^2-y \\ v = 2xy+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -2x \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y-1 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x+1 \end{cases}$

(4) C ... $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ ...

(4) $\int_{OAB} f(z)dz = \int_{OA} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz$

$* \int_{OA} f(z)dz : x=0 \Rightarrow dx=0 \ z=iy \ , \ dz = i\,dy$

(5) $\int_{OA} f(z)dz = \int_0^1 [(y^2-y)+i(+y)]i\,dy = \int_0^1 [-y+i(y^2-y)]dy$

$= \left[-\frac{1}{2}y^2+i\left(\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2\right)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{6}i$

(5) $* \int_{AB} f(z)dz : y=1 \ , \ z = x+i \Rightarrow dz = dx$

$\int_{AB} f(z)dz = \int_0^1 [-x^2+i(2x+1)]dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+i(x^2+x)\right]_0^1 = -\frac{1}{3}+2i$

$\int_{OAB} f(z)dz = \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}i\right)+\left(-\frac{1}{3}+2i\right) = -\frac{5}{6}+\frac{11}{6}i$

$\left(\frac{1-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}\right)^{20} = ?$ حل: $z^2+2z+4=0$ (1) (22)

$\Delta = 4-16 = -12 = 12i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}\,i$ (22)

$z^2+2z+4=0 \Rightarrow \Delta = 4-16 = -12 = 12i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}\,i$

(2) $\begin{cases} z_1 = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{2} = -1-\sqrt{3}\,i \\ z_2 = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{2} = -1+\sqrt{3}\,i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ z_2 = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases}$

(3) $\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \\ z_2 = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$

(4)
$x_1 = 1-i\sqrt{2} \Rightarrow |x_1| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

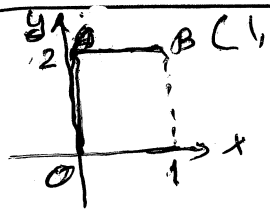
$\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\theta_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}\,e^{i\theta_1}$

$x_2 = 1+i\sqrt{2} \Rightarrow |x_2| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

$\cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\theta_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_2 = \sqrt{3}\,e^{i\theta_2}$

$\Rightarrow \theta_2 = -\theta_1$

$(\cdot\cdot)^{20} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}\,e^{i\theta_1}}{\sqrt{3}\,e^{-i\theta_1}}\right)^{20} = \left(e^{2i\theta_1}\right)^{20} = e^{i40\theta_1}$



$\int_{OAB} f(z)dz = ?$ ، $f(z) = \underbrace{(x^2-y^2-x)}_{u(x,y)} + i\underbrace{(2xy+x)}_{v(x,y)}$ (5) (22)

(6) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x-1, & \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y+1, & \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow$ ...

(7) $\int_{OAB} f(z)dz = \int_{OA} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz$.

$\Rightarrow OA: x=0 \Rightarrow dx=0$, $z = iy \Rightarrow dz = i\,dy$

(8) $\int_{OA} f(z)dz = \int_0^2 (-y^2)\,i\,dy = i\left[-\frac{1}{3}y^3\right]_0^2 = -\frac{8}{3}i$

$\Rightarrow AB: y=2 \Rightarrow dy=0$, $z = x+2i \Rightarrow dz = dx$, $x \in [0,1]$

(9) $\int_{AB} f(z)dz = \int_0^1 \left[(x^2-x-4)+i(4x+x)\right]dx = \left[\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x\right)+i\left(\frac{5}{2}x^2\right)\right]_0^1$

$= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-4\right)+\frac{5}{2}i = -\frac{25}{6}+\frac{5}{2}i$

(10) $\int_{AB} f(z)dz = -\frac{8}{3}i - \frac{25}{6}+\frac{5}{2}i = -\frac{25}{6}-\frac{1}{6}i$

$f(z)=\sh z$: (3)

$\sh z = \sh(x+iy) = \sh x \ch iy + \ch x \sh iy$ (22)

$= \underbrace{\sh x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{\ch x \sin y}_{v(x,y)}$

(12) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \ch x \cos y, & \frac{\partial u}{\partial y} = -\sh x \sin y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \sh x \sin y, & \frac{\partial v}{\partial y} = \ch x \cos y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \sh z$ تحليلية

(10) $f'(z) = (\sh z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \ch x \cos y + i \sh x \sin y$

