كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثالثة

المادة : الكتروديناميك

المحاضرة: السادسة/نظري/كتابة

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

لدينا تغير العزم المغناطيسي M بالحقل المغناطيسي المتجانس ضعيف التغير مع الزمن:

بافتراض أن الجسيم المشحون يدور بتواتر زاوي ω_c في المستوي العمودي على الحقل المغناطيسي عندئذ يتحقق الشرط:

$$T_c \left|\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right| \ll |\vec{B}|$$

نظراً لكون الحقل يتغير مع الزمن فإن تكامل

$$\int \vec{E}\,\partial\vec{L} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\partial\vec{S} \quad \ldots (4,4)$$

نضرب (4,4) بالشحنة q ونفترض أن الكمية $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ تبقى ثابتة خلال زمن لفة واحدة (دور) فنجد أن:

$$q\oint \vec{E}\,\partial\vec{L} = -q\left|\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right| \pi R_c^2 \quad \ldots (4,5)$$

يعين الطرف الأيسر من هذه العبارة بالعمل المسلط على هذا الجسيم المشحون من خلال الحقل الكهربائي خلال لفة واحدة ويساوي تزايد الطاقة الحركية في المستوي $(x\,y)$ لزمن لهذا التزايد $\Delta\varepsilon_1$ عندئذ:

$$\Delta\varepsilon_1 = -q\pi R_c^2\left|\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right| = |q|\,\pi R_c^2\left|\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right| \quad \ldots (4,6)$$

تدل الإشارة السالبة أن الجسيم المشحون شحنته سالبة يتحرك في الاتجاه المعاكس

للاتجاه الموجب في أثناء الكاملة على المنحني المغلق لحساب المشتق $\frac{\partial \mathcal{E}_\perp}{\partial T}$

نلاحظ (4, 6) أن:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\perp}{\partial T} = \frac{\Delta \mathcal{E}_\perp}{T_c} = \frac{|q| \pi R_c^2 \omega_c}{2\pi} \left| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right|$$

$$= \frac{\frac{1}{2} m v_\perp^2}{B} \left| \frac{\partial B}{\partial t} \right| \quad \ldots (4,7)$$

يعين العزم المغناطيسي M لتيار شدته I يسري في عروة مساحتها S:

$$\vec{M} = I \vec{S} \quad \ldots (4,8)$$

علماً أن $\vec{S}$ السطح المتجه لهذه العروة

فإذا كانت الشحنة q تتحرك على محيط عروة دائرية نصف قطرها R_c

$$R_c = \frac{m v_\perp}{|q| B}$$

ودورها

$$T_c = \frac{2\pi R_c}{v_\perp}$$

نجد أن قيمة العزم المغناطيسي M المعين بالمعادلة (4,8) يأخذ الشكل التالي:

$$M = \frac{|q|}{T_c} \pi R_c^2 = \frac{\frac{1}{2} m v_\perp^2}{B} = \frac{\mathcal{E}_\perp}{B} \quad \ldots (4,9)$$

ويمكن كتابة (4,7) بالشكل التالي:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\perp}{\partial T} = M \left| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right| \quad \ldots (4,10)$$

من جهة أخرى نلاحظ أن (4,9) تكتب بالشكل التالي:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\perp}{\partial T} = \frac{\partial (M B)}{\partial t} = M \frac{\partial B}{\partial t} + B \frac{\partial M}{\partial t} \quad \ldots (4,11)$$

بالمقارنة بين (4,10) و (4,11) نلاحظ أن:

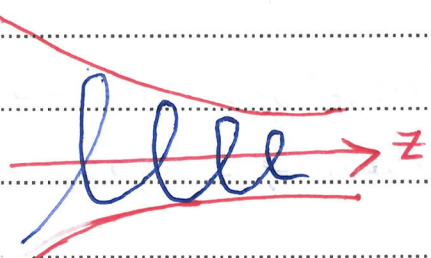
$$\frac{\partial M}{\partial T} = 0 \Rightarrow M = const \quad \ldots (4,12)$$

أي أن العزم المغناطيسي للجسيم المشحون المتحرك بالحقل المغناطيسي متغير ببطء مع مرور الزمن يبقى عزماً ثابتاً

3- قد يتغير العزم المغناطيسي M في الحقل المغناطيسي المستقر ضعيف لا متجانس بالإمكان الحصول على نتيجة مماثلة عند معالجة حركة الجسيم المشحون في حقل مغناطيسي مستقر لكن تتغير ببطء من نقطة إلى نقطة أخرى مجاورة.

إذا كان الحقل المغناطيسي محمول على المحور oz وفي اتجاهه وكانت شدته تتزايد ببطء بازدياد z.

عندئذ تتقارب خطوط الحقل كما هو موضح بالشكل التالي:



ليفرض أن تغير هذا الحقل مهمل من مرتبة (R_c) وهو تغير صغير جداً

$$R_c \left| \frac{\partial B}{\partial z} \right| \ll |\vec{B}| \quad \ldots (4,13)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لنأخذ بالحسبان أن المركبة القطرية للحقل المغناطيسي $\vec{B}$ تكون في هذه الحالة مختلفة عن الصفر لأن الحقل المغناطيسي يتغير على طول المحور (oz) فقد أن معادلة ماكسويل

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

نوجد عندئذ بالإحداثيات الأسطوانية (r, θ, z)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \dots (4,14)$$

من ذلك يتبع

$$\frac{\partial (r B_r)}{\partial r} = -r \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

بإجراء مكاملة مع إهمال تابعية $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ للمتحول r على طول محيط اللفة الواحدة التي نصف قطرها R_c وعملاً للتقريب (4,13) نجد أن:

$$B_r \approx -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

نظراً لأن B_r صغيرة جداً بالمقارنة مع المركبة B_z من أجل جميع قيم $r < R_c$ يكون بإمكاننا وضع

$$|\vec{B}| = B_z$$

أي أن الحقل المغناطيسي يكون بشكل تقريبي محمول على المحور z o فلا يضطر معه إلا زاوية صغيرة عندئذ يمكن معاودة كتابة العبارة السابقة للمركبة B_r بالشكل التالي:

$$B_r \approx -\frac{r}{2} \left| \frac{\partial |B|}{\partial z} \right| \quad \dots (4,15)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

فإذا كانت مركبة الحقل B_r مختلفة عن الصفر كان الجسيم المشحون المتحرك بالحقل المغناطيسي في المستوي $(x\ y)$ مركة دائرية بتواتر زاوي ω_c هذا ضمناً بدوره إلى تأثير قوة محولة على المحور oz تعمل على انقاص مركبة سرعة هذا الجسيم على المحور المذكور بالتالي تعمل هذه القوة على إعاقة الحركة في اتجاه تزايد الحقل المغناطيسي أو بكلام آخر تعمل هذه القوة على طرد الجسيم في اتجاه تناقص الحقل عند انزياحه من المناطق التي يكون فيها الحقل ضعيفاً إلى المناطق التي يكون فيها الحقل أكثر شدة.

بالإمكان تعيين القوة $\vec{F_c}$ بالشكل التالي مع ملاحظة

$$\vec{v}\wedge\vec{B}=\left[(\vec{v_\perp}+\vec{v_{//}})\wedge\vec{B}\right]=\vec{v_\perp}\wedge\vec{B}=\vec{v_\perp}\wedge(\vec{B_z}+\vec{B_r})$$

$$=\vec{v_\perp}\wedge\vec{B_z}+\vec{v_\perp}\wedge\vec{B_r}$$

$$\vec{F}=q(\vec{v}\wedge\vec{B})=q(\vec{v_\perp}\wedge\vec{B_z})+q(\vec{v_\perp}\wedge\vec{B_r})$$

$$=\vec{F_1}+\vec{F_2}$$

حيث تعين $\vec{F_1}$ القوة التي تعمل على تحريك الجسيم المشحون في اتجاه تزايد الحقل المغناطيسي إما $\vec{F_2}$ القوة التي تعمل على إعاقة مركة الجسيم في اتجاه تزايد الحقل وتبعاً لهذه القوة $\vec{F_2}$ تحقق مركبة سرعة الجسيم على المحور oz معادلة الحركة:

$$m\frac{\partial v}{\partial t}=|q|\,v_\perp B_r$$

باستخدام المعادلة (4.15) وملاحظة أن:

$$r\simeq R_c=\frac{m v_\perp}{|q|B}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

