كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بحوق عمليات

المحاضرة : **السادسة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

طريقة السمبلكس

هي أسلوب تم تطويره لحل مسائل البرمجة الخطية و تطبيق هذه الطريقة يؤدي إلى واحد من الحالات التالية :

حل أمثل محدود ـ حل أمثل غير محدود ـ لا يوجد حل ممكن للمسألة

تتلخص طريقة سمبلكس بالتالي :

1- تحويل القيود الهيكلية إلى معادلات بإضافة أو طرح متغيرات مقحمة غير سالبة .

2- اختيار حل مبدئي أساسي ومسموح به ويكون هذا الحل على الأغلب هو نقطة الأصل حيث نختار قيمة المتغيرات المقحمة كمتغيرات أساسية لا صفرية وقيمة متغيرات القرار غير الأساسية صفرية .

3- عند كل مرحلة من مراحل الحل نختبر أمثلية الحل الذي لدينا فإذا كان هو الحل الأمثل تنتهي الطريقة و إذا لم يكن نختار حل آخر أفضل منه .

القاعدة التي تستخدم لاختبار أمثلية الحل

1 تعتمد على إشارة معاملات المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف بعد كتابتها بدلالة المتغيرات غير الأساسية ،

ولدينا حالتان :

دالة تعظيم ـ دالة تصغير

① دالة الهدف دالة تعظيم: بهذه الحالة إشارة معاملات المتغيرات غير الأساسية يجب أن تكون كلها سالبة في دالة الهدف وذلك لأنه بزيادة أي من المتغيرات فإن قيمة دالة الهدف سوف تتناقص.

② دالة الهدف دالة تصغير: بهذه الحالة إشارة معاملات المتغيرات غير الأساسية يجب أن تكون كلها موجبة في دالة الهدف وذلك لأنه لو زادت أي من المتغيرات بعد ذلك فإن قيمة دالة الهدف سوف تزداد.

2. عند الانتقال من حل إلى آخر أفضل فإن أحد المتغيرات غير الأساسية سيصبح متغيراً أساسياً ويطلق عليه اسم المتغير الداخل وفي مقابل ذلك فإن متغيراً أساسياً سيصبح غير أساسي و سيطلق عليه اسم المتغير الخارج

و القاعدة التي على أساسها نختار المتغير الداخل و الخارج هي:

المتغير الداخل: نختاره بحيث يعمل على تحسين دالة الهدف نحو الأفضل، فإذا كان المطلوب هو إيجاد أكبر قيمة لدالة الهدف و كانت جميع معاملات المتغيرات غير الأساسية بها موجبة نختار ذو أكبر معامل موجب، و إذا كان المطلوب هو إيجاد أصغر قيمة لدالة الهدف نختار المتغير ذو أكبر معامل سالب.

المتغير الخارج: هو ذلك المتغير الأساسي الذي سيصبح غير أساسي أي قيمته ستصبح صفر وعلى هذا نختار المتغير الأساسي الذي ستصبح قيمته صفراً قبل غيره عندما تزداد قيمة المتغير الداخل.

3. عند بلوغنا إلى حل أساسي ممكن ولكنه ليس حلاً أمثل فإننا نعيد الخطوات نفسها لنصل إلى حل آخر أساسي ممكن

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ونختبر أمثليته ونبقى نعيد نفس الخطوات بإدخال متغيرات غير أساسية وإخراج أخرى أساسية حتى نصل إلى إحدى الحالات الثلاثة:

حل أمثل محدود - حل أمثل غير محدود - لايوجد حل أمثل

* في هذا القسم سنطبق طريقة السيمبلكس لحل مسائل البرمجة الخطية التي ستكون القيود فيها (أصغر أو يساوي ≤)

مثال أوجد قيمة x_1 و x_2 التي تجعل دالة الهدف:

$f(x) = 3x_1 + 5x_2$ أكبر ما يمكن بشرط أن:

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

و $x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$

الحل 1- نحول القيود الهيكلية إلى معادلات:

(1) ---

$$\begin{cases} x_1 + s_1 = 4 \\ x_2 + s_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18 \end{cases}$$

و $s_1, s_2, s_3 \geq 0$

2- إيجاد حل مبدئي أساسي ممكن:

متغيرات غير أساسية $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

متغيرات أساسية $s_3 = 18$, $s_2 = 6$, $s_1 = 4$

3- اختبار أمثلية الحل:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لدينا دالة الهدف $f(x) = 3x_1 + 5x_2$ بدلالة المتغيرات غير الأساسية
تحوي جميع المعاملات للمتغيرات الأساسية مومية بالتالي
الحل غير أمثل.

