كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي٢

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التكامل المضاعف:

لتكن لدينا: $f(x,y): R$

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

يسمى بالتكامل المضاعف التابع f

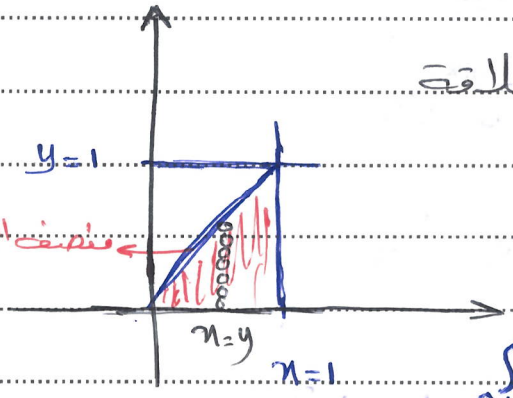
مثال: احسب $\iint_R \frac{\sin x}{x}\,dR$

حيث R المثلث الواقع في الربع الأول والمحدد بالمحورين الإحداثيين $x=1$ $y=1$

الحل:

ملاحظة: يجب البحث دائماً عن علاقة تربط بين x و y

لدينا: $R:[0<x<1, 0<y<x]$



$$\int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx\,[y]_0^x = \int_0^1 \frac{\sin}{x}\,dx \cdot x$$

$$= \int_0^1 \sin x \, dx = [-\cos x]_0^1$$

$$= 1 - \cos 1$$

ملاحظة: $\iint f(x,y)\,dx\,dy$

وكانت f قابلة للفصل الذي يعامد التبث فإن:

$$f(x,y) = g(x) \times h(x)$$

مثال: x و y

نستخدمها عندما لا يكون لدينا مجهول.

$$\Rightarrow \iint xy \, dx\,dy = \int x\,dx \cdot \int y\,dy$$

مثال:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y \, dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{2} \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}[\pi] = \frac{\pi}{4}$$

مثال:

$$\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy$$

$$=\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x}\cdot e^{y}\,dx\,dy$$

$$=\int_1^{\ln 8} e^{y}\left[e^{x}\right]_0^{\ln y}\,dy$$

$$=\int_1^{\ln 8} e^{y}\left[e^{\ln y}-e^{0}\right]dy$$

$$=\int_1^{\ln 8} e^{y}\left(y-1\right)dy$$

نفرض أن:

$u=y-1 \quad u'=1$

$v'=e^{y} \quad \searrow \times \quad v=e^{y}$

$$\Rightarrow\left[(y-1)e^{y}\right]_1^{\ln 8}-\int_1^{\ln 8} e^{y}\cdot 1$$

$$=(\ln 8-1)e^{\ln 8}-\left[e^{y}\right]_1^{\ln 8}$$

$$=8\ln 8-8-e^{\ln 8}-e^{1}$$

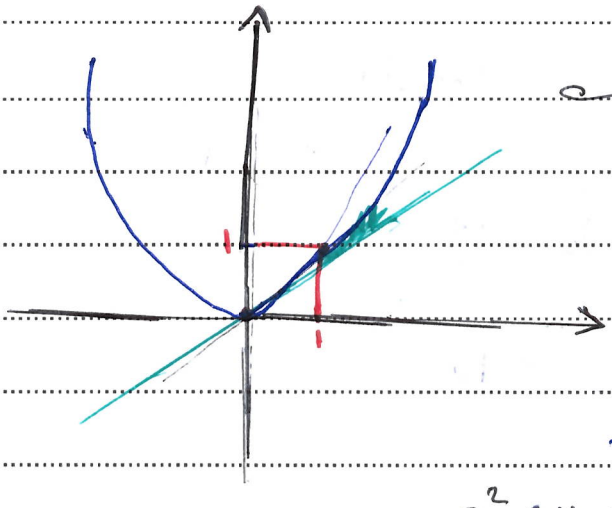
$$=8\ln 8-8-8-e^{1}$$

$$=8\ln 8-e^{1}-16$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مقطع مكافئ

احسب مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى $y=x^2$ والمستقيم $y=x$



لمعرفة حدود التكامل نتابع الحل

حل المعادلة $f(x)=g(x)$

$y=y_1$

$x^2=x \Rightarrow x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$x=0$ أو $x=1$ إما

$x^2 \le y \le x$

لأنها على المجال $[0,1]$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\,dx$$