$= \ch x \ch iy + \sh x \sh iy$

$= \ch(x+iy)$

$(\sh z)' = \ch z$

---

(24) أحد أسئلة الاختبار (24 درجة) لطلاب

(5) باستخدام نظرية الرواسب احسب التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx$

(4) $f(z) = \frac{1}{z^2-2z+3}$ دالة مساعدة

$z^2-2z+3=0 \Rightarrow \Delta = 4-12 = -8 = 8i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}i$

(1) $z_1 = \frac{2-2\sqrt{2}i}{2} = 1-\sqrt{2}i$ و $z_2 = \frac{2+2\sqrt{2}i}{2} = 1+\sqrt{2}i$

بما أن النقطة العلوية فقط هي $z_2 = 1+\sqrt{2}i$ وكذلك $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$ فإن

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f(z), z_i)$ حيث z_i قطب النقطة العلوية

أي

(11) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res} f(z), z_2\right)$

$f(z) = \frac{1}{z^2-2z+3} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$

$\lim_{z\to z_2} (z-z_2) f(z) = \lim_{z\to z_2} \frac{1}{z-z_1} = \frac{1}{(1+\sqrt{2}i)-(1-\sqrt{2}i)}$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}i} = (\operatorname{Res} f(z), z_2)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx = 2\pi i \left(\frac{1}{2\sqrt{2}i}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

إيجاد الشرط الذي يجعل الدالة $f(z)=u+iv$ دالة تحليلية حيث $f(z)=e^{iz}$

(22) $z=x+iy$ حيث

$$e^{iz}=e^{i(x+iy)}=e^{-y+ix}=e^{-y}(\cos x+i\sin x)=e^{-y}\cos x+ie^{-y}\sin x$$

$$\begin{cases} u=e^{-y}\cos x \\ v=e^{-y}\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=-e^{-y}\sin x, & \frac{\partial u}{\partial y}=-e^{-y}\cos x \\ \frac{\partial v}{\partial x}=e^{-y}\cos x, & \frac{\partial v}{\partial y}=-e^{-y}\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

(12)

وبالتالي $f(z)=e^{iz}$ تحقق معادلات كوشي ريمان الشرط الضروري

$$f'(z)=(e^{iz})'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=-e^{-y}\sin x+ie^{-y}\cos x$$

$$=e^{-y}(-\sin x+i\cos x)$$

(10)

$$=e^{-y}(i^2\sin x+i\cos x)$$

$$=ie^{-y}(\cos x+i\sin x)$$

$$=ie^{-y}e^{ix}=ie^{-y+ix}=ie^{i(x+iy)}=ie^{iz}$$

$f'(z)=ie^{iz}$ وهو المطلوب الثاني

---

(11) (12)

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}d\theta \Rightarrow z=e^{i\theta}\Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\ d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}d\theta=\int_C\frac{1}{2+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{dz}{iz},\quad C: |z|=1$$

(8)

$$=\int_C\frac{1}{\frac{4iz+(z^2-1)}{2iz}}\cdot\frac{dz}{iz}=\int_C\frac{2}{z^2+4iz-1}dz$$

$$z^2+4iz-1=0;\ \Delta=(4i)^2-4(-1)=-16+4=-12=12i^2$$

(8)

$$\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} z_1=\frac{-4i-2\sqrt{3}i}{2}=-2i-\sqrt{3}i=(-2-\sqrt{3})i \\ z_2=\frac{-4i+2\sqrt{3}i}{2}=-2i+\sqrt{3}i=(-2+\sqrt{3})i \end{cases}$$

z_1 هو فقط الذي يقع داخل C وهو قطب من الرتبة الأولى

$$F(z)=\frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)},\quad \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\cdot F(z)=\frac{2}{\left[(-2+\sqrt{3})i-(-2-\sqrt{3})i\right]}=\frac{1}{\sqrt{3}i}$$

(4) حاصل $F(z)$ عند z_2

(4) $$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}d\theta=2\pi i\left(\frac{1}{\sqrt{3}i}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{i^2+2}{(i-1)^2} = \frac{1}{i^2-2i+1} = -\frac{1}{2i} \neq 0$$

(5) (8) (24) ، قطب بسيط $z=i$

(8) $\text{Res}[f(z), z=i] = -\frac{1}{2i}$

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z) = \frac{(1)^2+2}{1-i} = \frac{3}{1-i} = \frac{3(1+i)}{2} = \frac{3}{2}+\frac{3}{2}i \neq 0$$