المتغير الداخل: هو المتغير غير الأساسي ذو أكبر معامل موجب
في دالة الهدف. المتغيرات غير الأساسية هنا x_1 و x_2
ومعاملاتها 5 و 3 على الترتيب، بالتالي x_2 هو المتغير الداخل.

المتغير الخارج: لدينا من (1) و $x_1 = 0$:

$$S_1 = 4$$
$$S_2 = 6 - x_2$$
$$S_3 = 18 - 2x_2$$
$$S_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 6$$
$$S_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 9$$

بالتالي الذي يصل إلى الصفر أسرع هو S_2 عندما x_2
تزداد ومنه S_2 هو المتغير الخارج.

2) أصبح المتغيرات الأساسية S_1, x_2, S_3
والمتغيرات غير الأساسية x_1, S_2

1- (2)
$$\begin{cases} S_1 = 4 - x_1 \\ x_2 = 6 - S_2 \\ S_3 = 18 - 3x_1 - 2(6 - S_2) \end{cases}$$

2- الحل الأساسي الممكن الجديد:

$$x_1 = 0 \quad , \quad S_2 = 0$$
$$S_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 6 \quad , \quad S_3 = 6$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3- اختبار أمثلية الحل :

تصبح دالة الهدف بدلالة المتغيرات غير الأساسية :

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 = 3x_1 + 5(6 - S_2)$$

$$f(x) = 3x_1 - 5S_2 + 30$$

وبما دالة الهدف من أجل الحل الأساسي الممكن الجديد $f(x) = 30$

دالة الهدف تحوي أمثال x_1 موجبة بالتالي الحل غير أمثل

ونبحث عن حل أفضل .

المتغير الداخل : هو x_1 لأن أمثاله موجبة

المتغير الخارج : من (2) و $S_2 = 0$:

x_2 ليس لها علاقة بـ x_1

$$x_2 = 6$$

$$S_3 = 6 - 3x_1$$

$S_1 = 0 \Longrightarrow x_1 = 4$

$S_3 = 0 \Longrightarrow x_1 = 2$ بالتالي S_3 هو المتغير الخارج

3 أصبح المتغيرات الأساسية S_2 ، x_1 ، S_1

و المتغيرات غير الأساسية S_3 و S_2

1-

$$S_1 = 4 - \frac{1}{3}(6 - S_3 + 2S_2)$$

$$x_1 = \frac{1}{3}(6 - S_3 + 2S_2)$$

$$x_2 = 6 - S_2$$

(3) ---

$$\begin{cases} S_1 = 2 + \frac{1}{3}S_3 - \frac{2}{3}S_2 \\ x_2 = 6 - S_2 \\ x_1 = 2 - \frac{1}{3}S_3 + \frac{2}{3}S_2 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2- الحل الأساسي الممكن الجديد : $S_3 = 0$ ، $S_2 = 0$

$S_1 = 2$ ، $x_2 = 6$ ، $x_1 = 2$

3- اختبار أمثلية الحل :

دالة الهدف تصبح بدلالة المتغيرات غير الأساسية :

$$f(x) = 30 - 5S_2 + 3\left(2 - \frac{1}{3}S_3 + \frac{2}{3}S_2\right)$$

$$f(x) = 36 - 3S_2 - S_3$$

أمثال المتغيرات غير الأساسية جميعها سالبة في دالة الهدف

بالتالي الحل الجديد هو الحل الأمثل :

$x_1 = 2$ ، $x_2 = 6$ ، $S_1 = 2$ ، $S_2 = 0$ ، $S_3 = 0$

$f(x) = 36 - 0 - 0 = 36$

مثال أوجد قيمة x_1 و x_2 التي تجعل دالة الهدف $f(x) = 3x_1 - 2x_2$ أصغر ما يمكن بشرط :

$3x_1 + 4x_2 \leq 20$

$5x_1 + x_2 \leq 12$

و $x_1 \geq 0$ ، $x_2 \geq 0$

الحل 1- تحويل القيود إلى معادلات :

$3x_1 + 4x_2 + S_1 = 20$

$5x_1 + x_2 + S_2 = 12$

$$\begin{cases} S_1 = 20 - 3x_1 - 4x_2 \\ S_2 = 12 - 5x_1 - x_2 \end{cases} \quad (1)$$

2- لإيجاد حل مبدئي أساسي ممكن : $x_2 = 0$ ، $x_1 = 0$

$S_1 = 20$ ، $S_2 = 12$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3 ـ اختبار أمثلية الحل :

دالة الهدف $f(x) = 3x_1 - 2x_2$ تحوي أمثال x_2 سالبة بالتالي ليس حل أمثل.

x_2 متغير الداخل :

من (1) و نضع $x_1 = 0$:

$S_1 = 20 - 4x_2 \Rightarrow S_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$

$S_2 = 12 - 2x_2 \Rightarrow S_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 6$

بالتالي S_1 هو متغير الخارج :

2 المتغيرات الأساسية S_2 و x_2

و المتغيرات غير الأساسية S_1 و x_1

1 ـ (2) ---
$$\begin{cases} x_2 = 5 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}S_1 \\ S_2 = 2 - \frac{7}{2}x_1 + \frac{1}{2}S_1 \end{cases}$$

2 ـ حل أساسي ممكن : $S_1 = 0$ و $x_1 = 0$

$S_2 = 2$ و $x_2 = 5$

3 ـ اختبار أمثلية الحل :

دالة الهدف تصبح بدلالة المتغيرات غير الأساسية

$f(x) = \frac{9}{2}x_1 + \frac{1}{2}S_1 - 10$

أمثال المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف جميعها موجبة و بما أن الدالة دالة تصغير بالتالي الحل الأمثل هو الحل الأمثل :

$S_2 = 2$ ، $S_1 = 0$ ، $x_1 = 0$ ، $x_2 = 5$

$f(x) = 3(0) - 2(5) = -10 < 0$

فالمسألة ليس لها حل.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: بما أننا وصلنا إلى الحل الأمثل و $f(x) < 0$
بالتالي المسألة السابقة ليس لها حل.

ملاحظة: ما قدمناه سابقاً هو طريقة السيمبلكس في الصورة الجبرية ويمكن تسهيل هذه الطريقة إلى الصورة الجدولية كما يلي:

مثال: مرة أخرى لنأخذ المثال التالي:
أوجد قيم x_1 و x_2 التي تعظم دالة الهدف $f(x) = 3x_1 + 5x_2$
بشرط أن:
$x_1 \leq 4$
$x_2 \leq 6$
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$
و $x_2 \geq 0$ ، $x_1 \geq 0$.

الحل ① نحول المتباينات إلى مساويات (معادلات):
$x_1 + S_1 = 4$
$x_2 + S_2 = 6$
$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$
حيث: $f(x) = 3x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$
فيكون جدول سيمبلكس كما يلي:

المتغيرات الأساسية ⇓	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	الثوابت	θ
S_1	1	0	1	0	0	4	$\frac{4}{0}$
S_2	0	①	0	1	0	6	$\frac{6}{1} = 6$ ← أصغر قيمة بعمود θ
S_3	3	2	0	0	1	18	$\frac{18}{2} = 9$
$-f(x)$	3	5	0	0	0	0	

↑ أعظم قيمة سطر $-f(x)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

② الحل المبدئي الأساسي هو المتغيرات الأساسية المبينة في العمود الأول يساوي مقابلها من عمود الثوابت و الباقي هي متغيرات غير أساسية و قيمها صفر ، أي من الجدول لدينا الحل المبدئي الأساسي :

$x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $S_1 = 4$ ، $S_2 = 6$ ، $S_3 = 18$

و قيمة الدالة $f(x)$ هي صفر

③ لاختبار مثالية الحل ننظر من السطر الأخير إذا كان يحوي قيم موجبة بالتالي الحل غير مثالي (أي سطر $f(x) -$) و هي أمثال المتغيرات بدالة الهدف .

④ ننتقل لإيجاد حل أفضل و ذلك باختيار المتغير الداخل و الخارج .

هنا المتغير الداخل هو المتغير المقابل لأكبر عدد موجب من السطر الأخير أي من مثالنا هذا هو x_2 .

و لاختيار المتغير الخارج نقسم عمود الثوابت على عمود x_2 و نختار أصغر القيم فيكون المقابل من السطر (أي المقابل للعنصر الأصغر من المتغيرات الأساسية) هو المتغير الخارج .

فيكون هنا المتغير الخارج هو S_2 .

إن تقاطع العمود مع السطر نسميه العنصر المحوري و العمود هو العمود المحوري و السطر هو السطر المحوري .

