كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : السابعة/نظري/

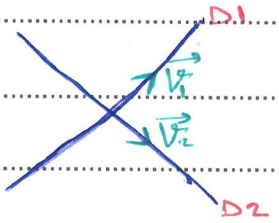
{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960



- الزاوية بين مستقيمين:

هي الزاوية بين شعاعي

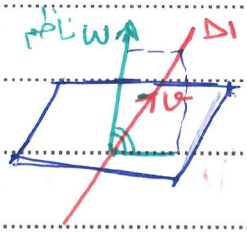
$$\cos\theta = \frac{|\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}|}{|\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|}$$

-1

- الزاوية بين مستقيم ومستوي:

هي الزاوية بين ناظم المستوي و

شعاع التوجيه



$$\sin\theta = \frac{|\vec{w}\cdot\vec{v}|}{|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|}$$

- الزاوية مستويين:

هي الزاوية بين ناظمي المستويين

$$\cos\theta = \frac{|\vec{w_1}\cdot\vec{w_2}|}{|\vec{w_1}|\cdot|\vec{w_1}|}$$

بعض التطبيقات على المستقيم :

إيجاد معادلة المستقيم القاطع لمستقيمين ويوازي متجه معلوم :

$$D_1 = \begin{cases} P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} P_3 : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ P_4 : a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases}$$

المطلوب : إيجاد معادلة مستقيم D يقطع المستقيمين D_1 و D_2 ويوازي المتجه $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$

* هام : خطوات ① نوجد معادلة المستوى الحاوي D_1 ونأخذ منها مستوي موازي $\vec{v}$ ليكن P_1'

② نوجد معادلة مستوى حاوي D_2 ونأخذ منها مستوياً موازي $\vec{v}$ ليكن P_2'

③ المستقيم المطلوب هو $D : \begin{cases} P_1' \\ P_2' \end{cases}$

تمرين :

أوجد معادلة المستقيم القاطع للمستقيمين :

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين:

أوجد معادلتا المستقيم القاطع للمستقيمين:

$$D_1 = \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} 2x+2y+z-1=0 \\ -x+z+2=0 \end{cases}$$

الموازي للمتجه $\vec{v}(2,-1,4)$

الحل:

نشكل حزمة المستويات الماره من D_1:

$$P_1 + \lambda P_2 = (1+2\lambda)x + (1-\lambda)y + z - 1 - 2\lambda = 0$$

نختار من هذه الحزمة مستوياً يوازي المتجه $\vec{v}(2,-1,4)$ أي الذي ناظمه عمودياً على $\vec{v}$

$$\vec{w}(1+2\lambda, 1-\lambda, 1)$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 2(1+2\lambda) - 1(1-\lambda) + 4(1) = 0$$

$$5\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$$

معادلة المستوي المطلوب هي:

$$P_1' : (1-2)x + (1+1)y + z - 1 + 2$$

$$P_1' : -x + 2y + z + 1 = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نوجد عزمة المستويات المارة من D_2

$$P_1+\lambda P_2=(2-\lambda)x+2y+(1-\lambda)z-1+2\lambda=0$$

نختار من هذه الحزمة مستوياً موازياً لـ $(\vec{u},\vec{v})$

$$\vec{w}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow (2)(2-\lambda)+2(-1)+4(1-\lambda)=0$$

$$=4-2\lambda-2+4+4\lambda=0$$

$$=-6\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda=1$$

نعوض عن λ في معادلة الحزمة لإيجاد معادلة المستوي:

$$P_2'=x+2y+1=0$$

$$D=\begin{cases}D_1'=-x+2y+z+1=0\\ D_2'=x+2y+1=0\end{cases}$$

تمرين: أوجد معادلتا المستقيم الموضح:

$$D_1\begin{cases}2x-y+z+3=0\\ x-y+1=0\end{cases}$$

$$D_2\begin{cases}x+2z+1=0\\ 3x-y+z-2=0\end{cases}$$

ترد هذه المسألة إلى المسألة السابقة بحيث أن العمود المشترك لـ D_1 و D_2 له اتجاه توجيه $\vec{v}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$w_1(2,-1,1)$ $w_2(1,-1,0)$

$$v_1 = |w_1 \wedge w_2| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1)i - j(-1) + k(-1)$$

$$= i + j - k \Rightarrow \vec{v_1}(1,1,-1)$$

وبنفس الطريقة لـ v_2

$w_1(1,0,2)$ $w_2(3,-1,1)$

$\vec{v_2} = |w_1 \wedge w_2| \Rightarrow$

$\vec{v_2}(2,5,-1)$

حتى نوجد المستقيم المطلوب هو:

$$\vec{v} = \vec{v_1} \wedge \vec{v_2} \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v}(4,-1,3)$$

لنوجد معادلات المستقيم المطلوب (العمود على D_1 و D_2)