والأخذ بالحسبان (4.9) نجد أن:

$$m\frac{\vec{\partial} v_z}{\partial t} = -\frac{|q|}{2} v_\perp R_c \frac{\vec{\partial} B}{\partial z} = -M\frac{\vec{\partial} B}{\partial z} \quad \dots (4.16)$$

نضرب (4.16) بـ v_z حيث $v_z = \frac{\partial z}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} m v_z^2\right) = -M\frac{\partial B}{\partial t}$$

ونظراً لأن الطاقة الحركية الكلية للجسيم المشحون تبقى محفوظة في أثناء حركته بالحقل المغناطيسي:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} m v_\perp^2 + \frac{1}{2} m v_z^2\right) = 0$$

فإننا نلاحظ أن العبارة السابقة تأخذ الشكل:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} m v_\perp^2\right) = M\frac{\partial B}{\partial t}$$

فإذا أخذنا بالحسبان (4.9) سنستطيع كتابة بالشكل التالي:

$$\frac{\partial}{\partial t}(MB) = M\frac{\partial B}{\partial t}$$

ولا يتحقق ذلك إلا إذا كان M ثابت

تابعا لاغرانج وهاملتون للجسيمات المتحركة بالحقل الكهرطيسي:

من المعلوم في الميكانيك التحليلي أن معادلة لاغرانج تأخذ الشكل التالي:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \dots (6.1)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

على أن تابع لاغرانج هو L وأن الاحداثيات المعممة q_k وهي عدد درجات الحرية

يعين تابع لاغرانج على الشكل التالي:

$$L = T(\dot{q}_k) - u(q_k) \quad \cdots (6,2)$$

(T: طاقة حركية، u: طاقة كامنة)

هذا وقد تكون الطاقة الكامنة تابعة للاحداثيات المعممة q_k وكذلك السرعات $\dot{q}_k$ في هذه الحالة يعين تابع لاغرانج بالشكل التالي:

$$L = T(\dot{q}_k) - u(q_k, \dot{q}_k)$$

عندئذ تأخذ معادلة لاغرانج الشكل التالي:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial u}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial u}{\partial q_k} = 0 \quad \cdots (6,3)$$

من أهم مثال على هذه الحالة حركة جسيم مشحون في الحقل الكهرطيسي ومن المعلوم أن:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{aligned}\right\} \cdots (6,4)$$

من الممكن الحصول على معادلة الحركة لهذا الجسيم من (6,3)

إذا كانت الطاقة الكامنة معينة بالعبارة

$$u = q\varphi - q\vec{A}\vec{u} \quad \cdots (6,5)$$

عندئذ بوضع (6,5) في (6,3) يصبح لدينا:

علماً أن: $T = \frac{1}{2} m v^2$

$$m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q\vec{\nabla}\varphi + q\vec{\nabla}(\vec{A}\vec{u}) \quad \cdots (6,6)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

افترضنا أن السرعة ثابتة نلاحظ أن:

$$\nabla(\vec{A}.\vec{v}) = (\vec{u}.\vec{B})\vec{A} + \vec{u}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})$$

بأخذ المشتق:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{A}$$

بوضع هذه المعطيات بالمعادلة (6,6)

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -q\vec{\nabla}\varphi - q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + q\vec{v}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})$$

$$= q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$$

يتضح من ذلك أن الطاقة الكامنة تعطى بالشكل المعطى بالمعادلة (6,5) أو بالتالي تابعا لاغرانج نأخذ الشكل التالي:

$$L = T - u = \frac{1}{2}mv^2 - q(\varphi - \vec{A}\vec{v})$$

تأسيسا على ذلك نجد أن الاندفاع المعمم $\vec{p}$ يعين بالشكل

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A} = p + q\vec{A}$$

الاندفاع: $p = mv$

أما تابع هاملتون يكون من الشكل:

$$H = p.v - L = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi = \frac{1}{2m}(p - qA)^2 + q\varphi$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z