في جدول السمبلكس الجديد :

يتم تحويل عناصر الجدول السابق وفق القواعد التالية :

a- بالنسبة للصف المحوري ينقل إلى الجدول الجديد بعد قسمة كل من عناصره على العنصر المحوري .

b- بالنسبة للعمود تصبح جميع عناصره أصفاراً ماعدا العنصر المحوري

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الذي يأخذ قيمة تساوي 1.

c- بالنسبة لباقي العناصر التي لا تقع في الصف المحوري أو العمود المحوري فإن:

العنصر الجديد = العنصر القديم − (العنصر المقابل بالعمود المحوري × العنصر المقابل بالصف المحوري) / العنصر المحوري

المتغيرات الأساسية ↓	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	الثوابت	θ
S_1	1	0	1	0	0	4	4
x_2	0	1	0	1	0	6	—
S_3	3	0	0	−2	1	6	2
$-f(x)$	3	0	0	−5	0	−30	

مثلاً العنصر (S_1, x_1) الجديد $= 1 - \frac{0 \times 0}{1} = 1$

وهكذا

أي الحل هنا هو $S_3 = 6$ ، $x_2 = 6$ ، $S_1 = 4$ ، $S_2 = 0$ ، $x_1 = 0$

عمود المتغيرات الأساسية يساوي مقابلها من عمود الثوابت

والباقي أصفار وقيمة دالة الهدف:

$$-f(x) = 0 - \frac{6 \times 5}{1} = -30$$

نختبر مثالية الحل بالنظر إلى سطر الأمثال لدالة الهدف نجده يحوي قيمة موجبة وهي مقابلة لـ x_1 بالتالي الحل السابق غير أمثل ونختار x_1 متغير الداخل.

ثم نملأ العمود θ بقسم عناصر عمود الثوابت على مقابلاتها من عمود x_1 ونختار أصغر القيم فيكون المتغير الخارج S_3،

والجدول الجديد:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	الثوابت
S_1	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	0	1	0	6
x_1	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
$-f(x)$	0	0	0	-3	-1	-36

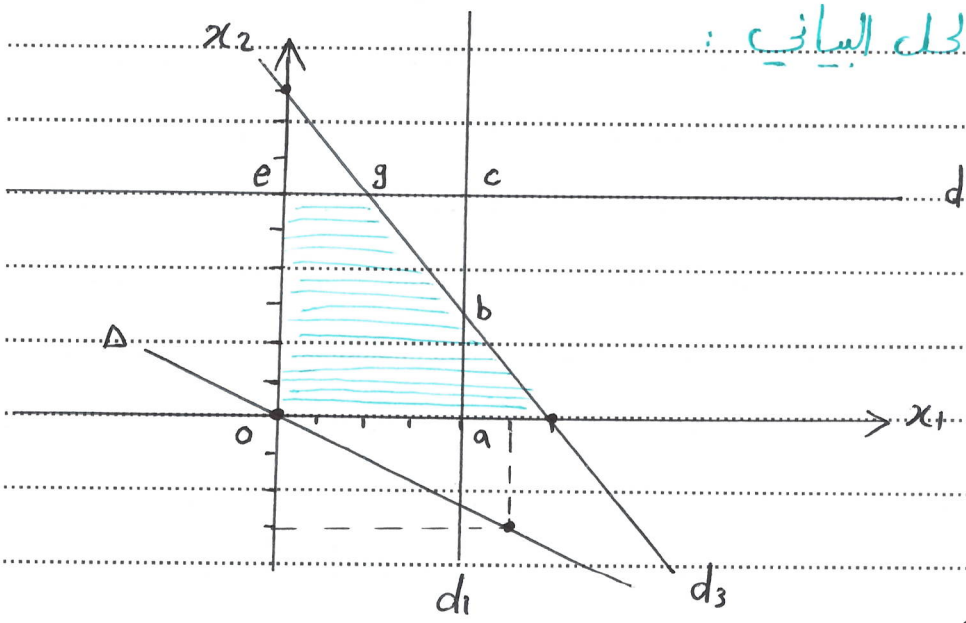
الحل الجديد $S_3 = 0$ ، $S_2 = 0$ ، $S_1 = 2$ ، $x_2 = 6$ ، $x_1 = 2$

وقيمة دالة الهدف $f(x) = 36$ وهو الحل الأمثل

لأن السطر الأخير لا يحوي قيم موجبة

$f(x) = 3(2) + 5(6) = 36$

وهذا يتطابق مع الحل البياني :



$d_1 : x_1 = 4$

$d_2 : x_2 = 6$

x_1	0	6
x_2	9	0

$d_3 : 3x_1 + 2x_2 = 18$

x_1	0	5
x_2	0	-3

$\Delta : 3x_1 + 5x_2 = 0$

أجزاء نقطة يقطعها المستقيم Δ مع المضلع oabge هي g وهي تقاطع d_3 مع d_2 ← بالحل المشترك نجد (2,6) الحل الأمثل ، $f(2,6) = 36$