نوجد معادلة حزمة المستويات المارة من P_1'

$$P_1 + \lambda P_2 = (2+\lambda)x + (-1-\lambda)y + z + 1 + \lambda = 0$$

$\vec{v}(4,-1,3)$ لتكن هذه الحزمة متعامدة موازياً لـ

$\vec{w}(2+\lambda, -1-\lambda, 1)$ وهو

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 4(2+\lambda) - 1(-1-\lambda) + 3(1)$$

$$= 8 + 4\lambda + 1 + \lambda + 3 = 12 + 5\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-12}{5}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نعوض في معادلة عزمة المستويات فنحصل على:

$$P_1' : -\frac{2}{5}X + \frac{7}{5}y + Z + \frac{3}{5} = 0$$

$$P_1' : -2X + 7y + 5Z + 3 = 0$$

نوجد معادلة عزمة المستويات المارة من D_2 ونختار منها الموازي لـ $\vec{v}(4,-1,3)$

أي المتعامد:

$$P_1 + \lambda P_2 = (1+3\lambda)x + (-1)y + (2+\lambda)z + 1 - 2\lambda = 0$$

$$\vec{w}\ (1+3\lambda, -1, 2+\lambda)$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 4(1+3\lambda) - 1(-1) + 3(2+\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{5}{8}$$

$$P_2' : -7x + 5y + 11z + 18 = 0$$

$$D = \begin{cases} -2X + 7y + 5z + 3 = 0 \\ -7X + 5y + 11z + 18 = 0 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين: أوجد معادلتي مرتسم المستقيم:

$$D: \frac{x+1}{+1} = \frac{y}{2} = \frac{-z-2}{3}$$

(1) (2) (3)

على المستوي التالي:

$$P: 3x + y - z - 1 = 0$$

الحل:

نكتب معادلتي مستقيم D بشكل تقاطع:

(1)(2) $\frac{x+1}{+1} = \frac{y}{2} \Rightarrow y + 2x - 2 = 0 \; P_1$

(2)(3) $\frac{y}{2} = \frac{-z-2}{3} \Rightarrow 3y - 2z - 4 = 0 \; P_2$

D

نوجد حزمة المستويات الماره من D

$$P_1 + \lambda P_2 = 2x + (1+3\lambda)y - 2\lambda z - 2 - 4\lambda = 0$$

نأخذ من هذه الحزمة المستوي الذي ناظمه

(هو ناظم المستوي P (المفروض))

$\vec{v}(3, 1, -1)$

$\vec{w} \cdot \vec{v} = 2(3) + (1+3\lambda)(1) - 2(-1)$

$= 6 + 1 + 3\lambda + 2\lambda$

$= 7 + 5\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{7}{5}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نموعن في معادلة الحزمة:

D' مرتسم D على المستوي P

$$\begin{cases} P_1' = 5x - 8y + 7z - 19 = 0 \\ P_2' = P = 3x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

تمرين:

أوجد معادلتي المستقيم (المسقط القائم مرتسم)

$$D = \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ 3x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

(1) على كل من المستويات الإحداثية

(2) على المستوي $3x + 2y + z = 0$

الحل: 1) الارتسم على المستوي xoy معادلة ناظمة $(0,0,1)$

- نوجد عزمة المستويات المارة من D

$$P_1 + \lambda P_2 = (1+3\lambda)x + (2-\lambda)y + (-1+2\lambda)z - 2 - \lambda = 0$$

~~$2\lambda = 0$~~

لكي من هذه الحزمة مستوي يكون ناظمه عمودياً على المستوي xoy

$\vec{V}(0,0,1)$

$\vec{w} \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow (1+3\lambda)(0) + (2-\lambda)(0) + (-1+2\lambda)(1) = 0$

$$2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow 2\lambda = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نعوض في معادلة الحزمة لإيجاد معادلة المستوي P_1'

$P_1' : 5x+3y-5=0$ ← D' مرتسم D على XOY

$z=0$

$x=0$

بنفس الطريقة نجد معادلة مرتسم على YOZ الذي معادلته

$P_1+\lambda P_2 : (1+3\lambda)x+(2-\lambda)y+(-1+2\lambda)z-2-\lambda=0$ ناظمه $(1,0,0)$

نوجد معادلة عزمة المستويات المارة من D نختار منها مستويا

$\vec{v}(1,0,0)$ ناظمه يكون عمودياً على YOZ أي $\vec{u}$ و $\vec{v}$

$(P_1+\lambda P_2) = (1+3\lambda)(1)+(2-\lambda)(0)+(-1+2\lambda)(0)=0$

$1+3\lambda=0$

$\Rightarrow \lambda=\frac{-1}{3}$

نعوض في معادلة الحزمة لإيجاد P_2'

$P_2' : 7y-5z-5=0$

$y=0$

(2) نختار من الحزمة مستوياً عمودياً على:

$P : 3x+2y+z=0$

$(3,2,1)(1+3\lambda, 2-\lambda, 1+2\lambda)=0$

$P_1 : -3x+8y-7z-4=0$

$P_2 : 3x+2y+z=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة