كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي٢

المحاضرة : السابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

التمرين 1: ليكن $V=C[0,1]$ مجموعة التوابع الحقيقية المستمرة على المجال $[0,1]$ إذا V تشكل فضاء شعاعي فوق $\mathbb{R}$ بالنسبة للعمليات التالية:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$(\lambda f)(x)=\lambda f(x) \quad \forall a\in\mathbb{R}$.

① أثبت أن العلاقة $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ تمثل جداء داخلي على V.

② أوجد صورة الشعاع $h=ax+b$

③ أوجد الزاوية بين الشعاعين $f(x)=x-1$ و $g(x)=3x-1$

الحل: ①

① $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$

$=\int_0^1 g(x)\,f(x)\,dx=\langle g,f\rangle=\langle g,f\rangle$.

② $\langle \lambda f+\beta h, g\rangle=\int_0^1 (\lambda f+\beta h)(x)\,g(x)\,dx$

$=\int_0^1 [(\lambda f)(x)+(\beta h)(x)]\,g(x)\,dx$

$=\int_0^1 [\lambda f(x)+\beta h(x)]\,g(x)\,dx$

$=\int_0^1 \lambda f(x)\,g(x)\,dx+\int_0^1 \beta h(x)\,g(x)\,dx$

$= \alpha \int_0^1 f(x) g(x)\,dx + \beta \int_0^1 h(x) g(x)\,dx$

$= \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle h, g \rangle$

(3) $\int_0^1 f(x) f(x)\,dx = \int_0^1 f^2(x)\,dx \geq 0$

$\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)\,dx = 0$

$\Leftrightarrow f^2(x) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$

$-\boxed{2}$

$\|h\|^2 = \langle h, h \rangle = \int_0^1 (ax+b)^2\,dx = \int_0^1 (ax^2 + 2axb + b^2)\,dx$

$= \left[\frac{a^2 x^3}{3} + abx^2 + b^2 x \right]_0^1 = \frac{1}{3}a^2 + ab + b^2$

$\Rightarrow \|h\| = \sqrt{\frac{1}{3}a^2 + ab + b^2}$

$\therefore$ (3)

$\|g\| = \sqrt{3 - 3 + 1} = 1.$

$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{3} - 1 + 1} = \sqrt{\frac{1}{3}}.$

$\langle f \cdot g \rangle = \int_0^1 (x-1)(3x-1)\,dx$

$= \int_0^1 (3x^2 - 4x + 1)\,dx = \left[x^3 - 2x^2 + x \right]_0^1 = 0$

$\cos(\theta) = \frac{\langle f \cdot g \rangle}{\|f\| \cdot \|g\|} = \frac{0}{1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التمرين 2: ليكن $V=\mathbb{R}^4$ وليكن W الفضاء الجزئي المعرف كما يلي

$$W=\{(x,y,z,t);\ x+y+z-t=0,\ x+y-z=0\}$$

أوجد المتمم العمودي لـ W وجد الأساس له بالنسبة لفضاء الجداء الداخلي العادي

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x+y+z+t=0 \end{array}\right\} \Rightarrow z=x+y,\ t=-2x-2y$$

ومنه

$$W=\{(x,y,x+y,-2x-2y);\ x,y\in\mathbb{R}\}$$

وبالتالي فإن

$$\{e_1(1,0,1,-2),\ e_2(0,1,1,-2)\}$$

أساس لـ W

$$W^{\perp}=\{(x,y,z,t);\ \langle(x,y,z,t),(1,0,1,-2)\rangle=0\}$$

$$\cap\ \langle(x,y,z,t),(0,1,1,-2)\rangle=0;\ x,y,z,t\in\mathbb{R}\}$$

$$\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\ x+z-2t=0 \text{ و } y+z-2t=0\}$$

$$=\{(-z+2t,-z+2t,z,t);\ z,t\in\mathbb{R}\}$$

وبالتالي فإن

$$\{(-1,-1,1,0),(-2,-2,0,1)\}$$

التمرين 3: ليكن $V=P_2$ فضاء كثيرات الحدود الحقيقية التي درجتها أصغر أو تساوي 2 مزوداً بالجداء الداخلي

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

استخدم القاعدة القانونية $(1, x, x^2)$ وطريقة غرام شميت لبناء قاعدة نظامية للتعامد لـ V

$y_1 = x_1 = 1$

$\|y_1\|^2 = \langle y_1, y_1 \rangle = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1 \Rightarrow \|y_1\| = 1$.

