كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي٢

المحاضرة : السادسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

1- ليكن $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ مؤثر "خطي" معرف بالشكل

$f(x,y,z) = (x+y, 2y, y+z)$

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية المؤثر الخطي f

الحل: لنوجد مصفوفة f بالنسبة للقاعدة القانونية

$\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$

$f(1,0,0) = (1+0, 2(0), 0+0) = (1,0,0) = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$

$f(0,1,0) = (0+1, 2(1), 1+0) = (1,2,1) = 1e_1 + 2e_2 + 1e_3$

$f(0,0,1) = (0+0, 2(0), 0+1) = (0,0,1) = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

من أجل $\lambda_1 = 1$ نجد

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل الموافق $x_2 = 0$

نفرض $x_1 = \alpha \Rightarrow x_2 = \beta$ حيث $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\}$

TEL:0931497960 - (جامعة طرطوس) كلية العلوم - مكتبة A to Z

E_{λ_1} أساس $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

من أجل $\lambda_2 = 2$ فإن

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

الحالة المرافقة المصغرة

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0\\ x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3$$

نفرض $x_3 = x \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x$

$$E_{\lambda_2} = \left\{\begin{bmatrix}x\\x\\x\end{bmatrix}; x \in \mathbb{R}\right\}$$

E_{λ_2} أساس $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

تمرين 2: قطر إن أمكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix}3 & -1 & -6\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda - 3 & -1 & -6\\ -2 & \lambda - 1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda + 3\end{vmatrix}$$

$$1\left[6(\lambda - 1)\right] + (\lambda + 3)\left[(\lambda - 3)(\lambda - 1) - 2\right]$$

$$6\lambda - 6 + (\lambda + 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$$

$$= \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda^2 + \lambda - 12\lambda + 6\lambda - 6 + 3$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda+1)$

$= (\lambda+1)^2(\lambda-3)$

القيم الذاتية $\lambda = -1$, $\lambda = 3$

من أجل $\lambda = -1$

$$\left.\begin{array}{l} -4x-y-6z=0 \\ -2x-2y=0 \\ x+2z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} L_2-2L_3 \\ L_1+4L_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} -4x-y-6z=0 \\ 3y-6z=0 \\ -y+2z=0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -4x-y-6z=0 \\ y-2z=0 \end{array}$$

$x = -\frac{1}{4}(y+6z)$ ← $y=2x$ ← نفرض $z=x$

$= -\frac{1}{4}(2x+6x) = -\frac{1}{4}(8x) = -2x$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} -2x \\ 2x \\ x \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim E_{\lambda_1} = 1 \neq 2$ بالتالي A غير قابلة للتوطير.

تعريف: أي مصفوفة غير شاذة P بحيث أن $P^{-1}AP$ تكون من أجل المصفوفة A ثابتة لمصفوفة توطيرية واحدة.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ مثال: أوجد A^n

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 , \lambda_2 = -1$

من أجل $\lambda_1 = 1$ ← $-x-2y=0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$y = x$ ، $x = -2x$

$E_{\lambda 1} = \left\{ \begin{bmatrix} -2x \\ x \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$

$E_{\lambda 1}$ أساس لـ $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

من أجل $\lambda_2 = -1$

$\left.\begin{matrix} 2x = 0 \\ -x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 0$

$E_{\lambda 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$

$E_{\lambda 2}$ قاعدة لـ $\left\{ V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$P^{-1} A P = B \Rightarrow A = B \cdot P^{-1} \cdot P$

$A^n = (P \cdot B \cdot P^{-1})(P \cdot B \cdot P^{-1}) \cdots (P \cdot B \cdot P^{-1})$

$= P B^n P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{(-1)^n}{2} & (-1)^n \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1+(-1)^n}{2} & (-1)^n \end{bmatrix}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z