كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : فيزياء للرياضيات

المحاضرة : اسئلة المقرر/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

الفيزياء الإحصائية

**أسئلة المحاضرة الأولى (1)**

| **السؤال الأول:** | | |
|---|---|---|
| • اكتب تابع كثافة برنولي.<br>• برهن أنه تابع كثافة احتمالي.<br>• استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية: $\overline{\Delta n^2}, \overline{n^2}, \bar{n}$ . | • اكتب تابع كثافة بواسون.<br>• برهن أنّهُ تابع كثافة احتمالي.<br>• استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية: $\overline{\Delta x^2}, \overline{x^2}, \bar{x}$ . | • اكتب تابع كثافة غوص الطبيعي.<br>• برهن أنّهُ تابع كثافة احتمالي.<br>• استنتج قيم المقادير الإحصائية التالية: $\overline{\Delta x^2}, \overline{x^2}, \bar{x}$ . |

**السؤال الثاني:**

- استنتج انطلاقاً من تابع كثافة برنولي تابع كثافة بواسون وذلك باستخدام التقريبات المناسبة.
- استنتج انطلاقاً من تابع كثافة بواسون تابع كثافة غوص الطبيعي وذلك باستخدام التقريبات المناسبة.
- برهن أنَّ قاعدة التباديل ذات التوزع المسبق تعطى بالعلاقة:

$$C^N_{n_1,n_2,n_3,......,n_m} = \binom{N}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots \ldots \ldots \ldots n_m!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{m} n_i!}$$

**أسئلة المحاضرة الثانية (2)**

**السؤال الأول: اجب باختصار عن كلّ مما يلي:**

- ما هو علم الترموديناميك؟
- ما هو مقياس الدراسة في الترموديناميك؟
- عرف النظام الترمودينامكي موضحاً ذلك بالرسم المناسب.
- ماهي أنواع النظام الترموديناميكي؟
- عرف متحول(تابع) الحالة الترموديناميكي وما الفرق بينه وبين تابع الطريق؟
- عرف التحول الترموديناميك بشكلٍ عام، ثمَّ عدد أنواعه مع شرح كلٍّ منها.
- اكتب نص كل مبدأ من مبادئ الترموديناميك موضحاً ذلك بالعلاقات الرياضة المناسبة إن لزم الأمر.
- اكتب قانون بولتزمان الإحصائي موضحاً عن ماذا يعبر ومبيناً أين تكمن أهميته ثم وضح تطابقه مع المبدأين الثاني والثالث في الترموديناميك.

**السؤال الثاني:**

- ما المقصود بالكمونات الترموديناميكية، ثمَّ أذكر الكمونات الأكثر شيوعاً.
- مستعيناً بمربع الطاقة الذي يربط بين المتحولات والكمونات الترموديناميكة، **أوجد ما يلي:**
  1. أوجد قيم المتحولات الترموديناميكية.
  2. اوجد علاقات ماكسويل
  3. اوجد العلاقة بين الكمونات الترموديناميكية المتجاورة.

**أسئلة المحاضرة الثالثة (3)**

**السؤال الأول: اجب باختصار عن كلّ مما يلي:**

- وضح أهمية الفيزياء الإحصائية وسبب وجودها؟
- وضح الفرق بين مفهومي الحالات الماكروية والحالات الميكروية التي يمكن لمكونات النظام المدروس أن تشغلها.
- اشرح باختصار مفهوم الفراغ الطوري وماذا يصف، مبينا عدد الأبعاد التي ينكون منها في الحالات التالية:
  1. النظام يتكون من جسيم واحد.
  2. النظام يتكون من N جسيم.
- عرف عنصر حجم الفراغ الطوري $d\Gamma$، ثم استنتج حجوم العناصر التالية: $d\Gamma(p), d\Gamma(\vartheta), d\Gamma(\varepsilon)$
- عرف درجة التحلل ثم اكتب العلاقات التي تربط بين عنصر حجم فراغ الاندفاع والسرعة والطاقة الطوري كلاً على حدا مع درجة التحلل.

**السؤال الثاني:**

استنتج عبارة رقم الإنشغال لتوزع ماكسويل-بولتزمان في الحالة الأكثر احتمالاً $N_{i(max)}$ بدلالة مضروبي لاغرانج.

**السؤال الثالث:**

- وضح مفهوم تابع التحاص باختصار.
- كيف تصبح علاقة رقم الأنشغال في حالة التوزع المنفصل بدلالة تابع التحاص؟
- استنتج قيمة تابع التحاص في حالة التوزع المستمرة.

**السؤال الرابع: (مسألة)**

يوزع جسيمان (A,B) متمايزان على سويتين للطاقة: $\boldsymbol{\varepsilon_1 = \varepsilon_0}$ و $\boldsymbol{\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0}$ حيث: $\boldsymbol{\varepsilon_0 = \mathrm{KT}}$. ومتحللتين بالشكل: $\boldsymbol{g_1 = g_2 = 2}$. والمطلوب:

1. اوجد عدد الحالات الماكروية الممكنة ومثلها، ثم أوجد طاقة كل منها.
2. اوجد عدد حالات التوزع الميكروية الممكنة والموافقة لكل حالة توزع ماكروي، مبيناً من هي الحالة الأكثر احتمالاً منها.

**السؤال الخامس: (مسألة):**

جملة مكونة من 1000 جسيم متمايز وموزعة على ثلاث سويات للطاقة: $\boldsymbol{\varepsilon_1 = \mathrm{KT}(J)}$ و $\boldsymbol{\varepsilon_2 = 2\mathrm{KT}(J)}$ و $\boldsymbol{\varepsilon_3 = 3\mathrm{KT}(J)}$. ومتحللة بالشكل: $\boldsymbol{g_1 = g_2 = 2}$ & $\boldsymbol{g_3 = 1}$. والمطلوب:

1. ارسم هيكل السويات والتحللات للملة، ثم أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الممكنة.
2. أي من الحالات التالية يعتبر مقبول، ثم بين فيما إذا كان المقبول منها طبيعي أم غير طبيعي:

$$\boldsymbol{(800, 200, 2), (300, 500, 200), (600, 300, 200)}$$

3. أوجد أرقام انشغال الحالة الأكثر احتمالاً: $\boldsymbol{(\overset{\varepsilon_1}{\widetilde{N_1}}, \overset{\varepsilon_2}{\widetilde{N_2}}, \overset{\varepsilon_3}{\widetilde{N_3}})_{max}}$، ثم تحقق من حالتها فيما إذا كانت طبيعية. ثم احسب طاقة هذه الحالة بدلالة $\mathbf{KT}$ علماً أنَّ: $\boldsymbol{e^{-1} = 0.05, e^{-2} = 0.135, e^{-3} = 0.368}$.
4. برهن أنَّ الوزن الإحصائي للحالة الأكثر احتمالاً أكبر من الوزن الإحصائي للحالة: $\boldsymbol{(N_1 + 1,\ N_2 - 2, N_3 + 1)}$.

## أسئلة المحاضرة الرابعة (4)

**السؤال الأول:**

- استنتج عبارة تابع كثافة الطاقة التالية: $\mathrm{f}(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\pi}(\mathbf{KT})^{3/2}}$ لماكسويل – بولتزمان.
- ثمَّ اثبت أنَّ $\mathrm{f}(\varepsilon)$ تابع كثافة احتمالي.
- ثم أوجد المقادير التالية: $\bar{\varepsilon}, \overline{\varepsilon^2}, \overline{\Delta\varepsilon^2}$.

**السؤال الثاني:**

- استنتج تابع كثافة السرعة المطلقة: $\mathrm{f}(\vartheta) = 4\pi(\frac{\alpha}{\pi})^{3/2}.\, e^{-\alpha\vartheta^2}$ لماكسويل – بولتزمان. $(\alpha = 2m/KT)$ .
- ثمَّ اثبت أن $\mathrm{f}(\vartheta)$ تابع كثافة احتمالي.
- اوجد السرعة الأكثر احتمالا $\vartheta_H$.
- أوجد المقادير التالية: $\bar{\vartheta}, \overline{\vartheta^2}, \overline{\Delta\vartheta^2}$ بدلالة السرعة الأكثر احتمالا.
- مثل المقادير السابقة على منحني تابع الكثافة.
- مثّل بيانيا تابع كثافة السرعة عند ثلاث درجات حرارة مختلفة مع مناقشة النتائج والتفسير.

**السؤال الثالث:**

- استنتج تابع كثافة السرعة الموجهة التالية: $\mathrm{f}(\vartheta) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha\vartheta_x^2}$ لماكسويل – بولتزمان. $(\alpha = 2m/KT)$ .
- اثبت أنَّ: $\mathrm{f}(\vartheta)$ تابع كثافة احتمالي.
- أوجد المقادير التالية: $\overline{\vartheta_x}, \overline{\vartheta_x}^2, \overline{\Delta\vartheta_x}^2$.