$z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = 1$.

$y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1$

$= x - \langle x, 1 \rangle 1 = x - \int_0^1 x\,dx = x - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= x - \frac{1}{2}$.

$\|y_2\|^2 = \langle y_2, y_2 \rangle = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx$

$= \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 d(x-\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}\left[(x-\frac{1}{2})^3\right]_0^1$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] = \frac{1}{12}$.

$\Rightarrow \|y_2\| = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

$z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}(2x-1)$

$y_3 = x_3 - \langle x_3, z_1 \rangle z_1 - \langle x_3, z_2 \rangle z_2$

$\langle x_3, z_1 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\langle x_3, z_2 \rangle z_2 = \sqrt{3}\int_0^1 x^2(2x-1)\,dx = \sqrt{3}\int_0^1 2x^3 - x^2\,dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 = \sqrt{3}\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$y_3 = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{3}(2x-1)$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} - x + \frac{1}{2} = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

$$\|y_3\|^2 = \langle y_3, y_3 \rangle = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36})\,dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{36}x\right]_0^1 = \frac{1}{180}$$

$$\|y_3\| = \sqrt{\frac{1}{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}.$$

$$z_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

بالتالي فإن $\{1, \sqrt{3}(2x-1), 6\sqrt{5}(x^2-x+\frac{1}{6})\}$ قاعدة زرنامية التعامد.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين 4: أوجد المتمم العمودي للفضاء الجزئي W من الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ المولد بالمتجهات:

نظامية التعامد:

$X_1 = (1, -2, 1)$ ، $X_2 = (1, -4, -1)$

ثم أوجد قاعدة نظامية التعامد $W^\perp$

الحل:

$$W^\perp \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \langle (x,y,z)(1,-2,1) \rangle = 0 \right.$$
$$\left. \text{و} \langle (x,y,z), (1,-4,-1) \rangle = 0 \right\}$$

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , x - 2y + z = 0 \text{ و } x - 4y - z = 0 \right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ x - 4y - z = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{array}$$

$z = x \longrightarrow y = -x$ ، $y = -3x$

$$W^\perp = \left\{ (-3x, -x, x) ; x \in \mathbb{R} \right\}$$

وبالتالي فإن $\{(-3, -1, 1)\}$ قاعدة لـ $W^\perp$

$$\left\{ \left(\frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}} \right) \right\}$$

قاعدة نظامية التعامد لـ $W^\perp$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين 5: ليكن $V=\mathbb{R}^4$ وليكن W الفضاء الجزئي من V المعرف بالعلاقة

$$W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 ; x+y+z-t=0 \text{ و } x+y-z=0\}$$

أوجد المتمم العمودي $W^\perp$ ثم جد قاعدة نظامية للمتمم.

$$x=\alpha, y=\beta \Rightarrow z=\alpha+\beta,\ t=2\alpha+2\beta$$

فيكون

$$W=\{(\alpha,\beta,\alpha+\beta,2\alpha+2\beta) ; \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

ومنه

$$\{x_1=(1,0,1,2), x_2=(0,1,1,2)\}.$$

قاعدة لـ W.

$$W^\perp=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 ; \langle (x,y,z,t), x_i\rangle=0 \text{ من أجل } i=1,2\}.$$

$$=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 ; x+z+2t=0 \text{ و } y+z+2t=0$$

نضع $t=\beta$ ، $z=\alpha$ $\Rightarrow$ $y=-\alpha-2\beta$.

$$x=-\alpha-2\beta.$$

$$W^\perp=\{(-\alpha-2\beta,-\alpha-2\beta,\alpha,\beta) ; \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

قاعدة لـ $W^\perp$ $\{x_1=(-1,-1,1,0)$

$x_2=(-2,-2,0,1)\}$

$$z=\frac{x_1}{\|x_1\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$$

$$y_2=x_2-\langle z_2,z_1\rangle z_1=(-2,-2,0,1)-\frac{4}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$$

$$\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{4}{3},1\right).$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\|y_2\| = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}+\frac{9}{9}} = \frac{\sqrt{33}}{3}$$

$$Z_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{33}}, \frac{-2}{\sqrt{33}}, \frac{-4}{\sqrt{33}}, \frac{3}{\sqrt{33}}\right).$$

بالتالي Z_1, Z_2 قاعدة ذاتية للمصفوفة المعطاة.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z