كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل متجهات

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

المشتقة الموجهة لدالة سلمية: بفرض $y=f(x)$ دالة حاولنا أن نجد الاشتقاق باتجاه ox هو $y'=\frac{df}{dx}$ أما من أجل دالة $f(x,y,z)$ واتجاه ما $\vec{u}(l,m,n)$ فمن أجل ① $\frac{df}{du}=\nabla f\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

حيث u متجه واحدة.

ملاحظة: في حالة $\vec{u}=\vec{i}$ $\Rightarrow \frac{df}{di}=\frac{\partial f}{\partial x}$

برهان العلاقة: إذا عرفنا نقطة $M(x,y,z)$ نعطي المتجاورة $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ بحيث $MM_1 // \vec{u}$ ونريد بسيط

هنا نعرف العلاقة:

$$\lim_{M_1\to M}\frac{\Delta f}{MM_1}=\lim_{\Delta\vec{u}\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}$$

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

ومنه

$$\frac{\Delta f}{\Delta\vec{u}}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta\vec{u}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta u}$$

لكنه $\frac{\Delta x}{\Delta u}=l=\cos\alpha$ ، $\frac{\Delta y}{\Delta u}=m$ ، $\frac{\Delta z}{\Delta u}=n$ $\Rightarrow$

$$\frac{\Delta f}{\Delta u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot l+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot m+\frac{\partial f}{\partial z}n.$$

مثال: $f = x^2y - 5yz^2 + 3xz$

أوجد مشتق f في النقطة $M(1,2,-3)$ باتجاه الواصلة بين $M_1(2,3,-1)$ إلى $M_2(4,4,1)$

الحل:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (2,1,2)$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{df}{d\overrightarrow{M_1M_2}}\Big|_M = \frac{df}{d\vec{u}} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f = (2xy+3z,\ x^2-5z^2,\ -10z+3x)$$

$$\vec{\nabla} f\Big|_M = (-5,-44,63)$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -44 & 63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = -\frac{10}{3} - \frac{44}{3} + \frac{126}{3} - \frac{72}{3} - 24$$

الحقل المحافظ: نقول عنه إنه كان محافظ إذا كان تدرج الحقل يساوي أو إذا وجد f بسيط نسميه كمون الحقل $\vec{\nabla} f = \vec{V}$

صيغة الحرف اللازم والكافي ليكون V محافظ هو أنه يكون $\mathrm{Rot}(\vec{V}) = 0$ أي:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial x},\quad \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x},\quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: أثبت أن $\vec{V} = (y^2 e^x + 2z e^x, 2y e^x - z^2, 2e^x - 2yz)$ محافظ وجد دالة الكمون.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial y} &= 2e^x \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} &= 2ye^x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{y}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial z} &= 2e^x \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} &= 2e^x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V_y}{\partial z} &= -2z \\ \frac{\partial V_z}{\partial V_y} &= -2z \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y}$$

إذن V محافظ.

$$\vec{\nabla} f = \vec{V} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = V_x \longrightarrow f_1 = \int V_x \, dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = V_y \longrightarrow f_2 = \int V_y \, dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = V_z \longrightarrow f_3 = \int V_z \, dz$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f = f_1 \cup f_2 \cup f_3$

$f_1 = \int y^2 e^x + 2z e^x dx = y^2 e^x + 2z e^x$

$f_2 = \int 2y e^x - z^2 dy = y^2 e^x - z^2 y$

$f_3 = \int 2e^x - 2yz dz = 2e^x z - yz^2$

$\Rightarrow \boxed{f = y^2 e^x + 2z e^x - z^2 y}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z