## أسئلة المحاضرة الخامسة (5)

**السؤال الأول:**

- استنتج العلاقة التي نحسب من خلالها عدد الجسيمات $N_0$ في مجال محدد للسرعة المطلقة $(0 \to \vartheta_0)$.
- **تطبيقات:**

1. اوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجالات المعطاة بدلالة السرعة الأكثر احتمالاً $\vartheta_H$ التالية: $N_0(0 \to \vartheta_H), N_0(0 \to 0.8\,\vartheta_H)$.
   علماً أنَّ: $Er(1) = 0.8427; Er(0.8) = 0.7421$.
2. تأكد من أن عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $\boldsymbol{N_0}(0 \to \infty)$ هو كامل عدد جسيمات الجملة $N$.
3. اوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $\boldsymbol{N_0}(\vartheta_H \to \infty)$.
   علماً أنَّ: $Er(1) = 0.8427$.
4. اوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $\boldsymbol{N_0}(\vartheta_H \to 1.6\,\vartheta_H)$.
5. علماً أنَّ: $Er(1) = 0.8427; Er(1.6) = 0.9763$.

**السؤال الثاني:**

- استنتج العلاقة التي نحسب من خلالها عدد الجسيمات $N_0$ في مجال محدد للسرعة الموجهة $(0 \to \vartheta_0)$.
- **تطبيقات:**

1. اوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجالات المعطاة بدلالة السرعة الأكثر احتمالاً $\vartheta_H$ التالية: $N_0(0 \to \vartheta_H), N_0(0 \to 0.8\,\vartheta_H)$.
   علماً أنَّ: $Er(1) = 0.8427;\ Er(0.8) = 0.7421$.
2. تأكد من أن عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $\boldsymbol{N_0}(0 \to \infty)$ هو كامل عدد جسيمات الجملة $N$.
3. اوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $\boldsymbol{N_0}(\vartheta_H \to \infty)$.
   علماً أنَّ: $Er(1) = 0.8427$.
4. اوجد عدد جسيمات الغاز الكلاسيكي التي تقع سرعها المطلقة في المجال $\boldsymbol{N_0}(\vartheta_H \to 1.6\,\vartheta_H)$.
   علماً أنَّ: $Er(1) = 0.8427, Er(1.6) = 0.9763$.

**السؤال الثالث:**

- اشرح باختصار المفاهيم التالية: النسخة و الأنسامبل والطاقم.
- اكتب علاقات تابع التحاص لكل منها.
- **مسألة:**
  جملة مكونة من جسيمين متمايزين $A, B$ موزعة على ثلاث سويات للطاقة بالشكل:
  $$\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = \varepsilon, \varepsilon_3 = 2\varepsilon \quad ; \ \varepsilon = KT$$
  ومتحللة بالشكل: $g_1 = g_2, g_3 = 2$
  **والمطلوب:**

1) اوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي مع تمثيلها، وطاقة كلٍّ منها.
2) أوج نسب أرقام انشغال السويات، ثم بين نوع التوزع الحاصل.
3) أوجد تحاصي الجملة والطاقم (بدلالة $e$)، ثمَّ استنتج من ذلك كافة الاوزان الاحصائية والحالة الأكثر احتمالاً.
4) تحقق من صحة نتائجك بحساب طاقم الجملة.

**السؤال الخامس:**

بفرض أن تابع التحاص: $z = \sum_i g_i . e^{\beta\varepsilon_i}$. *والمطلوب: اوجد باستخدام مفهوم تابع كثافة الاحتمال* $p_i = \frac{g_i}{z} . e^{\beta\varepsilon_i}$ *المقادير التالية:* $\bar{\varepsilon}, \overline{\varepsilon^2}, \overline{\Delta\varepsilon^2}$.

**السؤال السادس:**

- اوجد علاقة المشتقة $\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$ انطلاقاً من المشتقة $\frac{\partial}{\partial\beta}$.
- *بفرض أنَّ:* $z = CV(2\pi mKT)^{3/2}$. *اوجد ما يلي:*

**I.** $\ln z$ ومشتقاته بالنسبة لدرجة الحرارة والحجم.

**II.** برهن على ضوء المشتقات المشتقة $\frac{\partial}{\partial\beta}$ و $\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$ *أنَّ:*

$$\bar{\varepsilon} = \left.\frac{\partial \ln z}{\partial\beta}\right|_V = \frac{3}{2}KT, \overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{z}\left.\frac{\partial^2 z}{\partial\beta^2}\right|_V = \frac{15}{4}(KT)^2, \overline{\Delta\varepsilon^2} = \left.\frac{\partial^2 \ln z}{\partial\beta^2}\right|_V = \frac{3}{2}(KT)^2$$

## أسئلة المحاضرة السادسة (6)

**السؤال الأول:**

اوجد التوابع الناتجة عن المبدأ الأول في الترموديناميك بدلالة تابع التحاص للجملة Z بالشكل التالي:

- الطاقة الداخلية للجملة: $U = NKT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}\Big|_V$.
- العمل المبذول على الجملة: $\delta w_r = -\mathrm{NKT}[dLn\ Z]_T$.
- كمية الحرارة: $\delta Q = NKT.d\left[Ln\ Z + T\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\Big|_V\right]$.
- الأنتروبية: $S = NK\left[Ln\ Z + T\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\Big|_V\right]$.
- الضغط: $\mathrm{P} = \mathrm{NKT}\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\Big|_T$.
- الأنتالبية: $\mathrm{I} = NKT\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\Big|_P$.

**السؤال الثاني:**

اوجد التوابع الناتجة عن المبدأ الثاني في الترموديناميك بدلالة تابع التحاص للجملة بالشكل التالي:

- الأنتروبية:
  - ✓ في حالة الجسيمات غير المتمايزة (شبه الكلاسيكية): $S^* = NK\left[T\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\Big|_V + Ln\frac{Z}{N} + 1\right]$.
  - ✓ في حالة الجسيمات المتمايزة (الكلاسيكية): $S = NK\left[Ln\ Z + T\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\Big|_V\right]$.
- طاقة هلمهولتز:
  - ✓ في حالة الجسيمات غير المتمايزة (شبه الكلاسيكية): $F^* = -NKT\left[Ln\frac{Z}{N} + 1\right]$.
  - ✓ في حالة الجسيمات المتمايزة (الكلاسيكية): $F = -NKTLn\ Z$ .
- طاقة جيبس:
  - ✓ في حالة الجسيمات غير المتمايزة (شبه الكلاسيكية): $G^* = -NKT\left[Ln\frac{Z}{N}\right]$.
  - ✓ في حالة الجسيمات المتمايزة (الكلاسيكية): $G = -NKT[Ln\ (Z) - 1]$ .

**السؤال الثالث:**

- **برهن صحة العلاقات التالية:**

| | |
|---|---|
| .1 $\mathrm{U} = \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta}\Big|_V$ | .2 $\mathrm{U} = \mathrm{F} - \mathrm{T}\frac{\partial F}{\partial \beta}\Big|_V$ |
| .3 $\mathrm{U} = -T^2\frac{\partial(F/T)}{\partial T}\Big|_V$ | .4 $\mathrm{C_V} = -\mathrm{T}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{T}^2}\Big|_\mathrm{V}$ |
| .5 $\mathrm{C_V} = \mathrm{k}\beta^2\frac{\partial^2(\beta \mathrm{F})}{\partial \beta^2}\Big|_\mathrm{V}$ | .6 $\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}} = \mathrm{K}\beta^2\frac{\partial}{\partial \beta}$ |

**السؤال الرابع:**

جملة مكونة من $N$ جسيم كلاسيكي موزعة على عدد محدود من سويات الطاقة غير المتحللة ($g_i = 1$)، وطاقاتها تتبع العلاقة: $\varepsilon_i = i\varepsilon\ ;\ \ i = 0,1,2, \dots\dots\dots$.
**والمطلوب:**

1. احسب تحاص الجملة $Z$ بدلالة مضروب لاغرانج β.
2. احسب متوسط طاقة الجسيم $\bar{\varepsilon}$.
3. احسب $\bar{\varepsilon}$ تحت الشرط: $\varepsilon_0 \ll KT$. وماذا تستنتج؟