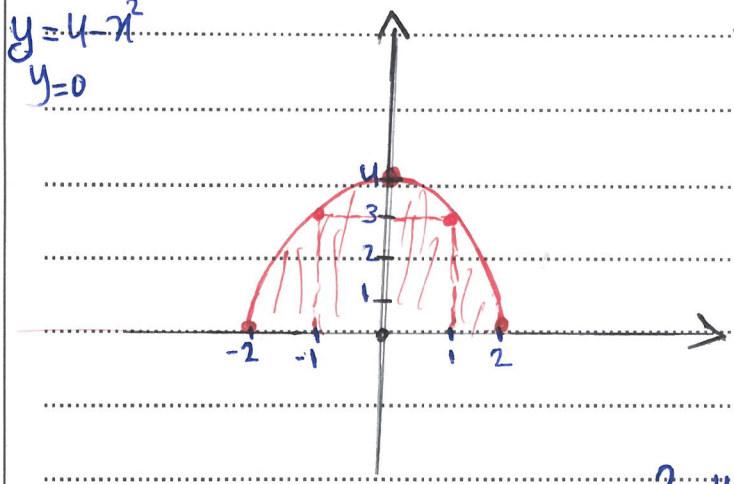
$$\int_0^1 [y]_{x^2}^{x}\,dx$$

$$\int_0^1 x-x^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}-0=\frac{1}{6}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

احسب مساحة الطبع المحدد بمنحنى التابع $y=4-x^2$ ومحور الفواصل $y=0$



$y=4-x^2$					
x	0	1	2	-1	-2
y	4	3	0	3	0

$f(x)=y$

$4-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} dy\,dx = \int_{-2}^{2}[y]_0^{4-x^2}$$

$$=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dy = \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$$

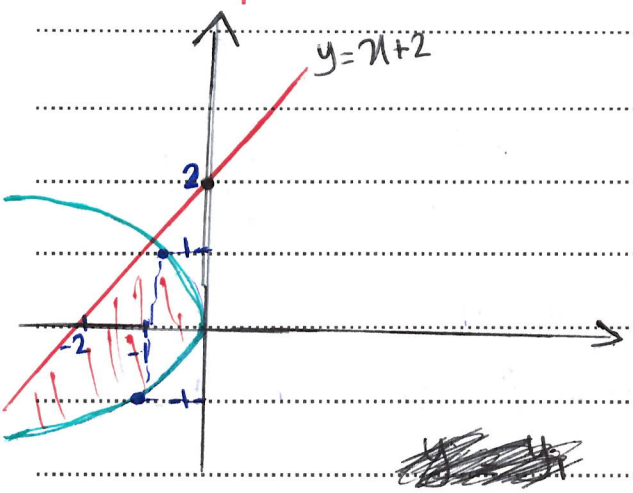
$$=\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)$$

$$=8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}$$

$$=16-\frac{16}{3}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$y=x+2$ المستقيم و $x+y^2=0$ احسب المساحة المحددة بمنحنى الدالة



$x+y^2=0 \Rightarrow x=-y^2$

x	0	-1	1
y	0	+1	-1

$y=x+2$

x	0	-2
y	2	0

$x=-y^2 \quad x=y-2$

$-y^2=y-2$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$y=-2 \qquad y=1$

$-y^2 \leq x \leq y-2$

$$\int_{-2}^{1}\int_{-y^2}^{y-2} dx\,dy = \int_{-2}^{1} [x]_{-y^2}^{y-2}\,dy$$

$$= \int_{-2}^{1} [(y-2)-(-y^2)]\,dy$$

$$= \int_{-2}^{1} [(y-2+y^2)]\,dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{2}-2y+\frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{13}{6}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالدالة $y=\sqrt{4-x^2}$ و $y=2$

و $x=-2$ و $x=2$

$y=\sqrt{4-x^2}$

$4-x^2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x^2$

$\Rightarrow x \leq \pm 2$

$y=\sqrt{4-x^2}$					
x	0	1	2	-1	-2
y	2	$\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	0

ملاحظة

نختار التكامل بين زوجي $y=\sqrt{4-x^2}$ ذا بؤرتين زوجي $\int_0^2$

$\sqrt{4-x^2}$ أصغر قيمة لـ y

2 أكبر قيمة لـ y

$$\Rightarrow 2\int_0^2\int_{\sqrt{4-x^2}}^{2} dy\,dx$$

$$=2\int_0^2 [y]_{\sqrt{4-x^2}}^{2}\,dx$$

$$=2\int_0^2 (2-\sqrt{4-x^2})\,dx$$

ثم يكمل الحل .

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة