
# المحاضرة الثانية عشرة

# (نظري)

**المحتوى العلمي للمحاضرة يتضمن مايلي:**

- **التكامل المحدد وخواصه.**
- **بعض الأمثلة المتعلقة بهذه التكاملات.**

**تعريف:** لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ ولتكن $F(x)$ دالة أصلية لـ $f$ على المجال $[a,b]$ فإنّ

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

**مثال:**

$$\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx = \left[x-\frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3}$$

**مثال:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxcos^2xdx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-sinx)cos^2xdx = \left[-\frac{1}{3}cos^3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

**مثال:**

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [arcsin(x)]_0^{\frac{1}{2}} = arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \ arcsin(0) = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

**مثال:** أوجد قيمة التكامل

$$I = \int_{-1}^{2} x\sin(x^2)dx$$

**الحلّ:** نفرض أن $t = x^2$ فيكون $dt = 2xdx$ و منه $dx = \frac{dt}{2x} = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

عندما $x = -1$ فإن $t = 1$ و عندما $x = 2$ فإن $t = 4$ نبدل في التكامل المعطى نجد:

$$I = \int_1^4 \sqrt{t}\sin t\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_1^4 \sin t\,dt = \frac{1}{2}[-\cos t]_1^4 = \frac{1}{2}[-\cos 4 + cos1]$$

**مثال:** أوجد قيمة التكامل

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}$$

نفرض $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$ و منه $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ و $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

عندما $x = 0$ فإن $t = 0$ و عندما $x = \frac{\pi}{2}$ فإن $t = 1$ نبدل في التكامل المعطى:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+3} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{3}}arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

**مثال:** أوجد قيمة التكامل

$$I=\int_0^1 x^2 arctanx\, dx$$

**الحلّ:** نكامل بطريقة التجزئة

نفرض $u=arctan\,x$ فيكون $du=\frac{dx}{1+x^2}$ و $dv=x^2dx$ فيكون $v=\frac{1}{3}x^3$ و منه:

$$I=\left[\frac{1}{3}x^3arctan\,x\right]_0^1-\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3\times\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3arctan\,x\right]_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$I=\left[\frac{1}{3}x^3arctan\,x\right]_0^1-\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}ln(2)$$

**تعريف:** التكامل

$$\int_a^x f(x)dx$$

هو دالة أصلية للتابع $f(x)$ تنعدم عند $a$.

**مثال:** أوجد دالة أصلية للتابع $f(x)=1-x$ تنعدم عند $x=1$

$$F(x)=\int_1^x f(x)dx=\int_1^x(1-x)dx=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_1^x=-\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}$$

**ملاحظة:** إذا كانت $u$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير $x$ و $f$ دالة مستمره فإنّ

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^u f(t)dt\right)=f(u)\frac{du}{dx}$$

**مثال:** أوجد

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^3}\frac{dt}{1+t}\right)$$

**الحلّ:** $f(t)=\frac{1}{1+t}$ و $u(x)=x^3$ بالتالي

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^3}\frac{dt}{1+t}\right)=f(x^3)\times 3x^2=\frac{3x^2}{1+x^3}$$

**مثال:** أنجز التكامل

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2}(1-\ln(cost))dt\right)$$

**الحلّ:** $f(t)=1-\ln(cost)$ و $u(x)=x^2$ بالتالي

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2}(1-\ln(cost))dt\right)=f(u)\frac{du}{dx}=f(x^2)\times 2x=2x(1-\ln(cosx^2))$$

## الخواص الأساسية للتكامل المحدد

**.1**

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$$

**.2**

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

.3

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx\,;\alpha \in \mathbb{R}$$

.4

$$\int_a^b (f(x)+g(x)-h(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx$$

.5 علاقة شال

إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للمكاملة على المجال $[a,b]$ و $c \in \,]a,b[$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx$$

.6 إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للمكاملة على المجال $[a,b]$ و $f(x) \geq 0$ على هذا المجال بالتالي

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

.7 لتكن $g(x)$ و $f(x)$ دالتين قابلتين للمكامله على المجال $[a,b]$ و

$f(x) \geq g(x)$

عندئذٍ

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

.8

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

.9

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\left(\int_a^b (f(x))^2dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2dx\right)}$$

.10

$$M \geq f(x) \geq m$$

بالتالي

$$M\int_a^b dx \geq \int_a^b f(x)dx \geq m\int_a^b dx$$

بالتالي

$$M(b-a) \geq \int_a^b f(x)dx \geq m(b-a)$$

هذه الخاصة ممكن أن تعطينا قيمه تقديرية للتكامل.

**.11** $f(x)$ دالة زوجية على المجال $[-a,a]$ بالتالي

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

**.12** $f(x)$ دالة فردية على المجال $[-a,a]$ بالتالي

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

بالتالي $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$
عندئذ

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$$

**.13** $f(x)$ دالة دورية ودورها $T$ فإنّ

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx$$

حيث $n \neq 0$ عدد صحيح.

**أمثلة:**

**مثال:** بما أنّ $|x|$ دالة زوجية على المجال $[-1,1]$

$$\int_{-1}^{1} |x|dx = 2\int_{0}^{1} |x|dx = 2\int_{0}^{1} xdx = 1$$

**مثال:**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sinxdx = 0$$

وذلك لأنّ $sinx$ دالة فردية على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

**مثال:**

$$\int_{0}^{2} |1-x^2|dx = \int_{0}^{1} (1-x^2)dx + \int_{1}^{2} (x^2-1)dx == \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2 = 2$$

**مثال:** أوجد قيمة التكامل

$$\int_{0}^{3} |1-x|dx$$

القيمة التي تعدم $1-x$ هي $1$ عندئذٍ نجد

$$\int_{0}^{3} |1-x|dx = \int_{0}^{1} (1-x)dx + \int_{1}^{3} -(1-x)dx = \int_{0}^{1} (1-x)dx + \int_{1}^{3} (x-1)dx = \frac{5}{2}$$

**نظرية القيمة الوسطى:**

**مبرهنة:** لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ عندئذٍ يوجد $c \in ]a,b[$ بحيث يكون لدينا

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = (b-a)f(c)$$

**ملاحظة:** نُسمي

$$\frac{1}{(b-a)}\int_{a}^{b} f(x)dx = f(c)$$

بالقيمة الوسطى للتابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$

**مثال:** أوجد القيمة الوسطى للتابع $f(x)=x^2$ على المجال $[2,4]$.

**الحلّ:**

$$f(c)=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{(4-2)}\int_2^4 f(x)dx=\frac{28}{3}$$

وإذا أردنا حساب $c$ فإننا نكتب

$$f(c)=\frac{28}{3}\Longrightarrow c^2=\frac{28}{3}\Longrightarrow c=\sqrt{\frac{28}{3}}\in\,]2,4[$$

**مثال:** أوجد القيمة الوسطى للتابع $f(x)=sin(ax)$ على المجال $\left[0,\frac{\pi}{a}\right]$

**الحلّ:**

$$f(c)=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{a}-0\right)}\int_0^{\frac{\pi}{a}} sin(ax)dx=\frac{a}{\pi}\left[-\frac{cosax}{a}\right]_0^{\frac{\pi}{a}}=\frac{2}{\pi}$$

**مثال:** أوجد القيمة الوسطى للتابع $f(x)=\sqrt{x}$ على المجال $[0,9]$، ثم أوجد عدد من المجال $[0,9]$ حيث تأخذ الدالة $f(x)$ عندها قيمتها الوسطى

**الحلّ:**

$$f(c)=\frac{1}{(9-0)}\int_0^9 f(x)dx=2\Longrightarrow\sqrt{c}=2\Longrightarrow c=4$$

-----------------------------------------