## المحاضرة السابعة (7)

**<u>السؤال الأول:</u>**

جملة مكونة من $N$ جســـيم مهتز بشـــكل توافقي، كتلة كل منها $m$، وتهتز فيبعد واحد $ox$، وبتواتر ثابت $\omega = cte$، وكل منها يخضـــع لقوة إرجاع من الشـــكل: $F = -k_s x \;\; ; \;\; k_s = m\omega^2$. فإذا علمت أن الضياع في الطاقة معدوم(معزولة). **<u>المطلوب:</u>**

1. اوجد تحاص الجملة إذا كانت المهتزات جسيمات كلاسيكية.
2. اوجـد تحـاص الجملـة اذا كـانـت المهتزات جســيمـات كميـة، وأن ســويـات الطـاقـة $\varepsilon_n$ غير متحللـة $(g_n = 1)$، وأن طـاقـة كـل منهـا: $\varepsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \;\; ; \;\; n = 0,1,2, \dots \dots \dots$.
3. برهن تطابق تحاص الجملتين (الكلاسيكية والكمية) تحت الشرط: $\hbar\omega \ll KT$ (الطاقة الاشعاعية اقل بكثير من الطاقة الحرارية).

**<u>السؤال الثاني:</u>**

جملة مكونة من $N$ جسيم كلاسيكي مهتز بشكل توافقي، كتلة كل منها $m$، وتهتز فيبعد واحد $ox$، وبتواتر ثابت $\omega = cte$، وكل منها يخضع لقوة إرجاع من الشكل: $F = -k_s x^3 \;\; ; \;\; k_s = m\omega^2$. فإذا علمت أن الضياع في الطاقة معدوم(معزولة). **<u>المطلوب:</u>**

1. اكتب تحاص الجملة بالشكل: $Z = A|\beta|^q$، حيث: $A = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{4})(\frac{4}{k_s})^{1/4}\sqrt{\frac{2\pi m}{h^2}}, \;\; |\beta| = \frac{1}{KT}, \;\; q = -\frac{3}{4}$.
2. أوجد: الطاقة الحرة $F$، والضغط $P$، والأنتروبية $S$، والطاقة الداخلية $U$، والسعة الحرارية $C_V$.

**<u>السؤال الثالث:</u>**

**<u>مسألة:</u> جملة مكونة من $N$ جسيم $(N \gg 1)$، موزعة على ثلاث سويات للطاقة بالشكل: $\varepsilon = KT \;\; ; \;\; \varepsilon_1 = KT, \varepsilon_2 = 2KT, \varepsilon_3 = 3KT$، ومتحللة بالشكل: $g_1 = N, \;\; g_2 = g_3 = 2$. والمطلوب:**

1. أوجد عدد حالات التوزع الماكروي الإجمالي (العدد بدلالة N فقط)، ثم أوجد طاقة الحالة لكلٍّ منها.
2. أوجد طاقة الحالة الماكروية$\left(\overbrace{N-1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{1}^{\varepsilon_2}, \overbrace{0}^{\varepsilon_3}\right)$، ثم أوجد الوزن الإحصائي بدلالة N، في الحالات التالية:
   - a. الجسيمات كلاسيكية (متمايزة).
   - b. الجسيمات بوزونات (غير متمايزة).
   - c. الجسيمات فيرميونات (غير متمايزة).
   - **<u>تطبيق:</u>** بفرض أن $N = 2$، احسب القيم الرقمية للأوزان الإحصائية في الحالات $(a, b, c)$ السابقة ومثلها على سويات الطاقة.
3. بفرض أنَّ الجسيمات متمايزة، أوجد أرقام إنشغال الحالة الأكثر احتمالا $(\overbrace{N_1}^{\varepsilon_1}, \overbrace{N_2}^{\varepsilon_2}, \overbrace{N_3}^{\varepsilon_3})_{max}$ بدلالة العدد N و تابع التحاص $Z$. ثمَّ تحقق من pحالة التوزع الحاصل (بعد التأكد من أنَّ: $N = N_1 + N_2 + N_3$) وذلك من خلال إيجاد نسب أرقام الإنشغال للسويات.

**<u>السؤال الرابع:</u>**

جملة مكونة من $N$ من الجسيمات المتمايزة .فإذا علمت أن دفوعها ترتبط بطاقاتها بالعلاقة: $\varepsilon = c|P|$. حيث: $c$ سرعة الضوء.

1. أوجد تحاص الجملة $Z$>
2. أوجد: الطاقة الحرة $F$، والضغط $P$، والأنتروبية $S$، والطاقة الداخلية $U$، والسعة الحرارية $C_V$.