، قطب مضاعف من الرتبة 2 عند $z=1$ لأن

$$\text{Res}[f(z), z=1] = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-1)^2 \cdot \frac{z^2+2}{(z-i)(z-1)^2}\right]_{z=1}$$

(8)
$$= \left(\frac{z^2+2}{z-i}\right)'_{z=1} = \left[\frac{2z(z-i)-(z^2+2)}{(z-i)^2}\right]_{z=1}$$

$$= \frac{1-2i-2}{(1-i)^2} = \frac{-1-2i}{-2i} = \frac{1+2i}{2i}$$

(8) $\int_C f(z)dz = 2\pi i\left[\text{Res}(f(z), z=i) + \text{Res}(f(z), z=1)\right]$

$$= 2\pi i\left[-\frac{1}{2i} + \frac{1+2i}{2i}\right] = 2\pi i$$

(5-) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z-i\pi)^2(z-2)}$ عند الأقطاب داخل $C:|z|=4$ أوجد $\int_C f(z)dz$

(25) عند الأقطاب،

* $\lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)^2 f(z)=\dfrac{e^{i(i\pi)}}{(i\pi-2)}=\dfrac{e^{-\pi}}{(i\pi-2)}\neq 0$ ، $f(z)$ عند $z=i\pi$ قطب من الرتبة الثانية

(8) * $\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\dfrac{e^{2i}}{(2-i\pi)^2}\neq 0 \Rightarrow f(z)$ قطب بسيط ،

* $\left(\operatorname{Res} f(z),\ z=i\pi\right)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i\pi}\left[\dfrac{d}{dz}(z-i\pi)^2 f(z)\right]=\left(\dfrac{e^{iz}}{z-2}\right)'_{z=i\pi}$

(8) $=\left[\dfrac{ie^{iz}(z-2)-e^{iz}}{(z-2)^2}\right]_{z=i\pi}=\left[\dfrac{e^{iz}(iz-2i-1)}{(z-2)^2}\right]_{z=i\pi}$ ،

$=\dfrac{e^{-\pi}(-\pi-2i-1)}{(i\pi-2)^2}$

* $\left(\operatorname{Res} f(z),\ z=2\right)=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\dfrac{e^{2i}}{(2-i\pi)^2}$

(5) $\int_C=2\pi i\sum\left(\operatorname{Res} f(z),2i\right)=2\pi i\cdot\left[\dfrac{e^{-\pi}(-\pi-2i-1)}{(i\pi-2)^2}+\dfrac{e^{2i}}{(2-i\pi)^2}\right]$

$=2\pi i\cdot\left\{\dfrac{e^{-\pi}(-\pi-2i-1)+e^{2i}}{(i\pi-2)^2}\right\}$

$z^2+2z+4=0$ نحل المعادلة (ب)

$\Delta = 4-16 = -12 = 12i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}\,i$ (22)

$\sqrt{3}\,i$

$z_1 = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$z_2 = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$

$\left(-\frac{1}{2}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$\left(-\frac{1}{2}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$|z| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

$\cos\theta_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}\,e^{i\theta_1}$

$|z| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

$\theta_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_2 = \sqrt{3}\,e^{i\theta_2}$

$\Rightarrow \theta_2 = -\theta_1$

$\left(\quad\right)^{20} = \left(e^{2i\theta_1}\right)^{20} = e^{i40\theta_1}$

$f(z) = \underbrace{(x^2-y^2-x)}_{u(x,y)} + i\underbrace{(2xy+x)}_{v(x,y)}$ (22)

$= -2y$

$= 2x$ $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow$ غير تحليلية

$I_2 + \int_{AB} f(z)\,dz$.

$z = iy \Rightarrow dz = i\,dy$

$i\,dy = i\left[-\frac{1}{3}y^3\right]_0^2 = -\frac{8}{3}i$

$z = x+2i \Rightarrow dz = dx, \quad x \in [0,1]$

$\int_0^1 \left[(x^2-y^2-x)+i(4x+x)\right]dx = \left[\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x\right)+i\left(\frac{5}{2}x^2\right)\right]_0^1$

$\left(-4\right)+\frac{5}{2}i = -\frac{25}{6}+\frac{5}{2}i$

$\frac{5}{5}+\frac{5}{2}i = -\frac{25}{6}-\frac{1}{16}i$