كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك تحليلي

المحاضرة : الرابعة /نظري/ د.علي أسد

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

جامعة طرطوس
كلية العلوم
قسم الفيزياء

مقرر: الميكانيك التحليلي
الفصل الرابع: ميكانيك النظرية النسبية
د. علي أسد

ميكانيك النظرية النسبية

<u>الميكانيك النسبي:</u> هو الميكانيك الذي يدرس حالة الجسم المتحرك بسرعة قريبة من سرعة الضوء $v \sim c$.

تدرس هذه الحركة في فراغ رباعي.

توضيح:

الفراغ الثلاثي: $(x\,,y\,,z)$.

الفراغ الرباعي: $(x\,,y\,,z\,,\tau = ict)$.

يعرف الزمن الخاص بالعلاقة الآتية:

$$t_0 = t\sqrt{1-\beta^2}$$

حيث $\beta = \frac{v}{c}$ النسبة بين سرعة الجسيم المدروس وسرعة الضوء.

نميز الحالات الآتية:

$v \sim c$: الجسيمات الأولية (فراغ رباعي).

$v < c$: كل مايتعلق بالذرة والنواة والجزئ لانسبي (وسطي). (فراغ ثلاثي).

$v \ll c$: ميكانيك كلاسيكي (نيوتن). (فراغ ثلاثي).

<u>سؤال (1):</u> أوجد مركبات السرعة في الفراغ الرباعي.

يرمز للسرعة في الفراغ الرباعي بالرمز: u_α ، حيث: $\alpha = 1,2,3,4$.

$$r_\alpha = (x,y,z,\tau) = (r_1, r_2, r_3, r_4)$$

$$dt_0 = \sqrt{1-\beta^2}\,.dt$$

$$u_\alpha = \frac{dr_\alpha}{dt_0}$$

$$\Longrightarrow u_\alpha = \frac{dr_\alpha}{\mathrm{dt}}.\frac{\mathrm{dt}}{dt_0}$$

$$u_x = \frac{d\mathrm{x}}{dt_0} = \frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$u_y = \frac{d\mathrm{y}}{dt_0} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$u_z = \frac{d\mathrm{z}}{dt_0} = \frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$u_\tau = \frac{d\tau}{dt_0} = \frac{d(ict)}{dt} \cdot \frac{dt}{dt_0} = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

سؤال(2): أوجد مركبات التسارع في الفراغ الرباعي.

$$w_\alpha = \frac{du_\alpha}{\mathrm{dt}} \cdot \frac{\mathrm{dt}}{dt_0}$$

$$w_x = \frac{du_x}{dt_0} = \frac{du_x}{\mathrm{dt}} \cdot \frac{\mathrm{dt}}{dt_0}$$

نحسب الآن $\frac{du_x}{\mathrm{dt}}$

$$\frac{du_x}{\mathrm{dt}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{w_x\sqrt{1-\beta^2} - v_x\,\frac{-2\,v\,\frac{\acute{v}}{c^2}}{2\sqrt{1-\beta^2}}}{1-\beta^2}$$

$$= \frac{w_x\sqrt{1-\beta^2} + \frac{v\,.\,\acute{v}}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\,.v_x}{1-\beta^2}$$

$$= \frac{w_x\,(1-\beta^2) + \frac{v\,.\,\acute{v}}{c^2}\,.v_x}{\sqrt{1-\beta^2}(1-\beta^2)}$$

$$= \frac{w_x}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{(v\,.\,\acute{v}).v_x}{c^2(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\mathrm{dt}}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Longrightarrow w_x = \left(\frac{w_x}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{(v\,.\,\acute{v}).v_x}{c^2(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\right).\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$w_x = \frac{w_x}{1-\beta^2} + \frac{(v\,.\,\acute{v}).v_x}{c^2(1-\beta^2)^2}$$

بنفس الطريقة نحسب : w_y و w_z فنجد:

$$w_y = \frac{w_y}{1-\beta^2} + \frac{(v\,.\,\acute{v}).v_y}{c^2(1-\beta^2)^2}$$

$$w_z = \frac{w_z}{1-\beta^2} + \frac{(v\,.\,\acute{v}).v_z}{c^2(1-\beta^2)^2}$$

$$w_\tau = \frac{du_\tau}{\mathrm{dt}} \,.\frac{\mathrm{dt}}{dt_0}$$

$$\frac{du_\tau}{\mathrm{dt}} = \frac{\dfrac{-2\,v\,\dfrac{\acute{v}}{c^2}}{2\sqrt{1-\beta^2}}\,.ic}{1-\beta^2} = \frac{i}{c}\,.\frac{v\,.\,\acute{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$w_\tau = \frac{i}{c}\,.\frac{v\,.\,\acute{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\,.\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{i}{c}\,.\frac{v\,.\,\acute{v}}{(1-\beta^2)^2}$$

<u>سؤال(3):</u> أوجد مركبات الاندفاع (كمية الحركة) في الفراغ الرباعي.

$$P_\alpha = (\vec{P}\,, \vec{P_\tau})$$

$$P_\alpha = m\,.u_\alpha = m\,.\frac{dr_\alpha}{dt_0} \implies P_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$P_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$P_z = \frac{mv_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$P_\tau = m\,.u_\tau = \frac{imc}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

<u>سؤال (4):</u> أوجد معادلة الحركة في ميكانيك النظرية النسبية.

من الطبيعي الآن تعميم معادلة الحركة بالشكل:

$$\frac{dp_\alpha}{dt_0} = \frac{d}{dt_0} mu_\alpha = F_\alpha \ (\alpha = 1,2,3,4) \quad (1)$$

حيث F_α هو متجه معرف في الفراغ رباعي الأبعاد يسمى القوة رباعية الأبعاد، الآن نكتب معادلة الحركة على المحور ox فنجد:

$$\frac{dp_x}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = F_x$$

أو بالشكل:

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = F_x\sqrt{1-\beta^2} \quad (2)$$

يتحول الطرف الثاني من المعادلة (2) إلى القوة $\boldsymbol{F_x}$ (مركبة القوة في الفراغ الثلاثي على المحور ox) عندما $v \ll c$ ولهذا يجب أن يكون:

$$\boldsymbol{F_x} = F_x\sqrt{1-\beta^2} \quad (3)$$

عندئذ توضع المعادلة (2) بالشكل:

$$\boldsymbol{F_x} = \frac{d}{dt}\frac{mv_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$\boldsymbol{F_y} = \frac{d}{dt}\frac{mv_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\boldsymbol{F_z} = \frac{d}{dt}\frac{mv_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

وللحصول على معادلة الحركة على المحور التخيلي τ نبدل P_τ بقيمتها فنجد:

$$\frac{d}{dt}\frac{imc}{\sqrt{1-\beta^2}} = F_\tau\sqrt{1-\beta^2} \quad (4)$$

<u>سؤال (5):</u> ماهو المعنى الفيزيائي لمركبة القوة على المحور $\boldsymbol{\tau}$؟

نضرب المعادلة (1) عددياً بـ u_α فنجد:

$$u_\alpha\frac{d}{dt_0}mu_\alpha = u_\alpha F_\alpha = u_xF_x + u_yF_y + u_zF_z + u_\tau F_\tau = 0 \quad (5)$$

سبب المساواة بالصفر هو أن السرعة والتسارع متعامدان في الفراغ الرباعي

وإذا بدلنا المقادير F_α و u_α بقيمها من العلاقات السابقة فإننا نحصل على المعادلة:

$$\boldsymbol{F_x}\frac{v_x}{1-\beta^2} + \boldsymbol{F_y}\frac{v_y}{1-\beta^2} + \boldsymbol{F_z}\frac{v_z}{1-\beta^2} + F_\tau\frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0 \quad (6)$$

من الواضح أن الحدود الثلاثة الأولى ليست إلا الجداء العددي $\vec{\boldsymbol{F}}.\vec{v}$ في الفراغ الثلاثي، بالاختصار على $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ وضرب الطرفين بـ $\frac{i}{c}$ نجد:

$$F_\tau\sqrt{1-\beta^2} = \frac{i}{c}\left(\vec{\boldsymbol{F}}.\vec{v}\right) \quad (7)$$

المقدار $\vec{\boldsymbol{F}}.\vec{v}$ هو العمل الذي تنجزه القوة $\vec{\boldsymbol{F}}$ في واحدة الزمن (الاستطاعة)، وهكذا ترتبط المركبة F_τ بعمل القوة $\vec{\boldsymbol{F}}$ في الفراغ الثلاثي بالعلاقة:

$$F_\tau = \frac{i}{c}\frac{\left(\vec{\boldsymbol{F}}.\vec{v}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (8)$$

الآن نكتب المعادلة (4) بعد تبديل F_τ بقيمتها من المعادلة (8) بالشكل:

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \left(\vec{\boldsymbol{F}}.\vec{v}\right) = \frac{dA}{dt} \qquad (9)$$

بما أن الطرف الأيمن هو الاستطاعة فمن الطبيعي أن نفرض، انطلاقاً من مفاهيم الميكانيك التقليدي، أن المقدار $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ هو الطاقة الحركية، التي نرمز لها بـ E أي:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (10)$$